期望值模型

一般地，如果我们希望在某期望约束条件下极大化期望收益，那么有以下期望值模型 (EVM)：

$$\begin{cases} \max\ E[f(\mathbf{x},\xi)] \\ \text{subject to:} \\ \qquad E[g_j(\mathbf{x},\xi)] \le 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

其中 $\mathbf{x}$ 是决策向量，ξ 是随机向量，$f(\mathbf{x},\xi)$ 是收益函数，$g_j(\mathbf{x},\xi)$ 是随机约束函数，$j = 1, 2, \cdots, p$.

Definition

一个解 $\mathbf{x}$ *是可行的当且仅当* $E[g_j(\mathbf{x}, \xi)] \leq 0,\ j = 1, 2, \cdots, p$. *如果可行解* $\mathbf{x}^*$ *对任何可行解* $\mathbf{x}$ *满足* $E[f(\mathbf{x}^*, \xi)] \geq E[f(\mathbf{x}, \xi)]$*，则称可行解* $\mathbf{x}^*$ *是 EVM 的最优解.*

许多情况下, 有多个目标. 因此我们有以下期望值多目标规划 (EVMOP):

$$\begin{cases} \max \left[E[f_1(\mathbf{x},\xi)], E[f_2(\mathbf{x},\xi)], \cdots, E[f_m(\mathbf{x},\xi)]\right] \\ \text{subject to:} \\ \qquad E[g_j(\mathbf{x},\xi)] \le 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

其中 $f_i(\mathbf{x},\xi)$ 是收益函数, $i = 1, 2, \cdots, m$.

Definition

一个可行解 $\mathbf{x}^*$ 称为是 EVMOP 的 Pareto 解 如果不存在其它可行解 $\mathbf{x}$ 使得

$$E[f_i(\mathbf{x},\xi)] \geq E[f_i(\mathbf{x}^*,\xi)], \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

且至少有一个 j 使得 $E[f_j(\mathbf{x},\xi)] > E[f_j(\mathbf{x}^*,\xi)]$.

我们也可以根据优先级及目标水平对随机决策系统 建立期望值目标规划 (EVGP):

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}} \sum\limits_{j=1}^{l} P_j \sum\limits_{i=1}^{m} (u_{ij} d_i^+ \vee 0 + v_{ij} d_i^- \vee 0) \\ \text{subject to:} \\ \qquad E[f_i(\mathbf{x}, \xi)] - b_i = d_i^+, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ \qquad b_i - E[f_i(\mathbf{x}, \xi)] = d_i^-, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ \qquad E[g_j(\mathbf{x}, \xi)] \le 0, \qquad\qquad j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$