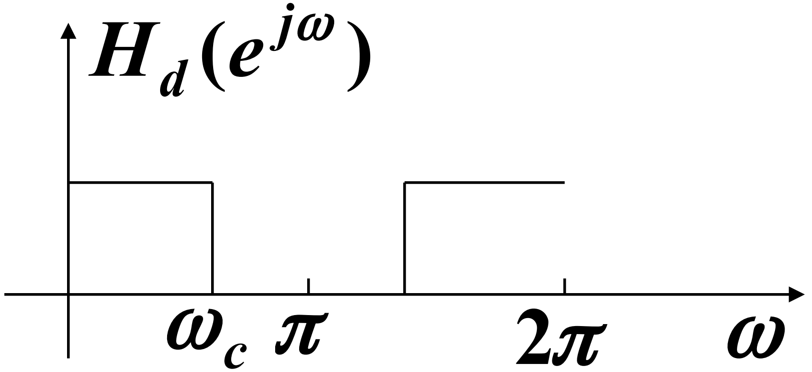
3. 数字滤波技术(Digital Filtering)

3.1 FIR 滤波器的窗函数设计

假定要求设计的频响为：

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



则它的单位冲击响应为：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \sin(\omega_c n)/(\pi n) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c n)$$

为了构成因果的FIR滤波器，需对$h_d(n)$进行(N-1)/2的时延，此时$H_d(e^{j\omega})$变为：

$$\hat{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega(N-1)/2} & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$h_d(n)$ 变为：

$$\hat{h}_d(n) = \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$$

然后再截取N点得$h(n)$为：

$$h(n) = \hat{h}_d(n)w(n)$$

其中$w(n)$称为窗函数。

常见的窗函数有：

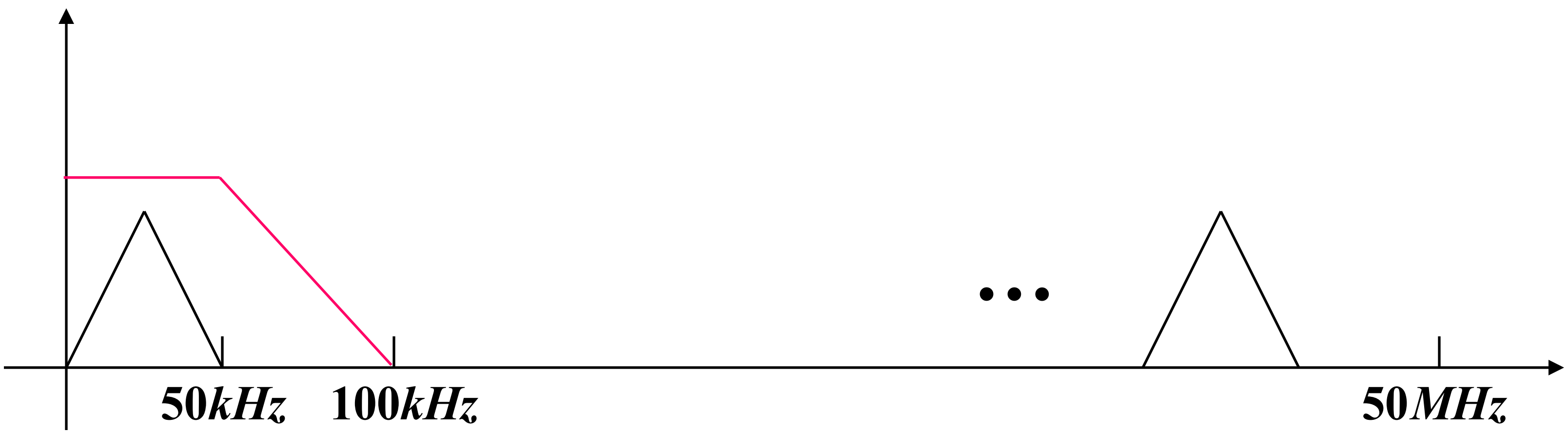
矩形窗（Rectangular Window）

汉宁窗（Hanning Window）

汉明窗（Hamming Window）

凯塞窗（Kaiser Window)

抽取滤波器例子

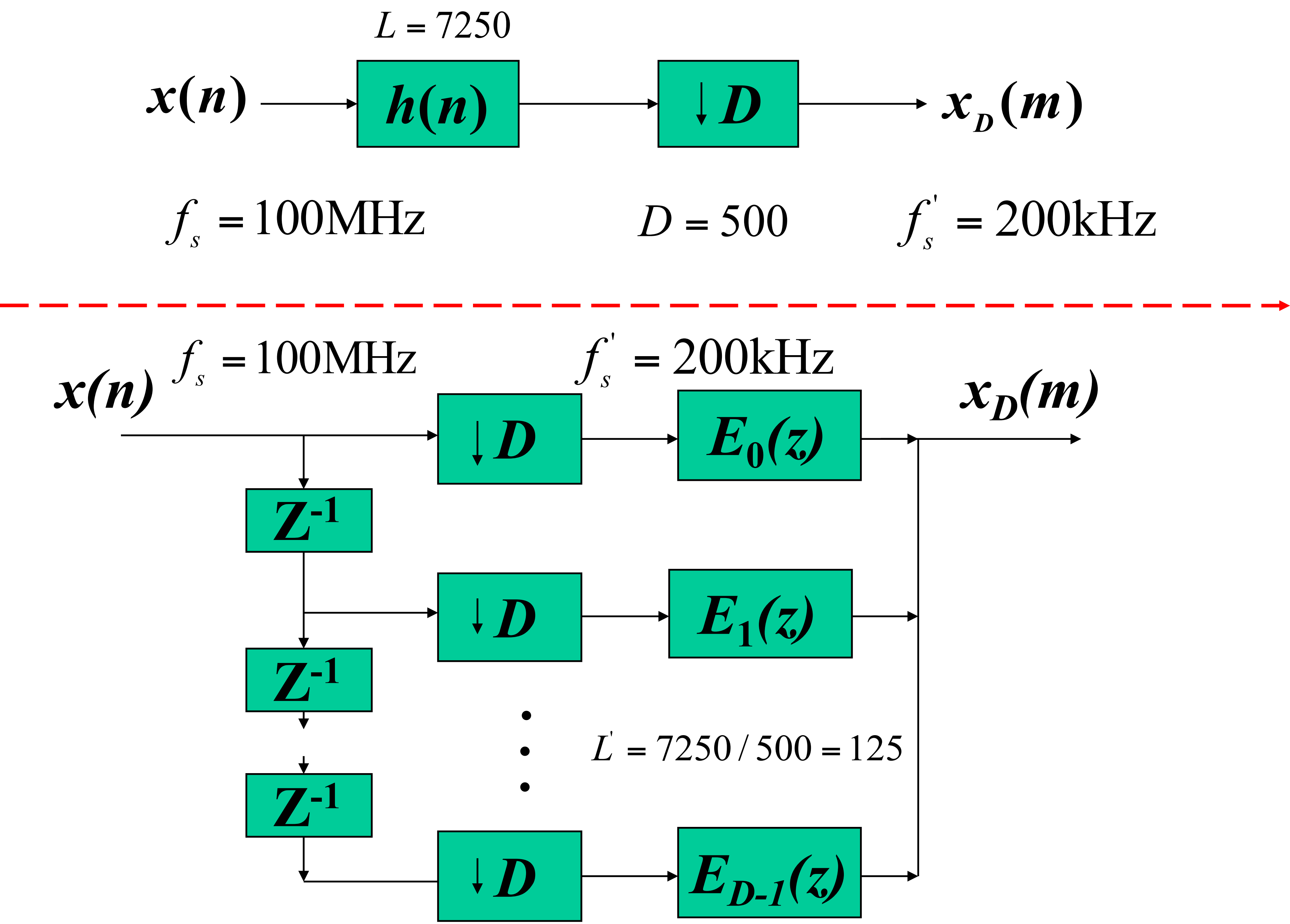


$$B = 50\text{kHz} \qquad f_s = 100\text{MHz}$$

设低通滤波器截止频率为100kHz，数据率为200kHz。

此时过渡带宽为100kHz - 50kHz = 50kHz。当阻带衰减 要求为0.001时, 滤波器阶数高达7250 。

$$\boxed{N \geq \frac{-20\lg\delta - 7.95}{14.36\Delta f / f_s}}$$


L = 7250
x(n)
h(n)
↓D
x_D(m)
f_s = 100MHz
D = 500
f_s' = 200kHz
f_s = 100MHz
f_s' = 200kHz
x(n)
↓D
E_0(z)
x_D(m)
Z^-1
↓D
E_1(z)
Z^-1
L' = 7250 / 500 = 125
Z^-1
↓D
E_D-1(z)

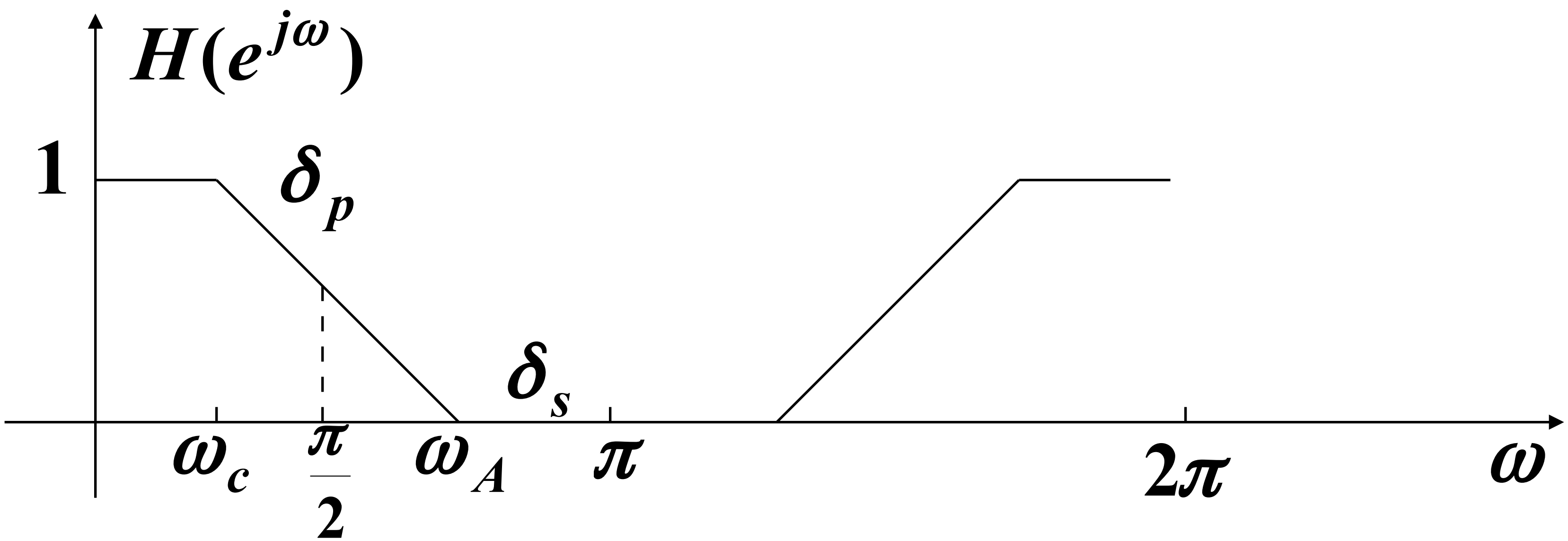
3.2 半带滤波器（Half-Band Filter)

