第六章 矩阵函数

§6.1 矩阵函数的定义及计算

一、矩阵函数的定义及性质

1. 定义: 设幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为 r，且

当 $|x| < r$ 时，该幂级数收敛于 $f(x)$，即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \quad |x| < r$$

若$A \in C^{n\times n}$满足$\rho(A) < r$，则矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$

是绝对收敛的，其和称为矩阵函数，记为$f(A)$，即

$$f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$$

最常用的函数的幂级数展开主要有：

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!},\quad (\forall x\in C)$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\quad (\forall x\in C)$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\quad (\forall x\in C)$$

$$(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k,\quad (|x|<1)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1},\quad (|x|<1)$$

它们所对应的矩阵函数分别为

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad (\forall A \in C^{n\times n})$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \quad (\forall A \in C^{n\times n})$$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}, \quad (\forall A \in C^{n\times n})$$

$$(\mathrm{I} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, \quad (\rho(A) < 1)$$

$$\ln(\mathrm{I} + A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} A^{k+1}, \quad (\rho(A) < 1)$$

在实际应用中，还经常用到含参数的矩阵函数

$$f(At)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(At)^k$$

对于任意$t\in C$ 和$A\in C^{n\times n}$，e^{At}、$\sin(At)$、$\cos(At)$都是收敛的，当$|t|\rho(A)<1$ 时，$(\mathrm{I}-At)^{-1}$ 和$\ln(\mathrm{I}+At)$也是收敛的。

常用矩阵函数的基本性质：

2. 定理：假设$A \in C^{n\times n}$，则有

(1) $\sin(-A) = -\sin A$, $\cos(-A) = \cos A$;

(2) $e^{iA} = \cos A + i\ \sin A$,

(3) $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$, $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$;

证明：按照 $\sin A$ 和 $\cos A$ 的定义直接验证(1)即可；

根据 e^{At} 的定义，可得

$$e^{iA}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^k}{k!}A^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^k+i\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^k$$

$$=\cos A+i\sin A$$

同理可得 $e^{-iA}=\cos A-i\sin A$，从而有

$$\cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA}),\ \sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA})$$

成立。 证毕

3. 定理：设 $A, B \in C^{n\times n}$，且 $AB = BA$，则有

(1) $e^{A+B} = e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A}$;

(2) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$;

(3) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.

3. 定理：设 $A, B \in C^{n\times n}$，且 $AB = BA$，则有

(1) $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$;

(2) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$;

(3) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

推论：设 $A \in C^{n\times n}$，则有

(1) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;

(2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A, \quad \sin 2A = 2\sin A \cos A$;

二、矩阵函数的计算

1. 利用Hamilton-Cayley 定理计算矩阵函数

基本思想是：利用Hamilton-Cayley 定理找出矩阵方幂之间的关系，然后化简矩阵幂级数，从而求出矩阵函数。

二、矩阵函数的计算

1. 利用Hamilton-Cayley 定理计算矩阵函数

基本思想是：利用Hamilton-Cayley 定理找出矩阵方幂之间的关系，然后化简矩阵幂级数，从而求出矩阵函数。

例：已知四阶矩阵的特征值分别为$\pi, -\pi, 0, 0$，求$\sin A$ 、$\cos A$.

证明：由于$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - \pi^2\lambda^2$，根据Hamilton

-Cayley 定理可得$A^4 - \pi^2 A^2 = 0$，从而有

$$A^{2k} = \pi^2 A^{2k-2} = \cdots = \pi^{2k-2}A^2,$$

$$A^{2k+1} = A^{2k}A = \cdots = \pi^{2k-2}A^3, \quad k = 2, 3, \cdots$$

所以

$$\sin A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1} = A - \frac{1}{3!}A^3 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}$$

$$= A - -\frac{1}{3!}A^3 + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k-2}\right)A^3 = A - \frac{1}{\pi^2}A^3$$

$$
\begin{aligned}
\cos A &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} = I - \frac{A^2}{2!} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} \\
&= I - \frac{A^2}{2!} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \pi^{2k-2} A^2 \\
&= I - \frac{A^2}{2!} + \frac{1}{\pi^2}\left(\cos\pi - 1 + \frac{\pi^2}{2!}\right) A^2 \\
&= I + \frac{1}{\pi^2}(\cos\pi - 1) A^2 = I - \frac{2}{\pi^2} A^2
\end{aligned}
$$

