第2章 向量范数与矩阵范数

§2.1 向量范数

1. 定义 2.1：若如果 C^n 上的一个实函数 $\|\cdot\|: C^n \to R$ 满足以下条件：

(1) $\|x\| \geq 0$， $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ （非负性）

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ （齐次性）

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ （三角不等式）

则 $\|\cdot\|$ 称为是一个向量范数，而 $\|x\|$ 称为是 C^n 上向量 x 的范数。

2. 例 1：设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in C^n$

(1) 规定 $\|x\|_1=\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|$ （1范数）

(2) $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}=\sqrt{x^Hx}$ （2范数）

(3) $\|x\|_\infty=\max\limits_{k}|\xi_k|$ （∞范数）

(4) $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}$ $(1\le p\le\infty)$ （p范数）

注：$\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$

下面证明 $\|x\|_p$ 为范数。

3. (Hölder 不等式) 对 $\xi_k, \eta_k \in C$ $(k = 1, 2, \cdots)$, $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k||\eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1/q}$$

证明：当 $\xi_k = 0\ (k = 1, 2, \cdots)$ 或 $\eta_k = 0\ (k = 1, 2, \cdots)$，结论成立。下设 ξ_k 不全为 0，η_k 也不全为 0. 不妨设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 全不为零，及 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 全不为零。

函数 $f(z) = z^p$ 为凸函数，对任意 $z_1, z_2, \cdots, z_n \geq 0$ 及 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(z_i).$$

记

$$z_i = |\xi_i||\eta_i|^{-q/p},\ \alpha_i = \frac{|\eta_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q},\quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

得

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i \eta_i|}{\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q} \right)^p = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(z_i) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q}.$$

经整理可得 Hölder 不等式.

(Minkowski 不等式) 设

$\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$, $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T \in C^n$. 则有以下不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{1/p},$$

其中 $p \geq 1$.

证明：当 $p = 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (|\xi_k + |\eta_k|) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1
\end{aligned}
$$

当 $p>1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |\xi_k+\eta_k|^p = \sum_{k=1}^n |\xi_k+\eta_k||\xi_k+\eta_k|^{p-1} \\
&\le \sum_{k=1}^n |\xi_k||\xi_k+\eta_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |\eta_k||\xi_k+\eta_k|^{p-1} \\
(\text{Hölder}) \quad &\le \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k+\eta_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k+\eta_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= (\|x\|_p+\|y\|_p)\|x+y\|_p^{p/q}
\end{aligned}
$$

故 $\|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p-p/q} \le \|x\|_p + \|y\|_p$

向量范数的性质

4. 对 $x, y \in C^n$，有 $\|-x\| = \|x\|$,

   $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.

5. 任何向量范数都是 C^n 上的连续函数。

利用已知的某种向量范数构造新的向量范数

6. 设 $A \in C_n^{n\times n}$， $\|Cdot\|_\alpha$ 是 C^n 上一个向量范数，对 $x \in C^n$，定义 $\|x\|_\beta = \|Ax\|_\alpha$，则 $\|x\|_\beta$ 也是 C^n 上向量范数。

例 2：设 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，对任意 $x \in C^n$， 规定 $\|x\|_A = \sqrt{x^H Ax}$， 则 $\|x\|_A$ 是一个向量范数。

向量范数的等价性

7. 设 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 是 C^n 上的两个向量范数， 如存在 $a, b > 0$ 使得

$$a\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le b\|x\|_\beta \qquad (\forall x \in C^n)$$

则称向量范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 等价。

8. C^n 上的所有向量范数等价。

如： $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$，

$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

向量范数的分析性质

9. 给定 C^n 中的向量序列 $\{x^{(k)}\}$，其中 $x^{(k)}=(\xi_1^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)})^T\ (k=1,2,\cdots)$，如果

$$\lim_{k\to\infty}\xi_j^{(k)}=\xi_j \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

则称向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$，简称 $\{x^{(k)}\}$ 收敛，记为

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x \quad 或 \quad x^{(k)}\to x\ (k\to+\infty)$$

不收敛的向量序列称为是发散的。

10. 设 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的一个向量范数，$\{x^{(k)}\}$ 是 C^n 上的一个向量序列，如果当 $k\to\infty$ 时，有 $\|x^{(k)}-x\|\to 0$，则称 $\{x^{(k)}\}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于向量 $x\in C^n$。简记为

$$x^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|} x \quad (k\to\infty)$$

或 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ (依范数 $\|\cdot\|$)。

11. C^n 中向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x 的充要条件是， 对 C^n 上的任意一种向量范数 $\|\cdot\|$ 都有

$$\lim_{k\to+\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0.$$

证明：设 $x^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})^T$,
$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T$， 则

$$|\xi_j^{(k)} - \xi_j| \leq \max_j |\xi_j^{(k)} - \xi_j| = \|x^{(k)} - x\|_\infty$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(k)} - \xi_j|$$

§2.2 矩阵范数

一、1. 定义：如果 $C^{n\times n}$ 上的一个实函数 $\|\cdot\|: C^{n\times n}\to R$ 满足以下条件：

(1) $\|A\|\geq 0$， 且 $\|A\|=0$ 充要条件为 $A=0$ （非负性）

(2) 对 $\lambda\in C$， $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$ （齐次性）