(1) 半带滤波器的概念

满足如下条件的FIR滤波器叫半带滤波器：

(a) $\delta_p = \delta_s = \delta$ (通带波纹等于阻带衰减）

(b) $\omega_c = \pi - \omega_A$ (通带带宽等于阻带带宽）



可见半带滤波器有如下性质：

$$(a)\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/2} = 0.5$$

$$(b)\ H(e^{j\omega}) = 1 - H(e^{j(\pi-\omega)})$$

(c) $h(n)$具有如下形式：

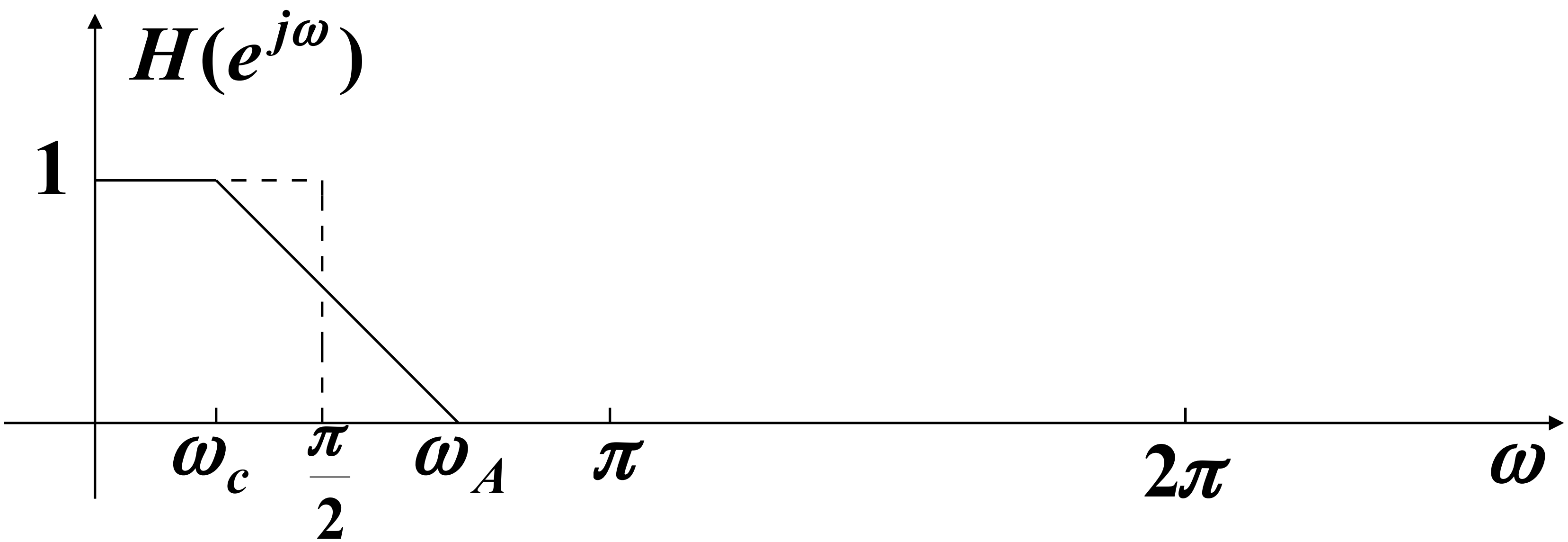
$$h(n) = [x,0,x,0,\ldots,0,x,\underset{\substack{\uparrow \\ (N-1)/2}}{0.5},x,0,\ldots,0,x,0,x]$$

半带滤波器系数的对称性和近一半系数为0，使得滤波运算量大大降低。

(2) 半带FIR滤波器的设计方法

半带滤波器的理想特性为:

$$\hat{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega(N-1)/2} & |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$



$$\hat{h}_d(n) = \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$$

因为

$$\hat{h}_d(\frac{N-1}{2}) = 0.5$$

$$2\hat{h}_d(\frac{N-1}{2} - n) = 2\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = 0, \text{ 当}n\text{为偶数时。}$$

所以满足半带滤波器设计要求。

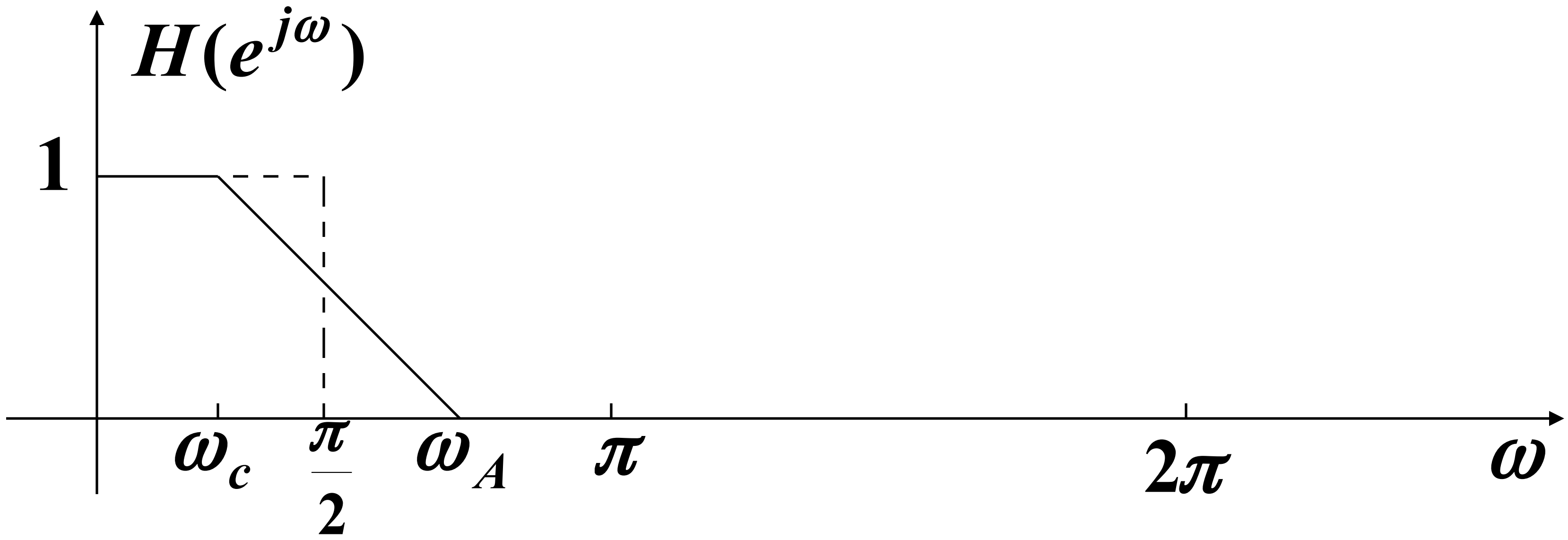
为了满足ω_a，ω_c，δ_p，δ_s的要求，可对$\hat{h}_d(n)$ 加凯塞窗。

(a) 计算相对过渡带： $\dfrac{\Delta f}{f_s}=\dfrac{\omega_A-\omega_c}{2\pi}=\dfrac{\pi-2\omega_c}{2\pi}$

(b) 确定滤波器阶数： $N \geq \dfrac{-20\lg\delta-7.95}{14.36\Delta f / f_s}$

(c) 计算凯塞窗 $w^k(n)$

(d) 求滤波器系数： $h(n)=\hat{h}_d(n)w^k(n)$



$\omega_c = \pi/8 \qquad \omega_A = 7\pi/8 \qquad \delta = 0.001$

(a) 计算相对过渡带： $\dfrac{\Delta f}{f_s} = \dfrac{\omega_A - \omega_c}{2\pi} = \dfrac{3}{8}$

(b) 确定滤波器阶数： $N \geq \dfrac{-20\lg\delta - 7.95}{14.36\Delta f / f_s} = 9.66$

取 $N = 11$

(c) 计算凯塞窗 $w^k(n)$

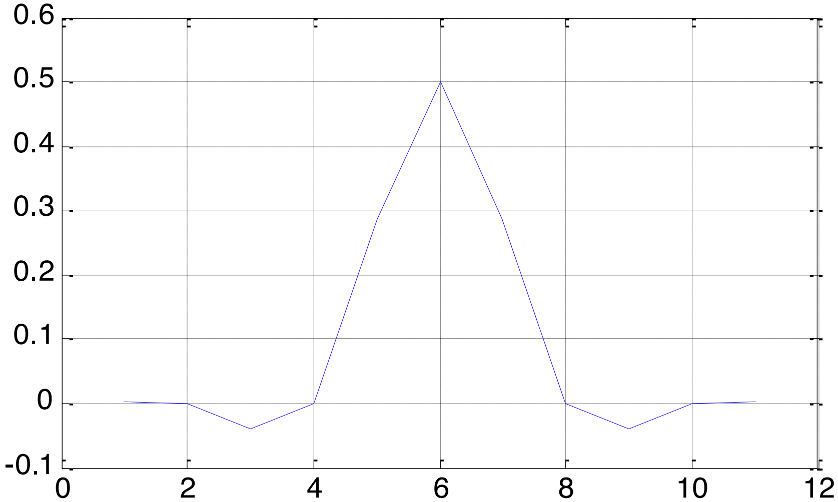
$$w^k(n) = \frac{\mathrm{I}_0\left[\beta\left(1-\left[2(n-N/2)/N\right]^2\right)^{1/2}\right]}{\mathrm{I}_0(\beta)}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 \le A \le 50 \\ 0.0, & A < 21 \end{cases}$$

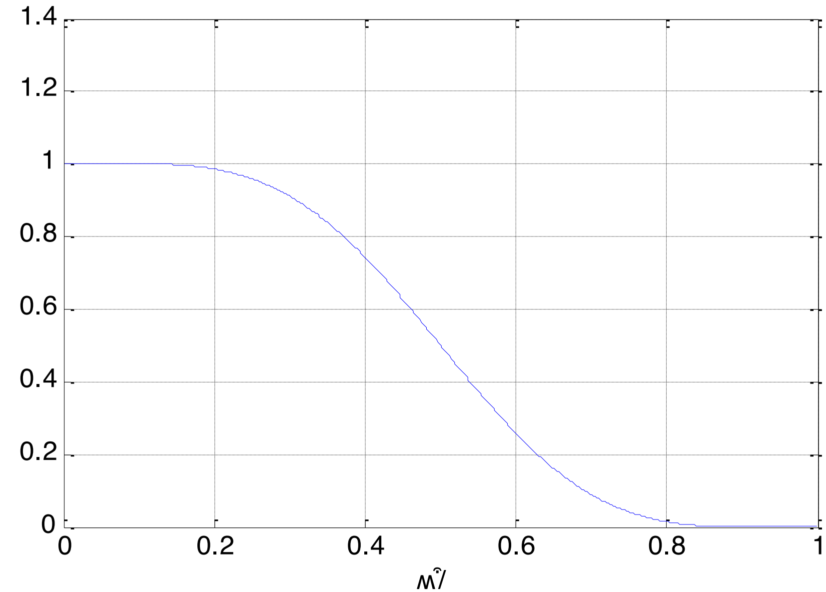
$$A = -20\lg\delta = 60$$

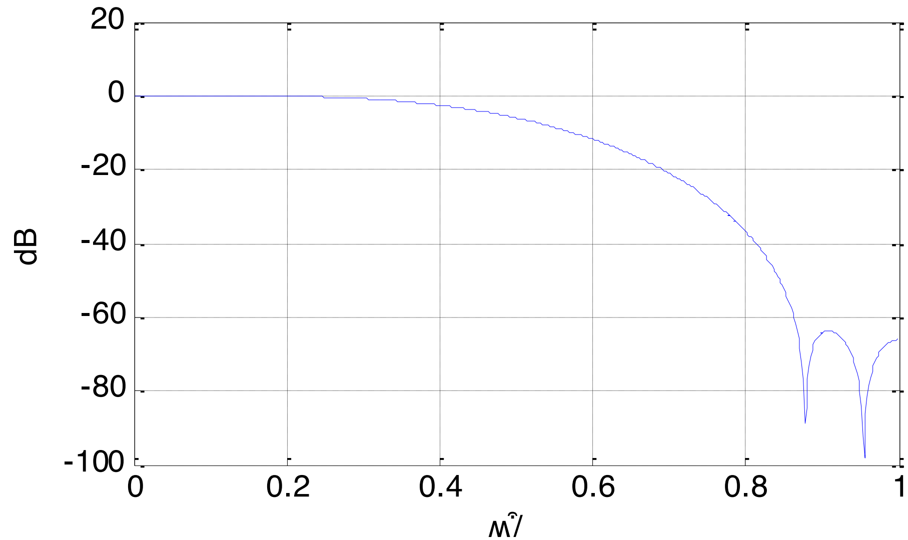
得到： $\beta = 5.65$

(d) 求滤波器系数: fir1(N-1, 1/2, kaiser(N, 5.65))

