矩阵分析与计算

习题解答与提示

教材——

朱元国，饶玲，严涛，张军，李宝成 编，矩阵分析与计算，北京：国防工业出版社，2010年8月

第1章 习题解答与提示

1. (1)取 $e=(1,1,\cdots,1)^T$，则有Ae=1e，所以1为A的特征值。

   (2) 由$Ae=1e \Rightarrow A^{-1}e=1\cdot e$，故$A^{-1}$的行和也是1.

   (3) 由性质1.5知$f(A)e=f(1)e$，因此$f(A)$的行和相等，且为$f(1)$.

2. (两个可对角化矩阵$A,B\in C^{n\times n}$称为同时可对角化的，如果存在同一个相似变换矩阵$S\in C^{n\times n}$，使得$S^{-1}AS$和$S^{-1}BS$同为对角矩阵。)

   充分性 若A和B同时可对角化，则存在可逆矩阵P，使得

   $$A=PDP^{-1},B=P\Lambda P^{-1},$$

   其中 D 和 Λ 是对角矩阵。于是有

   $$AB=\left(PDP^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)=PD\Lambda P^{-1}=P\Lambda DP^{-1}$$
   $$=\left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)=BA,$$

   即A与B可交换。

   必要性 若AB=BA. 设λ为A的特征值，ξ为对应的特征向量，即$A\xi=\lambda\xi$.则当$B\xi\neq 0$时，由$A(B\xi)=AB\xi=BA\xi=\lambda(B\xi)$，知$\xi,B\xi$都是对应$\lambda$的特征向量，而$\lambda$是$A$的单特征值，所以$\xi,B\xi$线性相关。因此，存在常数$\mu$，使$B\xi=\mu\xi$，即$\xi$是$B$的对应特征值$\mu$的特征向量。

   当$B\xi=0$时，ξ是对应B的0特征值的特征向量。故A的特征向量都是B的特征向量，并且使A对角化的这些特征向量所组成的同一个矩阵也使B对角化。

3. (1) $\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda^2+5\lambda \\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix}$

   $$\to \begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda^2+5\lambda \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\left(\lambda^2-10\lambda-3\right) \end{pmatrix} = S\left(\lambda\right).$$

(2) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\left(\lambda+1\right) \end{pmatrix} = S\left(\lambda\right).$$

(3) $S\left(\lambda\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\left(\lambda-1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\left(\lambda-1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2\left(\lambda-1\right)^2 \end{pmatrix}.$

4. 因$A\left(\lambda\right)$，$B\left(\lambda\right)$有相同的不变因子1，$\lambda-1$，$\left(\lambda-1\right)^2$，所以它们等价。

5. (1) 因A与B有相同的初等因子$\left(\lambda-2\right),\left(\lambda-2\right)^2$，所以$A$与$B$相似。

(2) A与B也有相同的初等因子$\left(\lambda-3\right),\left(\lambda-3\right)^2$，故$A\sim B$.

6. (1)A与B的初等因子相同，均为$\left(\lambda-a\right)^n$，所以A与B相似。

(2) A 的初等因子为 $\left(\lambda-a\right)^n$，而对

$$\left(\lambda I-B\right) = \begin{pmatrix} \lambda-a & -1 & & \\ & \lambda-a & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -\varepsilon & & & \lambda-a \end{pmatrix},$$

有

$$D_n\left(\lambda\right) = \det\left(\lambda I-B\right) \overset{\text{按第一列展开}}{=\!=\!=\!=\!=} \left(\lambda-a\right)^n-\varepsilon,$$

又 $(\lambda I-B)$ 有一个 $n-1$ 阶子式

$$H_{n-1}(\lambda)=\begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda-a & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda-a & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1},$$

由 $D_{n-1}(\lambda)\,|D_n(\lambda)$ 和 $D_{n-1}(\lambda)\,|H_{n-1}(\lambda)$，知必有 $D_{n-1}(\lambda)=1$，进而得 $D_1(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1$. 于是 B的不变因子为 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1, d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n-\varepsilon$. 所以 B 的初等因子与 A 的初等因子不相同。故 A 与 B 不相似。

7. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. (1) $J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 对$\lambda_1=\lambda_2=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$，得 $p_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$，再求解 $(\lambda_1 I-A)x=-p_1$，得 $p_2=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 对$\lambda_3=4$，求解$(\lambda_3 I-A)x=0$，得$p_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，故$P=$

$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$P^{-1}AP=J.$

(2) 因$D_4(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$，又余子式$D_{41}=-4\lambda(\lambda+1)$，所以$D_3(\lambda)=1$，从而$D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，$A$的不变因子为$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$，$A$的初等因子为$(\lambda-1)^4$，故$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\lambda_1=1$（4重），下求 $P.$

先求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$， 得 $p_1=(8,0,0,0)^T$, 再解

$$(\lambda_1 I-A)x=-p_1,\ \text{得}\ p_2=(4,4,0,0)^T,$$

$$(\lambda_1 I-A)x=-p_2,\ \text{得}\ p_3=(0,-1,2,0)^T,$$

$$(\lambda_1 I-A)x=-p_3,\ \text{得}\ p_4=(0,1,-2,1)^T.$$

因此得

$$P=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $P^{-1}AP=J.$

9. 在 A 的Jordan标准形中，特征值不为 λ_0 的子块列在一起记为 B，特征值为 λ_0 的子块列在一起记为 B_0，即有

$$J=\begin{pmatrix} B & \\ & B_0 \end{pmatrix},\ A=P\begin{pmatrix} B & \\ & B_0 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

因 λ_0 为 A 的 r 重特征值，因此 B_0 是 r 阶的，B 为 $n-r$ 阶的，而 B_0 的主对角线上子块都形如 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$，每个子块阶数不超过$r$，所以

$$(\lambda_0 I - A)^r = (\lambda_0 PP^{-1} - PJP^{-1})^r = P(\lambda_0 I - J)^r P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_0 I_1 - B & \\ & \lambda_0 I_2 - B_0 \end{pmatrix}^r P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} (\lambda_0 I_1 - B)^r & \\ & (\lambda_0 I_2 - B_0)^r \end{pmatrix} P^{-1}$$

因子块$\lambda_0 I_1 - B$的主对角线上元素都不为零，它是$n-r$阶非奇异的，而$\lambda_0 I_2 - B_0$的主对角线上子块都形如$J_i' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，每个子块的阶数不超过 r，所以有 $(J_i')^r = 0$，从而 $(\lambda_0 I_2 - B_0)^r = 0$。因此，$(\lambda_0 I - A)^r = P \begin{pmatrix} (\lambda_0 I_1 - B)^r & \\ & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$，但 $\lambda_0 I_1 - B$ 是 $n-r$ 阶非奇异的，故 $rank(\lambda_0 I - A)^r = rank(\lambda_0 I_1 - B)^r = rank(\lambda_0 I_1 - B) = n - r$。

10. A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$.

(1) 令$g(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^5 - \lambda^2 + 8\lambda + 1$，则 $g(A)$ 即为所求。用 $f(\lambda)$ 去除 $g(\lambda)$，得 $g(\lambda) = (\lambda^3 + \lambda) f(\lambda) + 7\lambda + 1$，所以$g(A) = 7A + I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 令 $g(\lambda)=\lambda^{100}$，设 $g(\lambda)=f(\lambda)\varphi(\lambda)+r(\lambda)$，其中 $r(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$.

由

$$\begin{cases} g(1)=r(1), \\ g'(1)=r'(1), \\ g(-1)=r(-1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=100 \\ a-b+c=1 \end{cases}$$

得 $a=50, \quad b=0, \quad c=-49$. 所以

$$\begin{aligned} A^{100} &= g(A)=f(A)\varphi(A)+r(A)=r(A)=50A^2-49I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11. $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^2-6\lambda+7$.令$g(\lambda)=2\lambda^4-12\lambda^3+19\lambda^2-29\lambda+37$，且$g(\lambda)=f(\lambda)(2\lambda^2+5)+\lambda+2$，所以$B=g(A)=A+2I=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$， $\det B=23\neq 0$，故B可逆。

又$\det(\lambda I-B)=\lambda^2-10\lambda+23$,于是

$$B^2-10B+23I=0 \Rightarrow B(B-10I)=-23I.$$

因此$B^{-1}=-\frac{1}{23}(B-10I)=-\frac{1}{23}(A+2I-10I)=-\frac{1}{23}(A-8I)$.

12. (1) $m_A(\lambda)=(\lambda-3)^2$；(2) $m_B(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$；(3) $m_C(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$.

13. 记$\varphi(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)$，则$\varphi(A)=0$，即$\varphi(A)$为$A$的化零多项式，故$m_A(\lambda)\,|\,\varphi(\lambda)$.而$\varphi(\lambda)$无重根，从而$m_A(\lambda)$无重根，故$A$可对角化。

14. (1) 因$A^H=A$，A 为Hermite矩阵，所以为正规矩阵。 A 的特征值

为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，对应的特征向量分别为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}.$$

将它们单位化得

$$\varepsilon_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \varepsilon_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}.$$

可得酉矩阵 $U=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$，且 $U^{-1}AU=diag\,(-1,1,-2)$.

(2) A 也为Hermite矩阵，所以也是正规矩阵。

A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_3=-\sqrt{2}$. 对应的特征向量分别为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-i\\1\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-i\\1\end{pmatrix}.$$

单位化得 $\varepsilon_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-i\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-i\\1\end{pmatrix}$. 故酉矩阵

$$U=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{i}{\sqrt{2}}&-\frac{i}{2}&-\frac{i}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ U^{-1}AU=\begin{pmatrix}0&&\\&\sqrt{2}&\\&&-\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

15. 必要性 如果A是Hermite矩阵，则对任意$x \in C^n$，因x^HAx是数，所以

$$\overline{(x^HAx)} = \left(x^HAx\right)^H = x^HA^Hx = x^HAx.$$

故 x^HAx 是实数。

充分性 因对任意$x \in C^n$，x^HAx为实数，所以$x^HAx = \left(x^HAx\right)^H = x^HA^Hx$，即$x^H\left(A - A^H\right)x = 0$.令$B = A - A^H = (b_{kj})$，则对任意$x \in C^n$，$x^HBx = 0$.特别地，

(1) 取$x = (0, \cdots, 0, \underset{t}{1}, 0, \cdots, 0)^T$，有$x^HBx = b_{tt} = 0,\ t = 1, 2, \cdots, n.$

(2) 取$x = (0, \cdots, 0, \underset{k}{1}, 0, \cdots, 0, \underset{j}{1}, 0, \cdots, 0)^T$，有$x^HBx = b_{kk} + b_{kj} + b_{jk} + b_{jj} = 0$，由(1)知$b_{kj} + b_{jk} = 0.$。

(3) 取$x = (0, \cdots, 0, \underset{k}{1}, 0, \cdots, 0, \underset{j}{i}, 0, \cdots, 0)^T\ \left(i = \sqrt{-1}\right)$，有$x^HBx = b_{kk} + ib_{kj} - ib_{jk} + b_{jj} = 0$，因此$b_{kj} - b_{jk} = 0$，由(2)得$b_{kj} = b_{jk} = 0$，即$B$=0，所以$A = A^H$，即$A$是Hermite矩阵。

16. 必要性显然。

充分性 因A正规，所以存在酉矩阵U，使

$$U^HAU = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right) = \Lambda$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为实数。于是 $A = U\Lambda U^H$, 且 $A^H = U^H\bar{\Lambda}U = U^H\Lambda U = A.$

17. 必要性 若A是Hermite正定矩阵，则A的特征值$\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，且存在酉矩阵$U$，使得$U^HAU = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$。于是

$$A = U\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right)U^HU\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right)U^H$$

$= S^2$, 其中 $S = Udiag\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right)U^H$ 也是Hermite正定矩阵。

充分性 若 $A = S^2$，S 为Hermite正定阵，则$A = SS = S^HS$，即得 A 正定。

18. 因$(AB)^H = B^H A^H = BA = AB$，所以$AB$是Hermite矩阵。又$A$、$B$正定，存在 n 阶可逆矩阵 P、Q，使 $A = P^H P$, $B = Q^H Q$. 于是

$$Q\,(AB)\,Q^{-1} = QP^H PQ^H QQ^{-1} = \left(PQ^H\right)^H \left(PQ^H\right) = C,$$

