Junia- HEI
HEI 3 – Classe 311/352

EPREUVE UE AUTOMATISATION

Durée : 2 heures
Date : 15/11/2022
Conditions : Avec documents et avec calculatrice

Attention la page 4 du sujet est à rendre avec votre copie

ASSERVISSEMENT D'UN VERIN HYDRAULIQUE

Nous allons étudier l'asservissement en position d'un vérin qui doit gérer le déplacement d'un tiroir.

Le vérin est piloté à l'aide d'un servo-distributeur et possède les caractéristiques suivantes :

- M=50 kg masse de l'équipage (tiroir + vérin),
- f=250 N/m/s résistance due aux frottements visqueux,
- K=112,5 N/m raideur hydraulique du vérin,
- S_1=200 cm^2 surface du piston de la chambre d'admission

La position du vérin, notée $y(t)$, est fonction du débit d'huile, noté $q(t)$, à l'entrée de la chambre d'admission du vérin.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse de petit déplacement autour d'un point de fonctionnement (position particulière d'équilibre).

Après calcul,

- L'équation temporelle donnant le déplacement $y(t)$ en fonction du débit $q(t)$ est telle que :
$$M.\frac{d^2y(t)}{dt^2} = K.\int_0^t \frac{q(\tau)}{S_1}.d\tau - K.y(t) - f.\frac{dy(t)}{dt}$$

- Le servo-distributeur délivre un débit d'huile $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $U_e(t)$ tel que :
$$q(t) = K_e.U_e(t) \text{ avec } K_e = 4.10^{-2} m^3/s.V$$

- Le détecteur de position délivre une tension $U_s(t)$ proportionnelle à la position $y(t)$ du tiroir telle que :
$$U_s(t) = K_c.y(t) \text{ avec } K_c = 1{,}5\ V/m$$

- Le signal de consigne $y_c(t)$ est élaboré de telle sorte que :
$$U_e(t) = y_c(t) - U_s(t)$$

Question 1 : A partir des équations données précédemment, effectuer le schéma bloc du système où $Y_c(p)$ représente l'entrée du système et $Y(p)$ la sortie du système.

Nous noterons : $G(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)}$.

Question 2 : Donner la fonction de transfert du système en boucle ouverte que nous noterons $H_{BO}(p)$.

Question 3 : Donner la fonction de transfert du système en boucle fermée que nous noterons $H_{BF}(p)$ et effectuer l'application numérique.

Question 4 : Calculer la valeur finale de l'erreur statique du système lorsque la consigne est un échelon d'amplitude 0,1.

Question 5 : Calculer la valeur de l'échelon à appliquer en consigne d'entrée afin d'obtenir en sortie une valeur finale de 0,25.

Nous allons maintenant étudier la stabilité du système.

ATTENTION : Pour cela, nous allons prendre $K_c = 1\,V/m$ et nous prendrons **maintenant** (et pour la suite de l'exercice) comme fonction de transfert pour $G(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)}$ la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{62{,}5}{p.(p+1{,}25).(1+0{,}25.p)}$$

Question 6 : Refaire le schéma bloc de ce système en utilisant la fonction $G(p)$ donnée ci-dessus et en prenant $K_c = 1\,V/m$. Déterminer la fonction de transfert de ce système en boucle ouverte notée $F_{BO}(p)$.

Question 7 : Déterminer les expressions du module $F_{BO}(\omega)$ et de la phase $\varphi_{F_{BO}}(\omega)$.

Question 8 : Représenter la réponse harmonique du système sur l'abaque de Black donnée (feuille à rendre avec votre copie bien évidemment) en prenant les valeurs suivantes pour la pulsation :

ω (rad/s)	0	0,2	0,5	1	1,3	1,5	2	3	5

Question 9 : Déterminer **graphiquement** la marge de gain et la marge de phase du système. Conclure sur la stabilité et la robustesse du système.

Question 10 : Vérifier par le calcul la **marge de gain** obtenue.

Question 11 : A partir du lieu de Black obtenu à la question 7, déterminer graphiquement :

- Le gain K1 qu'il faudrait ajouter au système pour obtenir une marge de phase de 40°. Quelle serait alors la marge de gain du système.

Nous souhaitons tout d'abord corriger notre système à l'aide d'un correcteur proportionnel tel que :

$$U_e(p) = Gr.\left(Y_c(p) - Y(p)\right)$$

Question 12 : En utilisant le critère de Routh, déterminer les conditions de stabilité en fonction de Gr du système ainsi corrigé.