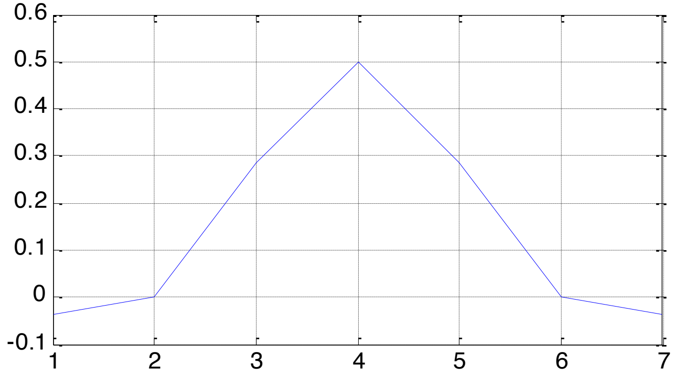


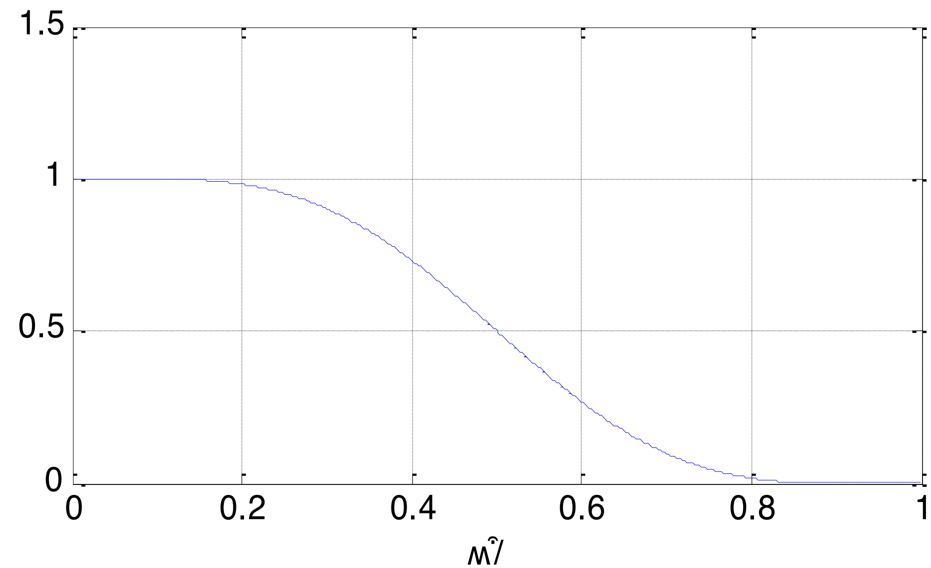
0.0013
-0.0000
-0.0386
0.0000
0.2872
0.5003
0.2872
0.0000
-0.0386
-0.0000
0.0013



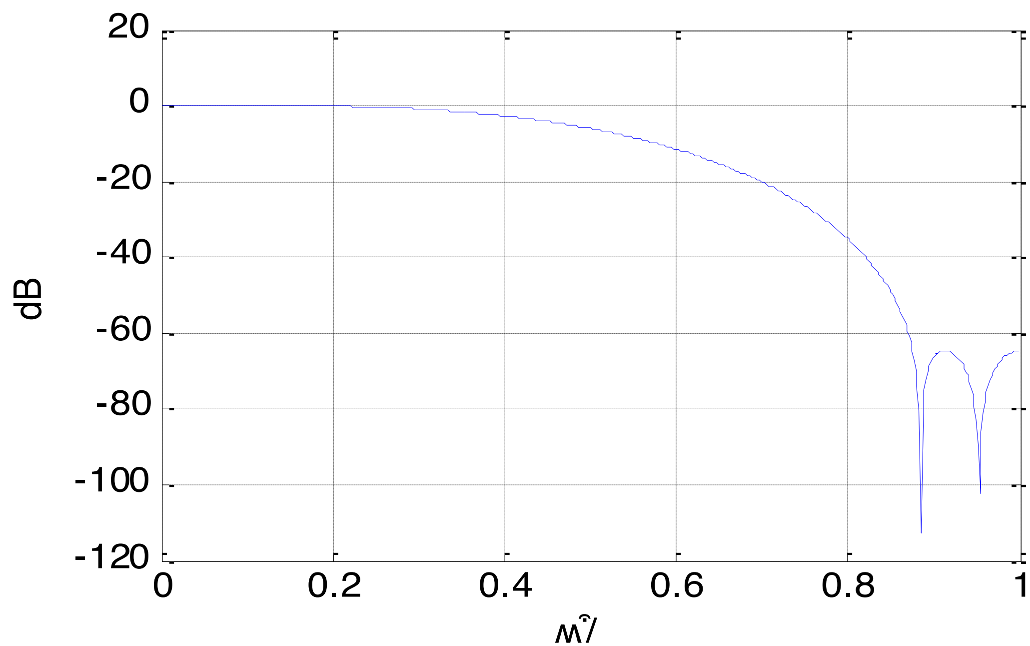


firhalfband('minorder', 1/8, 0.001)　　等波纹设计

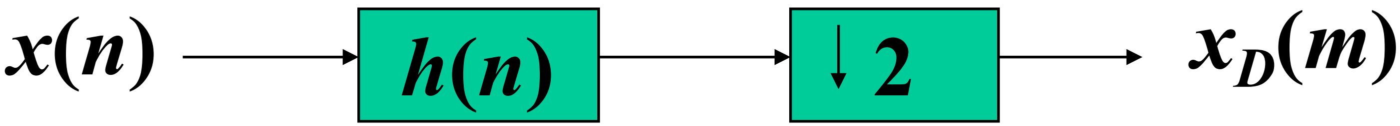


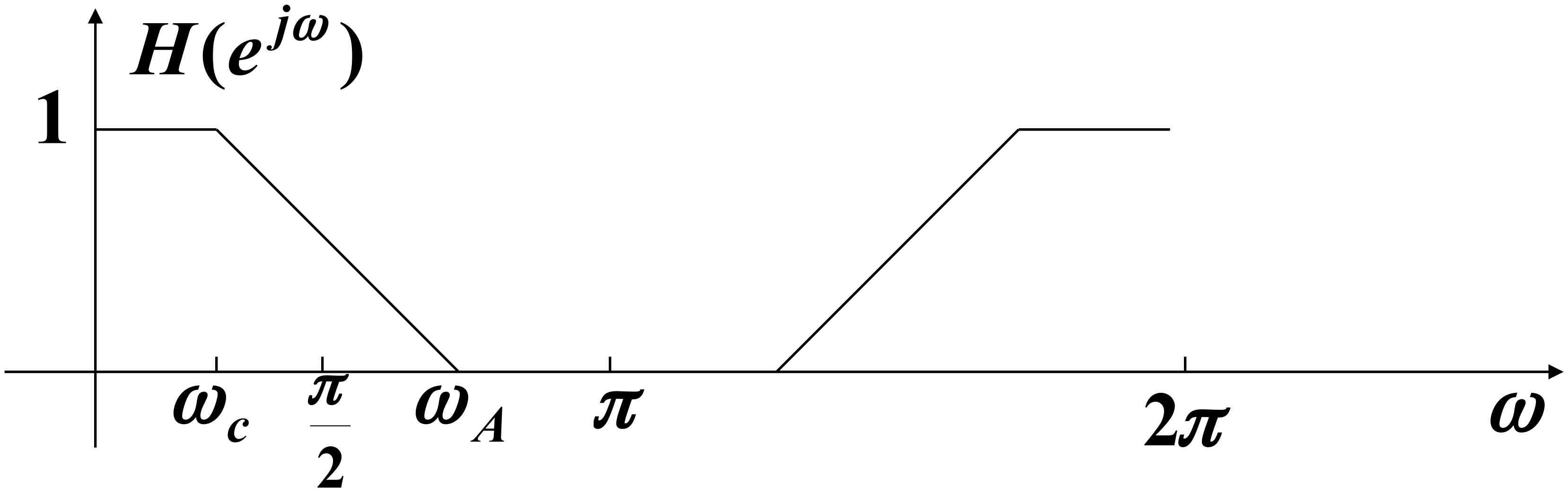


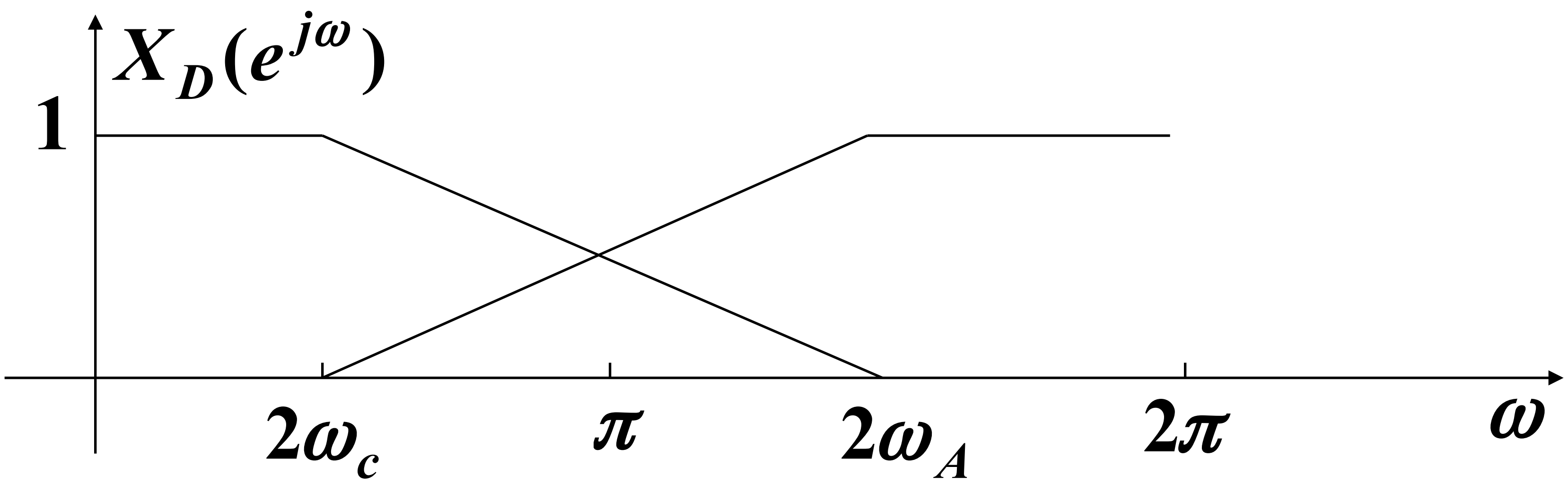
-0.0351
0
0.2848
0.5000
0.2848
0
-0.0351

