§2.4 矩阵的谱半径及应用

一. 矩阵的谱半径

§2.4 矩阵的谱半径及应用

一. 矩阵的谱半径

1. 定义：设 $A \in C^{n\times n}$， $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值， 称

$$\rho(A) = \max_j |\lambda_j|$$

为 A 的谱半径。

2. 定理2.12：$\rho(A) \leq \|A\|$.

证明：设 λ 是 A 的特征值，设 $\|\cdot\|_v$ 为 C^n 上与 $\|\cdot\|$ 相容的向量范数。由 $Ax = \lambda x$ 得

$$|\lambda| \, \|x\|_v = \|\lambda x\|_v = \|Ax\|_v \leq \|A\| \, \|x\|_v$$

从而 $|\lambda| \leq \|A\|$， 故 $\rho(A) \leq \|A\|$.

3. 例：设 $A \in C^{n\times n}$，则

(1) $\|A\|_2 \le \max\{\|A\|_\infty, \|A\|_1\}$

3. 例：设 $A \in C^{n\times n}$，则

(1) $\|A\|_2 \leq \max\{\|A\|_\infty, \|A\|_1\}$

(2) 当 A 是正规矩阵时，$\rho(A) = \|A\|_2$.

注： 矩阵的谱半径是 $C^{n\times n}$ 上的一个函数，但它不是矩阵范数。如设

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $A\neq 0$，但

$\rho(A)=0$； $\rho(A+B)=1>0=\rho(A)+\rho(B)$；

$\rho(EF)=(1+\sqrt{5})/2>1=\rho(E)\rho(F)$。

例 1：试估计 A 的谱半径

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

解：$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 0.4$，$\|A\|_{m_1} = 1$，$\|A\|_{m_\infty} = 0.6$，$\|A\|_F = \sqrt{0.18} \approx 0.4243$，于是 $\rho(A) \leq 0.4$.

4. 定理2.13：设 $A \in C^{n\times n}$，对任意 $\varepsilon > 0$， 存在矩阵范数 $\|\cdot\|_m$ 使

$$\|A\|_m \leq \rho(A) + \varepsilon$$

证明： 设 $P \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \delta_i = 0 \text{ 或 } 1$$

令 $D = diag(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1})$, 则有

$$D^{-1}P^{-1}APD = D^{-1}JD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon\delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon\delta_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\|D^{-1}P^{-1}APD\|_\infty \le \max_j(|\lambda_j| + \varepsilon) = \rho(A) + \varepsilon$$

规定

$$\|B\|_m = \|D^{-1}P^{-1}APD\|_\infty, \quad B \in C^{n\times n}$$

则 $\|B\|_m$ 是 $B \in C^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数且有

$$\|A\|_m = \|D^{-1}P^{-1}APD\|_\infty \le \rho(A) + \varepsilon$$

二. 矩阵序列及在级数中的应用

1. 称满足 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ 的矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 为收敛矩阵。

2. 定理2.14 矩阵 A 为收敛矩阵的充要条件为 $\rho(A) < 1$。

证明：如果 A 为收敛矩阵，则对任一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$。因为

$$(\rho(A))^k = \rho(A^k) \le \|A^k\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

所以必有 $\rho(A) < 1$.

反之，如果 $\rho(A) < 1$，则有 $\varepsilon > 0$ 使得 $\rho(A) + \varepsilon < 1$。存在某个矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$。 那么

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k \to 0.$$

所以 A 是收敛矩阵。

3. 若有 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\|<1$， 则 A 为收敛矩阵。
4. 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，则对所有 $A\in C^{n\times n}$，有

$$\rho(A)=\lim_{k\to\infty}\|A^k\|^{1/k}.$$

例：矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & -0.3 \\ -0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

是否为收敛矩阵？

解：由于 $\|A\|_\infty = 0.9 < 1$，所以 A 是收敛矩阵。

矩阵级数

5. 定义： 设 $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵序列，它们的无穷和式

$$A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

称为矩阵级数，记为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$.