Question 13 : Est-il possible de retrouver cette valeur en utilisant les questions précédentes.

Maintenant, nous allons introduire une correction proportionnelle dérivée telle que :

$$U_e(p) = K_d.(1 + T_d.p).\left(Y_c(p) - Y(p)\right)$$

Nous avons choisi pour la constante T_d la valeur 0,25.

Question 14 : Représenter le schéma bloc du système avec cette correction.

Question 15 : Donner la fonction de transfert simplifiée du système corrigé en boucle ouverte $H_{c\,BO}(p)$ et en boucle fermée $H_{c\,BF}(p)$. Ecrire $H_{c\,BF}(p)$ sous la forme d'un second ordre normalisé et donner les expressions de K_S, ξ et ω_0 en fonction de K_d.

La figure 1 représente la réponse du système bouclé corrigé lorsque nous appliquons en entrée un échelon unitaire.

Question 16 : Déterminer le paramètre K_d du correcteur nous permettant d'obtenir cette réponse.

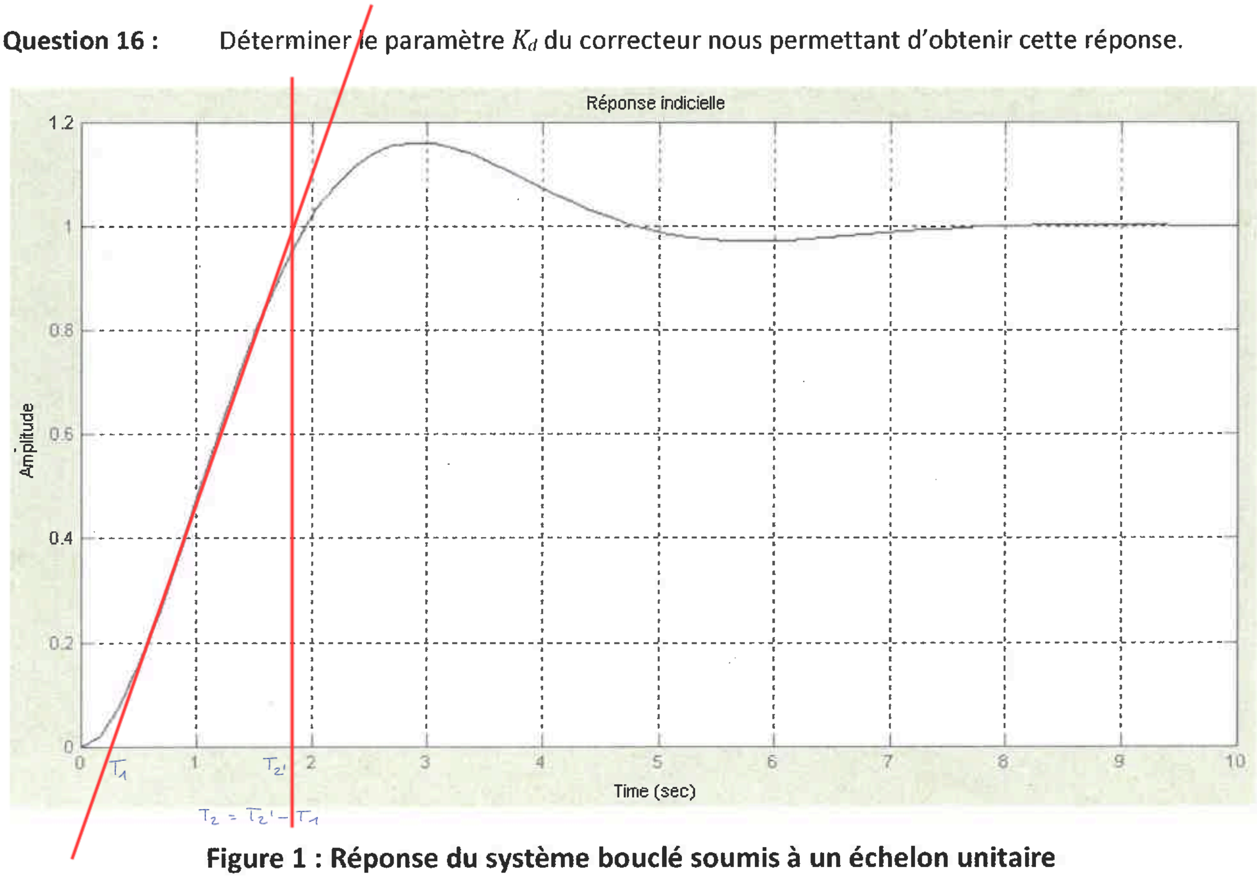


Figure 1 : Réponse du système bouclé soumis à un échelon unitaire

Barème indicatif : Question 1 : 2 – Question 2 : 0.5 – Question 3 : 1 – Question 4 : 1.5 – Question 5 : 1.5 – Question 6 : 0.5 – Question 7 : 1 – Question 8 : 1 – Question 9 : 1.5 – Question 10 : 1.5 – Question 11 : 1 – Question 12 : 2 – Question 13 : 0.5 – Question 14 : 0.5 – Question 15 : 2 - Question 16 :2.

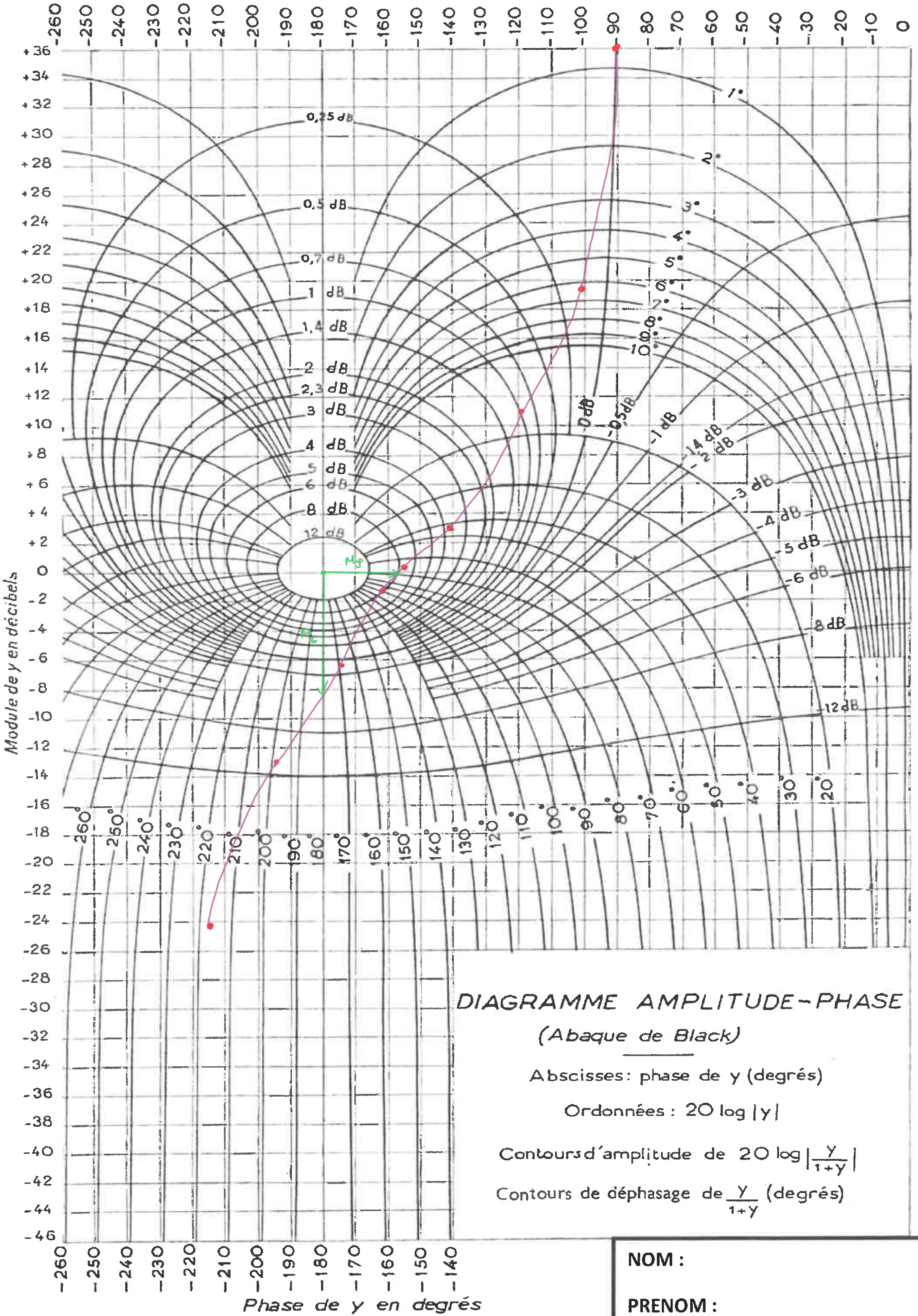


DIAGRAMME AMPLITUDE-PHASE

(Abaque de Black)