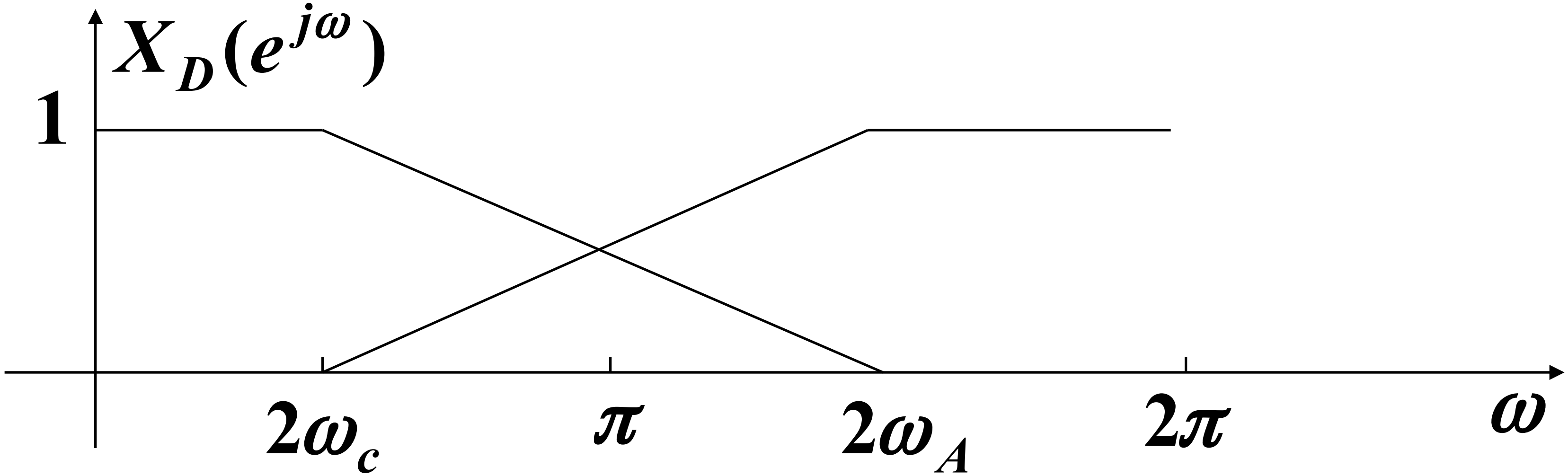


(3) 半带滤波器实现的2倍抽取



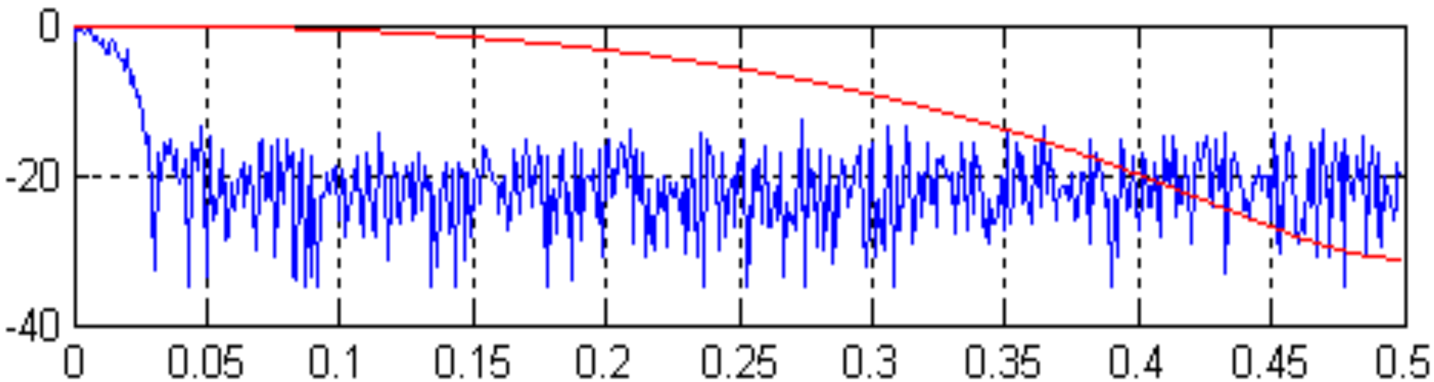




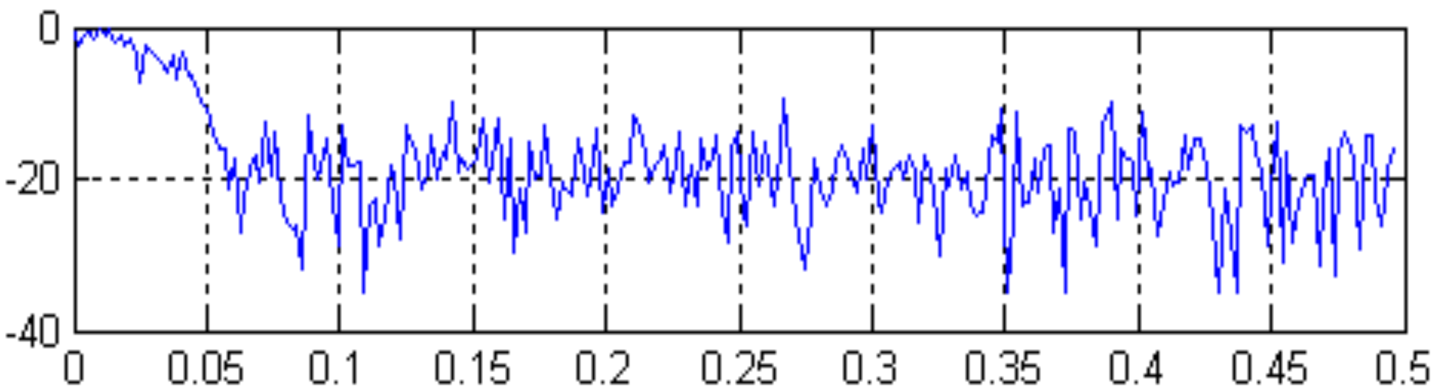


可见，由于半带滤波器在$\pi/2$～ω_A区间内不为零，经2倍抽取后信号在$2\omega_c$～π区间内（对应抽取前信号频率为ω_c～$\pi/2$）是混迭的。

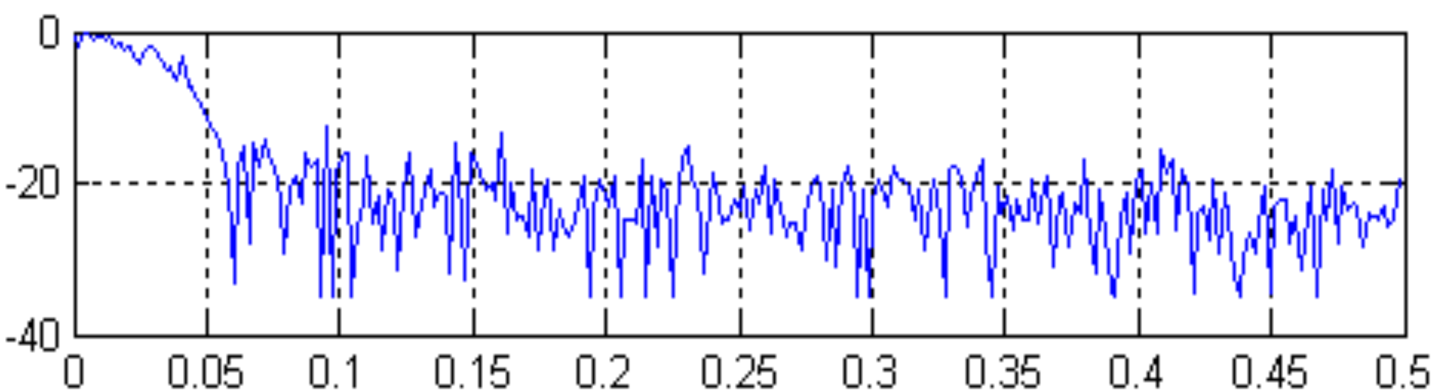
所以，当用半带滤波器进行2倍抽取时，原信号$x(n)$的频带不能超过ω_c。



输入信号频谱

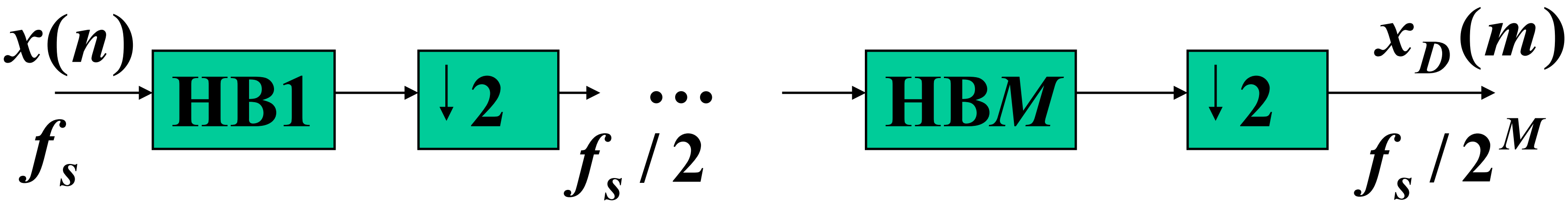


2倍抽取信号频谱



半带滤波2倍抽取信号频谱

(4) M个半带滤波器实现的 $D=2^M$ 倍抽取



设信号模拟带宽为f_c，随着抽取，各级采样率逐级降低，其数字带宽ω_c逐级变大。

各级数字带宽：$$\omega_{cm}=2\pi f_c/f_{sm}=2\pi\alpha_m$$

其中定义相对带宽α_m为：

$$\alpha_m=\frac{f_c}{f_{sm}}\qquad m=1,2,\ldots,M$$

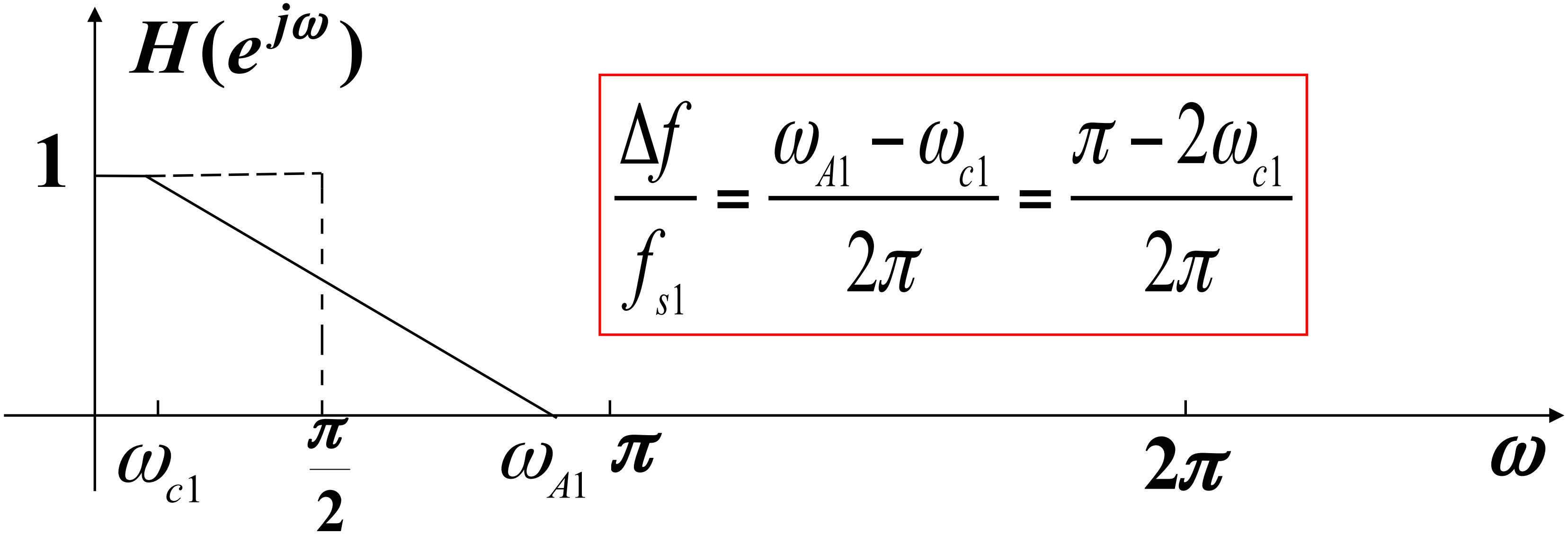
其中f_{sm}为第m级半带滤波器的输入取样速率：

$$f_{sm} = f_s / 2^{(m-1)}$$

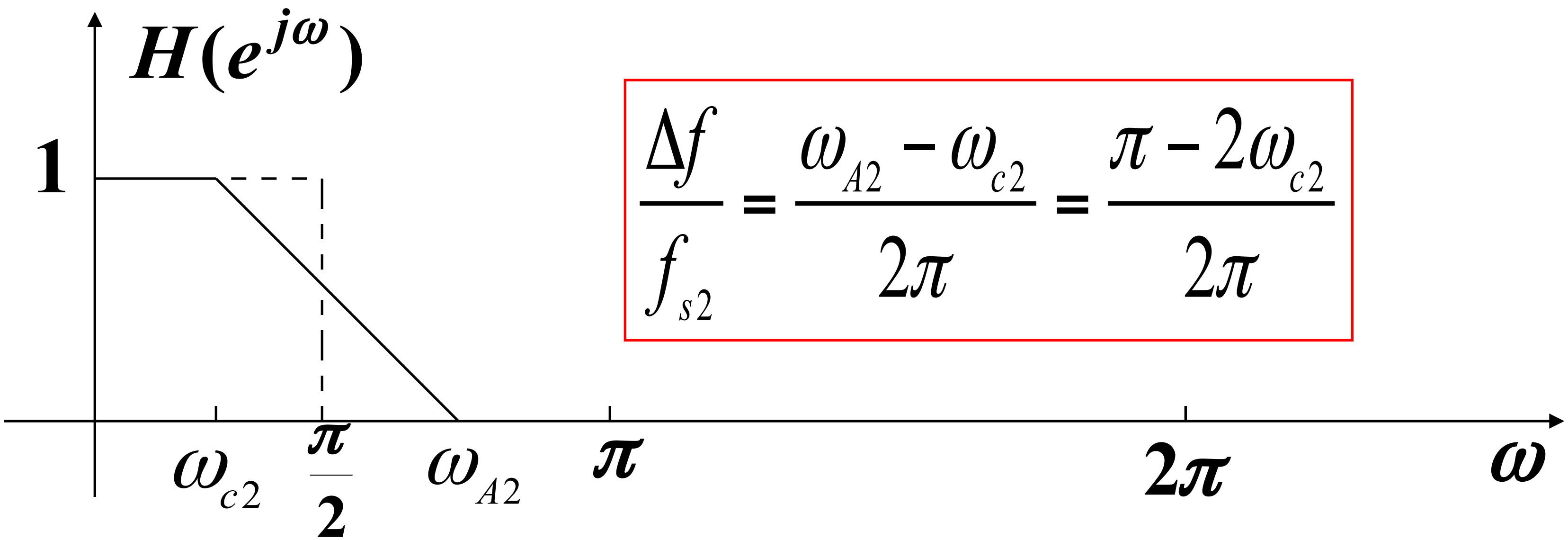
$$\therefore \qquad \alpha_m = \frac{f_c}{f_s} 2^{(m-1)}$$