对任一正整数 N，称 $S^{(N)} = \sum\limits_{k=1}^{N} A^{(k)}$ 为矩阵级数的部分和。如果部分和序列 $\{S^{(N)}\}$ 收敛于矩阵 S，则称矩阵级数收敛，其和为 S，记为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = S$。不收敛的级数称为发散级数。

6. 定义：设 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in C^{n\times n}$，$(k=1,2,\cdots)$。若 n^2 个数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

均绝对收敛，则称矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛。

7. 定理：矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛的充要条件是正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛，其中 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的任一矩阵范数。

矩阵幂级数

8. 设 $A \in C^{n\times n}$，$a_k \in C$ $(k=0,1,2,\cdots)$，称矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 为矩阵 A 的幂级数。

9. 定理：设复变量幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 R，$A \in C^{n\times n}$，则

(1) 当 $\rho(A) < R$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛；

(2) 当 $\rho(A) > R$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散。

证明：(1) 当 $\rho(A) < R$ 时，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\rho(A) + \varepsilon < R$，从而 存在矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon < R$。那么有

$$\|a_k A^k\| \le |a_k| \|A\|^k \le |a_k| (\rho(A) + \varepsilon)^k.$$

由于级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (\rho(A) + \varepsilon)^k$ 收敛，所以 $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$ 收敛，故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛。

(2) 当 $\rho(A) > R$ 时，设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则一定有某个特征值的模大于 R，不妨设 $|\lambda_1| > R$。设 A 的 Jordan 矩阵为 J，由 Jordan 定理，存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \delta_i = 0 \text{ 或 } 1.$$

由于矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k J^k$ 对角线元素为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_j^k \ (j=1,2,\cdots,n)$， 其中有一项 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_1^k$ 是发散的，所以矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k J^k$ 发散。而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k J^k = P^{-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k\right) P$，故矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散。

10. 设复变量幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 R，$A \in C^{n\times n}$。若存在 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| < R$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛。

11. 设 $A \in C^{n\times n}$，则矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛的充要条件是 $\rho(A) < 1$， 且在收敛时，其和为 $(I - A)^{-1}$。

12. 设 $A \in C^{n\times n}$，如果存在矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| < 1$，则 $I - A$ 是可逆矩阵，且 $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$。

例：判断以下矩阵幂级数的敛散性：

$$(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{5^k}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}^k;\quad (2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{3^k}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}^k;$$

$$(3)\sum_{k=0}^{\infty}k(k+1)\begin{pmatrix}0.1 & 0.5 & -0.3\\ -0.4 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & -0.2 & 0.3\end{pmatrix}^k.$$

§2.4 矩阵的条件数及应用

设 $A \in C_n^{n\times n}$, $b \in C^n$. 在求 A^{-1} 或解方程组 $Ax = b$ 时，对于误差 δA 和 δb，要研究 A^{-1} 和 $(A + \delta A)^{-1}$ 的近似程度，或 x 与 δx 的误差大小。

1. 定义：设 $A \in C_n^{n\times n}$, $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一个矩阵范数。矩阵 A 的条件数定义为

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|.$$

例：设 $A \in C_n^{n\times n}$ 是一个正规矩阵，则

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\max\{|\lambda| : \lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值}\}}{\min\{|\lambda| : \lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值}\}}$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$，求 A 的条件数 $\mathrm{cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$。

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求 A 的条件数 $\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$。

解：因为 $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，所以 A 的条件数为

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 12 \times 4 = 48.$$

2. 定理: 设 $A \in C_n^{n\times n}$， $\delta A \in C^{n\times n}$， 若对 $C^{n\times n}$ 上的某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A^{-1}\delta A\| < 1$， 则

(1) $A+\delta A$ 可逆

(2) $\|(A+\delta A)^{-1}\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}$

(3) $\dfrac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\delta A\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}$

