§1.4 化零多项式

(Hamilton-Cayley) 定理 1.12：设 $A \in C^{n\times n}$，$f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A)$，则 $f(A) = 0$.

例 1：已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

试计算 (1) $A^7 - A^5 - 19A^4 + 28A^3 + 6A - 4\mathrm{I}$，
(2) A^{-1}， (3) A^{100}.

解：$\psi(\lambda) = det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

解：$\psi(\lambda) = det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

(1) 令 $g(\lambda) = \lambda^7 - \lambda^5 - 19\lambda^4 + 28\lambda^3 + 6\lambda - 4$，得

$$g(\lambda) = (\lambda^4 + 4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 3\lambda - 2)\psi(\lambda) - 3\lambda^2 + 22\lambda - 8$$

由 $\psi(A) = 0$，有

$$g(A) = -3A^2 + 22A - 8\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -21 & 16 & 0 \\ -64 & 43 & 0 \\ 19 & -3 & 24 \end{pmatrix}$$

(2) 由 $\psi(A)=0$，得 $A(A^2-4A+5\mathrm{I})=2\mathrm{I}$，故

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A^2-4A+5\mathrm{I})=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(3) 设 $\lambda^{100}=q(\lambda)\psi(\lambda)+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0$， 由 $\psi(2)=\psi(1)=\psi'(1)=0$， 得

$$\begin{cases} 2^{100} = 4b_2 + 2b_1 + b_0 \\ 1 = b_2 + b_1 + b_0 \\ 100 = 2b_2 + b_1 \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} b_0 = 2^{100} - 200 \\ b_1 = -2^{101} + 302 \\ b_2 = 2^{100} - 101 \end{cases}$$

故

$$A^{100} = b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = \begin{pmatrix} -199 & 100 & 0 \\ -400 & 201 & 0 \\ 201 - 2^{100} & 2^{100} - 101 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

§1.5 酉空间与酉矩阵

1. 定义1.20 若任意 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in C^n$, 均有复数

$$(\alpha, \beta) = \beta^{\mathrm{H}}\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$$

与之对应，则称 (α, β) 为 α 与 β 的内积，称定义了内积的 C^n 为 n 维酉空间（或 U 空间，或复内积空间），其中 β^H 表示向量 β 的共轭转置。

2. 内积的性质

(1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

(2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;

(3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

(4) $(x,x)\geq 0$, 仅当 $x=0$ 时才有 $(x,x)=0$;

(5) $(x,y)(y,x)\leq(x,x)(y,y)$ (Cauchy-Schwarz 不等式).

3. 定义1.21 设 $\alpha \in C^n$，非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为向量 α 的长度或模或范数，记为 $\|\alpha\|$ 或 $|\alpha|$. 若 $\|\alpha\| = 1$，则称 α 为单位向量。

4. 向量长度的性质

(1) $\|x\| \geq 0$， $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ （非负性）；

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ （齐次性）；

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ （三角不等式）.

5. 定义1.22 设 $\alpha,\beta\in C^n$. 若 $(\alpha,\beta)\in 0$，则称 α 与 β 正交，记作 $\alpha\perp\beta$. 若 $\alpha_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,m)$, 且两两正交，即当 $i\neq j$ 时，$(\alpha_i,\alpha_j)=0$，则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为正交向量组。若正交向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 还满足 $\|\alpha_i\|=1, i=1,2,\cdots,m$，则称其为标准正交向量组。

显然，若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为正交向量组，则单位化后的向量组

$$\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1,\cdots,\frac{1}{\|\alpha_m\|}\alpha_m$$

即为标准正交向量组。

6. 定理1.17 正交向量组必线性无关。
7. 通过 Schmidt 正交化过程， 可由任一组线性无关的向量组 导出一正交向量组。

从线性无关向量组 $\mathbf{x}_1, x_2, \cdots, x_s$ 导出正交向量组

$y_1, y_2, \cdots, y_s$: $\quad y_1 = x_1$,

$$y_j = x_j - \frac{(x_j, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \cdots - \frac{(x_j, y_{j-1})}{(y_{j-1}, y_{j-1})} y_{j-1}$$

$$(j = 2, \cdots, s)$$

8. 定义1.24： 设 $A \in C^{n\times n}$， 若有 $A^H A = \mathrm{I}$ 或 $A^{-1} = A^H$， 则称 A 为 酉矩阵。

9. 酉矩阵的性质：

(1) 若 A 是酉矩阵，则 $A^{-1}, A^H, A^T, \bar{A}, A^K (k = 1, 2, \cdots)$ 也是酉矩阵；

(2) 若 A, B 是酉矩阵，则 AB 也是酉矩阵；

(3) 若 A 是酉矩阵，则 $|\det A| = 1$；

(4) A 是酉矩阵的充要条件是， 它的 n 个列（行）向量是标准正交向量组；

(5) A 是酉矩阵的充要条件是，对任意 $\alpha, \beta \in C$，有 $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$；

(6) 若 A 是酉矩阵，λ 为 A 的特征值，则 $|\lambda| = 1$。

§1.6 酉相似标准型

1. Schur 定理：设 $A \in C^{n\times n}$， 则 A 可酉相似于上三角矩阵 T， 即存在酉矩阵 U 使得
$U^{-1}AU = U^{H}AU = T$.

2. 定义1.25 设 $A \in C^{n\times n}$，如果 $A^H = A$，则称A为Hermite矩阵；如果 $A^H = -A$，则称 A 为反Hermite矩阵。