第m级半带滤波器的过渡带宽为：

$$\frac{\Delta f}{f_{sm}} = \frac{\omega_{Am} - \omega_{cm}}{2\pi} = \frac{\pi - 2\omega_{cm}}{2\pi} = \frac{1 - 4\alpha_m}{2}$$



$$\boxed{\frac{\Delta f}{f_{s1}} = \frac{\omega_{A1} - \omega_{c1}}{2\pi} = \frac{\pi - 2\omega_{c1}}{2\pi}}$$



$$\boxed{\frac{\Delta f}{f_{s2}} = \frac{\omega_{A2} - \omega_{c2}}{2\pi} = \frac{\pi - 2\omega_{c2}}{2\pi}}$$

由此可计算出第m级半带滤波器（凯塞窗设计）所需的阶数：

$$N_m = \frac{-20\lg\delta_m - 7.95}{14.36\Delta f / f_{sm}}$$

如果取 $\delta = 0.001, \qquad \delta_m = \delta / M$

则

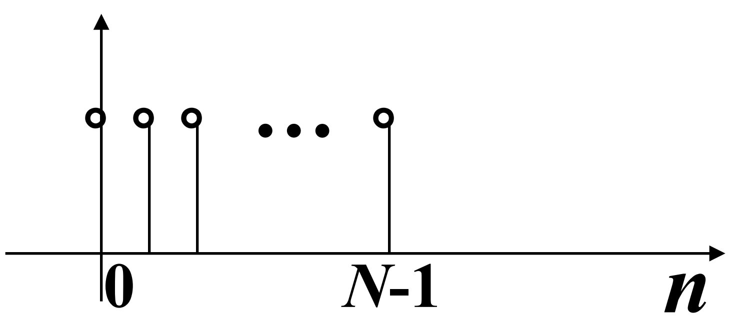
$$N_m = \frac{7.25 + 2.8\lg M}{1 - 2^{(m+1)} f_c / f_s}$$

3.3 积分梳状(CIC)滤波器

半带滤波器可完成D为 2的幂次方时的抽取滤波，当D不等于2^M时，例如 D = 48 = 3×2^4, 则第一级抽取滤波可用积分梳状滤波器实现。

积分梳状滤波器是一种最简单的 FIR滤波器，其单位冲击响应 $h(n)$ 为：

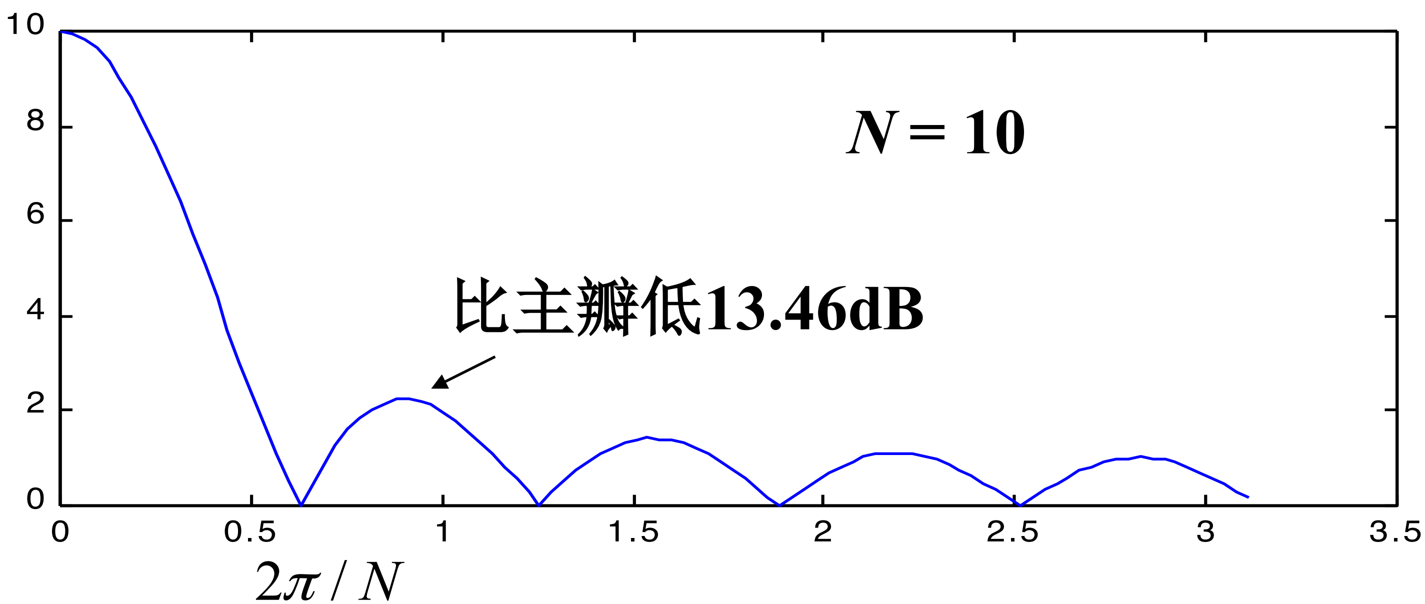
$$h(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



其Z变换为： $$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

其频响为：

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$$



主瓣电平：

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|_{\omega=0}=N$$

第一旁瓣电平：

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}+\frac{2\pi}{2N}}=\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|}$$

主旁瓣比：

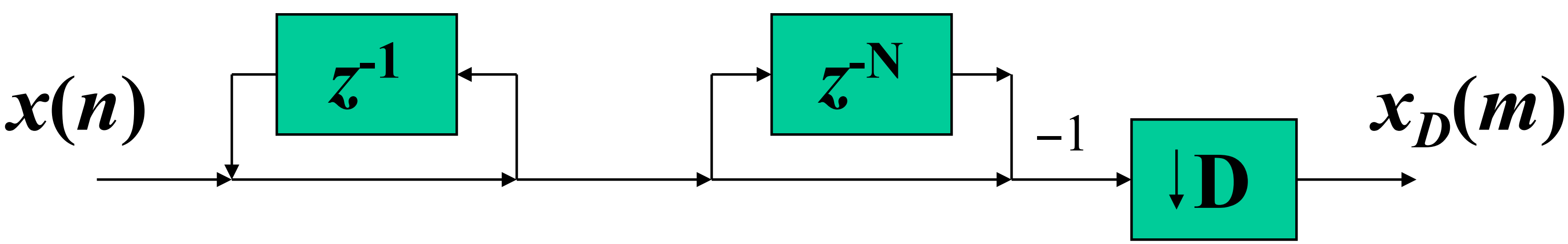
$$20\lg\left(\left|N\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|\right)\approx 20\lg\frac{3\pi}{2}=13.46\ \text{dB}$$

$H(z)$可分解为：

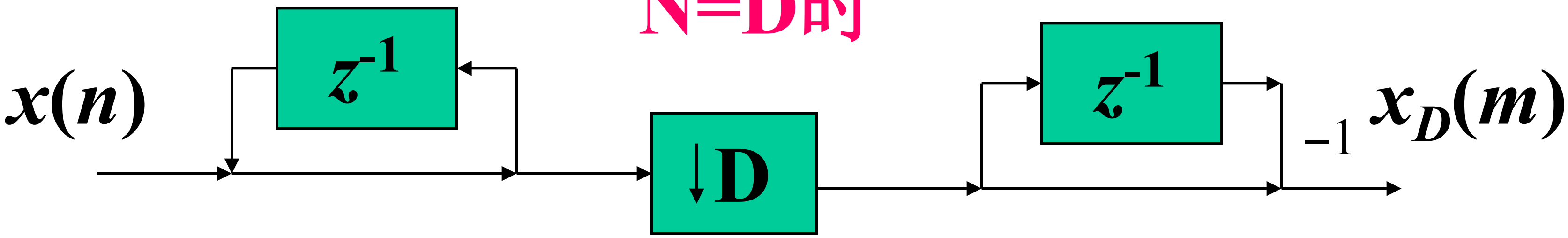
$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}(1-z^{-N})=H_1(z)H_2(z)$$

其中 $H_1(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ 为积分滤波器

$H_2(z)=1-z^{-N}$ 为梳状滤波器



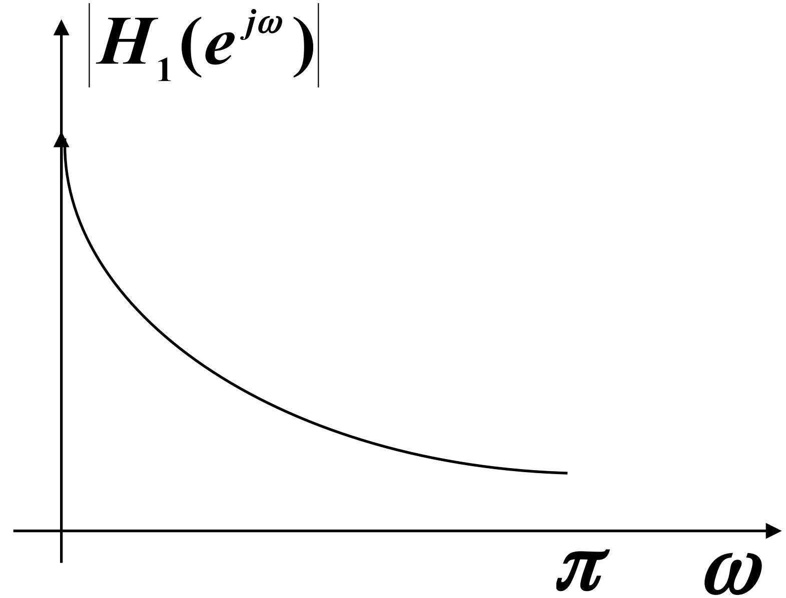
N=D时



积分滤波器:

$$y_1(n) = x(n) + y_1(n\text{-}1)$$

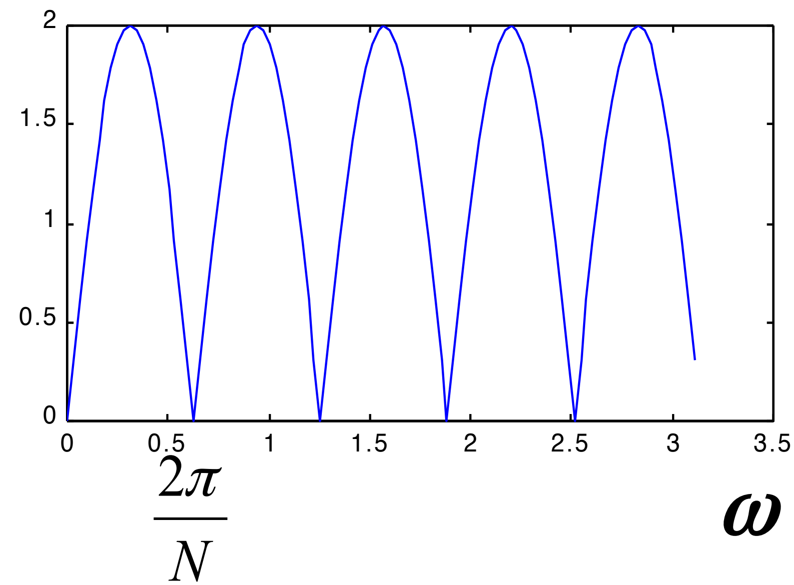
$$H_1(e^{jw}) = \frac{e^{j\omega/2}}{2}\left(\sin(\frac{\omega}{2})\right)^{-1}$$