2. 利用相似对角化计算矩阵函数

对于$A \in C^{n\times n}$，若存在矩阵$P \in C_n^{n\times n}$，使得

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \Lambda$$

则有

$$f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = P(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Lambda^k)P^{-1}$$

$$= Pdiag(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n))P^{-1}$$

同理可得

$$f(At) = Pdiag(f(\lambda_1 t), f(\lambda_2 t), \cdots, f(\lambda_n t))P^{-1}$$

例：已知$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，求$e^{At}$、$\sin A$.

例：已知$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}$，求$e^{At}$、$\sin A$.

解：由于$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$，容易求得存在

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

使得$P^{-1}AP=diag(1,2,-2)$.

因此有

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} - e^{2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} - e^{t} & e^{t} - e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} - e^{t} & e^{t} - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\sin A = P \begin{pmatrix} \sin t & & \\ & \sin 2t & \\ & & -\sin 2t \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2t & -2\sin 2t & 2\sin 2t \\ \sin 2t - \sin t & \sin t - 2\sin 2t & 2\sin 2t \\ \sin 2t - \sin t & \sin t - \sin 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$$

(3.) 利用Jordan 标准型计算矩阵函数

设$A \in C^{n\times n}$，则一定存在满秩方阵$P \in C_n^{n\times n}$ 将A通过相似变换化为Jordan 标准型J，即

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i\times r_i} ,j = 1, \cdots, s)$$

则

$$f(At) = P \begin{pmatrix} f(J_1 t) & & & \\ & f(J_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

其中

$$f(J_i t) = \begin{pmatrix} b_0(\lambda_i) & b_1(\lambda_i)t & \cdots & b_{r_i-1}(\lambda_i)t^{r_i-1} \\ & b_0(\lambda_i) & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & b_1(\lambda_i)t \\ & & & b_0(\lambda_i) \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}, b_k(\lambda_i) = \frac{f^{(k)}(\lambda_i t)}{k!}$$

例：已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

求e^A，$\sin A$.

解：可以求得存在

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

因此

$$f(A) = P\begin{pmatrix} f(2) & f'(2) & \\ & f(2) & \\ & & f(2) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2)-f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2)+f'(2) \end{pmatrix}$$

从而有

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ e^2 & 0 & e^2 \\ e^2 & -e^2 & 2e^2 \end{pmatrix},$$

$$\sin A = \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2 - \cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2 + \cos 2 \end{pmatrix}$$

4. 利用待定系数法求矩阵函数

求解步骤：

(1)求出A的特征值：$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为A 的s 个互异特征值，r_i 为特征值λ_i 的重数，且有$r_1 + \cdots + r_s = n$.

4. 利用待定系数法求矩阵函数

求解步骤：

(1)求出A的特征值：$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为A 的s 个互异特征值，r_i 为特征值λ_i 的重数，且有$r_1 + \cdots + r_s = n$.

(2)假设函数：

$$r(\lambda, t) = a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$$

其中$a_0, \cdots, a_{n-1}$为待定系数。

（3）根据特征值及其重数列出方程组：

$$r^{(k)}(\lambda_i) = t^k f^{(k)}(\lambda_i t), \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, s \\ k = 0, 1, \cdots, r_i - 1 \end{array}$$

并求出系数$a_0, \cdots, a_{n-1}$.

（3）根据特征值及其重数列出方程组：

$$r^{(k)}(\lambda_i) = t^k f^{(k)}(\lambda_i t), \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, s \\ k = 0, 1, \cdots, r_i - 1 \end{array}$$

并求出系数$a_0, \cdots, a_{n-1}$.

