模拟试卷二

1. （15分）设$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的不变因子，初等因子，和Jordan 标准形.

解：A 的特征多项式为

$$|\lambda \mathrm{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 & 2 \\ -5 & \lambda+7 & -3 \\ -6 & 9 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

所以，A 的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$;

行列式因子为$D_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)$, $D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$;

不变因子为$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1$, $d_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)$;

初等因子为$\lambda^2, \lambda-1$;

Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. （10分）设$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都是Hermite 矩阵，证明：$\rho(A+B) \leq \rho(A)+\rho(B)$.

证明：因为A, B 都是Hermite 矩阵，所以$A+B$ 也是Hermite 矩阵，故

$$\rho(A) = \|A\|_2, \rho(B) = \|B\|_2, \rho(A+B) = \|A+B\|_2$$

从而有

$$\rho(A+B) = \|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2 = \rho(A) + \rho(B)$$

3. （15分）设 $A=\begin{pmatrix}-1 & i & 0\\ -i & 0 & -i\\ 0 & i & -1\end{pmatrix}$, $\delta(A)\in\mathbb{C}^{3\times 3}$, $0\neq b\in\mathbb{C}^3$.

为使线性方程组$AX=b$ 的解X 与 $(A+\delta(A))X=b$ 的解 $\hat{X}$ 的相对误差$\dfrac{\|\hat{X}-X\|_2}{\|X\|_2}\leq 10^{-4}$, 问 $\dfrac{\|\delta(A)\|_2}{\|A\|_2}$ 应不超过何值?

解：因为$|\lambda \mathrm{I} - A| = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)$，所以$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = 2$. 从

$$\frac{\mathrm{cond}_2(A)}{1-\mathrm{cond}_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}}\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le 10^{-4}$$

即

$$\frac{2}{1-2\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}}\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le 10^{-4}$$

得

$$\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le \frac{1}{2.0002} \times 10^{-4} \le \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-5}$$

4. (15分) 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$用逆幂法迭代三次，求$A$ 的按模最小的近似特征值及其特征向量，取初始向量$x_0 = (1, 0, 0)^T$.

解：逆幂法的基本迭代格式为：

$$\begin{cases} Az_k = x_{k-1}, \\ \mu_k = \zeta_j^{(k)}, \quad \zeta_j^{(k)} \text{ 是} z_k \text{ 的模最大分量} \\ x_k = z_k/\mu_k, \end{cases}$$

我们有三角分解

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 6 & 2 \\ & & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

从$Ly_1 = x_0$，解得$y_1 = (1, -2, \frac{1}{3})^T$，从$Uz_1 = y_1$，解得$z_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$，那么$\mu_1 = \frac{1}{2}$，$x_1 = z_1/\mu_1 = (1, -1, 1)^T$；

从$Ly_2 = x_1$，解得$y_2 = (1, -3, \frac{3}{2})^T$，从$Uz_2 = y_2$，解得$z_2 = (-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{9}{4})^T$，那么$\mu_2 = \frac{9}{4}$，
$x_2 = z_2/\mu_2 = (-\frac{1}{9}, -\frac{5}{9}, 1)^T$；

从$Ly_3 = x_2$，解得$y_3 = (-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{19}{18})^T$，从$Uz_3 = y_3$，解得$z_3 = (-\frac{25}{36}, -\frac{7}{12}, \frac{19}{12})^T$，那么$\mu_3 = \frac{19}{12}$，
$x_3 = z_3/\mu_3 = (-\frac{25}{57}, -\frac{7}{19}, 1)^T$；

故A 的按模最小的近似特征值为$\lambda_3 = \mu_3^{-1} = \frac{12}{19}$, 其特征向量为$x_3 = (-\frac{25}{57}, -\frac{7}{19}, 1)^T$.

5. （10分）设$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0.4 & 10 & -0.5 \\ 2 & -9 & 18 \end{pmatrix}$

用盖尔圆定理证明A 有3 个互异正特征值.

证明：设

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$B = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1.2 & 10 & -1.5 \\ 2 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

B 的三个盖尔圆都是孤立的

$$G_1 : |z - 4| \le 3$$
$$G_2 : |z - 10| \le 2.7$$
$$G_3 : |z - 17| \le 5$$

它们各含B 的一个特征值，也是A 的特征值. 因为B 是实矩阵，且G_i 均在右半平面关于实轴对称，所以其中的特征值必为正实数（实矩阵的复特征值一定成对共轭出现），于是A 有三个互异正特征值.

6. （15分）设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

用广义逆矩阵方法判断线性方程组$Ax=b$是否有解，并求线性方程组$Ax=b$的极小范数解或极小范数最小二乘解.

解：用行初等变换化A 为Hermite 标准形

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得A 的一个满秩分解

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

从而有

$$A^{+} = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -7 & -4 & 1 \\ 13 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

由于

$$AA^{+} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

而$AA^+b = \frac{1}{6}(17, 14, -11)^T \neq b$，所以线性方程组$Ax = b$ 无解，其极小范数最小二乘解为

$$A^+b = \frac{1}{36}(34, 3, -31, 37)^T.$$

7. （10分）设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

问a 为何值时，线性方程组$Ax = b$ 的Gauss-Seidel 迭代收敛？

解：设Gauss-Seidel 迭代矩阵为$L_1 = -(D+L)^{-1}U$. 那么L_1 的特征方程等价于

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & 0 \\ a\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - a^2) = 0.$$

从而L_1 的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = a^2$. 故$\rho(L_1) = |a|^2$. 只有当$|a| < 1$ 时，$\rho(L_1) < 1$, 线性方程组$Ax = b$ 的Gauss-Seidel 迭代收敛。

8. （10分）简述用共轭向量法解线性方程组$Ax = b$时，搜索方向$\{p_i\}$的确定方法。

解：对任意初始值x_0，取p_0 为

$$p_0 = -r_0 = -(Ax_0 - b)$$

计算

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0$$

其中$\alpha_0 = -\frac{p_0^T r_0}{p_0^T A p_0}$，算出$r_1 = Ax_1 - b$. 则$r_1 \perp p_0$，因此$r_1 \perp r_0$. 在$r_0$, r_1 张成的子空间中找p_1, 令

$$p_1 = -r_1 - \beta_0 r_0 = -r_1 + \beta_0 p_0$$

要使p_0 与p_1 为A 共轭，必须

$$p_1^T A p_0 = (-r_1 + \beta_0 p_0)^T A p_0 = 0$$

从而得到

$$\beta_0 = \frac{(r_1, Ap_0)}{(p_0, Ap_0)}$$

计算

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1$$

算出$r_2 = Ax_2 - b$，令

$$p_2 = -r_2 + \beta_1 p_1$$

要使p_1 与p_2 为A 共轭，必须

$$p_2^T A p_1 = (-r_2 + \beta_1 p_1)^T A p_1 = 0$$

从而得到

$$\beta_1 = \frac{(r_2, Ap_1)}{(p_1, Ap_1)}$$

一般地令

$$p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k$$

要使p_{k+1} 与p_k 为A 共轭，必须

$$\beta_k = \frac{(r_{k+1}, Ap_k)}{(p_k, Ap_k)}$$