证明：(1) $A+\delta A = A(\mathrm{I}+A^{-1}\delta A)$

(2) 因为

$$(A+\delta A)^{-1} = (I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\delta A)^k A^{-1}.$$

所以 $\|(A+\delta A)^{-1}\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}$

(3) 因为

$$\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}\delta A)^k A^{-1}\right\|$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{-1}\delta A\|^k\|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\|A^{-1}\|.$$

从而

$$\frac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}.$$

推论：设 $A \in C_n^{n\times n}$， $\delta A \in C^{n\times n}$. 若对 $C^{n\times n}$ 上某矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$， 则 （相对误差）

$$\frac{\|A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

3. 定理：设 $A \in C_n^{n\times n}$， $\delta A \in C^{n\times n}$， $b, \delta b \in C^n$. 若对 $C^{n\times n}$ 上某矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$， 则

$$Ax = b \quad \text{与} \quad (A+\delta A)\hat{x} = b + \delta b$$

的解满足 （相对误差）

$$\frac{\|x-\hat{x}\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} \le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|_\alpha}{\|b\|_\alpha}\right)$$

其中 $\|\cdot\|_\alpha$ 是 C^n 上与矩阵范数 $\|\cdot\|$ 相容的向量范数。

证明：因为

$$
\begin{aligned}
x-\hat{x} &= A^{-1}b-(A+\delta A)^{-1}(b+\delta b)\\
&= [A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}]b-(A+\delta A)^{-1}\delta b\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}\delta A)^k A^{-1}b\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}\delta A)^k A^{-1}\delta b.
\end{aligned}
$$

所以，利用 $\|b\|_\alpha = \|Ax\|_\alpha \le \|A\|\|x\|_\alpha$，可得

$$\begin{aligned}\|x-\hat{x}\|_\alpha \;\le\; & \sum_{k=1}^{\infty}(\|A^{-1}\|\|\delta A\|)^k\|x\|_\alpha \\ & + \sum_{k=0}^{\infty}(\|A^{-1}\|\|\delta A\|)^k\|A^{-1}\|\|\delta b\|_\alpha\end{aligned}$$

$$= \frac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\|x\|_\alpha + \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\|A^{-1}\|\|\delta b\|_\alpha$$

$$\le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|_\alpha}{\|b\|_\alpha}\right)\|x\|_\alpha$$

4. 一般地，如果条件数 $\mathrm{cond}(A)$ 较小（接近 1），就称 A 关于求矩阵逆或求解线性方程组为良态的或好条件的；如果条件数 $\mathrm{cond}(A)$ 较大，就称 A 关于求矩阵逆或求解线性方程组为病态的或坏条件的。

常用条件数：

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$$cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}}$$

μ_1, μ_n 分别为 A^HA 的最大与最小特征值。

几个例题

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

证明对任意范数，当 $\varepsilon \to 0$ 时有

$\mathrm{cond}(A) = O(\varepsilon^{-1})$。因而矩阵 A 是病态的。

证明：可以求得 A 的特征值为

$\lambda_1=(2+\varepsilon+\sqrt{4+\varepsilon^2})/2$， $\lambda_2=(2+\varepsilon-\sqrt{4+\varepsilon^2})/2$。

由于 A 为对称矩阵，所以对谱范数有

$$\operatorname{cond}_2(A)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{2+\varepsilon+\sqrt{4+\varepsilon^2}}{2+\varepsilon-\sqrt{4+\varepsilon^2}}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left(2+\sqrt{4+\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{4+\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^2}{2}+\varepsilon\right)$$

$$=O(\varepsilon^{-1}),\quad (\text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时}).$$

因为 $C^{n\times n}$ 上所有矩阵范数是等价的，所以对任意范数，当 $\varepsilon \to 0$ 时有 $\mathrm{cond}(A) = O(\varepsilon^{-1})$。因而矩阵 A 是病态的。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$, $\delta(A) \in C^{3\times 3}$, $0 \neq b \in C^3$.