（4）计算

$$f(A) = r(A, t) = a_{n-1}(t)A^{n-1} + \cdots + a_1(t)A + a_0(t)I$$

例：已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

求e^{At}，$\sin A$.

例：已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix},$$

求e^{At}，$\sin A$.

解：由于$\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$. 假设

$$r(\lambda)=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$$

由

$$\begin{cases} 4a_2 + 2a_1 + a_0 = e^{2t} \\ 4a_2 + a_1 = te^{2t} \\ 2a_2 = t^2 e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = e^{2t} - 2te^{2t} + 2t^2 e^{2t} \\ a_1 = te^{2t} - 2t^2 e^{2t} \\ a_2 = \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} e^{At} &= a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} & te^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} 4a_2 + 2a_1 + a_0 = \sin 2 \\ a_2 + a_1 = \cos 2 \\ 2a_2 = -\sin 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2\cos 2 - \sin 2 \\ a_1 = 2\sin 2 + \cos 2 \\ a_2 = -\frac{1}{2}\sin 2 \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \sin A &= a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I \\ &= \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2 - \cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2 + \cos 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

§6.2 矩阵函数的导数与积分

一、矩阵函数的导数

1. 定义：若矩阵$A(t)=[a_{ij}(t)]_{m\times n}$ 的每一个元素$a_{ij}(t)$都是变量t 的可微函数，则称$A(t)$ 可微，其导数定义为

$$\frac{dA}{dt}=A'(t)=\left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right)_{m\times n}$$

2. 定理：设$A(t)$ 和$B(t)$ 是两个可进行相应运算的可微矩阵函数，则

(1) $\frac{d}{dt}[A(t) \pm B(t)] = \frac{d}{dt}A(t) \pm \frac{d}{dt}B(t)$;

(2) $\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] = [\frac{d}{dt}A(t)]B(t) + A(t)[\frac{d}{dt}B(t)]$;

(3)若$\lambda(t)$ 为关于t 的可微函数，则有

$$\frac{d}{dt}[\lambda(t)A(t)] = \frac{d\lambda(t)}{dt}A(t) + \lambda(t)\frac{dA(t)}{dt}$$

(4) 若$u=f(t)$ 为关于 t 的可微函数，则有

$$\frac{d}{dt}A(u)=[\frac{d}{du}A(u)]f'(t)$$

(5) 若 $A^{-1}(t)$ 为可微矩阵函数，则有

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)[\frac{d}{dt}A(t)]A^{-1}(t)$$

3. 对于常用的几个矩阵函数，有下面一些性质

定理：设 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$，则有

(1) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$;

(2) $\frac{d}{dt}\sin At = A\cos At = (\cos At)A$;

(3) $\frac{d}{dt}\cos At = -A\sin At = -(\sin At)A$;

例：已知

$$\sin At = \begin{pmatrix} 2\sin 3t - \cos t & \sin 3t + 5\cos t & \sin 3t - \cos t \\ 4\sin 3t + \cos t & 3\sin 3t + 2\cos 2t & \sin 3t - 5\cos t \\ \sin 3t - \cos 3t & \sin 3t + \cos t & 2\sin 3t + 5\cos t \end{pmatrix}$$

求 A .

$\frac{d}{dt}\sin At = A\cos At =$

$$\begin{pmatrix} 6\cos 3t+\sin t & 3\cos 3t-5\sin t & 3\cos 3t+\sin t \\ 12\cos 3t-\sin t & 9\cos 3t-4\sin 2t & 3\cos 3t+5\sin t \\ 3\cos 3t+3\sin 3t & 3\cos 3t-\sin t & 6\cos 3t-5\sin t \end{pmatrix}$$

当 $t=0$ 时，$\cos 0 = I$，从而有

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 12 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

.