其中PQ^H可逆。因此C为Hermite正定矩阵，从而得AB的特征值均大于零，即得AB为正定矩阵。

19. (1) 记$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^H & a_{nn} \end{pmatrix}$，其中$\alpha = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n})^T$. 因$A_{n-1}$正定，所以$A_{n-1}$可逆，且$A_{n-1}^{-1}$也是正定矩阵。由分块矩阵的初等变换可得等式：

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha^H A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^H & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \alpha^H A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

两边取行列式可得 $\det A = \left(a_{nn} - \alpha^H A_{n-1}^{-1}\alpha\right) \det A_{n-1}$，而 $\alpha^H A_{n-1}^{-1}\alpha \geq 0$，且等号成立的充要条件是 $\alpha = 0$. 所以

$$\det A \leq a_{nn} \det A_{n-1}$$

且等号成立当且仅当

$$a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0.$$

(2) 由(1)递推下去，有 $\det A \leq a_{nn} \det A_{n-1} \leq a_{nn} a_{n-1,n-1} \det A_{n-2} \leq \cdots \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

第2章 习题解答与提示

1. 设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$, $\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T$. 则

$$|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y}|=\left|\sum_{i=1}^n\bar{\xi}_i\eta_i\right|\le\sum_{i=1}^n|\xi_i||\eta_i|\le\sum_{i=1}^n|\xi_i|\max_{1\le i\le n}|\eta_i|=\|\boldsymbol{x}\|_1\|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

从而 $\max\limits_{\|y\|_\infty=1}|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y}|\le\|\boldsymbol{x}\|_1$. 如果 $\boldsymbol{x}=0$, 等式显然成立。设 $\boldsymbol{x}\ne0$, 令

$$\eta_i^*=\begin{cases}\frac{\xi_i}{|\xi_i|}, & 若\ \xi_i\ne0\\ 0, & 若\ \xi_i=0\end{cases}$$

记 $\boldsymbol{y}^*=(\eta_1^*,\eta_2^*,\cdots,\eta_n^*)^T$. 则

$$|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y}^*|=\left|\sum_{i=1}^n\bar{\xi}_i\eta_i\right|=\sum_{i=1}^n|\xi_i|=\|\boldsymbol{x}\|_1$$

故 $\|\boldsymbol{x}\|_1=|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y}^*|\le\max\limits_{\|y\|_\infty=1}|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y}|$. 所以 $\|\boldsymbol{x}\|_1=\max\limits_{\|y\|_\infty=1}|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y}|$. 另一个等式可类似证明.

2. 设 A^HA 的特征值为 λ_i, 则 $\lambda_i\ge0$, $i=1,2,\cdots,n$.

$$\|A\|_2^2=\rho(A^HA)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i=tr(A^HA)=\|A\|_F^2.$$

另外

$$\|A\|_F^2=tr(A^HA)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\le n\max_i\lambda_i=n\rho(A^HA)=n\|A\|_2^2.$$

3. $A^k=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^k} & \frac{k}{2^{k-1}}\\ 0 & \frac{1}{2^k}\end{pmatrix}$, $\rho(A^k)=\frac{1}{2^k}$, $\|A^k\|_1=\frac{2k+1}{2^k}$. 因为

$$A^k(A^k)^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^k} & \frac{k}{2^{k-1}}\\ 0 & \frac{1}{2^k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^k} & 0\\ \frac{k}{2^{k-1}} & \frac{1}{2^k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4k^2+1}{4^k} & \frac{k}{2^{2k-1}}\\ \frac{k}{2^{2k-1}} & \frac{1}{4^k}\end{pmatrix}$$

所以 $A^k(A^k)^T$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{4^k}(\sqrt{k^2+1}\pm k)^2$. 从而

$$\|A^k\|_2=\sqrt{\rho(A^k(A^k)^T)}=\frac{1}{2^k}(\sqrt{k^2+1}+k).$$

4. (1) 对 $c \geq 1$，因为

(i) $c\|A\| \geq 0$, 且 $c\|A\| = 0 \Longleftrightarrow \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$;

(ii) $c\|\lambda A\| = c|\lambda|\|A\| = \lambda c\|A\|$;

(iii) $c\|A+B\| \leq c\|A\| + c\|B\|$;

(iv) $c\|AB\| \leq c\|A\|\|B\| \leq c\|A\| \cdot c\|B\|$,

所以，$c\|\cdot\|$ 是矩阵范数。

(2) 对 $c < 1$,

- 若 $c = 0$, 因为当 $A \neq 0$ 时，$c\|A\|_1 = 0$，所以 $c\|\cdot\|$ 不是矩阵范数。
- 若 $c < 0$, 那么 $c\|A+B\|_1 \leq c\|A\|_1 + c\|B\|_1$ 不一定成立，如设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
则 $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且有 $\|A+B\|_1 = 2, \|A\|_1 = 5, \|B\|_1 = 3$, 而 $c\|A+B\|_1 = 2c > 8c = c\|A\|_1 + c\|B\|_1$. 所以 $c\|\cdot\|$ 不是矩阵范数。
- 若 $0 < c < 1$, 那么 $c\|AB\|_1 \leq c\|A\|_1 \cdot c\|B\|_1$ 不一定成立, 如设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
则 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, 且有 $\|AB\|_1 = 6, \|A\|_1 = 2, \|B\|_1 = 3$, 而 $c\|AB\|_1 = 6c > 6c^2 = c\|A\|_1 \cdot c\|B\|_1$. 所以 $c\|\cdot\|$ 不是矩阵范数。

5. 证法（一）：若有矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|I-A\|<1$, 由推论 2.5, $I-(I-A)=A$ 可逆，与题设矛盾。

证法（二）：因 A 不可逆，所以存在 $x\neq 0$, 使得 $Ax=0$，或 $x=(I-A)x$, 记 $\|\cdot\|_a$ 为与矩阵范数 $\|\cdot\|$ 相容的向量范数， 则有 $\|x\|_a=\|(I-A)x\|_a\leq\|I-A\|\|x\|_a$, 得 $\|I-A\|\geq 1$.

6. 因为

$$\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{x\neq 0}\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\leq\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=\|A\|_m$$

且

$$\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\geq\max_{\|x\|=1}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=\|A\|_m$$

所以 $\|A\|_m=\max\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. 又

$$\|A\|_m=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|\leq\max_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$$

$$\|A\|_m=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\geq\max_{0<\|x\|\leq 1}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\geq\max_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$$

所以 $\|A\|_m=\max\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$. 又

$$\|A\|_m=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\geq\max_{\|x\|_a=1}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|A\|_m=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{x\neq 0}\frac{\frac{\|Ax\|}{\|x\|_a}}{\frac{\|x\|}{\|x\|_a}}=\max_{x\neq 0}\frac{\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_a}\right)\right\|}{\left\|\frac{x}{\|x\|_a}\right\|}\leq\max_{\|x\|_a=1}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

所以 $\|A\|_m=\max\limits_{\|x\|_a=1}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

7. 因为

$$\hat{A}^H\hat{A}=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^H & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ A^H & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AA^H & 0\\ 0 & A^HA\end{pmatrix}$$

又 AA^H 与 A^HA 的特征值相同，所以 $\hat{A}^H\hat{A}$ 与 A^HA 的特征值相同. 故

$$\|\hat{A}\|_2=\sqrt{\rho(\hat{A}^H\hat{A})}=\sqrt{\rho(A^HA)}=\|A\|_2.$$

8. 因为 $A+B$ 也是 Hermite 矩阵，所以

$$\rho(A+B)=\|A+B\|_2\le\|A\|_2+\|B\|_2=\rho(A)+\rho(B).$$

9. 因为 A 的特征值为 $-a,-a,2a$, 所以 $\rho(A)=2|a|$, 故 A 为收敛矩阵的充要条件是 $|a|<\frac{1}{2}$.

10. $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|=\|(A^{-1})^{-1}\|\|A^{-1}\|=\mathrm{cond}(A^{-1})$.

11. 因为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\-4&\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

所以 $\mathrm{cond}(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=18\times5.5=99$.

12. $\mathrm{cond}(AB)=\|AB\|\|(AB)^{-1}\|=\|AB\|\|B^{-1}A^{-1}\|\le\|A\|\|B\|\|B^{-1}\|\|A^{-1}\|=\|A\|\|A^{-1}\|\|B\|\|B^{-1}\|=\mathrm{cond}(A)\mathrm{cond}(B)$。

$\mathrm{cond}(\cdot)$ 不是矩阵范数，因为对 $|\lambda|\ne0,1$, $\mathrm{cond}(\lambda A)=\|\lambda A\|\|(\lambda A)^{-1}\|=|\lambda|\|A\|\|\frac{1}{\lambda}A^{-1}\|=|\lambda|\|A\|\frac{1}{|\lambda|}\|A^{-1}\|=\mathrm{cond}(A)\ne|\lambda|\mathrm{cond}(A)$。

13. **设**

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1+\varepsilon\end{pmatrix},\quad\varepsilon>0.$$

证明对任意范数，当 $\varepsilon\to0$ 时有 $\mathrm{cond}(A)=O(\varepsilon^{-1})$；考虑具有精确解 $\boldsymbol{x}=(1,0)^T$ 的线性方程组 $A\boldsymbol{x}=(1,1)^T$ 及其近似解 $\hat{\boldsymbol{x}}=(1+\varepsilon^{-1/2},\varepsilon^{-1/2})^T$, 则剩余向量的相对误差为 $\|\boldsymbol{r}\|/\|\boldsymbol{b}\|=O(\varepsilon^{1/2})\to0$；解的相对误差为 $\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|/\|\boldsymbol{x}\|=O(\varepsilon^{-1/2})\to\infty$。这样，有大误差的近似解却产生小的剩余向量，与估计式 (2.9) 矛盾吗？

证明：因为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1-\varepsilon^{-1}&\varepsilon^{-1}\\-\varepsilon^{-1}&\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}$$

又所有矩阵范数是等价的，所以

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = O(\|A\|_1\|A^{-1}\|_1) = O(2 \cdot 2\varepsilon^{-1}) = O(\varepsilon^{-1}).$$

而

$$\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\|(0,\varepsilon^{1/2})^T\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = O\left(\frac{\|(0,\varepsilon^{1/2})^T\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty}\right) = O(\varepsilon^{1/2}) \to 0$$

$$\frac{\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = O\left(\frac{\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\right) = O(\varepsilon^{-1/2}) \to \infty.$$

此时（2.9）是成立的。

14. 因为

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 10$. 又 A 是对称矩阵，所以 $\mathrm{cond}(A) = |\lambda_3|/|\lambda_1| = 10$, 从而

$$\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \le \mathrm{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_1\|_2}{\|\boldsymbol{b}\|_2} \le 10 \times 10^{-4} = 10^{-3}.$$

第3章 习题解答与提示

1. $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$

2. $A = LL^T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}^T.$

3. $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

4. (1) $G(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G(1,2,\theta)A = \begin{pmatrix} 5 & -3.6 & 3.8 \\ 0 & 5.2 & 3.4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$G(1,3,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{34}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{34}} \end{pmatrix},$$

$$G(1,3,\theta)G(1,2,\theta)A = \begin{pmatrix} \sqrt{34} & -\frac{15}{\sqrt{34}} & \frac{25}{\sqrt{34}} \\ 0 & 5.2 & 3.4 \\ 0 & \frac{79}{5\sqrt{34}} & -\frac{7}{5\sqrt{34}} \end{pmatrix},$$

$$G(2,3,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{26\sqrt{34}}{5\sqrt{1169}} & \frac{79}{5\sqrt{1169}} \\ 0 & -\frac{79}{5\sqrt{1169}} & \frac{26\sqrt{34}}{5\sqrt{1169}} \end{pmatrix}$$

$$R=G(2,3,\theta)G(1,3,\theta)G(1,2,\theta)A=\begin{pmatrix}\sqrt{34} & -\frac{15}{\sqrt{34}} & \frac{25}{\sqrt{34}}\\ 0 & \frac{\sqrt{1169}}{\sqrt{34}} & \frac{579}{\sqrt{1169}\sqrt{34}}\\ 0 & 0 & -\frac{61}{\sqrt{169}}\end{pmatrix}$$

$$Q=[G(2,3,\theta)G(1,3,\theta)G(1,2,\theta)]^T=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{113}{\sqrt{1169}\sqrt{34}} & -\frac{22}{\sqrt{1169}}\\ -\frac{4}{\sqrt{34}} & \frac{144}{\sqrt{1169}\sqrt{34}} & \frac{3}{\sqrt{1169}}\\ \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{79}{\sqrt{1169}\sqrt{34}} & \frac{26}{\sqrt{1169}}\end{pmatrix}$$