为使线性方程组 $Ax = b$ 的解 x 与 $(A + \delta(A))x = b$ 的解 $\hat{x}$ 的相对误差 $\frac{\|\hat{x} - x\|_2}{\|x\|_2} \leq 10^{-4}$, 问 $\frac{\|\delta(A)\|_2}{\|A\|_2}$ 应不超过何值？

解：因为 $|\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)$，所以 $\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = 2$。从

$$\frac{\|\hat{x}-x\|_2}{\|x\|_2} \le \frac{\mathrm{cond}_2(A)}{1-\mathrm{cond}_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}} \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le 10^{-4},$$

即

$$\frac{2}{1-2\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}} \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le 10^{-4},$$

得

$$\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le \frac{1}{2.0002} \times 10^{-4} \le \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-5}.$$

3\. 设 $A \in C^{n\times n}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ (j = 1, 2, \cdots, n)$, $a_{ij} \geq 0$， 证明 $\rho(A) = 1$.

证明：首先 $\rho(A) \leq \|A\|_1 = 1$， 其次 因为

$$det(\mathrm{I} - A) = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & * & \\ & & & \end{vmatrix} = 0$$

所以 $\lambda = 1$ 为 A 的一个特征值，从而 $\rho(A) \geq 1$，故 $\rho(A) = 1$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

选取 $C^{3\times 3}$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 使 $k_\alpha(A) = \|A\|_\alpha \|A^{-1}\|_\alpha$ 最小。

解：因为 A 是对称矩阵，所以 $\|A\|_2 = \rho(A)$. 而对 $C^{3\times3}$ 上任一范数 $\|\cdot\|$ 有 $\rho(A) \le \|A\|$. 所以选范数 $\|\cdot\|_2$ 可使 k_α 最小，即有

$$k_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|$$

因为 $det(\lambda\mathrm{I} - A) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$，$\lambda_1 = -7$，$\lambda_3 = 2$，则 $k_2(A) = \frac{7}{2}$.

5. 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的范数， 对任意 $A\in C^{n\times n}$， 定义 $\|A\|_* = \|A^H\|$， 证明：(1) $\|\cdot\|_*$ 是 $C^{n\times n}$ 上范数； (2) $\|A\|\,\|A\|_* \geq \|A\|_2^2$.

证明： (1) 按定义易证。

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2 &= \rho(AA^H) \leq \|AA^H\| \\ &\leq \|A\|\,\|A^H\| = \|A\|\,\|A\|_*\end{aligned}$$

6. 设 $A \in C^{n\times n}$， A 不可逆

(1) 证明 $r(A) = r(A^2)$ 的充要条件是 A 的形如 λ^s 的初等因子均是一次的；

(2) 当 $r(A) = r(A^2)$ 时， 试由 A 的 Jordan 分解式构造矩阵 B， 使得 $ABA = A$， $BAB = B$， $AB = BA$.

证明：(1) 若 A 的形如 λ^s 的初等因子（设为 t 个）均是一次的，则存在可逆矩阵 P 使

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & J_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r \end{pmatrix} P$$

其中 J_i 为对应 $\lambda_i(\neq 0)$ 的 Jordan 块。则 $r(A) = n - t$.

而

$$A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & J_1^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r^2 \end{pmatrix} P$$

所以 $r(A^2) = n - t = r(A)$.

反之，若 $r(A^2)=r(A)$， 而 A 有一个 λ^2 的初等因子，

则

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & J_1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_r \end{pmatrix}P$$

则 $r(A) = n - t + 1$. 但

$$A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & J_1^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r^2 \end{pmatrix} P$$

所以 $r(A^2) = n - t$，得到矛盾。

(2) 取 $B = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & J_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r^{-1} \end{pmatrix} P$ 即可。