模拟试卷一

1. （10分）设$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\max\limits_{\|X\|_2=2} \|A^{-1}X\|_2$

2. （10分）设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，证明：

$$\|A\|_2 \leq \max\{\|A\|_\infty, \|A\|_1\}.$$

3. （15分）设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\delta(A) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $0 \neq b \in \mathbb{C}^3$.

为使线性方程组$AX = b$ 的解X 与 $(A+\delta(A))X = b$ 的解 $\hat{X}$ 的相对误差$\dfrac{\|\hat{X}-X\|_2}{\|X\|_2} \leq 10^{-4}$, 问 $\dfrac{\|\delta(A)\|_2}{\|A\|_2}$ 应不超过何值?

4. (15分) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

并求 $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t)$.

5. （15分）设$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & -1 \\ 0.1 & 2 & -0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 3 \end{pmatrix}$

用盖尔圆定理证明A 有3 个互异实特征值，并估计A 的最小特征值.

6. （15分）设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

求线性方程组$Ax = b$ 的所有最小二乘解和极小范数最小二乘解.

7. （10分）设$A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$，$A$ 有2 个初等因子 λ^2, $(\lambda-2)^2$，求A^2 的初等因子，并说明理由.

8. （10分）设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 且$\mathrm{rank}(B) = m$，证明若$(BA)^2 = BA$，则B 是A 的$\{1\}$-逆.

答案

1. $|\lambda \mathrm{I} - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 7)^2$.

$$\max_{\|X\|_2=2} \|A^{-1}X\|_2 = 2 \max_{\|X\|_2=1} \|A^{-1}X\|_2$$

$$= 2\|A^{-1}\|_2 = 2\rho(A^{-1})$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

2.

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^H A)} \\ &\leq \sqrt{\|A^H A\|_1} \leq \sqrt{\|A^H\|_1 \|A\|_1} \\ &= \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1} \\ &\leq \max\{\|A\|_\infty, \|A\|_1\}.\end{aligned}$$

3. $|\lambda \mathrm{I} - A| = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$.

$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = 5$. 从

$$\frac{\mathrm{cond}_2(A)}{1-\mathrm{cond}_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}}\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le 10^{-4}$$

即

$$\frac{5}{1-5\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}}\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le 10^{-4}$$

得

$$\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \le \frac{1}{5.0005} \times 10^{-4} \le \frac{1}{5} \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-5}$$

4. $|\lambda I - A| = (\lambda+1)^2(\lambda+2)$. 设

$r(\lambda) = b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$. 从

$$\begin{cases} r(-1) = b_2 - b_1 + b_0 = e^{-t} \\ r'(-1) = 2b_2 + b_1 = te^{-t} \\ r(-2) = 4b_2 - 2b_1 + b_0 = e^{-2t} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} b_2 = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t} \\ b_1 = 2e^{-2t} - 2e^{-t} + 3te^{-t} \\ b_0 = e^{-2t} + 2te^{-t} \end{cases}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 2e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} + 2te^{-t} \\ 0 & -2e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{At}X(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} \\ 3e^{-2t} - 2e^{-t} + 2te^{-t} \\ -3e^{-2t} + 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = (0, 0, 0)^T.$$

5.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & -1 \\ 0.2 & 2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.35 & 3 \end{pmatrix}$$

盖尔圆

$$G_1 : |z| \leq 1.4$$

$$G_2 : |z-2| \leq 0.4$$

$$G_3 : |z-3| \leq 0.55$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 A D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{0.2}{3} & -\frac{1}{12} \\ 1.2 & 2 & -0.1 \\ 2.4 & 0.7 & 3 \end{pmatrix}$$

A 的最小特征值≥ -0.15

6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{+}b + (\mathrm{I} - A^{+}A)y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{+}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7. 因为

$$PAP^{-1} = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$PA^2P^{-1} = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 4 & 4 \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的初等因子为 $(\lambda - 4)^2$, 故 A^2 的初等因子为 λ, λ, $(\lambda - 4)^2$.

8. 由

$$BABA = BA$$

两边乘以 $B^{(1)}$

$$B^{(1)}BABA = B^{(1)}BA$$

而 $\mathrm{rank}(B) = m$, 所以 $B^{(1)}B = \mathrm{I_m}$, 故

$$ABA = A$$

即 B 是 A 的 $\{1\}$-逆.