(2) $G(1,2,\theta)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, G(1,2,\theta)A=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{5}\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$G(1,3,\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

$$G(1,3,\theta)G(1,2,\theta)A=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{10}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

$$G(2,3,\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$R=G(2,3,\theta)G(1,3,\theta)G(1,2,\theta)A=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{10}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & -2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$Q=[G(2,3,\theta)G(1,3,\theta)G(1,2,\theta)]^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0\end{pmatrix}$$

5. (1) Householder变换： $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$,

$$HAH = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{43}{5} & \frac{1}{5} \\ -5 & \frac{124}{25} & -\frac{18}{25} \\ 0 & \frac{57}{25} & -\frac{99}{25} \end{pmatrix}$$

Givens变换： $G(2,3,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$,

$$G(2,3,\theta)AG(2,3,\theta)^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{43}{5} & \frac{1}{5} \\ 5 & \frac{124}{25} & \frac{18}{25} \\ 0 & -\frac{57}{25} & -\frac{99}{25} \end{pmatrix}$$

(2) Householder变换： $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$H_1AH_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} \quad H_2H_1AH_1H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

Givens变换： $G(2,4,\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$

$$G(2,4,\theta)AG(2,4,\theta)^T=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&3&-4\\0&3&1&2\\0&-4&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$G(3,4,\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0.6&-0.8\\0&0&0.8&0.6\end{pmatrix}$$

$$G(3,4,\theta)G(2,4,\theta)AG(2,4,\theta)^TG(3,4,\theta)^T=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{pmatrix}$$

(1) $H=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$

$$A=FG=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

(2) $H=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $S=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\-1&0&1&0\\-2&0&0&1\end{pmatrix}$

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. (1) 因为 $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 其特征值为 $\lambda_1 = 3$， $\lambda_2 = 1$， $\lambda_3 = 0$，对应的特征向量为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

标准化得

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

使得 $V^HA^HAV = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. 计算

$$U_1 = AV_1\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $U_2 = (0, 0, 1)^T$， 则 $U = (U_1, U_2)$ 是酉矩阵。 故 A 的奇异值分解为

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(2) 因为 $AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 其特征值为 $\lambda_1 = 3$， $\lambda_2 = 1$， $\lambda_3 = 0$，对应的特征向量为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

标准化得

$$U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

使得 $U^HAA^TU=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. 但是易计算得$A\neq U\begin{pmatrix} \sqrt{3} & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}V^T$.

7. $A^T=LL^T=A$,所以A为对称矩阵。设$x\neq 0$,因为L为非奇异阵，所以$y=L^Tx\neq 0$, 则$x^TLL^Tx=y^Ty=\|y\|>0$,即A为对称正定阵。

8. 因为A为对称阵，所以$B^T=(F_jAF_j^T)^T=B$.设$x\neq 0$,因为F_j为非奇异阵，所以$y=F_j^Tx\neq 0$, 又A为正定阵，则$x^TBx=y^TAy>0$,即B为对称正定阵。

第4章 习题解答与提示

1.
$$D=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 1\end{pmatrix},\quad D^{-1}AD=\begin{pmatrix}0 & 0.4 & -1\\ 0.2 & 2 & -0.2\\ 0.2 & 0.35 & 3\end{pmatrix}$$

盖尔圆

$$G_1:|z|\le 1.4\quad G_2:|z-2|\le 0.4\quad G_3:|z-3|\le 0.55$$

它们相互分离。若实矩阵A的特征值λ为复数，则$\overline{\lambda}$ 也为特征值，但G_1,G_2,G_3关于实轴对称， 则A特征值必皆为实数，故在区间$[-1.4,1.4],[1.6,2.4],[2.45,3.55]$中各有$A$的一个特征值。

2. $\det A\neq 0$ 的充要条件是 A 的特征值都不等于零。 如 0 是 A 的特征值， 则存在盖尔圆 G_{i_0} 使 $0\in G_{i_0}$, 即

$$|a_{i_0i_0}|=|0-a_{i_0i_0}|\le R_{i_0}$$

矛盾。

3. (1) 以$(1,1,1)^T$为初始点。

k	v_k^T			m_k
1	1	0.75	0	8
2	1	0.6486	-0.2973	9.25
3	1	0.6176	-0.3711	9.5405
4	1	0.6088	-0.3888	9.5949
5	1	0.6064	-0.3931	9.6041

5步迭代结束后得按模最大特征值为9.6041。

(2) 以$(1,1,1)^T$为初始点。

k	v_k^T			m_k
1	0.36	0.44	1	0.5435
2	0.2768	0.2806	1	0.4617
3	0.2943	0.1855	1	0.4492
4	0.3359	0.1013	1	0.4491
5	0.3843	0.0179	1	0.4518

5步迭代结束后按模最小特征值为 $\frac{1}{0.4518} = 2.2134.$

4. (1) 以$(1,1,1)^T$为初始点。

k	v_k^T			m_k
1	1	1	0.5	4
2	1	0.875	0.375	4
3	1	0.8065	0.3226	3.875
4	1	0.7712	0.2966	3.8065
5	1	0.7528	0.2831	3.7712
6	1	0.7431	0.2760	3.7528
7	1	0.7380	0.2723	3.7431
8	1	0.7352	0.2703	3.7380
9	1	0.7337	0.2692	3.7352
10	1	0.733	0.2686	3.7337
11	1	0.7325	0.2683	3.7330
12	1	0.7323	0.2681	3.7325
13	1	0.7322	0.2681	3.7323
14	1	0.7321	0.2680	3.7322

迭代结束后按模最大得特征值为 3.7322, 对应特征向量为

$$(1, 0.7321, 0.2680)^T$$

(2) 以$(1,1,1)^T$为初始点。

k	v_k^T			m_k
1	1	1	0.3022	2.8660
2	1	0.7565	0.3348	2.8660
3	1	0.7588	0.2714	2.6225
4	1	0.7347	0.2752	2.6248
5	1	0.7350	0.2683	2.6007
6	1	0.7323	0.2688	2.6010
7	1	0.7324	0.2680	2.5983
8	1	0.7321	0.2680	2.5984
9	1	0.7321	0.2680	2.5981

迭代结束后按模最大得特征值为 $2.5981 + 1.134 = 3.7321$.

5. $P(A - 2.05I_3) = LU$,其中

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.4917 & 1 & 0 \\ -1 & 0.6704 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -6 & 4.95 & 11 \\ 0 & -1.5662 & -1.5917 \\ 0 & 0 & 0.0170 \end{pmatrix}$$

以$(1,1,1)^T$为初始点。

k	v_k^T			m_k
1	-0.9480	1	-0.9686	-60.5933
2	-0.9972	1	-0.9985	-19.8270
3	-0.9999	1	-0.9999	-19.9783
4	-1	1	-1	-19.9987
5	-1	1	-1	-19.9999

迭代结束后得特征值为 $2.05+\frac{-1}{19.9999}=2$, 对应特征向量为 $(-1,1,-1)^T$.

6. 用Householder变换得三对角阵

$$H=\begin{pmatrix}10 & 12.7279 & 0 & 0\\ 12.7279 & 21.8827 & 3.4281 & 0\\ 0 & 3.4281 & 2.3825 & 0.4621\\ 0 & 0 & 0.4621 & 0.7348\end{pmatrix}$$

步一：取 $\mu_1=0.7348$ 得，

$$H_2=\begin{pmatrix}29.8791 & 3.2740 & 0 & 0\\ 3.2740 & 4.0935 & -0.8047 & 0\\ 0 & -0.8047 & 0.1881 & 0.0581\\ 0 & 0 & 0.0581 & 0.8393\end{pmatrix}$$

步二：取 $\mu_2=0.8393$ 得，

$$H_3=\begin{pmatrix}30.2845 & 0.3336 & 0 & 0\\ 0.3336 & 3.8487 & 0.2284 & 0\\ 0 & 0.2284 & 0.0237 & 0.0003\\ 0 & 0 & 0.0003 & 0.8431\end{pmatrix}$$

步三：取 $\mu_3=0.8431$，得

$$H_4=\begin{pmatrix}30.2886 & 0.0341 & 0 & 0\\ 0.0341 & 3.8571 & -0.0633 & 0\\ 0 & -0.0633 & 0.0112 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.8431\end{pmatrix}$$

可得一个特征值 $\lambda_1=0.8431$。对 H_4 进行压缩，划去第四行第四列，得

$$H_5=\begin{pmatrix}30.2886 & 0.0341 & 0\\ 0.0341 & 3.8571 & -0.0633\\ 0 & -0.0633 & 0.0112\end{pmatrix}$$

步四：取 $\mu_4 = 0.0112$，得 $H_6 = \begin{pmatrix} 30.2887 & 0.0043 & 0 \\ 0.0043 & 3.8581 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0102 \end{pmatrix}$ 可得第二个特征值0.0102。对 H_6进行压缩，划去第三行第三列，得 $H_7 = \begin{pmatrix} 30.2887 & 0.0043 \\ 0.0043 & 3.8581 \end{pmatrix}$

步五：取 $\mu_5 = 3.8581$，得 $H_8 = \begin{pmatrix} 30.2887 & 0 \\ 0 & 3.8581 \end{pmatrix}$, 得剩余两个特征值 30.2887 和 3.8581。

第5章 习题解答与提示

1. (a) 如果 $AB = 0$, 则$(AB)^H = B^H A^H = 0$. 在该式左右分别乘以 $(AA^H)^+$ 和 $(B^H B)^+$，得到

$$(B^H B)^+(B^H A^H)(AA^H)^+ = [(B^H B)^+ B^H][A^H(AA^H)^+] = B^+A^+.$$

反之，如果 $B^+A^+ = 0$, 则

$$\begin{aligned}0 &= (B^H B)(B^+A^+)(AA^H) = B^H(BB^+)^H(A^+A)A^H A^H \\ &= (BB^+B)^H(AA^+A)^H = (AB)^H\end{aligned}$$

从而有 $AB = 0$.

(b) 若 $AB^H = 0$, 则 $(AB^H)(BB^H)^+ = A[B^H(BB^H)^+] = AB^+ = 0$;

反之，$AB^+BB^H = A(B^+B)^H B^H = A(BB^+B)^H = AB^H = 0$.

(c) 若 $A^H B = 0$, 则 $(A^H A)^+ A^H B = [(A^H A)^+ A^H]B = AB^H = 0$;

反之，$A^+B = 0$, 则 $(A^H A)A^+B = A^H(AA^+)^H B = [AA^+A]^H B = A^H B = 0$.

2. (1) 直接验证$X = (A^+)^H$满足(A^H) 的四个Penrose方程即可；

(2) 按定义直接验证四个Penrose方程即可。

3. 由于 $A \in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，因此存在酉矩阵 U，使得

$$A = U diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U^H$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值。则有

$$A^+ = U^H diag(\lambda_1^+, \cdots, \lambda_n^+)U$$

将上式直接代入验证，可得 $AA^+ = A^+A$, $(A^k)^+ = (A^+)^k$.

4. 容易验证

$$[A(A^HA)^{(1)}A^HA - A]^H[A(A^HA)^{(1)}A^HA - A] = 0$$

从而有$A(A^HA)^{(1)}A^HA = A$. 同理可得$A^HA(A^HA)^{(1)}A^H = A^H$.