Abscisses : phase de y (degrés)

Ordonnées : 20 log |y|

Contours d'amplitude de $20 \log \left|\frac{y}{1+y}\right|$

Contours de déphasage de $\frac{y}{1+y}$ (degrés)

NOM :

PRENOM :

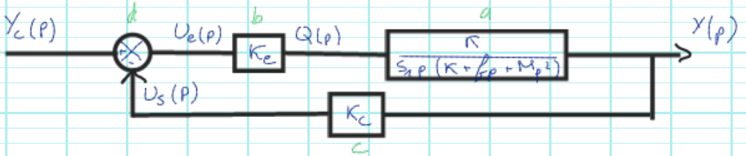
Partiel 2022 - HEI

1) a) $M \times p^2 Y(p) = K \times \frac{1}{p} \times \frac{Q(p)}{S_1} - K \times Y(p) - f \times p \times Y(p)$

b) $Q(p) = K_e \times U_e(p)$

c) $U_s(p) = K_c \times Y(p)$

d) $U_e(p) = Y_c(p) - U_s(p)$



2) $H_{BO}(p) = K_e \times \frac{K}{S_1 p \times (K + fp + Mp^2)} \times K_c$

car en boucle ouverte on débranche le - du comparateur

3) $$H_{BF}(p) = \frac{K_e \times \frac{K}{S_1 p \times (K+fp+Mp^2)}}{1 + \left(K_e \times \frac{K}{S_1 p \times (K+fp+Mp^2)} \times K_c\right)}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{K_e \times \frac{K}{S_1 p \times (K+fp+Mp^2)}}{\frac{S_1 p \times (K+fp+Mp^2) + K_e \times K \times K_c}{S_1 p \times (K+fp+Mp^2)}}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{K_e \times K}{S_1 p \times (K+fp+Mp^2) + K_e \times K \times K_c}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{4,5}{0,02p(112,5 + 250p + 50p^2) + 6,75}$$

4) Formule de la valeur finale : $\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \cdot X(p)$

Or $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} \Leftrightarrow X(p) = H_{BF}(p) \times Y_c(p)$

Donc $\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \times H_{BF}(p) \times Y_c(p)$

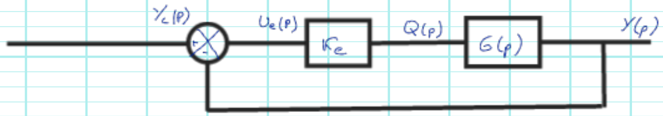
$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \times \frac{0,1}{p} \times \frac{K_e \times K}{S_1 p \times (K+fp+Mp^2) + K_e \times K \times K_c}$$

$$\varepsilon_s = 0,1 \times \frac{K_e \times K}{K_e \times K \times K_c} = \frac{0,1}{K_c} = 0,0667$$

5) On sait que $\varepsilon_s = \frac{E(p)}{K_c} \Leftrightarrow E(p) = \varepsilon_s \times K_c = 0,23 \times 1,5 = 0,375V$

On aura donc un échelon d'amplitude 0,375 V

6)



$$F_{BO}(p) = K_e \times G(p) = \frac{K_e \times 62,5}{p(p+1,25)(1+0,25p)} = \frac{2,5}{p(p+1,25)(1+0,25p)}$$

7) $$F_{BO}(j\omega) = \frac{2,5}{j\omega(j\omega + 1,25)(1 + 0,25j\omega)}$$

$$F_{BO}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \times \frac{1}{j\omega + 1,25} \times \frac{1}{1 + 0,25j\omega}$$

$$|F_{BO}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1,25^2 + \omega^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1^2 + (0,25\omega)^2}}$$