梳状滤波器:

$$y_2(\mathrm{n}) = x(n) - x(n\text{-}N)$$

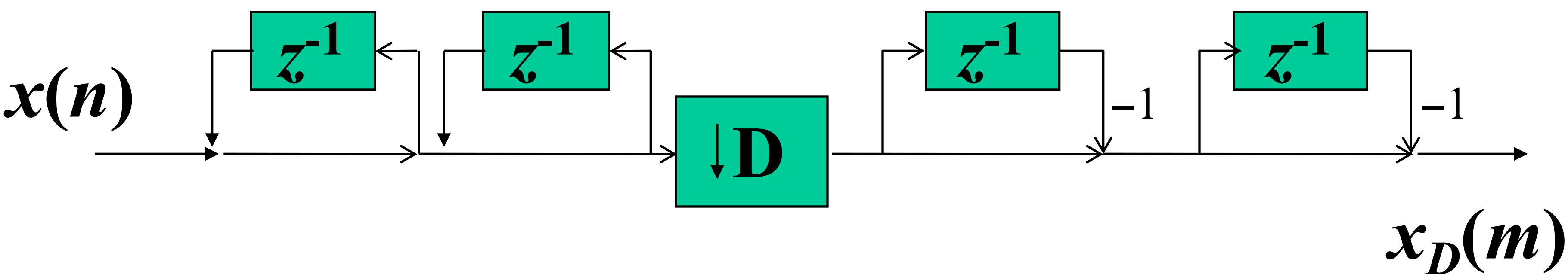
$$H_2(e^{j\omega}) = 2e^{-j\omega\frac{N}{2}}\sin(\omega\frac{N}{2})$$

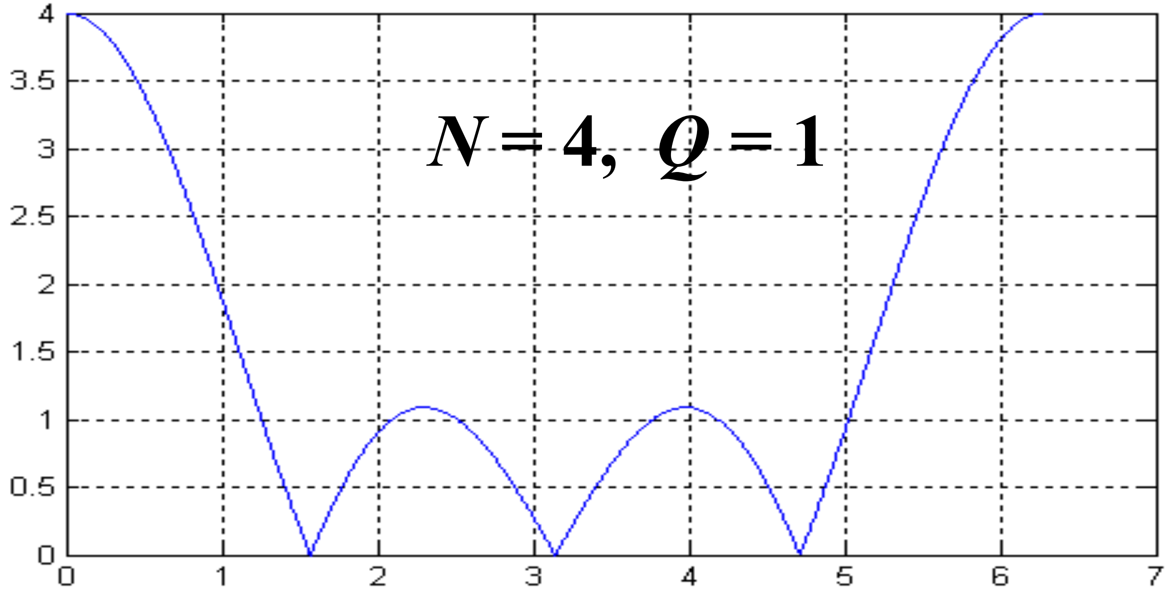


为了降低旁瓣电平，可以采用多个CIC滤波器级联的办法解决。Q级的CIC滤波器频响为：

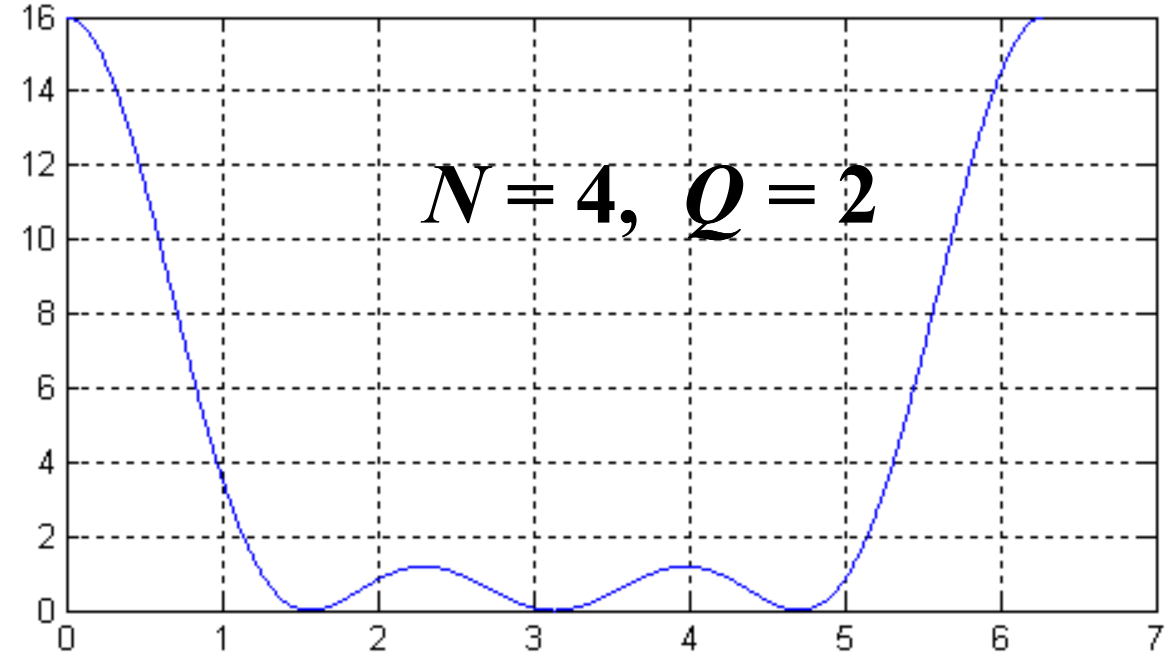
$$H_Q(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^Q$$

主旁瓣比 = 13.46Q (dB)





N = 4, Q = 1
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7



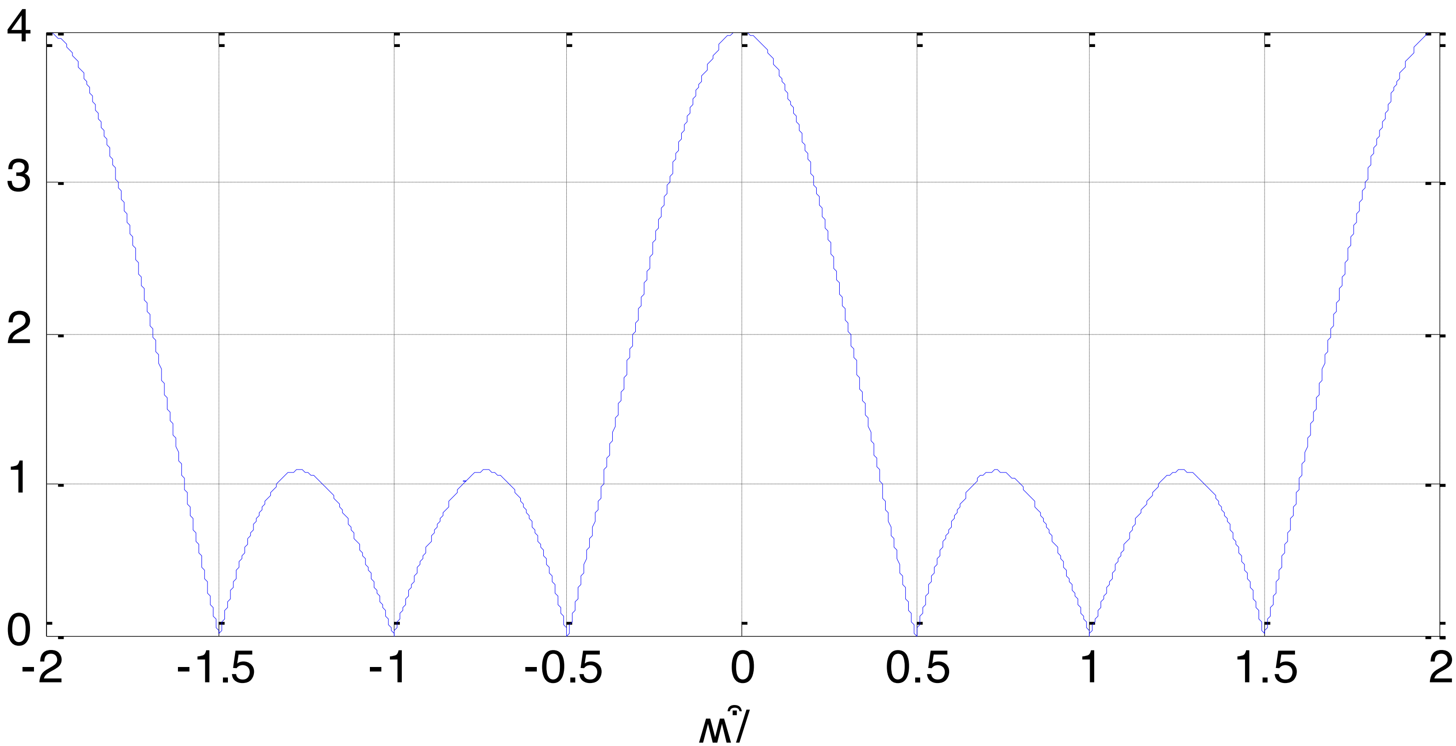
N = 4, Q = 2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
7