记$X = A^H(AA^H)^{(1)}A(A^HA)^{(1)}A^H$，则有

$$\begin{aligned} AXA &= AA^H(AA^H)^{(1)}A(A^HA)^{(1)}A^HA \\ &= AA^H(AA^H)^{(1)}[A(A^HA)^{(1)}A^HA] \\ &= AA^H(AA^H)^{(1)}A = (A^H) = A \end{aligned}$$

同理容易验证X满足其它三个 Penrose 方程。

5.

$$\begin{aligned} A^+ = (A^HA)^+A^H &= [(\sum_{i=1}^k A_i^H)(\sum_{j=1}^k A_j)]^+(\sum_{j=1}^k A_j) \\ &= [\sum_{j=1}^k A_j^HA_j]^+(\sum_{j=1}^k A_j) = [\sum_{i=1}^k (A_i^HA_i)]^+(\sum_{j=1}^k A_j) \\ &= [\sum_{i=1}^k (A_i^HA_i)^+A_i][\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k (A_i^HA_i)^+A_j] \\ &= (\sum_{i=1}^k A_i^+)[\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k (A_i^HA_iA_i^HA_i)^+A_i^HA_iA_j] = \sum_{i=1}^k A_i^+ \end{aligned}$$

6. 利用分块矩阵乘法，直接验证四个Penrose方程。

7. (1)通过行初等变换可得：

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 10 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

从而

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\alpha & 2\alpha & \alpha \\ -\beta & 2\beta & \beta \end{pmatrix}$$

其中α, β 任意。特别地取$\alpha = 0, \beta = 0$，有

$$A^{(1)} == \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于$AA^{(1)}b = (1, 2, -3)^T \neq b$，因此方程组无解。

(2) 由行初等变换得到：

$$(A|I_3) \to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

从而

$$A^{(1)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $AA^{(1)}b = (4, \frac{1}{2}, 2)^T = b$，因此方程组有解，其通解为

$$x = \frac{1}{6}(25, 2, 1, 0)^T + (-y_4, -y_4, 0, y_4)^T,\ y_4 \in C$$

8. (1) 由于 $A^HA=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，特征值 $\lambda_1=3,\lambda_2=1$, 对应特征向量为 $v_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T,v_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. 从而有

$$\sum=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\end{pmatrix},V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

因此有

$$U_1=AV\sum\nolimits^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}&0\\\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ U=U_1$$

使得$A=U\begin{pmatrix}\sum&0\\0&0\end{pmatrix}V^H$,从而

$$A^+=V\sum\nolimits^{-1}U^H=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

(2)由于 $A^HA=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$，特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$, 对应特征向量为 $v_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T,v_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T,v_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. 从而有

$$\sum=(\sqrt{6}),V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

因此有

$$U_1=AV\sum\nolimits^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad U=(U_1,U_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

使得$A=U\begin{pmatrix}\sum & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$, 从而

$$A^+=V\begin{pmatrix}\sum^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^H=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

(3)由于 $A^HA=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$， 特征值 $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=0$, 对应特征向量为 $v_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T, v_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T, v_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. 从而有

$$\sum=(3),\ V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

因此有

$$U_1=AV_1\sum^{-1}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T,$$

$$U=(U_1,U_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

使得 $A=U\begin{pmatrix}\sum & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$, 从而

$$A^+=V\begin{pmatrix}\sum^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^H=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

9. (1)A 为列满秩矩阵，因此 $A = AI_3 = FG$，从而

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 5 & 11 & 1 \\ 11 & 1 & 31 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{22} \begin{pmatrix} 54 & -22 & 14 & 12 \\ -23 & 11 & 8 & 1 \\ -17 & 11 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

(2)A 为列行秩矩阵，因此 $A = I_4 A = FG$，从而

$$A^+ = A^H (AA^H)^{-1} = A^H \begin{pmatrix} 30 & -4 & 32 \\ -4 & 39 & 85 \\ 32 & 85 & 279 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \tfrac{1}{1360} \begin{pmatrix} 118 & -147 & 41 \\ -160 & -60 & 100 \\ -16 & 164 & -92 \\ -340 & -510 & 170 \end{pmatrix}$$

(3)由于 $A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，因此

$$A^+ = G^H (F^H A G^H)^{-1} F^H = G^H \begin{pmatrix} 72 & 22 \\ 231 & 116 \end{pmatrix}^{-1} F^H$$

$$= \tfrac{1}{3270} \begin{pmatrix} 50 & 34 & -182 \\ 150 & 102 & -546 \\ -15 & 186 & 447 \\ 45 & 96 & -33 \end{pmatrix}$$

(4)由于$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,因此

$$
\begin{aligned}
A^+ &= G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H = G^H \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1} F^H \\
&= \tfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -5 & 7 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

10. （1）当$c_k = 0$时，有$a_k = A_{k-1}d_k$。

（i）

$$
\begin{aligned}
A_kX_kA_K &= (A_{k-1}, a_k) \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kb_k^H \\ b_k^H \end{pmatrix} (A_{k-1}, a_k) \\
&= (A_{k-1}A_{k-1}^+ - A_{k-1}d_kb_k^H + a_kb_k^H)(A_{k-1}, a_k) \\
&= A_{k-1}A_{k-1}^+(A_{k-1}, a_k) = (A_{k-1}, A_{k-1}d_k) = (A_{k-1}, a_k) = A_k
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
X_kA_kX_k &= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kb_k^H \\ b_k^H \end{pmatrix} A_{k-1}A_{k-1}^+ \\
&= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+A_{k-1}A_{k-1}^+ - d_kb_k^HA_{k-1}A_{k-1}^+ \\ b_k^HA_{k-1}A_{k-1}^+ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_k\frac{d_k^HA_{k-1}^+}{1+d_k^Hd_k}A_{k-1}A_{k-1}^+ \\ \frac{d_k^HA_{k-1}^+}{1+d_k^Hd_k}A_{k-1}A_{k-1}^+ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kb_k^H \\ b_k^H \end{pmatrix} = X_k
\end{aligned}
$$

(iii) $A_kX_k = A_{k-1}A_{k-1}^+ = (A_{k-1}A_{k-1}^+)^H = (A_kX_k)^H$

(iv)

$$X_kA_k = \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kb_k^H \\ b_k^H \end{pmatrix}(A_{k-1}, a_k)$$
$$= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+A_{k-1} - d_kb_k^HA_{k-1} & A_{k-1}^+a_k - d_kb_k^Ha_k \\ b_k^HA_{k-1} & b_k^Ha_k \end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{aligned} A_{k-1}^+A_{k-1} - d_kb_k^HA_{k-1} &= A_{k-1}^+A_{k-1} - \frac{1}{1+d_k^Hd_k}(d_kd_k^HA_{k-1}^+A_{k-1}) \\ &= A_{k-1}^+A_{k-1} - \frac{1}{1+d_k^Hd_k}[d_k(A_{k-1}^+A_{k-1}d_k)^H] \\ &= A_{k-1}^+A_{k-1} - \frac{1}{1+d_k^Hd_k}[d_k(A_{k-1}^+a_k)^H] \\ &= A_{k-1}^+A_{k-1} - \frac{d_kd_k^H}{1+d_k^Hd_k} \end{aligned}$$

因此有 $(A_{k-1}^+A_{k-1} - d_kb_k^HA_{k-1})^H = (A_{k-1}^+A_{k-1} - \frac{d_kd_k^H}{1+d_k^Hd_k})^H = A_{k-1}^+A_{k-1} - d_kb_k^HA_{k-1}$.

又因为

$$A_{k-1}^+a_k - d_kb_k^Ha_k = d_k - d_k\frac{d_k^HA_{k-1}^+a_k}{1+d_k^Hd_k} = d_k - \frac{d_k^Hd_k}{1+d_k^Hd_k}d_k = \frac{1}{1+d_k^Hd_k}d_k$$

且

$$\begin{aligned} (b_k^HA_{k-1})^H &= (\frac{d_k^HA_{k-1}^+A_{k-1}}{1+d_k^Hd_k})^H = \frac{(A_{k-1}^+A_{k-1}d_k)^H}{1+d_k^Hd_k} \\ &= \frac{(A_{k-1}^+a_k)^H}{1+d_k^Hd_k} = \frac{1}{1+d_k^Hd_k}d_k^H \end{aligned}$$

因此有 $A_{k-1}^+a_k - d_kb_k^Ha_k = (b_k^HA_{k-1})^H$.

又因为 $b_k^Ha_k = \frac{d_k^HA_{k-1}^+A_{k-1}d^k}{1+d_k^Hd_k} = (\frac{d_k^HA_{k-1}^+A_{k-1}d^k}{1+d_k^Hd_k})^H = (b_k^Ha_k)^H$, 从而 $(X_kA_k)^H = X_kA_k$ 成立. 综上可知，当$c_k = 0$时，X_k 满足 A_k 的四个Penrose方程，因此 X_k 为 A_k 的Moore-Penrose 逆。

（2）当$c_k \neq 0$ 时，$b_k^H = c_k^+$. 在定理5.9中已经证明了 $A_{k-1}^+c_k = 0$, $c_k^+A_{k-1} = 0$, $c_k^+a_k^+ = c_k^+c_k = 1$.

(i)

$$
\begin{aligned}
A_kX_kA_k &= (A_{k-1}, a_k)\begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kc_k^+ \\ c_k^+ \end{pmatrix}(A_{k-1}, a_k) \\
&= (A_{k-1}, a_k)\begin{pmatrix} A_{k-1}^+A_{k-1} - d_kc_k^+A_{k-1} & A_{k-1}^+a_k - d_kc_k^+a_k \\ c_k^+A_{k-1} & c_k^+a_k \end{pmatrix} \\
&= (A_{k-1}, a_k)\begin{pmatrix} A_{k-1}^+A_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (A_{k-1}A_{k-1}^+A_{k-1}, a_k) = (A_{k-1}, a_k) = A_k
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
X_kA_kX_k &= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+A_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kc_k^+ \\ c_k^+ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+A_{k-1}A_{k-1}^+ - A_{k-1}^+A_{k-1}d_kc_k^+ \\ c_k^+ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - A_{k-1}^+a_kc_k^+ \\ c_k^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kc_k^+ \\ c_k^+ \end{pmatrix} = X_k
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
A_kX_k &= (A_{k-1}, a_k)\begin{pmatrix} A_{k-1}^+ - d_kc_k^+ \\ c_k^+ \end{pmatrix} \\
&= A_{k-1}A_{k-1}^+ - A_{k-1}d_kc_k^+ + a_kc_k^+ \\
&= A_{k-1}A_{k-1}^+ - (a_k - c_k)c_k^+ + a_kc_k^+ \\
&= A_{k-1}A_{k-1}^+ + c_kc_k^+ = (A_kX_k)^H
\end{aligned}
$$

(iv) $X_kA_k = \begin{pmatrix} A_{k-1}^+A_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (X_kA_k)^H$, 综上可知，当 $c_k \neq 0$ 时，X_k 也满足 A_k 的四个Penrose方程，因此 X_k 也是 A_k 的Moore-Penrose 逆。

11. （略）计算机编程进行比较。

第6章 习题解答与提示

1. (1) 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$， 则 e^A 的特征值为 $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \cdots, e^{\lambda_n}$, 从而

$$\det(e^A) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} = e^{trA}.$$

(2) $(e^A)^H = (\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k)^H = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A^H)^k = e^{A^H}$.

