系统可靠性

假设一个系统含有 n 个分支, 第 i 个分支含有 x_i 个冗余元素, $i = 1, 2, \cdots, n$. 设 y_{ij} 是分支 i 中第 j 个冗余元素的状态, 而 y_i 是分支 i 的状态,
$j = 1, 2, \cdots, x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 设 y_i 完全由 y_{ij} 确定,
$j = 1, 2, \cdots, x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 用 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 即整个系统的状态.

基本假设：对冗余系统, 有一个结构函数 $\Psi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, 对每个分支状态 $\mathbf{y} \in \{0,1\}^n$, $\Psi(\mathbf{y}) \in \{0,1\}$.

如何确定结构函数

对并行系统，结构函数为

$$\psi(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{i=1}^{n} y_i \geq 1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对串联系统, 结构函数为

$$\psi(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

如下的桥式系统的结构函数为

$$\Psi(\mathbf{y}) = \max\{y_1y_4, y_2y_5, y_2y_3y_4, y_1y_3y_5\}.$$

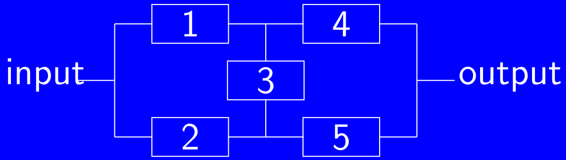

Figure: A Bridge System

如何确定系统寿命

对每个给定的决策向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 设分支 i 上的 冗余元素 j 的寿命（设为随机变量）为 ξ_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 用

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1x_1}, \xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2x_2}, \cdots, \xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{nx_n})$$

记系统中所有冗余元素的寿命.

对并行冗余系统，分支的寿命为

$$T_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \max_{1\le j\le x_i} \xi_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

对储备冗余系统，分支的寿命为

$$T_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{x_i} \xi_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

定理：对冗余系统, 系统寿命 $T(\mathbf{x},\xi) \ge t$ 当且仅当 $\Psi(\mathbf{y}(t)) = 1$.

系统寿命估计

(1) 取两个时刻 t_1 和 t_2 使得 $\Psi(\mathbf{y}(t_1)) = 1$ 和 $\Psi(\mathbf{y}(t_2)) = 0$.

(2) 记 $t_0 = (t_1 + t_2)/2$.

(3) 如 $\Psi(y(t_0)) = 1$, 让 $t_1 = t_0$, 否则, $t_2 = t_0$.

(4) 重复第(2)步至第(3)步直至 $|t_1 - t_2| < \varepsilon$, 其中 ε 是预先给定的精度.

(5) $T(\mathbf{x}, \xi) = (t_1 + t_2)/2$.

系统寿命期望值模型

对储备冗余系统, 定义期望值寿命为 $E[T(\mathbf{x},\xi)]$. 如要极大化期望值寿命 $E[T(\mathbf{x},\xi)]$, 那么有如下系统寿命期望值模型,

$$\begin{cases} \max E[T(\mathbf{x},\xi)] \\ \text{subject to:} \\ \qquad C(\mathbf{x}) \le Q \\ \qquad \mathbf{x} \ge 1, \text{ 整数向量.} \end{cases}$$

用混合智能算法求解上述问题.