第一章：矩阵的标准形

§1.1 矩阵的相似对角形

特征值、特征向量

1. 设 $A \in C^{n\times n}$，如果 $Ax = \lambda x$，则称 $\lambda \in C$ 为 A 的特征值，称 $x \neq 0$ 为 A 的对应 λ 的特征向量。

特征值、特征向量

1. 设 $A \in C^{n\times n}$，如果 $Ax = \lambda x$，则称 $\lambda \in C$ 为 A 的特征值，称 $x \neq 0$ 为 A 的对应 λ 的特征向量。
2. 称 $\lambda\mathrm{I} - A$ 为 A 的特征矩阵，$f_A(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A)$ 为 A 的特征多项式.

3. 求 A 的特征值与特征向量的步骤：

(1) 求 $\det(\lambda I - A) = 0$ 的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，他们即为 A 的全部特征值；

3. 求 A 的特征值与特征向量的步骤:

(1) 求 $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$ 的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，他们即为 A 的全部特征值;

(2) 求解齐次方程组 $(\lambda_i \mathrm{I} - A)x = 0$，其非零解即为 A 对应 λ_i 的特征向量.

3. 求 A 的特征值与特征向量的步骤：

(1) 求 $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$ 的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，他们即为 A 的全部特征值；

(2) 求解齐次方程组 $(\lambda_i \mathrm{I} - A)x = 0$，其非零解即为 A 对应 λ_i 的特征向量.

特征值与特征向量的性质

4. 设 $A \in C^{n\times n}$，则

$$f_A(\lambda) = \lambda^n - (\mathrm{tr}A)\,\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A,$$

其中 $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为矩阵 A 的迹。

5. n 阶矩阵 A 有且仅有 n 个特征值，其中 m 重特征值以 m 个计。

6. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值（λ_i 未必互异），则

$$trA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

7. 设 λ 为 n 阶矩阵 A 的特征值，则

（1）λ 也是矩阵 A^T 的特征值；

（2）$\bar{\lambda}$ 为矩阵 A^H 的特征值；

（3）若 A 非奇异，λ^{-1} 为矩阵 A^{-1} 的特征值。

8. 设 $g(\lambda)$ 是 λ 的多项式

$$g(\lambda) = a_s\lambda^s + a_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

对于 $A \in C^{n\times n}$， 规定

$$g(A) = a_sA^s + a_{s-1}A^{s-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

称 $g(A)$ 为矩阵 A 的多项式。

9. 设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，对应的特征向量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，设 $g(\lambda)$ 为一多项式，则 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$ 为 $g(A)$ 的特征值， 对应的特征向量仍为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 如果 $g(A) = 0$，则 A 任一特征值 λ_i 满足 $g(\lambda_i) = 0$.

10. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是方阵 A 的互不相同的特征值，$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ir_i}$ 是对应特征值 λ_i 的线性无关的特征向量 $(i = 1, 2, \cdots, s)$，则向量组

$$x_{11}, \cdots, x_{1r_1}, x_{21}, \cdots, x_{2r_2}, \cdots, x_{s1}, \cdots, x_{sr_s}$$

也线性无关。

11. 设 λ_i 是 $A \in C^{n\times n}$ 的 r_i 重特征值，对应 λ_i 有 s_i 个线性无关的特征向量，则 $1 \le s_i \le r_i$.

矩阵的对角化

12. 设 $A, B \in C^{n\times n}$，若存在 $P \in C_n^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP = B$，则称 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$，称 P 为相似变换矩阵。

矩阵的对角化

12. 设 $A, B \in C^{n\times n}$，若存在 $P \in C_n^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP = B$，则称 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$，称 P 为相似变换矩阵。
13. 如果 A 相似于一个对角矩阵，则称 A 可对角化。

14. 若 $A \sim B$，则

$$\det A = \det B,\ \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$$

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B).$$

15. A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。
16. A 可对角化的充要条件是 A 的每一个特征值的几何重数等于其代数重数。
17. n 阶矩阵 A 如果有 n 个互异特征值，则 A 必可对角化。

§1.2 λ-矩阵及标准形、不变因子和初等因子

1. 定义1.6 设 $f(x), g(x)$ 是复数域 C 上的多项式，如果存在 C 上的多项式 $h(x)$，使

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记作 $g(x)|f(x)$. 此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式（或因子），$f(x)$ 称为 $g(x)$ 的倍式。

2. 定义1.7 设 $f(x), g(x)$ 是复数域 C 上多项式，如果存在多项式 $d(x)$ 满足：

（1）$d(x) | f(x)$, $d(x) | g(x)$;

（2）若 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，则必有 $d_1(x) | d(x)$.