2. $f(x) = x^T A x - b^T x = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j - \sum\limits_{i=1}^{N} b_i x_i$， 由于 A 为对称矩阵，因此有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x_j - b_i$$

从而

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})^T = 2Ax - b.$$

3.

$$\tfrac{d}{dt} A(t) = \begin{pmatrix} 2\cos 2t & e^t \cos t - e^t \sin t \\ 2t & -\sin t \end{pmatrix},$$

$$\textstyle\int_0^{\pi} A(t) dt = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(1+e^{\pi}) \\ \frac{1}{3}\pi^3 + 3\pi & 0 \end{pmatrix}$$

4. (1)由于 $det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^3$. 假设 $r(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$, (i)由

$$\begin{cases} 16a_2 + 4a_1 + a_0 = e^{4t} \\ 8a_2 + a_1 = te^{4t} \\ 2a_2 = t^2 e^{4t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} t^2 e^{4t} \\ a_1 = te^{4t} - 4t^2 e^{4t} \\ a_0 = e^{4t} - 4te^{4t} + 8t^2 e^{4t} \end{cases}$$

可得

$$e^{At} = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I = e^{4t} \begin{pmatrix} 1-2t & 2t & t \\ -t & 1+2t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)由

$$\begin{cases} 16a_2+4a_1+a_0=\sin 4 \\ 8a_2+a_1=\cos 4 \\ 2a_2=-\sin 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=-\frac{1}{2}\sin 4 \\ a_1=\cos 4+4\sin 4 \\ a_0=-4\cos 4-7\sin 4 \end{cases}$$

可得

$$\sin A=a_2A^2+a_1A+a_0I=\begin{pmatrix} \sin 4-2\cos 4 & 2\cos 4 & \cos 4 \\ -2\cos 4 & \sin 4+2\cos 4 & \cos 4 \\ 0 & 0 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

(iii)由

$$\begin{cases} 16a_2+4a_1+a_0=\cos 4 \\ 8a_2+a_1=-\sin 4 \\ 2a_2=-\cos 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=-\frac{1}{2}\cos 4 \\ a_1=-\sin 4+4\cos 4 \\ a_0=4\sin 4-7\cos 4 \end{cases}$$

可得

$$\cos A=a_2A^2+a_1A+a_0I=\begin{pmatrix} \cos 4+2\sin 4 & -2\sin 4 & -\sin 4 \\ 2\sin 4 & \cos 4-2\sin 4 & -\sin 4 \\ 0 & 0 & \cos 4 \end{pmatrix}$$

(2)由于 $\det(\lambda I-A)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. 假设 $r(\lambda)=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$,

(i)由

$$\begin{cases} 4a_2+2a_1+a_0=e^{2t} \\ a_2-a_1+a_0=e^{-t} \\ -2a_2+a_1=te^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=\frac{1}{9}(e^{2t}-e^{-t})-\frac{1}{3}te^{-t} \\ a_1=\frac{2}{9}(e^{2t}-e^{-t})+\frac{1}{3}te^{-t} \\ a_0=\frac{1}{9}(e^{2t}-e^{-t})+\frac{2}{3}te^{-t}+e^{-t} \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} e^{At}&=a_2A^2+a_1A+a_0I \\ &=\begin{pmatrix} -2e^{2t}+3e^{-t} & -4(e^{2t}-e^{-t}) & -2(e^{2t}-e^{-t}) \\ e^{2t}-e^{-t} & 2e^{2t}-e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-t} & 2(e^{2t}-e^{-t}) & e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii)由

$$\begin{cases} 4a_2+2a_1+a_0=\sin 2 \\ a_2-a_1+a_0=-\sin 1 \\ -2a_2+a_1=-\cos 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=\frac{1}{9}(\sin 2+\sin 1)+\frac{1}{3}\cos 1 \\ a_1=\frac{2}{9}(\sin 2+\sin 1)-\frac{1}{3}\cos 1 \\ a_0=\frac{1}{9}(\sin 2+\sin 1)-\frac{2}{3}\cos 1-\sin 1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} \sin A &= a_2A^2+a_1A+a_0I \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin 2-3\sin 1 & -4(\sin 2+\sin 1) & -2(\sin 2+\sin 1) \\ (\sin 2+\sin 1) & 2\sin 2+\sin 1 & (\sin 2+\sin 1) \\ (\sin 2+\sin 1) & 2(\sin 2+\sin 1) & \sin 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iii)由

$$\begin{cases} 4a_2+2a_1+a_0=\cos 2 \\ a_2-a_1+a_0=\cos 1 \\ -2a_2+a_1=-\sin 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=\frac{1}{9}(\cos 2-\cos 1)+\frac{1}{3}\sin 1 \\ a_1=\frac{2}{9}(\cos 2-\cos 1)-\frac{1}{3}\sin 1 \\ a_0=\frac{1}{9}(\cos 2-\cos 1)-\frac{2}{3}\sin 1+\cos 1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} \cos A &= a_2A^2+a_1A+a_0I \\ &= \begin{pmatrix} -2\cos 2+3\cos 1 & -4(\cos 2-\cos 1) & -2(\cos 2-\cos 1) \\ (\cos 2-\cos 1) & 2\cos 2-\cos 1 & (\cos 2-\cos 1) \\ (\cos 2-\cos 1) & 2(\cos 2-\cos 1) & \cos 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) 由于 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$，设$r(\lambda)=a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$，则有

$$\begin{aligned} f(A) &= a_3A^3+a_2A^2+a_1A+a_0I \\ &= \begin{pmatrix} a_3+a_2+a_1+a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_3+2a_2+a_1 & a_3+a_2+a_1+a_0 & 0 & 0 \\ 3a_3+a_2 & 3a_3+2a_2+a_1 & a_3+a_2+a_1+a_0 & 0 \\ a_3 & 3a_3+a_2 & 3a_3+2a_2+a_1 & a_3+a_2+a_1+a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) 对于 $f(At)=e^{At}$, 有

$$\begin{cases} a_3+a_2+a_1+a_0=e^t \\ 3a_3+2a_2+a_1=te^t \\ 6a_3+2a_2=t^2e^t \\ 6a_3=t^3e^t \end{cases} \Rightarrow e^{At}=\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}t^2e^t & te^t & e^t & 0 \\ \frac{1}{6}t^3e^t & \frac{1}{2}t^2e^t & te^t & e^t \end{pmatrix}$$

(ii) 对于 $f(A)=\sin A$，由

$$\begin{cases} a_3+a_2+a_1+a_0=\sin 1 \\ 3a_3+2a_2+a_1=\cos 1 \\ 6a_3+2a_2=-\sin 1 \\ 6a_3=-\cos 1 \end{cases}$$

得

$$\sin A=\begin{pmatrix} \sin 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 1 & \sin 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 1 & \cos 1 & \sin 1 & 0 \\ -\frac{1}{6}\cos 1 & -\frac{1}{2}\sin 1 & \cos 1 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

(iii) 对于$f(A)=\cos A$，由

$$\begin{cases} a_3+a_2+a_1+a_0=\cos 1 \\ 3a_3+2a_2+a_1=-\sin 1 \\ 6a_3+2a_2=-\cos 1 \\ 6a_3=\sin 1 \end{cases}$$

得

$$\cos A=\begin{pmatrix} \cos 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 1 & \cos 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\cos 1 & -\sin 1 & \cos 1 & 0 \\ \frac{1}{6}\sin 1 & -\frac{1}{2}\cos 1 & -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

(3) 记$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\det(\lambda I-A_1)=(\lambda-2)^2$, $\det(\lambda I-A_2)=(\lambda-1)^2$，设

$$r_1(\lambda)=a_1\lambda+a_0,\ \ r_2(\lambda)=b_1\lambda+b_0$$

则有

$$f(A)=\begin{pmatrix} 2a_1+a_0 & a_1 & & \\ & 2a_1+a & & \\ & & b_1+b_0 & b_1 \\ & & & b_1+b_0 \end{pmatrix}$$

(i) 对于 $f(At)=e^{At}$, 有

$$\begin{cases} 2a_1+a_0=e^{2t} \\ a_1=te^{2t} \\ b_1+b_0=e^t \\ b_1=te^t \end{cases} \Rightarrow e^{At}=\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

(ii) 对于 $f(A)=\sin A$，有

$$\begin{cases} 2a_1+a_0=\sin 2 \\ a_1=\cos 2 \\ b_1+b_0=\sin 1 \\ b_1=\cos 1 \end{cases} \Rightarrow e^{At}=\begin{pmatrix} \sin 2 & \cos 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 1 & \cos 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

（iii）对于 $f(A)=\cos A$，有

$$\begin{cases} 2a_1+a_0=\cos 2 \\ a_1=-\sin 2 \\ b_1+b_0=\cos 1 \\ b_1=-\sin 1 \end{cases} \Rightarrow e^{At}=\begin{pmatrix} \cos 2 & -\sin 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

.

5. 由于

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t & 4e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 6e^{2t} - 3e^t & 6e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

令 $t = 0$，可得

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

6. 由于

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}e^{At}) = A^{-1}\frac{d}{dt}e^{At} = A^{-1}Ae^{At} = e^{At}$$

从而

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau = \int_0^t d(A^{-1}e^{A\tau}) = A^{-1}e^{At} - A^{-1}e^{A\tau}$$

7. (1)

$$tr(BX) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}x_{j,i} \Rightarrow \tfrac{d}{dx_{i,j}}(tr(BX)) = b_{j,i} \Rightarrow \tfrac{d}{dX}(tr(BX)) = B^T,$$
$$tr(XB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}b_{j,i} \Rightarrow \tfrac{d}{dx_{i,j}}(tr(XB)) = b_{j,i} \Rightarrow \tfrac{d}{dX}(tr(BX)) = B^T.$$

(2) 由于 $tr(X^TAX) = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{i,k}a_{i,j}x_{k,j}$， 因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_{i,j}}tr(X^TAX) &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_{k,j} + \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}x_{k,j} \\ &= (a_{i,1}, \ldots, a_{i,k})(x_{1,j}, \cdots, x_{n,j})^T \\ &\quad +(a_{1,i}, \ldots, a_{k,i})(x_{1,j}, \cdots, x_{n,j})^T\end{aligned}$$

从而

$$\frac{d}{dX}tr(X^TAX) = (A + A^T)X$$

8. 由于

$$y^TA^TAy = (\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}y_j)^2 + (\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}y_j)^2 + \cdots + (\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}y_j)^2$$

因此

$$\frac{d}{da_{i,j}}(y^TA^TAy) = 2(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j)y_i$$

从而

$$\frac{d}{dA}(y^TA^TAy) = 2Ayy^T$$

9. 由于

$$(Ay-x)^T(Ay-x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}y_j - x_1\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}y_j - x_2\right)^2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}y_j - x_{n1}\right)^2$$

因此

$$\frac{d}{da_{i,j}}((Ay-x)^T(Ay-x)) = 2(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j - x_i)y_i$$

从而

$$\frac{d}{dA} = 2(Ay-x)y^T$$

10. 记

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

则方程组可写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + f \\ x(0) = (1,1,1)^T \end{cases}$$

其通解为：

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}f(s)ds$$

由于 $det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$，设 $r(\lambda)=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$， 则由

$$\begin{cases} 4a_2+2a_1+a_0=e^{2t} \\ 4a_2+a_1=te^{2t} \\ 16a_2+4a_1+a_0=e^{4t} \end{cases}$$

得

$$e^{At}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{4t}-2te^{2t}+e^{2t}) & -te^{2t} & \frac{1}{2}(e^{4t}-e^{2t}) \\ -\frac{1}{2}(e^{4t}-2te^{2t}-e^{2t}) & te^{2t}+e^{2t} & -\frac{1}{2}(e^{4t}-e^{2t}) \\ \frac{1}{2}(e^{4t}+2te^{2t}-e^{2t}) & te^{2t} & \frac{1}{2}(e^{4t}+e^{2t}) \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0)+e^{At}\int_0^t e^{-As}f(s)ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{8}e^{4t}-\frac{3}{4}t^2e^{2t}-\frac{7}{4}te^{2t}-\frac{3}{8}e^{2t} \\ -\frac{11}{8}e^{4t}+\frac{3}{4}t^2e^{2t}+\frac{11}{4}te^{2t}+\frac{19}{8}e^{2t} \\ \frac{11}{8}e^{4t}+\frac{3}{4}t^2e^{2t}+\frac{5}{4}te^{2t}-\frac{3}{8}e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. 设 $\mathrm{x}_1=y,x_2=y',x_3=y''$， 记

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则微分方程可表示为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=Ax(t)+e^tb \\ x(0)=(1,1,1)^T \end{cases}$$

由于$det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2()\lambda+1$，设 $r(\lambda)=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$， 则

$$\begin{cases} a_2+a_1+a_0=e^t \\ 2a_2+a_1=te^t \\ a_2-a_1+a_0=e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=-\frac{1}{2}te^t+\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t} \\ a_1=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t} \\ a_2=\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t} \end{cases}$$

从而

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}te^t + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}te^t + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} x(t!) &= e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}e^t b ds \\ &= \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + e^{At}\int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2s} \\ -\frac{1}{2}s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2s} \\ -\frac{1}{2}s + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2s} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t + \frac{9}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} \\ \frac{1}{4}t^2e^t + \frac{1}{4}te^t + \frac{7}{8}e^t + \frac{1}{8}e^{-t} \\ \frac{1}{4}t^2e^t + \frac{5}{4}te^t + \frac{9}{8}e^t + \frac{1}{8}e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而

$$y = x_1 = \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t + \frac{9}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t}.$$

第7章 习题解答与提示

1. $\boldsymbol{x}=(0.7906,-0.3613,0.8639,-1.1152)^T$.

2. $\boldsymbol{x}=(1.8671,-0.5838,0.7857)^T$.

3. $\boldsymbol{x}=(-1.2743,2.5417,1.1528)^T$.