4. 定理：设

$$f(X) = f(x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n}, \cdots x_{m1}, \cdots, x_{mn})$$

是一个以矩阵 $X = (x_{ij})_{m\times n}$ 为自变量的函数，且对每个分量的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}$ $(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$ 都存在，则 f 关于矩阵变量 X 的导数 $\frac{df}{dX}$ 定义为

$$\frac{df}{dX} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

特别地，当X为一个列向量，即 $f(x) = f(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为关于向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$ 为自变量的多元函数，则

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right)^T$$

即为多元函数 f 的梯度 $\mathrm{grad} f$.

例：设$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为给定的矩阵，对于

$$f(x) = x^T Ax, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$$

求$\frac{d}{dx}f$.

例：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为给定的矩阵，对于

$$f(x)=x^TAx,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$$

求$\frac{d}{dx}f$.

解：由于

$$\begin{aligned}f(x)=x^TAx&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\\&=(\sum_{q=1}^{n}a_{iq}\xi_q)\xi_i+(\sum_{p=1}^{n}a_{pi}\xi_p)\xi_i+\sum_{\substack{p=1\\p\neq i}}^{n}\sum_{\substack{q=1\\p\neq i}}^{n}a_{pq}\xi_p\xi_q\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\xi_q + \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\xi_p$$

从而

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{q=1}^{n} a_{1q}\xi_q + \sum\limits_{p=1}^{n} a_{p1}\xi_p \\ \vdots \\ \sum\limits_{q=1}^{n} a_{nq}\xi_q + \sum\limits_{p=1}^{n} a_{pn}\xi_p \end{pmatrix}$$

$$= Ax + A^T x = (A + A^T)x$$

二、矩阵函数的积分

1. 定义：若矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 的每个元素 $a_{ij}(t)$ 都是区间 $[t_0,t_1]$ 的可积函数，则称 $A(t)$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上可积，并定义 $A(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t)dt=\left(\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

2. 定理：设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$，$B(t)=(b_{ij}(t))_{m\times n}$ 都是区间 $[t_0,t_1]$ 上可积的矩阵函数，$C=(c_{ij})_{n\times p}$ 为常数矩阵，则有

(1) $\int_{t_0}^{t_1}[A(t)\pm B(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\pm\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt$;

(2) $\int_{t_0}^{t_1}[A(t)C]dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\right)C$;

$$\int_{t_0}^{t_1}[CA(t)]dt=C\left(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\right)$$

(3) $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} A(s)ds = A(t), \ \ t \in [t_0, t_1],$

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{\phi(t)} A(s)ds = A(t)\phi'(t) \ ;$$

(4) $\int_{t_0}^{t_1} A'(t)dt = A(t_1) - A(t_0).$

(3) $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} A(s)ds = A(t), \quad t \in [t_0, t_1],$

$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{\phi(t)} A(s)ds = A(t)\phi'(t)$;

(4) $\int_{t_0}^{t_1} A'(t)dt = A(t_1) - A(t_0).$

例：设矩阵函数$A(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{t} & \cos t \\ \sin 2t & t^2 & \frac{1}{1+t} \\ 3t & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

求$\int_0^1 A(t)dt$，$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} A(t)dt$.

解:

$$\int_0^1 A(t)dt = \begin{pmatrix} \int_0^1 e^{2t}dt & \int_0^1 te^t dt & \int_0^1 \cos t dt \\ \int_0^1 \sin 2t dt & \int_0^1 t^2 dt & \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt \\ \int_0^1 3t dt & \int_0^1 1 dt & \int_0^1 0 dt \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^2-1) & 1 & \sin 1 \\ \frac{1}{2}(1-\cos 2) & \frac{1}{3} & \ln 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} A(t)dt$$

$$= 2xA(x^2)$$

$$= 2x\begin{pmatrix} e^{2x^2} & x^2e^{x^2} & \cos x^2 \\ \sin 2x^2 & x^4 & \frac{1}{1+x^2} \\ 3x^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

§6.3 利用矩阵函数求解线性常系数微分方程

一、一阶线性常系数常微分方程组

$$
\begin{cases}
\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\
\qquad \vdots \\
\frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t)
\end{cases}
$$