则称 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个最大公因式。

3. 用 $(f(x), g(x))$ 表示首项系数为 1 的最大公因式。若 c 为非零常数，$f(x)$ 是首 1 多项式，则有：$(f(x), c) = 1$, $(f(x), 0) = f(x)$.

4. 定义1.8 设 $a_{ij}(\lambda)\,(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 为复数域 C 上的多项式，则称以 $a_{ij}(\lambda)$ 为元素的 $m\times n$ 阶矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

为 λ 矩阵或多项式矩阵。

5. 定义1.9 如果 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 r 阶（$r \geq 1$）子式为非零多项式，而所有 $r+1$ 阶子式（如果有的话）全为零多项式，则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r，记作 $\mathrm{rank}A(\lambda)=r$ 或 $r_{A(\lambda)}=r$. 零矩阵的秩规定为零。

6. 如果 n 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 秩为 n，即 $\det A(\lambda) \neq 0$，则称 $A(\lambda)$ 为满秩的或非奇异的。若 n 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩小于 n，也即 $\det A(\lambda) = 0$，就称 $A(\lambda)$ 是降秩的或奇异的。

7. 初等行（列）变换：

(a) 交换两行（列），$r_i \longleftrightarrow r_j$ $(c_i \longleftrightarrow c_j)$；

(b) 数 $k \neq 0$ 乘某行（列）的所有元素，$r_i \times k$ $(c_i \times k)$；

(c) 某行（列）元素的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行（列）对应元素上去，$r_i + \varphi(\lambda) r_j$ $(c_i + \varphi(\lambda) c_j)$.

8. 定义1.12 如果 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 经过有限次初等变换变为 λ 矩阵 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记作 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$.

9. 定理1.5 任一非零的 λ 矩阵 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 都等价于如下形式的矩阵：

$$A(\lambda)\simeq S(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r\geq 1$ 是 $A(\lambda)$ 的秩，$d_i(\lambda)\,(i=1,2,\cdots,r)$ 是首项系数为1的多项式，且 $d_i(\lambda)|\,d_{i+1}(\lambda)$，$i=1,\cdots,r-1.$$\lambda$ 矩阵 $S(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$的 **Smith 标准形**，$d_i(\lambda)\,(i=1,2,\cdots,r)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子（或不变因式）。

例：求 λ 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

的Smith标准形和不变因子。

解:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda^2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^3-\lambda \end{pmatrix}$$

得所求的Smith标准形

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{pmatrix}.$$

不变因子为 $d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda.$

10. 定义1.13 设 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 $r \geq 1$，对于正整数 $k(1 \leq k \leq r)$，$A(\lambda)$ 中的所有非零的 k 阶子式的首一最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子。

11. 定理1.7 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的Smith标准形

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

是唯一的，且

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda), d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}, k=2,\cdots,r.$$

12. 定义1.14 把 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的每个次数不小于1的不变因子 $d_k(\lambda)$ 在复数域上分解为互不相同的一次因式的方幂的乘积，所有这些一次因式的方幂（相同的按出现的次数计算），称为 $A(\lambda)$ 的初等因子，全体初等因子的集合称为初等因子组。

13. 定理1.9 设 λ 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} B(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中 $B(\lambda)$ 为 $m\times n$ 阶 λ 矩阵，$C(\lambda)$ 为 $p\times l$ 阶 λ 矩阵，则 $B(\lambda)$，$C(\lambda)$ 的各个初等因子的全体是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子。

14. 注1.3 可从定理1.9中的 $B(\lambda)$ 和 $C(\lambda)$ 的初等因子得到 $A(\lambda)$ 的初等因子，但不能从 $B(\lambda)$ 和 $C(\lambda)$ 的不变因子求得 $A(\lambda)$ 的不变因子。

§1.3 Jordan 标准形

1. 定义1.15 设 $A \in C^{n\times n}$，则其特征矩阵 $\lambda I - A$ 的不变因子、行列式因子、初等因子分别称为 A 的不变因子、行列式因子、初等因子。

2. 定义 1.16：形如

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$$

的矩阵称为 r_i 阶 Jordan 块，

3. 定义1.17 由若干个 Jordan 块构成的分块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

称为 Jordan 标准形。

4. (Jordan)定理1.11 设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 与一个Jordan标准形相似，并且这个Jordan标准形除了其中Jordan块的排列次序外被 A 唯一决定，常称其为 A 的Jordan标准形，并常记为 J_A.

4. (Jordan)定理1.11 设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 与一个Jordan标准形相似，并且这个Jordan标准形除了其中Jordan块的排列次序外被 A 唯一决定，常称其为 A 的Jordan标准形，并常记为 J_A.