4. 设 $A=(a_{i,j})$, 因为 A 是对称正定的三对角矩阵，所以

$$a_{i.i-1}=u_i=a_{i-1,i}=c_{i-1},\ (i=2,3,\cdots,n),$$

且

$$A=\begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ s_{21} & d_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

式中 $s_{ij}=l_{ij}d_{jj}$。当 $i-j>1$ 时，$s_{ij}=0$，即只有 $s_{i,i-1}$ $(i=2,3,\cdots,n)$ 可能不为零。

利用 Cholesky 分解公式得

$$\begin{cases} d_{11}=a_{11}=a_1 \\ s_{i,i-1}=a_{i,i-1}-\sum\limits_{i=1}^{i-2}s_{i,k}l_{i-1,k}=a_{i,i-1}=u_i \\ l_{i,i-1}=s_{i,i-1}/d_{i-1,i-1}=u_i/d_{i-1,i-1}=c_{i-1}/d_{i-1,i-1} \\ d_{ii}=a_{ii}-\sum\limits_{k=1}^{i-1}s_{ik}l_{ik}=a_i-s_{i,i-1}l_{i,i-1}=a_i-u_il_{i,i-1} \end{cases}\qquad i=2,3,\cdots,n.$$

解方程组按如下步骤进行

$$\begin{cases} y_i=b_i-\sum\limits_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k=b_i-l_{i,i-1}y_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ x_i=y_i/d_{ii}-\sum\limits_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k=y_i/d_{ii}-l_{i+1,i}x_{i+1}=y_i/d_{ii}-l_{i+1,i}x_{i+1} \\ \qquad =(y_i-c_ix_{i+1})/d_{ii} \quad (i=n,n-1,\cdots,1). \end{cases}$$

5. $\boldsymbol{x}=(0.2988,0.1951,0.1829,0.3415)^T$.

第8章 习题解答与提示

1. 系数矩阵 A 的满秩分解：

$$A=FG=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{+}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}10 & 4 & -2\\ 2 & 2 & 2\\ -8 & -2 & 4\\ 12 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{ls}=\frac{1}{18}(20,7,-13,27)^T,$$

全部最小二乘解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{ls}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix},\quad (y_1,y_2,y_3,y_4\in C\ \text{任意})$$

2. 系数矩阵 A 的QR 分解：

$$A=QR=\begin{pmatrix}0.0 & 0.55 & 0.6\\ 0.0 & -0.74 & -0.68\\ -0.71 & 0.28 & -0.3\\ -0.71 & -0.28 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1.4 & -3.54 & -3.54\\ 0.0 & -5.43 & 0.644\\ 0.0 & 0.0 & 2.255\end{pmatrix}.$$

解 $Rx=Q^Tb$ 得最小二乘解 $\boldsymbol{x}=(0,0.066667,0.133333)^T$.

3. $x_{ls}=\frac{1}{9}(2,1,1)^T$，全部最小二乘解为

$$x=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},\quad (y_1,y_2,y_3\in C\ \text{任意}).$$

4. 设 A^TA 的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

则 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$， $\left\|A^TA\right\|_2 = \lambda_1$， $\left\|\left(A^TA\right)^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{\lambda_r}$.

利用A的奇异值分解知，$\left(A^+\right)^T A^+$ 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 酉相似（其中 $B = \mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_r})$），所以 $\|A^+\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}$.

第9章 习题解答与提示

1. 迭代矩阵 B_J的特征方程为 $\det[\lambda D+(L+U)]=0$, 即

$$\lambda\left(\lambda^2-2\alpha+\beta^2\right)=0,$$

所以 $\rho(B_J)=|2\alpha-\beta^2|^{1/2}$，当 $|2\alpha-\beta^2|<1$ 时，J 法收敛。

2. 取近似解的精度为 10^{-4}, 用J法求解，迭代次数为 42, 近似解为

$$x_{42}=(1.199857,1.399813,1.599769,0.799885)^T.$$

用G-S 法 求解，迭代次数为 22, 近似解为

$$x_{22}=(1.199876,1.399838,1.599869,0.799934)^T.$$

用SOR法求解，迭代次数为 14, 近似解为

$$x_{14}=(1.199983,1.399977,1.600001,0.800008)^T.$$

3. （1）因为 $\rho(B_J)=0,\quad \rho(B_G)=2$ 所以J 法收敛，而 G-S 法发散。

（2）因为 $\rho(B_G)=\frac{1}{2}$ 所以G-S 法收敛。

B_J 的特征方程为 $\lambda^3+\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{4}=0$, 由中值定理， B_J 有一实特征值 λ_1 属于$(0,0.2)$. 设 B_J 的另外两个特征值为 λ_2,λ_3，因 $\lambda_1\lambda_2,\lambda_3=\frac{1}{4}$, 则

$$|\lambda_2|\,|\lambda_3|=\frac{1}{4\,|\lambda_1|}>1$$

所以 $\rho(B_J)>1$， J法发散。

4. 因为 $\rho(B_J)=\frac{2}{|\alpha|}$, 所以当 $|\alpha|>2$ 时J 法收敛。

5. 迭代矩阵 $B=I-\alpha A$, 若 A 的特征值为 λ，则 B 的特征值为 $1-\alpha\lambda$。

（1）A 的特征值为 1，4，则 B 的特征值为 $1-\alpha$, $1-4\alpha$，则 $|1-\alpha|<1$, $|1-4\alpha|<1$, 即 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 时迭代收敛，要迭代收敛最快，还需 $|1-\alpha|=|1-4\alpha|$,即 $\alpha=0.4$.

（2）因为 A 对称正定，所以 A 的特征值 λ 大于 0. 若 $\alpha<0$，则迭代矩阵 B 的特征值 $1-\alpha\lambda$ 大于 1, $\rho(B)>1$, 迭代发散。所以迭代收敛的充要条件为 $\alpha>0$ 及 A 的任意特征值 λ 满足 $|1-\alpha\lambda|<1$，即 $0<\alpha<2\lambda^{-1}$，所以迭代收敛的充要条件为 $0<\alpha<2\lambda_1^{-1}$. 要迭代收敛最快，还需 $|1-\alpha\lambda_1|=|1-\alpha\lambda_n|$, 即 $\alpha=\frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

6. $B^j=\begin{pmatrix}\alpha^j & 4j\alpha^{j+1}\\ 0 & \alpha^j\end{pmatrix}$，则 $\|B^j\|_\infty=\alpha^j+4j\alpha^{j-1}$. 用 $e^{(j)}$ 表示第 j 次迭代的误差，则

$$\left\|e^{(j)}\right\|_\infty=\left\|B^je^{(0)}\right\|_\infty\le\left\|e^{(0)}\right\|_\infty\left\|B^j\right\|_\infty=\left\|e^{(0)}\right\|_\infty\left(\alpha^j+4j\alpha^{j-1}\right)=\varepsilon^{(j)}.$$

当 $j>\frac{\alpha^2+3\alpha}{4(1-\alpha)}$时，$\varepsilon^{(j)}$ 单调减少。

7. 因为存在约当标准型 J 及可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}JP$，所以 $B^n=P^{-1}J^nP$. 因为 $\rho(B)=0$, 所以 B 的特征值均为 0，那么 J 的对角线上的元素均为 0，则 $J^n=0$。 用 $e^{(n)}$ 表示第 n 次迭代的误差，则 $e^{(n)}=B^ne^{(0)}=0$.

8. 取初始近似值 $x_0=(0,0,0)^T$, 则可得

$$x_1=(0.0000,-0.38460.7692)^T,\qquad x_2=(0.0472,-0.37010.7874)^T,$$

$$x_3=(0.06897,-0.3966,0.7759)^T,\qquad \|Ax_3-b\|_\infty<10^{-8}.$$

第10章 习题解答与提示

1. （1）构成数域F上的线性空间。

（2）不构成F上的线性空间。因数量乘法不封闭，设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$,那么$k(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)^T, \forall k \in F, k \neq 1$, 这时 $\sum\limits_{i=1}^{n} ka_i = k$.

（3），（4），（5）均构成 F 上的线性空间。

（6）不构成 F 上的线性空间。因加法不满足交换律。

$A \oplus B = AB - BA$, $B \oplus A = BA - AB = -(AB - BA)$, $A \oplus B \neq B \oplus A$.

2. 因 V_1, V_2 为非平凡子空间，故存在 $\alpha \notin V_1$， 如果 $\alpha \notin V_2$，则命题已证。

今设$\alpha \in V_2$,另外存在$\beta \notin V_2$，如果$\beta \notin V_1$，则也得证。今设$\beta \in V_1$，此即$\alpha \notin V_1, \alpha \in V_2$及$\beta \in V_1, \beta \notin V_2$，于是可证$\alpha + \beta \notin V_1, V_2$.

事实上，若$\alpha + \beta \in V_1$,又$\beta \in V_1$,那么必定$\alpha \in V_1$,这与题设矛盾。$\alpha + \beta \notin V_1$.同理可证$\alpha + \beta \notin V_2$.即$\alpha + \beta \notin V_1 \cup V_2$.

3. 令$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$, 即得

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & k_1 + k_2 + k_3 \\ k_1 + k_3 + k_4 & k_1 + k_2 + k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关。

4. 令 $G_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, 1 \leq i < j \leq n$. 则 $G_{12}, \cdots, G_{1n}, G_{23}, \cdots, G_{2n}, \cdots, G_{n-1,n}$为 V_1 的一组基，$\dim V_1 = \frac{n(n-1)}{2}$. V_2 的一组基为

$$E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{22}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{n-1,n-1}, E_{n-1,n}, E_{nn}.$$

即

$$\{E_{ij} \,|1 \leq i \leq j \leq n\}.\dim V_2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5. （1）设 $f=a_1 1+a_2(x-1)+a_3(x-1)^2+a_4(x-1)^3$，比较等式两边系数，解得 $a_1=11, a_2=22, a_3=18, a_4=5$. 所以 f 在基 $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ 下的坐标为 $(11,22,18,5)^T$.

（2）因

$$\left(1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\right)=\left(1,x,x^2,x^3\right)\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\left(1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3\right)=\left(1,x,x^2,x^3\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\left(1,x,x^2,x^3\right)=\left(1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\right)$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\left(1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3\right)=\left(1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3\right)A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 4 & 12\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

即为所求的过渡矩阵。

（3）f在基$1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$下的坐标为$A^{-1}(11,22,18,5)^T=(-1,10,-12,5)^T$.

6. （1）取 $R^{2\times 2}$ 的一组基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$, 则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\,A,$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\,B,$$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&2&0&-1\\1&-2&2&-1\\3&0&-2&1\end{pmatrix}$.

于是 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,A^{-1}B$, 即得过渡矩阵为 $P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&1\end{pmatrix}$.

（2）设 $\alpha\in R^{2\times 2}$ 在基（I）与（II）下的坐标均为 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 则由坐标变换公式得 $x=Px$，即 $(I-P)\,x=0$, 得通解为 $x=(0,0,0,k)^T, k\in R$. 故在两组基下有相同坐标的所有向量为

$$\alpha=0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+k\alpha_4=\begin{pmatrix}k&-k\\-k&k\end{pmatrix},\quad k\in R.$$

7. （1）因 $I\in C\,(A)\neq\phi$. 若 $B_1,B_2\in C\,(A)$, 则 $A\,(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)\,A$, 故 $B_1+B_2\in C\,(A)$. 又 $(kB_1)\,A=k\,(B_1A)=k\,(AB_1)=A\,(kB_1)$, 即 $kB_1\in C\,(A)$. 所以 $C\,(A)$ 是 $F^{n\times n}$ 的一个子空间。

（2）因 $A=I$, 任何方阵都同 I 可交换，故 $C\,(A)=F^{n\times n}$.

（3）设 $B=(b_{ij})$, 满足 $AB=BA$,

$$BA=\begin{pmatrix}b_{11}&2b_{12}&\cdots&nb_{1n}\\b_{21}&2b_{22}&\cdots&nb_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&2b_{n2}&\cdots&nb_{nn}\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\2b_{21}&2b_{22}&\cdots&2b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\nb_{n1}&nb_{n2}&\cdots&nb_{nn}\end{pmatrix},$$

比较两个乘积，得 $b_{ij}=0, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$. 于是 B 为对角矩阵，即 $B=diag\left(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn}\right)$.反 之，若 B为任一对角矩阵，显然 $AB=BA$.故$C\left(A\right)$ 就是所有对角矩阵构成的线性空间，其一组基为 $\left\{E_{ii}\left|i=1,2,\cdots,n\right.\right\},\dim C\left(A\right)=n$.