▲ CIC滤波器实现简单，没有乘法运算。

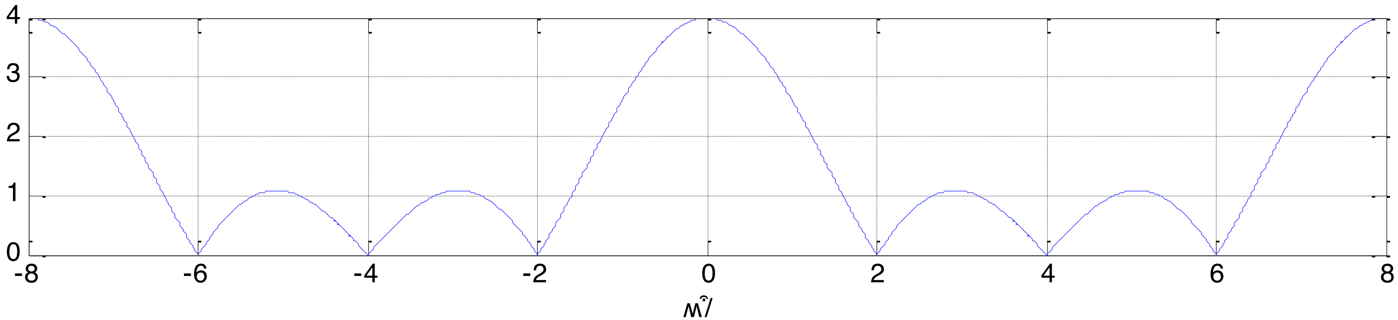
▲ CIC滤波器每级有一个处理增益，注意溢出。

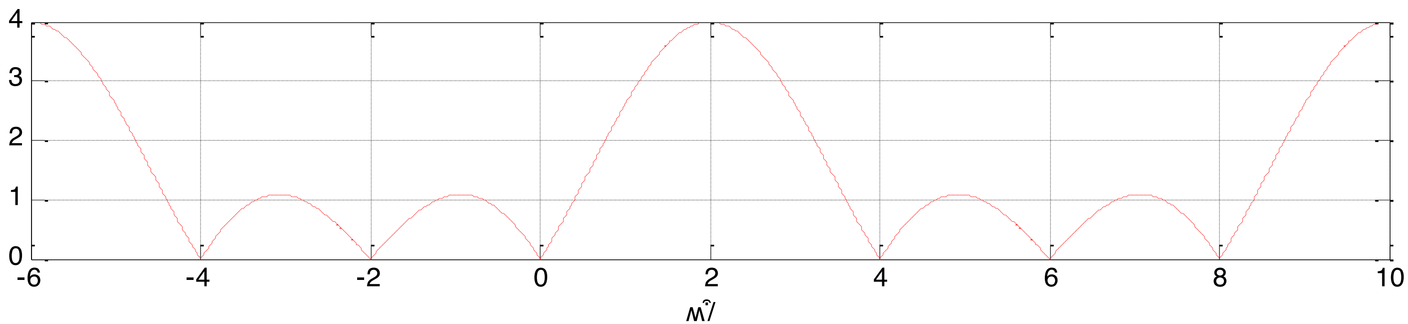
▲抽取因子必须等于CIC滤波器阶数，否则没上面的等效形式。

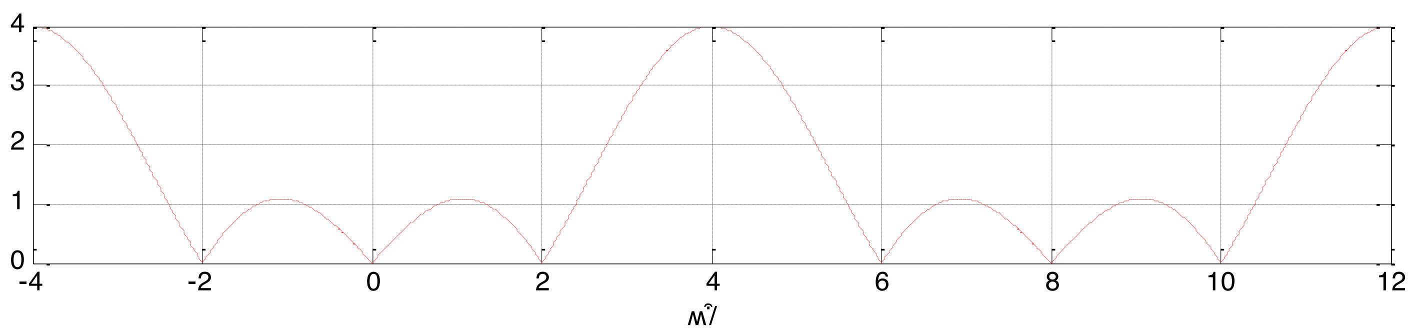
$$N = 4$$

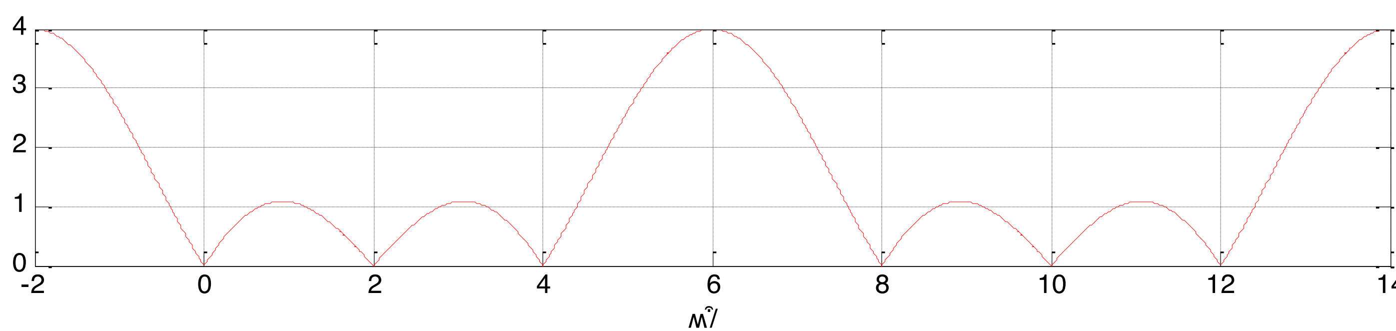


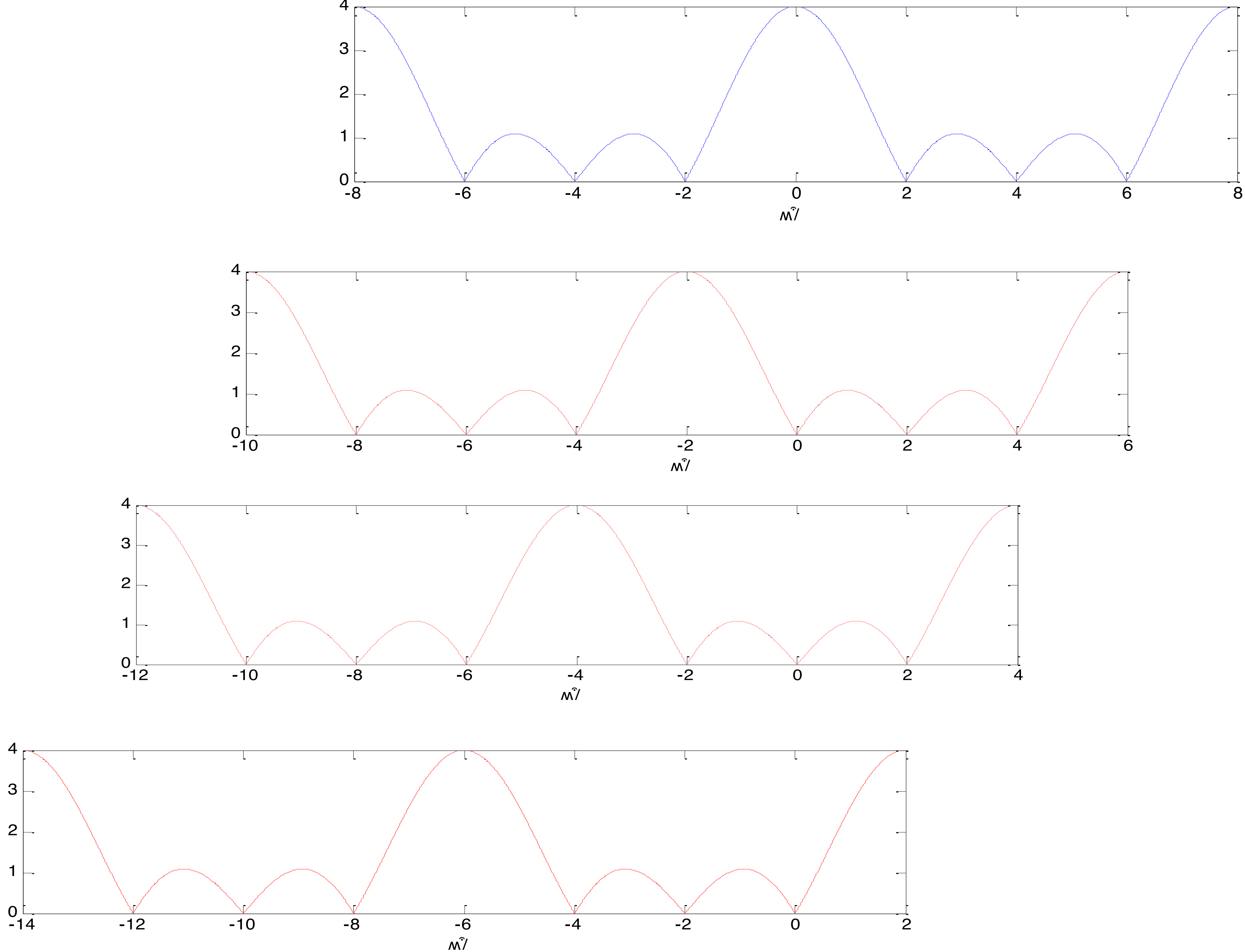
试画出$D = 4$倍抽取后频谱


4
3
2
1
0
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

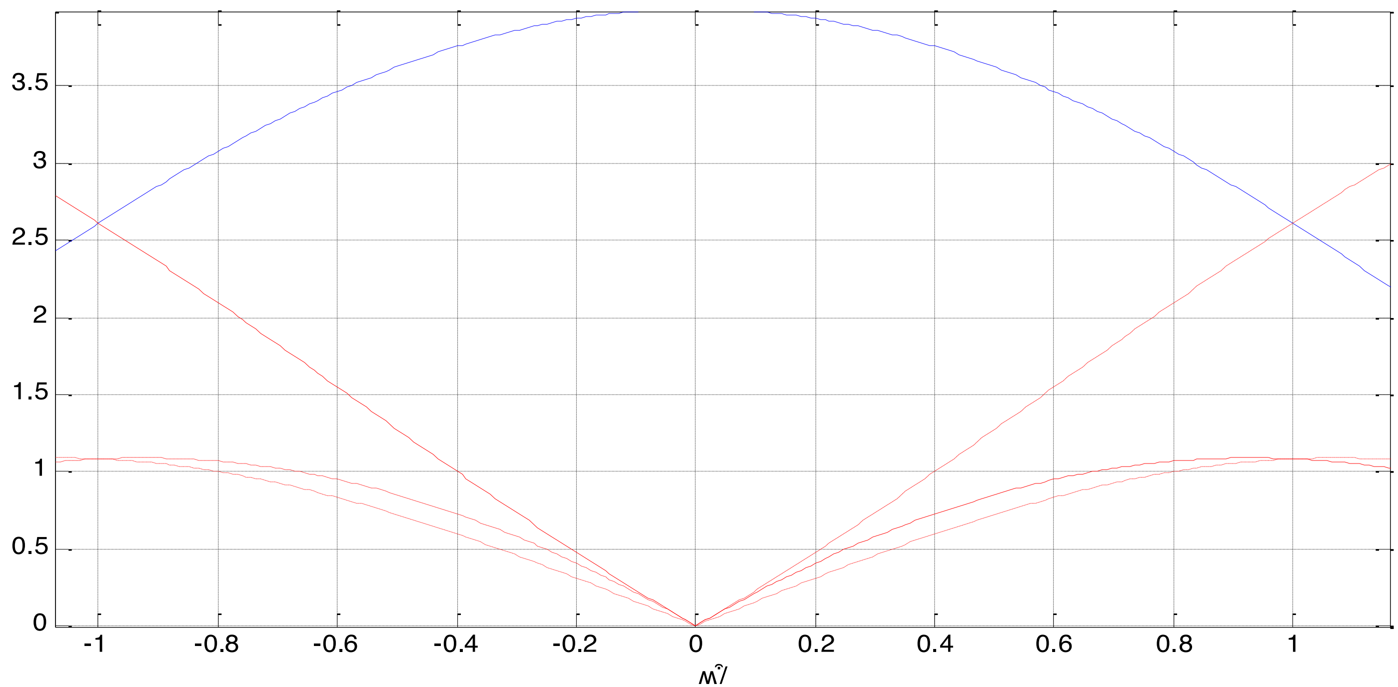

4
3
2
1
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10


4
3
2
1
0
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

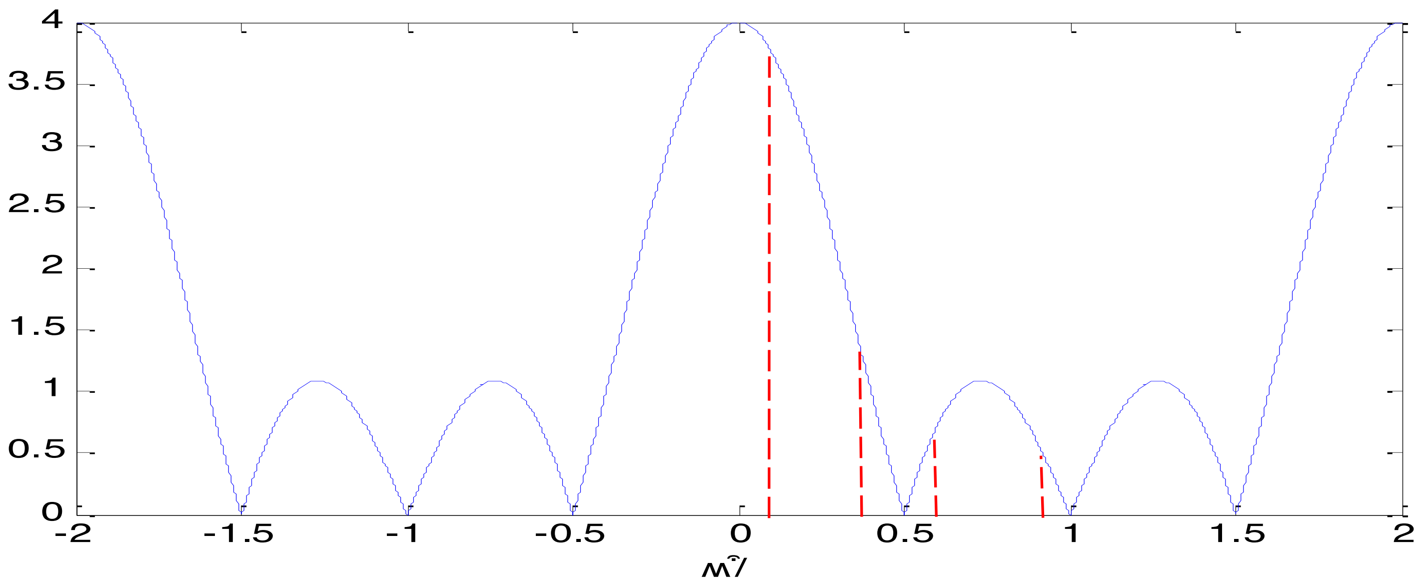

4
3
2
1
0
-2
0
2
4
6
8
10
12



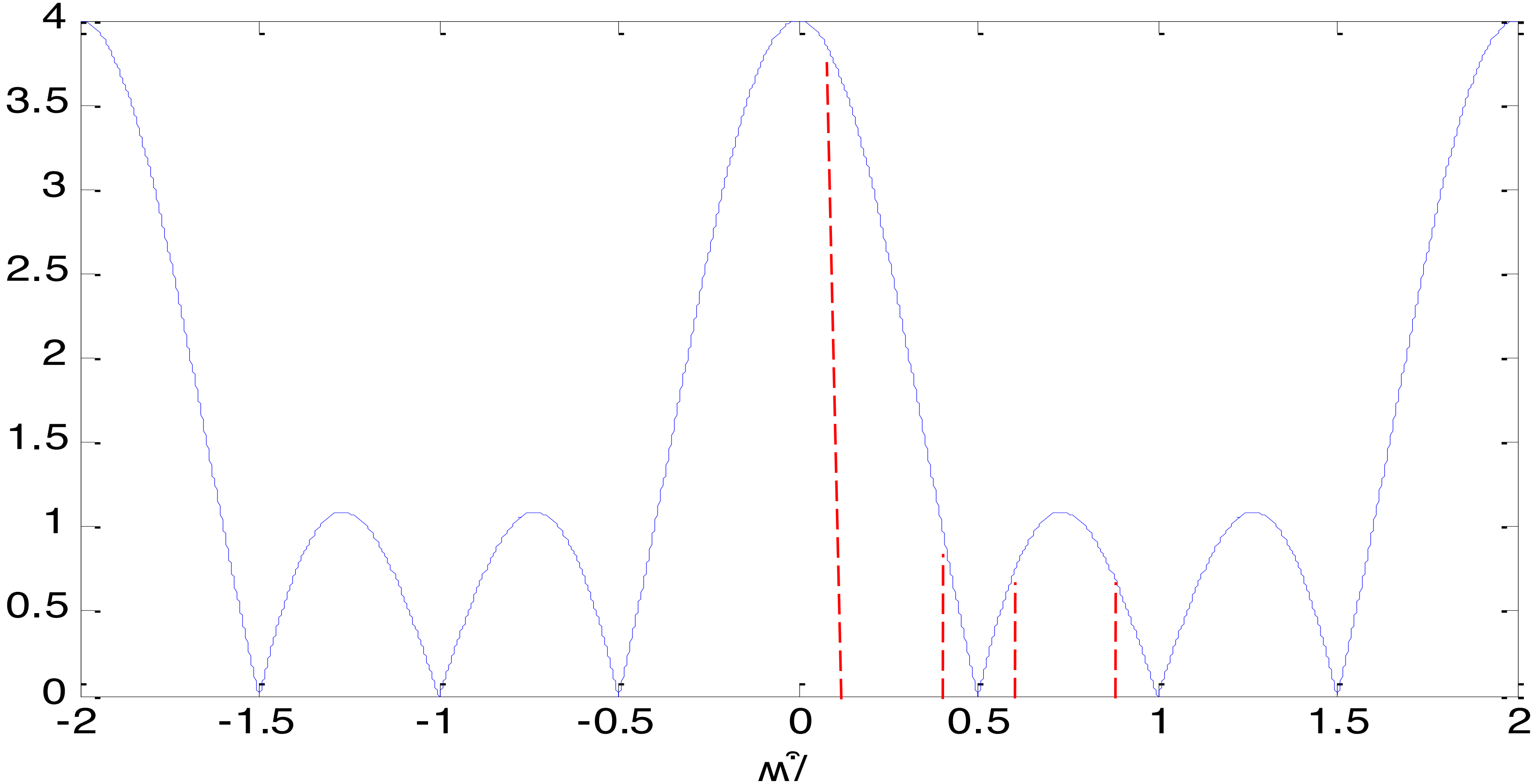
0 1 2 3 4
-8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8
0 1 2 3 4
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6
0 1 2 3 4
-12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4
0 1 2 3 4
-14 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2



设抽取前原信号数字带宽为 ω_1

则对应最大混叠幅度的数字频率 $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{N} - \omega_1$

最大混叠幅度衰减为

$$A_1 = 20\lg\left|\frac{H\left(e^{j0}\right)}{H\left(e^{j\omega_2}\right)}\right| = 20\lg\frac{N}{\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega_2 N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}\right|} = 20\lg\left|\frac{N\sin\left(\frac{\pi}{N}-\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sin\left(\pi-\frac{\omega_1 N}{2}\right)}\right|$$