其中 t 为自变量，a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为常数。如果已知$x_i(t_0) = c_i), (i = 1, 2, \cdots, n)$，求解该方程组。

若记

$$A=(a_{i,j})_{n\times n},\qquad x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T$$

$$f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T,\quad c=(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0))^T$$

则上述问题可以表示为求解初值问题

$$\begin{cases}\frac{dx(t)}{dt}=Ax+f\\ x(t_0)=c\end{cases}$$

其通解为

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-As}f(s)ds$$

例：求解常系数微分方程组初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax + f \\ x(0) = c \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = (1, -1, -2)^T \quad x(0) = c = (1, 1, 1)^T$$

解：在前面例子中已经得到

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} & te^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}$$

所以

$$\int_0^t e^{-As} f(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} \\ -e^{-2s} \\ -2e^{-2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) \\ e^{-2t} - 1 \end{pmatrix}$$

从而得到方程组的解为：

$$x(t) = e^{At}c + e^{At}\int_0^t e^{-As}f(s)ds$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3e^{2t} - 1) \\ \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) + te^{2t} \\ te^{2t} + 1 \end{pmatrix}$$

二、n 阶线性常系数微分方程

许多实际问题中需要考虑下面的 n 阶常系数线性方程的初值问题：

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 都为常数，$y = y(t)$ 为待求函数。

设$x_1=y$，$x_2=y'=x_1'$, $\cdots$, $x_n=y^{(n-1)}=x_{n-1}'$，则

有$x_1'=x_2, x_2'=x_3, \cdots, x_n'=y^{(n)}$. 记

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T, x(0)=(y_0, y'(0),\cdots,y_0^{(n-1)})^T$$

则初值问题可转化为

$$\frac{dx(t)}{dx} = Ax(t) + Bf(t)$$

$$x(0) = x_0$$

该问题的解为

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}Bf(s)ds$$

原问题的解 $y(t) = x_1(t)$，因此有

$$y(t) = (1, 0, \cdots, 0)[e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}Bf(s)ds]$$

例：求方程$\begin{cases} y''' - y'' - y' + y = e^t \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$的解.

例：求方程$\begin{cases} y''' - y'' - y' + y = e^t \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$的解.

解：设 $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$，其中$x_1 = y$, $x_2 = y'$,$x_3 = y''$，记

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则所求解问题转化为求解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + be^{t} \\ x(0) = (0, 0, 0)^{T} \end{cases}$$

该线性微分方程组的解为

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}be^{s}ds = e^{At}\int_0^t e^{-As}be^{s}ds$$

由于$\det(\lambda I - A) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$，设

$$r(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

由

$$\begin{cases} a_2 - a_1 + a_0 = e^{-t} \\ a_2 + a_1 + a_0 = e^{t} \\ 2a_2 + a_1 = te^{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) \\ a_1 = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ a_2 = -\frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}) \end{cases}$$

因此有

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= a_2A^2 + a_1A + a_0I \\
&= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_2 + a_0 & a_2 + a_1 \\ a_2 - a_1 & a_1 & 2a_2 + a_1 + a_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

从而

$$\int_0^t e^{-As} b e^s ds = \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s - \frac{1}{4}(1-e^{2s}) \\ -\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}(1-e^{2s}) \\ -\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}(3-e^{2s}) \end{pmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 - 2t^2 - 2t + e^{2t} \\ 1 - 2t^2 + 2t - e^{2t} \\ -1 - 2t^2 + 6t + e^{2t} \end{pmatrix}$$

所以

$$
\begin{aligned}
y &= (1,0,0)e^{At}\int_0^t e^{-As}f(s)ds \\
&= \frac{1}{8}(a_0, a_1, a_2)\begin{pmatrix} -1-2t^2-2t+e^{2t} \\ 1-2t^2+2t-e^{2t} \\ -1-2t^2+6t+e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t}
\end{aligned}
$$