5. 如何确定 A 的 Jordan标准形 J_A 和相似变换矩阵 P?

第一步，求出 n 阶方阵 A 的初等因子：

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 可能有相同的，指数 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 也可能有相同的，且 $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$.

第一步，求出 n 阶方阵 A 的初等因子：

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 可能有相同的，指数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 也可能有相同的，且 $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$.

完成这一步，有三种方法：

（1）用初等变换化特征矩阵 $\lambda\mathrm{I}-A$ 为Smith标准形，求出 A 的不变因子 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$（因 $\mathbf{rank}(\lambda\mathrm{I}-A)=n$，所以 A 有 n 个不变因子），再将次数大于0的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，即可得 A 的初等因子。

（2）用初等变换化 $\lambda I - A$ 为对角形 $diag\left(f_1(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\right)$，再将 $f_1(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)$ 分解成一次因式的方幂，即可得初等因子。

（3）直接求出 $\lambda I - A$ 的行列式因子 $D_1(\lambda), \cdots, D_n(\lambda)$，由此求出 A 的不变因子再分解，从而得到 A 的初等因子。

（1）、（2）称为初等变换法，（3）称为行列式因子法。

第二步，写出每个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}\,(i=1,2,\cdots,s)$ 对应的Jordan块

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{n_i\times n_i},\quad i=1,2,\cdots,s.$$

第三步，写出以这些Jordan块构成的Jordan标准形

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

即为 A 的Jordan标准形。

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的Jordan标准形。

解：因

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_2]{} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda-4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2) & \lambda-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.$$

可见 A 的不变因子为

$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda - 2, d_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2$,

A 的初等因子为 $\lambda - 2, (\lambda - 2)^2$.

故 A 的Jordan标准形为

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例： 求下列矩阵的Jordan标准形：

（1） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，

（2） $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

解：（1）因

$$\lambda \mathrm{I} - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -6 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

显然有 $D_3(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 4)$，又 $\lambda I - A$ 中有二阶子式

$$D_{13} = \begin{vmatrix} -6 & \lambda - 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

因为 $D_2(\lambda)$ 整除每个二阶子式，且 $D_2(\lambda) | D_3(\lambda)$，所以 $D_2(\lambda)=1$，从而 $D_1(\lambda)=1$.

于是 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, \quad d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda+1)^2(\lambda-4).$$

得 A 的初等因子为 $(\lambda+1)^2,(\lambda-4)$，故 A 的Jordan标准形为

$$J_A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

（2）因

$$\lambda I - B = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

易得 $D_4(\lambda) = \det(\lambda I - B) = (\lambda - 1)^4$，又可找到 $\lambda I - B$ 中的两个三阶子式

$$D_{44} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2,$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & -1 \\ 7 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - 11.$$

因 $\left((\lambda-2)(\lambda-1)^2, -\lambda^2+2\lambda-11\right)=1$， 所以 $D_3(\lambda)=1$, 进而有 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$， 得 B 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, \quad d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4.$$

于是 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^4$，故 B 的Jordan标准形为

$$J_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例：求矩阵 A 的 Jordan 标准形及相似变换矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

解：

$$\lambda \mathrm{I} - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

A 的不变因子为 $d_1(\lambda) = 1$，$d_2(\lambda) = 1$，$d_3(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$，则 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2$，$\lambda-2$，

故 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

设相似变换矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)$，由 $P^{-1}AP=J$，即 $AP=PJ$ 得

$$\begin{cases} Ap_1 = p_1 \\ Ap_2 = p_1 + p_2 \\ Ap_3 = 2p_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (\mathrm{I}-A)p_1 = 0 \\ (\mathrm{I}-A)p_2 = -p_1 \\ (2\mathrm{I}-A)p_3 = 0 \end{cases}$$

可见 p_1 为特征值 1 的特征向量，$p_1=(1,-1,2)^T$， p_3 为特征值 2 的特征向量，$p_3=(0,1,0)^T$. 求解 $(\mathrm{I}-A)x=-p_1$ 可得 p_2.

由

$$(\mathrm{I}-A,-p_1)\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1/2&-1/2\\0&1&1/2&-1/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得通解

$$x=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)^T+k\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T\quad(k\in C)$$

取 $k=1$，得 $p_2=(0,-1,1)^T$，从而

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

6. 设 $A \in C^{n\times n}$，$f(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 为一多项式，如何计算 $f(A)$ 呢？

设 A 的Jordan标准形为

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

则 $A = PJ_AP^{-1}$，因 $A^m = PJ_A^mP^{-1}$，所以

$$f(A) = Pf(J_A)P^{-1} = P\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix}P^{-1}.$$

其中

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!} f^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$