2. 定义1.25 设 $A \in C^{n\times n}$，如果 $A^H = A$，则称A为Hermite矩阵；如果 $A^H = -A$，则称 A 为反Hermite矩阵。
3. 定义：若 $A^H A = AA^H$， 则称 A 为 正规矩阵。

2. 定义1.25 设 $A \in C^{n\times n}$，如果 $A^H = A$，则称A为Hermite矩阵；如果 $A^H = -A$，则称 A 为反Hermite矩阵。
3. 定义：若 $A^H A = AA^H$， 则称 A 为 正规矩阵。

易知，酉矩阵，正交矩阵， Hermite 矩阵， 实对称矩阵，反 Hermite 矩阵， 实反对称矩阵， 对角矩阵等都是正规矩阵。

3. A 酉相似于对角矩阵的充要条件是 A 为正规矩阵。
4. Hermite 矩阵的特征值为实数，反 Hermite 矩阵的特征值为零或纯虚数。
5. 设 λ 为正规矩阵 A 的特征值， x 是对应的特征向量，则 $\overline{\lambda}$ 是 A^H 的特征值，对应特征向量仍为 x.

6. 定理1.21 设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 酉相似于对角矩阵的充分必要条件为 A 是正规矩阵。

6. 定理1.21 设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 酉相似于对角矩阵的充分必要条件为 A 是正规矩阵。
7. 推论1.12 设 $A \in C^{n\times n}$ 是正规矩阵，$\lambda \in C$，$x \in C^n$，则下列条件等价：

   (1) x 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量：$Ax = \lambda x$;

   (2) x 是 A^H 的属于持征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量：$A^H x = \bar{\lambda} x$.

7. 推论1.13 正规矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的。

7. 推论1.13 正规矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的。

证明：设 λ, μ 是正规矩阵 A 的两个不同特征值，x，y 是对应的特征向量，即 $Ax = \lambda x$，$Ay = \mu y$, 由推论1.12知也有 $A^H y = \bar{\mu} y$. 于是

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = y^H A x = (A^H y)^H x = (\bar{\mu} y)^H x = \mu y$$

即 $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$，因 $\lambda \neq \mu$，得 $(x, y) = 0$. 所以 x 与 y 正交。

8. 推论1.15 设 $A = C^{n\times n}$ 是正规矩阵，则

(1) A 是Hermite矩阵的充要条件是 A 的特征值均为实数；

(2) A 是反Hermite矩阵的充要条件是 A 的特征值为零或纯虚数；

(3) A 是酉矩阵的充要条件是 A 的特征值的模均为1。

9. 定义1.27 设 $A \in C^{n\times n}$ 为Hermite矩阵，如果对任意 $0 \neq x \in C^n$ 都有

$$x^H A x > 0\ (x^H A x \geq 0)$$

则称 A 为Hermite正定矩阵（半正定矩阵）。

10. 定理1.22 设 $A \in C^{n\times n}$ 为Hermite矩阵，则下列命题等价：
(1) A 是Hermite正定矩阵；(Hermite半正定矩阵)
(2) 对任意 n 阶可逆矩阵 P，$P^H AP$ 为Hermite正定矩阵；(Hermite半正定矩阵)
(3) A 的特征值均为正数；(非负实数)
(4) 存在矩阵 $P \in C_n^{n\times n}$，使 $A = P^H P$. ($P \in C^{n\times n}$)

11. 定理1.24 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 是Hermite矩阵，又设

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad \Delta_k=\det A_k, \quad k=1,2,\cdots$$

分别称之为 A 的 k 阶顺序主子阵和顺序主子式，则 A 正定的充分必要条件为 A 的 n 个顺序主子式均为正数，即 $\Delta_k=\det A_k>0, k=1,2,\cdots,n.$

12. 定理1.26 设 $A \in C^{m\times n}$，则

(1) A^HA 和 AA^H 的特征值均为非负实数；

(2) A^HA 与 AA^H 的非零特征值相同；

(3) $\operatorname{rank}(A^HA) = \operatorname{rank}(AA^H) = \operatorname{rank} A$.

证明：(3) 由 $Ax=0$，有 $A^HAx=0$. 反之，若 $A^HAx=0$，则

$$0=x^HA^HAx=(Ax)^H(Ax)=(Ax,Ax)\,.$$

故 $Ax=0$. 此即说明方程组 $Ax=0$ 与 $A^HAx=0$ 同解，从而它们解空间的维数相同，即

$$n-\operatorname{rank}A=n-\operatorname{rank}\left(A^HA\right),$$

所以 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\left(A^HA\right)$. 将此式中 A 用 A^H 代替，可得

$$\operatorname{rank}\left[\left(A^H\right)^H A^H\right]=\operatorname{rank}\left(AA^H\right)=\operatorname{rank}A^H=\operatorname{rank}A.$$

例：设 $A \in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，证明 A 是 Hermite 正定矩阵的充要条件是， 存在 Hermite 正定矩阵 B 使得 $A = B^2$.

证明：$\Longleftarrow$ 因为 B 是 Hermite 正定矩阵，所以 $B \in C_n^{n\times n}$， 从而 $A = BB = B^H B$ 为正定矩阵。

$\Longrightarrow$ 因为 A 是 Hermite 正定矩阵， 所以存在酉矩阵 U 使得

$$U^H AU = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 $\lambda_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 A 的特征值。

那么

$$
\begin{aligned}
A &= U\,diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,U^H \\
&= U\,diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,U^H\,U\,diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,U^H \\
&= B^2
\end{aligned}
$$

其中 $B = U\,diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,U^H$ 为正定矩阵。