多目标规划 Multiobjective Programming

在有些时候需要同时考虑多重的， 不可比较的， 甚至是对立的目标. 多目标规划 (MOP) 由此被提出

$$\begin{cases} \max\ [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad\qquad g_j(\mathbf{x}) \le 0,\ j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

其中 $f_i(\mathbf{x})$ 是目标函数, $i = 1, 2, \cdots, m$, 而 $g_j(\mathbf{x}) \le 0$ 是约束系, $j = 1, 2, \cdots, p$.

当各目标呈对立状态时， 没有最优解同时极大化所有的目标函数. 此时我们借助*Pareto* 解 （有效解）的概念, Pareto 解意味着若不牺牲其他一个或多个目标，就不可能改进任何一个目标的可行解.

Definition

一个可行解 $\mathbf{x}^*$ 称为是 *Pareto* 解如果不存在可行解 $\mathbf{x}$ 使得

$$f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}^*), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

且至少有一个 j 使 $f_j(\mathbf{x}) > f_j(\mathbf{x}^*)$.

妥协解

如果决策者有实值偏好函数来聚合 m 个目标函数, 那么我们可以在同样的约束条件下极大化聚合的偏好函数. 这种模型就称为妥协模型, 它的解称为妥协解.

权和解

一种著名的妥协模型是通过对目标函数加权求和而得到的, 即,

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) \\ \text{subject to:} \\ \qquad g_j(\mathbf{x}) \le 0, \ j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

其中权重 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是非负数且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$. 注意: 这一模型的解一定是原模型的 Pareto 解.

理想点方法

第二种方法是极小化由目标函数构成的向量 $(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$ 到一个理想向量 $(f_1^*, f_2^*, \cdots, f_m^*)$ 的距离函数, 其中 f_i^* 分别是第 i 个目标函数在不考虑其他目标时的最优值, $i = 1, 2, \cdots, m$, 即,

$$\begin{cases} \min \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - f_1^*)^2 + \cdots + (f_m(\mathbf{x}) - f_m^*)^2} \\ \text{subject to:} \\ \qquad g_j(\mathbf{x}) \le 0, \ j = 1, 2, \cdots, p. \end{cases}$$

交互式逼近

第三种方法是利用交互式的方法去寻找妥协解， 即包含一系列的决策过程和运算过程.