命题

Proposition

考虑由方法一确定的信息素，则 $X_t = (\tau(t), s_t)$ 依概率 1 收敛到 $X^* = (\tau^*, s^*)$，其中 s^* 为最优路径， τ^* 为

$$\tau_{ij}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{|s^*|}, & (i,j) \in s^* \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

命题

Proposition

在 *MAX-MIN* 中， 令

$$\tau_{\min}(t) = \frac{c_t}{\ln(t+1)}, \quad t \geq 1$$

其中 $\lim_{t\to\infty} c_t > 0$, 则 $X_t = (\tau(t), s_t)$ 依概率 *1* 收敛到 $X^* = (\tau^*, s^*)$.

命题

Proposition

考虑由方法三确定的信息素， 则

1. 对任何 τ_{ij}, 有:

$$\lim_{t\to\infty} \tau_{ij}(t) \leq \tau_{\max} = \frac{1}{\rho} g(s^*).$$

2. 找到最优解后, $\tau_{ij}^*(t)$ 单调增加, 且

$$\forall (i,j) \in s^* : \lim_{t\to\infty} \tau_{ij}^*(t) = \tau_{\max} = \frac{1}{\rho} g(s^*).$$

证明

在任何时刻，每条边 (i,j) 被加的信息素量最大值为 $g(s^*)$. 显然, 在 $t=1$ 时刻, 最大可能的信息素为 $(1-\rho)\tau_0+g(s^*)$, 在 $t=2$ 时刻, 是 $(1-\rho)^2\tau_0+(1-\rho)g(s^*)+g(s^*)$, 依此类推. 因此由信息素的挥发, 在 t 时刻的信息素有上界

$$\tau_{ij}^{\max}(t)=(1-\rho)^t\tau_0+\sum_{i=1}^{t}(1-\rho)^{t-i}g(s^*).$$

因为 $0<\rho<1$, 这个和式收敛到

$$\tau_{\max}=\frac{1}{\rho}g(s^*).$$

Theorem

Theorem

方法三的蚂蚁转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\tau_{ij}(t-1)}{\sum\limits_{c_k \in J_{c_i}} \tau_{ik}(t-1)}, & \text{如果 } (c_i, c_j) \in J_{c_i} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

设 $P^*(t)$ 为算法在前 t 次迭代中至少找到一次最优解的概率. 那么, 对任意小的 $\varepsilon > 0$ 和充分大的 t, 有 $P^*(t) \geq 1 - \varepsilon$, 且 $\lim\limits_{t \to \infty} P^*(t) = 1$.

证明

因为信息素介于 $\tau_{\min}$ 和 $\tau_{\max}$, 从而可保证蚂蚁的转移概率至少有 $p_{\min} > 0$. 而 $p_{\min}$ 的一个下界可为

$$p_{\min} \geq \hat{p}_{\min} = \frac{\tau_{min}}{(N_c - 1)\tau_{\max} + \tau_{\min}}$$

其中 N_c 是顶点集的维数. 那么任何解 s', 包括最优解 s^*, 可依概率 $\hat{p} \geq \hat{p}_{\min}^n > 0$ 产生, 其中 $n < +\infty$ 是最大序列长度. 因为只要在一个时刻有一个蚂蚁找到最优解就可以, 所以 $P^*(t)$ 的下界可由下式给出

$$P^*(t) = 1 - (1 - \hat{p})^t \geq 1 - (1 - \hat{p}_{\min}^n)^t.$$

结论成立.