随机数的产生

算法 (均匀分布 $\mathcal{U}(a, b)$)

Step 1. $u = \text{rand}()$.

Step 2. $u \leftarrow u/\text{RAND\_MAX}$.

Step 3. 返回 $a + u(b - a)$.

算法 (指数分布 $\mathcal{EXP}(\beta)$)

Step 1. 从 $\mathcal{U}(0,1)$ 中产生 u.

Step 2. 返回 $-\beta\ln(u)$.

算法 (正态 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$)

Step 1. 从 $\mathcal{U}(0,1)$ 中产生 μ_1 和 μ_2.

Step 2. $y=[-2\ln(\mu_1)]^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi\mu_2)$.

Step 3. 返回 $\mu+\sigma y$.

Example

设 ξ 是一个定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上的 n-维随机向量 (等价地, 它可由概率分布 Φ 来描述), 而 $f : \Re^n \to \Re$ 是一个可测函数. 那么 $f(\xi)$ 是一个随机变量. 为了计算期望值 $E[f(\xi)]$, 我们根据概率测度 Pr 从 Ω 中产生 ω_k, 从而产生出 $\xi(\omega_k)$, $\quad k = 1, 2, \cdots, N$.
等价地, 根据概率分布 Φ *产生随机向量* $\xi(\omega_k)$, $\quad k = 1, 2, \cdots, N$.
由强大数定理知

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} f(\xi(\omega_k))}{N} \longrightarrow E[f(\xi)], \quad \text{a.s.}$$

$(N \to \infty)$. 因此, 期望值 $E[f(\xi)]$ 可由 $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\xi(\omega_k))$ 来计算 (N 充分大).

随机模拟

算法(对期望值的随机模拟)

Step 1. 置 $e=0$.

Step 2. 根据概率测度 Pr 从 Ω 中产生 ω. 等价地, 根据概率分布 Φ 产生随机向量 $\xi(\omega)$.

Step 3. $e \leftarrow e + f(\xi(\omega))$.

Step 4. 重复第二至第三步 N 次.

Step 5. $E[f(\xi)] = e/N$.

Example

为了计算概率 $L = \Pr\{f(\xi) \le 0\}$, 根据概率测度 Pr 从 Ω 中产生 ω_k, 从而产生出 $\xi(\omega_k)$, $k = 1, 2, \cdots, N$. 设 N' 为满足不等式组的随机向量的个数. 定义

$$h(\xi(\omega_k)) = \begin{cases} 1, & \text{if } f(\xi(\omega_k)) \le 0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么对所有 k 我们有 $E[h(\xi(\omega_k))] = L$, 而 $N' = \sum_{k=1}^{N} h(\xi(\omega_k))$. 因此

$$\frac{N'}{N} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} h(\xi(\omega_k))}{N}$$

几乎处处收敛到 L. 故概率 L 可由 N'/N 来计算只要 N 充分大.

随机模拟

算法(对概率的随机模拟)

Step 1. 置 $N' = 0$.

Step 2. 根据概率测度 Pr 从 Ω 中产生 ω. 等价地, 根据概率分布 Φ 产生随机向量 $\xi(\omega)$.

Step 3. 如果 $f(\xi(\omega)) \leq 0$, 那么 $N' \leftarrow N' + 1$.

Step 4. 重复第二至第三步 N 次.

Step 5. $L = N'/N$.

Example

为了确定极大的 $\overline{f}$ 使得 $\Pr\left\{f(\xi) \geq \overline{f}\right\} \geq \alpha$, 根据概率测度 Pr 从 Ω 中产生 ω_k. 等价地, 根据概率分布 Φ 产生随机向量 $\xi(\omega_k)$, $k = 1, 2, \cdots, N$. 定义

$$h(\xi(\omega_k)) = \begin{cases} 1, & \text{if } f(\xi(\omega_k)) \geq \overline{f} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$k = 1, 2, \cdots, N$, 这是随机变量序列, 而对所有 k, $E[h(\xi(\omega_k))] = \alpha$ for all k. 因此

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} h(\xi(\omega_k))}{N} \longrightarrow \alpha, \quad \text{a.s.}$$

$N \to \infty$. 故 $\overline{f}$ 能作为序列 $\{f(\xi(\omega_1)), f(\xi(\omega_2)), \cdots, f(\xi(\omega_N))\}$, $(N' = [\alpha N])$ 中第 N' 个最大的元素.

随机模拟

算法(对关键值的随机模拟)

Step 1. 置 N' 为 αN 的整数部分.

Step 2. 根据概率测度 Pr 从 Ω 中产生 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$. 等价地, 根据概率分布 Φ 产生随机向量 $\xi(\omega_1), \xi(\omega_2), \cdots, \xi(\omega_N)$.

Step 3. 返回 $\{f(\xi(\omega_1)), f(\xi(\omega_2)), \cdots, f(\xi(\omega_N))\}$ 中第 N' 个最大的元素.