例 I

设计一个 NN 逼近定义在 $[0, 2\pi]^4$上 的连续函数,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 + \sin x_4.$$

为了用一个 NN 逼近函数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, 生成 3000 个输入输出数据. 然后由 BP 算法训练一个 NN (4 个输入神经元, 10 个隐层神经元, 1 个输出神经元). NN 的平方和误差是 0.51, 平均误差为 0.01.

例 II

考虑定义在 $[1,5]^6$ 上的向量值连续函数,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=\begin{pmatrix} x_1\ln x_2+x_2\ln x_3\\ x_3\ln x_4+x_4\ln x_5\\ x_5\ln x_6+x_6\ln x_1\end{pmatrix}.$$

生成 3000 个输入输出数据. 然后由 BP 算法训练一个 NN (6 个输入神经元, 15 个隐层神经元, 3 个输出神经元) 逼近函数. NN 的平方和误差是 6.16, 平均误差为 0.05.

例 III

考虑定义在 $[0,2]$ 上的函数

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\frac{x_3}{1+x_3}+\frac{x_4}{1+x_4}.$$

假设函数 $f(\mathbf{x})$ 的输入输出数据由 $[0,2]$ 上的一致分布噪声 $\mathcal{U}(-a,a)$ 随机产生, 其中 $\mathcal{U}(-a,a)$ 表示 $[-a,a]$ 上的一致分布变量. 即, 对任意分布 $\mathbf{x}$, 输出为 $y=f(\mathbf{x})+\mathcal{U}(-a,a)$.

由噪声 $\mathcal{U}(-a,a)$ 产生函数 $f(\mathbf{x})$ 的 2000 个输入输出数据 $\{(\mathbf{x}_i^*,y_i^*)|i=1,2,\cdots,2000\}$. BP 算法训练一个 NN (4 个输入神经元, 6 个隐层神经元, 1 个输出神经元) 逼近函数 $f(\mathbf{x})$.

Table: 平方和误差

Noise	$\frac{1}{2}\sum_{i=2001}^{3000} \lvert F(\mathbf{x}_i^*, w^*) - f(\mathbf{x}_i^*)\rvert^2$	$\frac{1}{2}\sum_{i=2001}^{3000} \lvert y_i^* - f(\mathbf{x}_i^*)\rvert^2$
$\mathcal{U}(-0.05, 0.05)$	0.362	0.389
$\mathcal{U}(-0.10, 0.10)$	1.333	1.643
$\mathcal{U}(-0.20, 0.20)$	4.208	6.226
$\mathcal{U}(-0.30, 0.30)$	7.306	14.01
$\mathcal{U}(-0.40, 0.40)$	14.74	24.90