Arg (imaginaire pur) $= \frac{\pi}{2}$

Arg (réel pur) $= 0$ - $= \pi$

$\arctan\left(\frac{p \text{ imaginaire}}{p \text{ réelle}}\right)$

Phase : $\operatorname{Arg}(F_{BO}(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{1,25}\right) - \arctan(0,25\omega)$

ω (rad/s)	0	0,2	0,5	1	1,3	1,5	2	3	5
$F_{Bo}(\omega)$	$+\infty$	9,86	3,69	1,52	1,01	0,80	0,47	0,21	0,06
$\varphi_{Bo}(\omega)_{rad}$	$-\frac{\pi}{2}$	-1,78	-2,08	-2,49	-2,69	-2,81	-3,05	-3,39	-3,79
$\varphi_{Bo}(\omega)_{deg}$	-90	-101,99	-119,18	-142,87	-154,13	-161,00	-174,75	-194,23	-217,00
$20\log(F_{Bo}(\omega))$	$+\infty$	19,88	11,34	3,64	0,09	-1,94	-6,56	-13,56	-24,44

On trouve une marge de gain $M_G = 8,5$ dB

Et une marge de phase $M_\varphi = 180 - 157 = 23°$

Pour que le système soit robuste, il faut que $M_G > 10$dB et $M_\varphi > 45°$

Donc notre système n'est pas robuste

Ici le système est stable car la courbe passe en dessous du point critique C (0dB ; 180°)

10) On veut $M_G = -20\log(|G(\omega_\pi)|)$ avec ω_π la pulsation pour laquelle $\arg(G_{\omega_\pi}) = -\pi$

$$G(j\omega) = \frac{2,5}{-1,315\omega^2 + j(0,23\omega^2 + 1,25\omega)}$$

$$\text{Arg}(j\omega) = 2,5 \times \frac{1}{\sqrt{(-1,35\omega^2)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{(0,25\omega^3)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{(1,25\omega)^2}}$$

$$= 0 - \pi - \arctan(0,25\omega^3) - \arctan(1,25\omega)$$

$$-180° = -\arctan(0,25\omega^3) - \arctan(1,25\omega) + \pi$$

$$180° = \arctan(0,25\omega^3) + \arctan(1,25\omega) + \pi$$

$$\Leftrightarrow 180° = \arctan\left(\frac{0,25\omega^3 + 1,25\omega}{1 - 0,3125\omega^3}\right) + \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{0,25\omega^3 + 1,25\omega}{1 - 0,3125\omega^3} + 0$$

$$\Leftrightarrow 0,25\omega^3 + 1,25\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,25\omega^3 = 1,25\omega$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{-1,25}{0,25} = -5$$

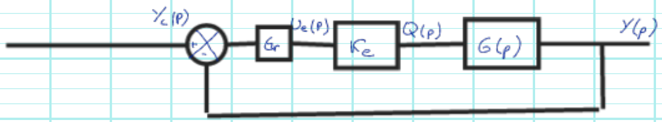
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{5} = 2,23 \text{ rad/s}$$

11) Par lecture graphique, on trouve un décalage -3dB

Donc pour avoir K_1 : $K_1 = 10^{\frac{-3}{20}} = 0,71$

La marge de gain sera donc $M_G = -8,5 - 3 = -11,5$ dB

12)



$$F_{BF}(p) = \frac{G_r \times K_e \times G(p)}{1 + G_r \times K_e \times G(p)} = \frac{2,5\,Gr}{p(p+1,25)(0,25p+1) + 2,5\,Gr}$$

$$= \frac{2,5\,Gr}{0,25p^3 + \frac{21}{16}p^2 + 1,25p + 2,5\,Gr}$$

Conditions nécessaires :
$$\begin{cases} 0{,}25 = a_3 \ , \ a_2 = 21/16 \ , \ a_1 = 1{,}25 \ , \ a_0 = 2{,}5\,G_r \\ \forall \text{ les } a_i \text{ existent et sont de } \bar{m} \text{ signe} \end{cases}$$

$0{,}25$	$1{,}25$	0
$21/16$	$2{,}5\,G_r$	0
A	0	
B		

$$A = \frac{21/16 \times 1{,}25 - 0{,}25 \times 2{,}5\,G_r}{21/16}$$

$$A = \frac{5}{4} - \frac{10}{21}G_r$$

$$B = \frac{\cancel{\left(\frac{5}{4} - \frac{10}{21}G_r\right)} \times 2{,}5\,G_r - 0}{\cancel{\left(\frac{5}{4} - \frac{10}{21}G_r\right)}}$$