引入带宽比例因子

$$b = \frac{Nf_1}{f_s} = \frac{N\frac{\omega_1 f_s}{2\pi}}{f_s} = \frac{N\omega_1}{2\pi}$$

$$A_1 = 20\lg\left|\frac{N\sin\left(\frac{\pi}{N}(1-b)\right)}{\sin(b\pi)}\right| \xrightarrow{b = \ 1,\ \ D = N\ ?\ \ 1} A_1 \approx -20\lg b$$

如果单级衰减不够，则仍可以采用多级级联，这时的组带衰减为

$$A_1^Q = -Q(20\lg b) = Q \cdot A_1$$

抽取滤波器例子

$$f_1 = 50\text{kHz} \qquad f_s = 100\text{MHz}$$

如果要求 $A_1 = 40\text{dB}$ ，则 $b = 0.01$

$$D = N = bf_s / f_1 = 20$$

两级级联时， $A_1^Q = 2A_1 = 80\text{dB}$

带宽比例因子 $\boldsymbol{b}$ 的选取还需考虑信号在 $\omega=\omega_1$ 处的幅度衰减不能太大。

幅度衰减为

$$\delta_s=20\lg\left|\frac{H\left(e^{j0}\right)}{H\left(e^{j\omega_1}\right)}\right|=20\lg\left|\frac{N\sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_1 N}{2}\right)}\right|$$

$$=20\lg\left|\frac{N\sin\left(\frac{b\pi}{N}\right)}{\sin\left(b\pi\right)}\right|\approx 20\lg\left|\frac{b\pi}{\sin\left(b\pi\right)}\right|$$

$b=0.01$ 时 $\quad \delta_s=0.0014\text{dB}$

两级级联时， $\delta_s^Q=Q\cdot\delta_s=0.0028\text{dB}$

D=4时的

2级CIC

D=4倍抽取后的

信号频谱

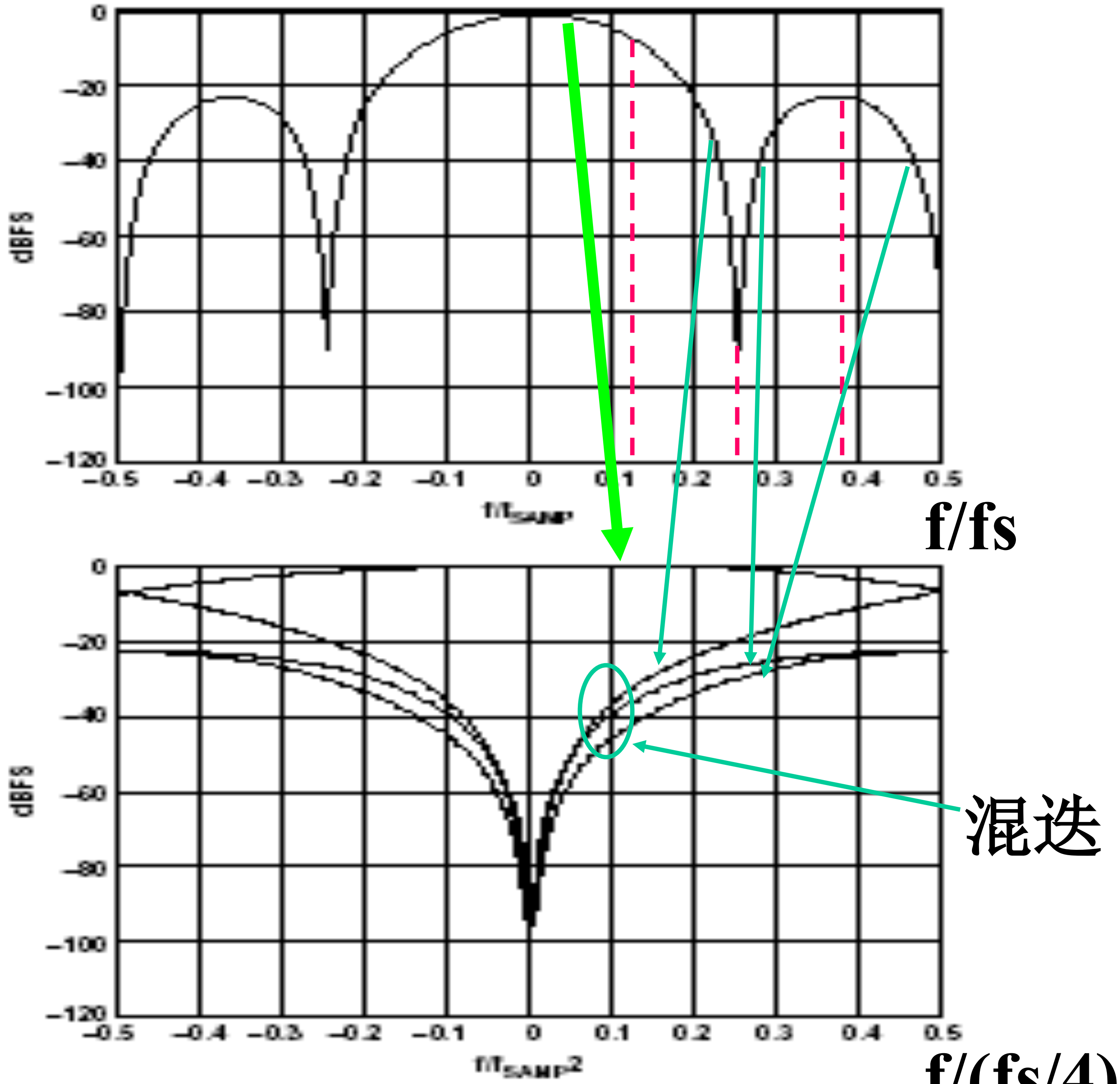


Figure 41. CIC2 Alias Rejection, M_{CIC2} = 4

设

fs=60MHz

B=0.6MHz

则:

B/fs = 1%

D=2时折叠

抑制达-60dB

两级抽取混叠抑制--相对带宽B/fs

D	-50dB	-60dB	-70dB	-80dB
2	1.79%	1.00%	0.57%	0.32%
4	1.22%	0.70%	0.40%	0.22%