分布式决策系统

假设有一个领导者和 m 个下属.

设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}_i$ 分别是领导者和第 i 个下属的决策向量, $i = 1, 2, \cdots, m$.

领导者和第 i 个下属的目标函数分别为 $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$ 和 $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

领导者的决策向量 $\mathbf{x}$ 的可行集为

$$G(\mathbf{x}) \leq 0.$$

于是领导者选择的每一个决策 $\mathbf{x}$, 其第 i 个下属的决策向量 $\mathbf{y}_i$ 不仅依赖于 $\mathbf{x}$ 还依赖于 $\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_{i+1}, \cdots, \mathbf{y}_m$, 这样就有

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m) \leq 0.$$

多层规划

假设领导者首先在其可行集中选择决策 $\mathbf{x}$, 而其下属根据这个决策制定了相应的决策 $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m)$. 这样就得到如下形式的二层规划模型:

$$
\begin{cases}
\max\limits_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*) \\
\text{subject to:} \\
\qquad G(\mathbf{x}) \le 0 \\
\qquad (\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*) \text{ solves problems } (i = 1, 2, \cdots, m) \\
\qquad \begin{cases}
\max\limits_{\mathbf{y_i}} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m) \\
\text{subject to:} \\
\qquad g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m) \le 0.
\end{cases}
\end{cases}
$$

Nash 均衡

Definition

设 $\mathbf{x}$ 是领导者的一个决策向量, 下属的 *Nash* 均衡定义为 $(\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*)$ 使得

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1^*, \cdots, \mathbf{y}_{i-1}^*, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1}^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*) \leq f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1^*, \cdots, \mathbf{y}_{i-1}^*, \mathbf{y}_i^*, \mathbf{y}_{i+1}^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*)$$

对任何的 $(\mathbf{y}_1^*, \cdots, \mathbf{y}_{i-1}^*, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1}^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*)$ 及 $i = 1, 2, \cdots, m$ 均成立.

Stackelberg-Nash 均衡

Definition

假设 $\mathbf{x}^*$ 是领导者的一个可行决策向量, $(\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*)$ 为下属的一个相应的 *Nash* 均衡. 称 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*)$ 为二层规划的一个 *Stackelberg-Nash* 均衡, 当且仅当

$$F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \cdots, \bar{\mathbf{y}}_m) \leq F(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \cdots, \mathbf{y}_m^*)$$

对任何的 $\bar{\mathbf{x}}$ 和相应的 *Nash* 均衡 $(\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \cdots, \bar{\mathbf{y}}_m)$均成立.

算法

Ben-Ayed 和 Blair (1990) 证明 MLP 是 NP-hard 问题. 为解 MLP, 人们设计了一系列数值计算方法:

隐含枚举法 (Candler 和 Townsley, 1982),
k 阶最优法 (Bialas 和 Karwan, 1984),
参数互补中心算法 (Bialas 和 Karwan , 1984),
一维格搜索算法 (Bard, 1983, 1984),
分支定界法 (Bard 和 Moore, 1990),
最速下降法(Savard and Gauvin 1994),
遗传算法 (Liu, 1998).