Il faut que $\cdot\ 2{,}5\,G_r \geq 0 \longrightarrow G_r > 0$

$\cdot\ \frac{5}{4} - \frac{10}{21}G_r \geq 0 \iff -\frac{10}{21}G_r \geq -\frac{5}{4}$

$\iff \frac{10}{21}G_r \leq \frac{5}{4}$

$\iff G_r \leq 2{,}6$

Donc $0 \leq G_r \leq 2{,}6$

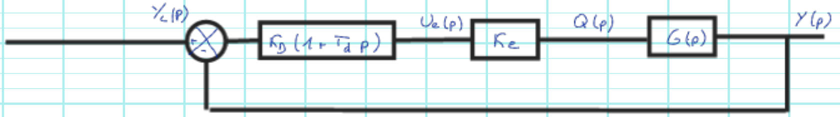
13) La marge de gain est le gain nécessaire pour passer au-dessus du point critique $C(0\text{dB} ; 180°)$, et $G_r = 2{,}6$

Or notre marge de gain vaut $M_G = 8{,}5$

Et $M_G = 20\log(2{,}6) = 8{,}3$

On a donc une marge de gain qui correspond

14)



15) $H_{CBO}(p) = K_D(1+T_d p) \times K_e \times G(p) = K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times G(p)$

$$H_{CBF}(p) = \frac{K_D(1+T_d p) \times K_e \times G(p)}{1 + K_D(1+T_d p) \times K_e \times G(p)} = \frac{K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times G(p)}{1 + K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times G(p)}$$

$$= \frac{K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times G(p)}{1 + K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times G(p)}$$

$$= \frac{K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times \frac{62{,}5}{p(p+1{,}25)(1+0{,}25p)}}{1 + K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times \frac{62{,}5}{p(p+1{,}25)(1+0{,}25p)}}$$

$$= \frac{K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times \frac{62{,}5}{p(p+\cancel{1{,}25})(1+0{,}25p)}}{\frac{p(p+1{,}25)(1+0{,}25p) + K_D(1+0{,}25p) \times 4\times10^{-2} \times 62{,}5}{p(p+\cancel{1{,}25})(1+0{,}25p)}}$$

$$= \frac{K_D(1+\cancel{0{,}25p}) \times 4\times10^{-2} \times 62\cancel{,5}}{p(p+1{,}25)(1+\cancel{0{,}25p}) + K_D(1+\cancel{0{,}25p}) \times 4\times10^{-2} \times \cancel{62{,}5}}$$

$$= \frac{2{,}5K_D}{p(p+1{,}25) + 2{,}5K_D}$$

$$H_{CBF}(p) = \frac{2{,}5K_D}{p^2 + 1{,}25p + 2{,}5K_D}$$

Second ordre normalisé :
$$\boxed{\frac{K_S}{1 + \frac{2\varepsilon}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$$

$$H_{CBF}(p) = \frac{2{,}5K_D}{2{,}5K_D} \times \frac{1}{1 + \frac{1{,}25p}{2{,}5K_D} + \frac{1}{2{,}5K_D}p^2}$$

$$H_{CBF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1{,}25p}{2{,}5K_D} + \frac{1}{2{,}5K_D}p^2}$$

Par identification :
$$\begin{cases} \cdot\ \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{2{,}5K_D} \iff \omega_0^2 = 2{,}5K_D \iff \omega_0 = \sqrt{2{,}5K_D} \\ \cdot\ \frac{2\varepsilon}{\omega_0} = \frac{1{,}25}{2{,}5K_D} \iff \varepsilon = \frac{1{,}25}{2{,}5K_D} \times \frac{\omega_0}{2} = \frac{6{,}625}{\sqrt{2{,}5K_D}} \\ \cdot\ K_S = 1 \end{cases}$$

16) Le graphique montre que le système est non-évolutif, donc

$$K_D = \frac{0,85\, T_2}{K_S \cdot T_1}$$

Graphiquement, $T_1 = 0,25s$ et $T_2 = T_{2'} - T_1 = 1,9 - 0,25$

$T_2 = 1,65s$

Donc $K_D = \dfrac{0,85 \times 1,65}{1 \times 0,25} = 5,61$