8. 显然 $0\in W\neq\phi$. 对任意 $f\left(x\right),g\left(x\right)\in W, k\in F$, 有

$$f\left(x\right)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\quad g\left(x\right)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0,$$

其中 $a_0-a_1+a_2=0,\quad b_0-b_1+b_2=0$. 于是

$$f\left(x\right)+g\left(x\right)=\left(a_3+b_3\right)x^3+\left(a_2+b_2\right)x^2+\left(a_1+b_1\right)x+\left(a_0+b_0\right),$$

$$kf\left(x\right)=ka_3x^3+ka_2x^2+ka_1x+ka_0,$$

且 $\left(a_0+b_0\right)-\left(a_1+b_1\right)+\left(a_2+b_2\right)=\left(a_0-a_1+a_2\right)+\left(b_0-b_1+b_2\right)=0, ka_0-ka_1+ka_2=0$, 因此 $f\left(x\right)+g\left(x\right)\in W, kf\left(x\right)\in W$, 即 W 是 $F\left[x\right]_4$ 的子空间。 又对 $f\left(x\right)\in W$, 有

$$f\left(x\right)=a_3x^3+a_2x^2+\left(a_0+a_2\right)x+a_0=a_3x^3+a_2\left(x^2+x\right)+a_0\left(x+1\right),$$

令 $f_1\left(x\right)=x+1, f_2\left(x\right)=x^2+x, f_3\left(x\right)=x^3$, 则 $f\left(x\right)=a_0f_1\left(x\right)+a_2f_2\left(x\right)+a_3f_3\left(x\right)$, 且 由定义易证 f_1,f_2,f_3 线性无关，从而是 W 的一组基，故 $\dim W=3$.

9. （1）$V_1+V_2=span\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\right)$, 而

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc}1&2&0&1&4\\0&1&1&2&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

所以 $\dim\left(V_1+V_2\right)=3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为 V_1+V_2 的一组基。

（2）$\forall\alpha\in V_1\cap V_2$, 可设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=x_4\beta_1+x_5\beta_2$, 即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-x_4\beta_1-x_5\beta_2=0$, 解得 $x_1=2k_1+k_2, x_2=-k_1+$

$2k_2, x_3 = k_1, x_4 = k_2, x_5 = k_2$, 于是 $\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_2\,(5,-1,5,2)^T$. 故 $\dim\,(V_1 \cap V_2) = 1, (5,-1,5,2)^T$ 是一个基。

10. 设 $rankB = r, rank\,(AB) = s$, 则方程组 $B\alpha = 0$ 的解空间 V_1 的维数为 $p = n - r$. 方程组 $AB\alpha = 0$ 的解空间 V_2 的维数为 $q = n - s$, 显然 $V_1 \subset V_2$.

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 为 V_1 的一组基，并将其扩充为 V_2 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$, $\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_q$. 可证 $B\alpha_{p+1}, \cdots, B\alpha_q$（均为$F^p$中向量）线性无关。事实上，由

$$k_{p+1}\,(B\alpha_{p+1}) + \cdots + k_q\,(B\alpha_q) = 0,$$

知 $B\,(k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_q\alpha_q) = 0$. 于是 $k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_q\alpha_q \in V_1$, 故有

$$k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_q\alpha_q = k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p,$$

但 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_q$. 线性无关，所以 $k_1 = \cdots = k_p = k_{p+1} = \cdots = k_q = 0$, 即 $B\alpha_{p+1}, \cdots, B\alpha_q$ 线性无关。

W 由向量组 $B\alpha_1, \cdots, B\alpha_p, B\alpha_{p+1}, \cdots, B\alpha_q$ 生成，但 $B\alpha_1 = \cdots = B\alpha_p = 0$, 故

$$W = \operatorname{span}\,(B\alpha_{p+1}, \cdots, B\alpha_q)\,.$$

因此 $\dim W = q - p = (n-s) - (n-r) = r - s = rankB - rank\,(AB)\,.$

11. 将 A, B 按列分块为：$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\,, B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\,.$ 则

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)\,.$$

于是

$$\mathrm{rank}A = \dim span\,(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\,,$$

$$\mathrm{rank}B = \dim span\,(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\,, \mathrm{rank}\,(A+B)$$

$$= \dim span\,(\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)\,.$$

而

$$span\left(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n\right)\subseteq span\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)+span\left(\beta_1,\cdots,\beta_n\right),$$

故

$$\begin{aligned}
&\dim span\left(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n\right)\\
&\le \dim\left[span\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)+span\left(\beta_1,\cdots,\beta_n\right)\right]\\
&=\dim span\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)+\dim span\left(\beta_1,\cdots,\beta_n\right)\\
&-\dim\left[span\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)\cap span\left(\beta_1,\cdots,\beta_n\right)\right]\\
&\le \dim span\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)+\dim span\left(\beta_1,\cdots,\beta_n\right).
\end{aligned}$$

所以 $rank\left(A+B\right)\le rankA+rankB.$

12. 对任意 $\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^T\in R^n$, 有

$$\alpha=\left(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0\right)^T+\left(0,\cdots,0,a_{r+1},\cdots,a_n\right)^T,$$

而 $\left(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0\right)^T\in R\left(A\right),\left(0,\cdots,0,a_{r+1},\cdots,a_n\right)^T\in R\left(B\right)$, 即有 $\alpha\in R\left(A\right)+R\left(B\right)$, 从而 $R^n\subseteq R\left(A\right)+R\left(B\right)$, 又显然有 $R^n\supseteq R\left(A\right)+R\left(B\right)$, 所以 $R^n=R\left(A\right)+R\left(B\right)$. 且 $\dim R\left(A\right)+\dim R\left(B\right)=rankA+rankB=r+(n-r)=n=\dim R^n$, 故 $R^n=R\left(A\right)\oplus R\left(B\right)$.

13. 取 $R^{2\times 2}$ 的一组基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$. 可求得 $x_1-x_2+x_3-x_4=0$ 的基础解系为 $\xi_1=\left(1,1,0,0\right)^T,\xi_2=\left(-1,0,1,0\right)^T,\xi_3=\left(1,0,0,1\right)^T$.ξ_1,ξ_2,ξ_3 可分别看成矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的坐标，利用线性空间同构的性质，得 A_1,A_2,A_3 线性无关，且 $V_1=span\left(A_1,A_2,A_3\right)$. 从而有 $V_1+V_2=span\left(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2\right)$. 又 B_1,B_2 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的坐标为 $\beta_1=\left(1,0,2,3\right)^T,\beta_2=\left(1,-1,0,1\right)^T$. 易求得 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大无关组为 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\beta_1$. 这样由同构性质知 A_1,A_2,A_3,B_1 为

A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 的一个极大无关组，从而是 V_1+V_2 的一组基，且 $\dim(V_1+V_2)=4$.

14. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标分别为 $x_{\beta_1}=(1,-2,3)^T, x_{\beta_2}=(2,3,2)^T, x_{\beta_3}=(4,3,0)^T$, 则由

$$(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, x_{\beta_3})=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 3 & 13\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

知 $\operatorname{rank}\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, x_{\beta_3}\}=2, x_{\beta_1}, x_{\beta_2}$ 为一个极大无关组。于是

$$\dim\operatorname{span}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2, \beta_1, \beta_2$$

为一组基

15. 令 $\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c\end{pmatrix}\leftrightarrow(a,b,c)^T\in R^3$ 即可。

16. （1）、（2）、（4）是线性变换。

（3）不是线性变换。

$$\sigma(k(x_1,x_2,x_3))=\sigma(kx_1,kx_2,kx_3)=\left(k^2x_1^2,2kx_2,kx_3\right).$$

$$k\sigma(x_1,x_2,x_3)=\left(kx_1^2,2kx_2,kx_3\right).$$

$$\sigma(k(x_1,x_2,x_3))\neq k\sigma(x_1,x_2,x_3), 0\neq k\in F.$$

17. 令 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in R^2$, 则 $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$,

$\sigma_1(x+y)=(x_2+y_2,-x_1-y_1)=(x_2-x_1)+(y_2,-y_1)=\sigma_1(x)+\sigma_1(y)$,

对 $k\in R$, $\sigma_1(kx)=(kx_2,-kx_1)=k(x_2,-x_1)=k\sigma_1(x)$.

所以 σ_1 是 R^2 的线性变换，同理 σ_2 也是。

$$(\sigma_1+\sigma_2)(x)=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)=(x_1+x_2,-x_1-x_2),$$

$$(\sigma_1\sigma_2)(x)=\sigma_1(\sigma_2(x))=\sigma_1(x_1,-x_2)=(-x_2,-x_1),$$

$$(\sigma_2\sigma_1)(x)=\sigma_2(\sigma_1(x))=\sigma_2(x_2,-x_1)=(x_2,x_1).$$

18. 对 $f(x)\in F[x]$, 有 $(D\sigma-\sigma D)(f(x))=D(\sigma(f(x)))-\sigma(D(f(x)))$

$=D(xf(x))-\sigma(f'(x))=f(x)+xf'(x)-xf'(x)=f(x)=I(f(x))$,

所以 $D\sigma-\sigma D=I$.

19. 对 $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$, 有 $\sigma^2(x)=\sigma(\sigma(x))=\sigma(0,x_1,x_2)=(0,0,x_1)$, 所以

$$R\left(\sigma^2\right)=\{(0,0,k)\,|k\in R\},\dim R\left(\sigma^2\right)=1,$$

且 $\varepsilon_3=(0,0,1)$ 是它的一组基。

$$N\left(\sigma^2\right)=\left\{x\in R^3\left|\sigma^2x=0\right.\right\}=\left\{(0,x_2,x_3)\in R^3\,|x_2,x_3\in R\right\},$$

且 $\dim N(\sigma^2)=2$, 它的一组基为

$$\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1).$$

20. （1）$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$, 即 $\sigma^2+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau^2=\sigma+\tau=\sigma^2+\tau^2$, 故 $\sigma\tau+\tau\sigma=O,\sigma\tau=-\tau\sigma$. 以 σ 左乘两边，得 $\sigma^2\tau=-\sigma\tau\sigma\Rightarrow\sigma\tau=(-\sigma\tau)\sigma=(\tau\sigma)\sigma=\tau\sigma^2=\tau\sigma$, 于是

$$O=\sigma\tau+\tau\sigma=\sigma\tau+\sigma\tau=2\sigma\tau,\quad \sigma\tau=O.$$

（2）$(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2=(\sigma+\tau-\sigma\tau)(\sigma+\tau-\sigma\tau)$ 按分配律展开整理即得结果。

（3）对 $\alpha\in V,\tau(\alpha)\in R(\tau)=R(\sigma)$. 故存在 $\beta\in V$, 使 $\tau(\alpha)=\sigma(\beta)$, 可得 $\sigma(\tau(\alpha))=\sigma^2(\beta)=\sigma(\beta)=\tau(\alpha)$, 即 $\tau(\alpha)=\sigma\tau(\alpha)$, 由 α 的任意性得 $\tau=\sigma\tau$. 同理可证 $\sigma=\tau\sigma$.

反之，对 $\alpha \in V, \sigma\tau(\alpha) = \tau(\alpha)$. 这表明 $R(\tau) \subseteq R(\sigma)$. 又 $\tau\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha)$, 这又表明 $R(\sigma) \subseteq R(\tau)$. 所以 $R(\sigma) = R(\tau)$.

（4）对 $\alpha \in V, \sigma^2(\alpha) = \sigma(\alpha) \Rightarrow \sigma(\alpha - \sigma(\alpha)) = 0$, 得 $\alpha - \sigma(\alpha) \in N(\sigma) = N(\tau)$. 所以 $\tau(\alpha - \sigma(\alpha)) = 0$, 即 $\tau(\alpha) = \tau\sigma(\alpha)$, 由 α 的任意性即得 $\tau = \tau\sigma$. 同理可证 $\sigma = \sigma\tau$.

反之，对 $\alpha \in N(\sigma), \tau(\alpha) = \tau\sigma(\alpha) = \tau(0) = 0$. 故 $\alpha \in N(\tau), N(\sigma) \subseteq N(\tau)$, 同理 $N(\tau) \subseteq N(\sigma)$. 所以 $N(\sigma) = N(\tau)$.

21. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

22. （1）由 $(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A,$$

得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（2）因 $\det A = 2 \neq 0, A$ 可逆，所以 σ 可逆，且 σ^{-1} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

23. （1）$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

（2）显然 $\dim R(\sigma) = rankA = 2, \dim N(\sigma) = 4 - \dim R(\sigma) = 2.$ 因 A 的第1列与第3列线性无关，利用同构性质知 $\sigma(E_{11}), \sigma(E_{21})$ 是 $\sigma(E_{11}), \sigma(E_{12}), \sigma(E_{21}), \sigma(E_{22})$ 的一个极大无关组，从而是 $R(\sigma)$ 的一组基。

对 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in N(\sigma)$, 则由

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 2x_3 & -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 \\ 2x_3 & -2x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得 $x_1 = -x_2 + x_4, x_3 = 0$, 于是

$$X = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x_2, x_4 \in F.$$

易知 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 线性无关，从而是 $N(\sigma)$ 的一组基。

24. 因 $\det(\lambda I - A) = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2)$, 得 σ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 2$. 可求得 σ 对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的两个线性无关的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. σ 对应 $\lambda_3 = -2, \lambda_4 = 2$ 的线性无关的特征向量分别为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

25. （1）设 $k_1\alpha + k_2\sigma(\alpha) + \cdots + k_n\sigma^{n-1}(\alpha) = 0$. 两端用 σ^{n-1} 作用，并利用 $\sigma^n(\alpha) = 0$, 得 $k_1\sigma^{n-1}(\alpha) = 0$, 因 $\sigma^{n-1}(\alpha) \neq 0$, 所以 $k_1 = 0$. 同理可得 $k_2 = \cdots = k_n = 0$, 故 $\alpha, \sigma(\alpha), \cdots, \sigma^{n-1}(\alpha)$ 线性无关。

（2）由（1）知 $\alpha, \sigma(\alpha), \cdots, \sigma^{n-1}(\alpha)$ 是 V 的一组基，且 σ 在这组

基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

（3）σ 的特征多项式为 $f_\sigma(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n$. 故 σ 的特征值只能是0.

26. （1）设 λ 是 σ 的特征值，α 为对应的特征向量，即 $\sigma(\alpha)=\lambda\alpha$. 于是由 $\sigma^2(\alpha)=\sigma(\alpha)$, 得 $\lambda^2\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow \lambda(\lambda-1)\alpha=0, \alpha\neq 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0$, 即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

（2）对 $\alpha\in V$, 因 $\sigma^2(\alpha)=\sigma(\alpha)$, 所以$\sigma^2(\alpha)-\sigma(\alpha)=0$, 即 $\sigma(\alpha-\sigma(\alpha))=0$, 知 $\alpha-\sigma(\alpha)\in N(\sigma)$. 显然 $\sigma(\alpha)\in R(\sigma), \alpha=\sigma(\alpha)+(\alpha-\sigma(\alpha))$. 故 $V=R(\sigma)+N(\sigma)$.

又若 $\alpha\in R(\sigma)\cap N(\sigma)$, 则 $\sigma(\alpha)=0$, 且存在 $\beta\in V$, 使 $\alpha=\sigma(\beta)$. 于是

$$\alpha=\sigma(\beta)=\sigma^2(\beta)=\sigma(\sigma(\beta))=\sigma(\alpha)=0,$$

即

$$R(\sigma)\cap N(\sigma)=\{0\}.$$

所以

$$V=R(\sigma)\oplus N(\sigma).$$

27. 取 $F[x]_4$ 的一组基 $1,x,x^2,x^3$, 则 $\sigma(1)=1-3x, \sigma(x)=-2+2x, \sigma(x^2)=2x^2-4x^3, \sigma(x^3)=-3x^2+3x^3$, 所以 σ 在基 $1,x,x^2,x^3$,下

的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -4 & 3\end{pmatrix}.$$

可求得 A 的特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=6,\lambda_3=\lambda_4=-1$, 特征向量 $\xi_1=\left(-\frac{2}{3},1,0,0\right)^T,\xi_2=\left(0,0,-\frac{3}{4},1\right)^T$, $\xi_3=(1,1,0,0)^T$, $\xi_4=(0,0,1,1)^T$. 令

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ 则\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4 & & & \\ & 6 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}=\Lambda.$$

再令 $(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))=(1,x,x^2,x^3)P$, 则 $f_1(x)=-\frac{2}{3}+x, f_2(x)=-\frac{3}{4}x^2+x^3$, $f_3(x)=1+x, f_4(x)=x^2+x^3$ 构成 $F[x]_4$ 的一组基，此时 σ 在此基下的矩阵为 Λ.

28. 必要性，若 σ 可对角化，取 V_{λ_i} 的一组基 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{il_i}\,(i=1,\cdots,r)$, 则 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{il_i}$ 是 λ_i 对应的线性无关的特征向量，从而

$$\xi_{11},\cdots,\xi_{1l_1},\cdots,\xi_{r1},\cdots,\xi_{rl_r}$$

是 σ 的线性无关特征向量组。又由定理10.37知 $l_1+\cdots+l_r=n$. 于是

$$\xi_{11},\cdots,\xi_{1l_1},\cdots,\xi_{r1},\cdots,\xi_{rl_r}$$

是 V的一组基，且

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_r}.$$

充分性 取 V_{λ_i}的一组基 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{il_i}\,(i=1,2,\cdots,r)$, 则

$$\xi_{11},\cdots,\xi_{1l_1},\cdots,\xi_{r1},\cdots,\xi_{rl_r}$$

是 $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ 的亦是 V 的一组基，而 $\dim V = n$. 于是 σ 在 V 中有 n 个线性无关的特征向量。故 σ 可对角化。

29. 对任意 $\beta \in W$, 则 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\sigma(\alpha) + \cdots + k_m\sigma^{m-1}(\alpha)$. 于是

$$\sigma(\beta) = k_1\sigma(\alpha) + k_2\sigma^2(\alpha) + \cdots + k_{m-1}\sigma^{m-1}(\alpha) + k_m\sigma^m(\alpha)$$

$$= k_1\sigma(\alpha) + \cdots + k_{m-1}\sigma^{m-1}(\alpha) \in W.$$

故 W 是 σ 的不变子空间。

30. （1）设 λ 是σ 的任一特征值，V_λ为相应的特征子空间。对 $\alpha \in V_\lambda$,

$$\sigma(\tau(\alpha)) = \sigma\tau(\alpha) = \tau\sigma(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha)) = \tau(\lambda\alpha) = \lambda\tau(\alpha).$$

这表明 $\tau(\alpha)$ 是 σ 的属于特征值 λ的一个特征向量，即 $\tau(\alpha) \in V_\lambda$, 所以 V_λ 是 τ 的不变子空间。

（2）设 V_λ 是 σ的一个特征子空间，由（1）知 V_λ 也是 τ的不变子空间。τ 在 V_λ 上的限制 $\tau|V_\lambda$ 是 V_λ上 的一个线性变换。$\tau|V_\lambda$ 的特征多项式在复数域中至少有一个根 μ，同时有 $\beta \in V_\lambda, \beta \neq 0$为 相应的特征向量，即 $(\tau|V_\lambda)(\beta) = \mu\beta$. 于是$\beta$ 为 σ 和 τ 的公共特征向量。

31. 对 $\alpha \in V_1 + V_2$, 则 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$. 于是 $\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2)$. 因 $\sigma(\alpha_i) \in V_i\,(i = 1, 2)$, 所以 $\sigma(\alpha) \in V_1 + V_2$. 即 $V_1 + V_2$ 是 σ 的不变子空间。

$\forall \alpha \in V_1 \cap V_2$, 则 $\alpha \in V_1, \alpha \in V_2$. 因 $\sigma(\alpha) \in V_1, \sigma(\alpha) \in V_2$, 所以 $\sigma(\alpha) \in V_1 \cap V_2$. 故 $V_1 \cap V_2$ 也是 σ 的不变子空间。

32. 由Schmidt正交化公式得 $R^{2\times 2}$ 的一组正交基为

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7}\end{pmatrix}.$$

33. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在给定基下的坐标依次为

$$\xi_1=(1,0,0,0,1)^T,\xi_2=(1,-1,0,1,0)^T,\xi_3=(2,1,1,0,0)^T.$$

显然 ξ_1,ξ_2,ξ_3线 性无关，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而是 W 的一组基，对其正交化，得

$$\beta_1=\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5,\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4-\frac{1}{2}\varepsilon_5,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\beta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5.$$

单位化得 W 的一组标准正交基为

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2),\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_4-\varepsilon_5),$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5).$$

34. 由

$$A=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_3,\alpha_1)\\ (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_2,\alpha_2) & (\alpha_3,\alpha_2)\\ (\alpha_1,\alpha_3) & (\alpha_2,\alpha_3) & (\alpha_3,\alpha_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix},$$

及Schimdt正交化公式，将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化，得 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2,\beta_3=\alpha_3-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2$. 再单位化得$V$的一组标准正交基为

$$\varepsilon_1=\alpha_1,\quad \varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\alpha_2,\quad \varepsilon_3=\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3-\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1+\frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2.$$

35. 易见 $M\subseteq\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. 另一方面，对 $\alpha\in\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, 令 $\alpha=\alpha_1+\beta_1,\alpha_1\in M,\beta_1\in M^{\perp}$, 则

$$(\alpha,\beta_1)=(\alpha_1,\beta_1)+(\beta_1,\beta_1).$$

而 $(\alpha,\beta_1)=(\alpha_1,\beta_1)=0$, 故 $(\beta_1,\beta_1)=0$, 从而 $\beta_1=0$. 即 $\alpha=\alpha_1\in M$, 因此 $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}\subseteq M$. 所以 $M=\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

36. 显然 $E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$ 是 W 的一组基。且有 $(E_{ii}, E_{jj}) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$ 所以 $E_{11}, \cdots, E_{nn}$ 是 W 的一组标准正交基。于是 $\dim W^{\perp} = \dim R^{n\times n} - \dim W = n^2 - n$, 且 $A \in W^{\perp} \Leftrightarrow (A, E_{ii}) = a_{ii} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 由此可得

$$W^{\perp} = \left\{ A = (a_{ij}) \in R^{n\times n} \left| a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0 \right. \right\}.$$

另外，有 $E_{ij} \in W^{\perp}, i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$. 已知

$$\{E_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n\}$$

线性无关，且对 $A = (a_{ij}) \in W^{\perp}$, 有

$$A = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

所以 $\{E_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n\}$ 是 $W^{\perp}$ 的一组基，又显然有

$$(E_{ij}, E_{kl}) = \begin{cases} 1, & i = k, j = l, i \neq j \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

从而知 $E_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$ 为 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基。

37. 设 λ 为 A 的特征值，x 为对应的特征向量，则 $Ax = \lambda x$. 取共轭转置得 $x^H A^T = (Ax)^H = \bar{\lambda} x^H$. 于是 $x^H A^T A x = \bar{\lambda} x^H \lambda x$, 由 $A^T A = I$, 得 $x^H x = \bar{\lambda}\lambda x^H x$, 即 $\|x\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2$. 因 $\|x\| \neq 0$, 所以 $|\lambda| = 1$.

38. 设 σ 为正交变换，λ 是它的特征值，α 为对应的特征向量，则 $\sigma(\alpha) = \lambda\alpha$,且$(\alpha, \alpha) = (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\lambda\alpha, \lambda\alpha) = \lambda^2 (\alpha, \alpha)$, 因 $(\alpha, \alpha) \neq 0$, 所以 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = \pm 1$.

39. 设 σ 在 V 的某组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A, 则 A 为

对称矩阵，且 $A^2=I$. 于是存在正交矩阵 T, 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

两边平方，得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}=T^{-1}A^2T=T^{-1}T=I.$$

故 $\lambda_i=\pm 1, i=1,2,\cdots,n$.

令 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也是 V 的一组标准正交基，σ 在这组基下的矩阵为 $T^{-1}AT$, 且主对角元 $\lambda_i=\pm 1$. 适当调整基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的顺序可使得 σ 在这组标准正交基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & -I_{n-r}\end{pmatrix}.$$