(3) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$ （三角不等式）

(4) $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$ （相容性）

则称 $\|\cdot\|$ 为是一个矩阵范数，而 $\|A\|$ 为 $C^{n\times n}$ 上 A 的范数（矩阵范数）

2. 例 1： 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$， 规定

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad (m_1\text{范数})$$

例 2：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$， 规定

$$\|A\|_{m_\infty}=n\max_{i,j}|a_{ij}| \qquad (m_\infty\text{范数})$$

例 3：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$，规定

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\sqrt{tr(A^HA)}\quad (F\text{范数})$$

3. F 范数的酉不变性：对酉矩阵 U, V，有

$$\|UA\|_F=\|AV\|_F=\|UAV\|_F=\|A\|_F$$

二. 算子范数

设 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的向量范数，定义 $C^{n\times n}$ 上的函数为

$$\|A\|_m = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \quad A \in C^{n\times n}. \tag{1}$$

1. 定理 2.9：式 (1) 中定义的函数 $\|\cdot\|_m$ 是 $C^{n\times n}$ 上的范数，并有 $\|Ax\| \leq \|A\|_m\|x\|$ 对所有 $A \in C^{n\times n}$ 和所有 $x \in C^n$ 成立，及对单位矩阵 I, $\|I\|_m = 1$.

2. 称由式 (1) 中定义的矩阵范数为算子范数，或由向量范数 $\|\cdot\|$ 诱导的矩阵范数。

2. 由向量 1，2，∞ 范数导出的矩阵范数
$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$

(1) $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$，　　（极大列和范数）

(2) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda}$，　λ_1 为 $A^H A$ 的最大特征值，

（谱范数）

(3) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$，　　（极大行和范数）

证明(1): 记 A 的第 j 列为 a_j， 即

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。于是 $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\|\alpha_j\|_1$。如果

$\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in C^n$， 则

$$\|Ax\|_1=\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\alpha_j\right\|_1\le\sum_{j=1}^{n}\|\xi_j\alpha_j\|_1=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|\ \|\alpha_j\|_1$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|\left(\max_{1\le j\le n}\|\alpha_j\|_1\right)=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|\ \|A\|_1=\|x\|_1\|A\|_1.$$

因而， $\max\limits_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1\le\|A\|_1$.

设 e_k 是 C^n 中标准基的第 k 个向量，则对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$，有

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \|Ae_k\|_1 = \|\alpha_k\|_1,$$

所以

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \max_{1\leq k\leq n} \|\alpha_k\|_1 = \|A\|_1.$$

故 $\|A\|_1 = \max\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1.$

3. 2范数的性质 （U, V 为酉矩阵）

(1) $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|UAV\|_2 = \|A\|_2$

(2) 若 A 是正规矩阵，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，则 $\|A\|_2 = \max\limits_k |\lambda_k|$

另外还有：$\|A^H\|_{m_1} = \|A\|_{m_1}$， $\|A^H\|_F = \|A\|_F$，
$\|A^H\|_{m_\infty} = \|A\|_{m_\infty}$， $\|A^H\|_\infty = \|A\|_1$，
$\|A^H\|_1 = \|A\|_\infty$， $\|A^H\|_2 = \|A\|_2$.

例：设 U 是酉矩阵，$A = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$， 试计算

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_1=4} \|A\mathbf{x}\|_1 \quad 及 \quad \max_{\|U\mathbf{x}\|_2=3} \|A\mathbf{x}\|_2.$$

解： 首先设 $\mathbf{x} = 4\mathbf{y}$，则

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_1=4} \|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{\|\mathbf{y}\|_1=1} 4\|A\mathbf{x}\|_1 = 4\|A\|_1 = 8.$$

其次设 $\mathbf{x} = 3U^H\mathbf{y}$，则

$$\max_{\|Ux\|_2=3} \|Ax\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} 3\|AU^H y\|_2 = 3\|AU^H\|_2 = 3\|A\|_2.$$

而 A 是 Hermite 矩阵，其特征值为

$\lambda_1 = -2$，$\lambda_1 = -1$，$\lambda_1 = 1$。所以

$$\max_{\|Ux\|_2=3} \|Ax\|_2 = 3\|A\|_2 = 3|\lambda_1| = 6.$$

§2.3 矩阵范数与向量范数的相容性

1. 定义： 设 $\|\cdot\|_m$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数， $\|\cdot\|_a$ 是 C^n 上的向量范数， 如对任意 $A\in C^{n\times n}$ 和 $x\in C^n$ 都有

$$\|Ax\|_a \le \|A\|_m\|x\|_a$$

则称向量范数 $\|\cdot\|_a$ 与 矩阵范数 $\|\cdot\|_m$ 是相容的。

2. 例 1：向量 1 范数与矩阵 m_1范数相容。

证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$，则

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\,|\xi_k|\right)\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\right)\right]\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\right)\\ &= \|A\|_{m_1}\|x\|_1\end{aligned}$$

例 2：向量 2 范数与矩阵 F 范数相容 。

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k\right|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|\xi_k|\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)\right]} \\ &= \|A\|_F\|x\|_2\end{aligned}$$

例 3：向量的 1，2，∞ 范数均与矩阵的 m_∞ 范数相容

任何向量范数都存在与之相容的矩阵范数（算子范数），反之

3. 设 $\|\cdot\|_m$ 是一个矩阵范数， 则必存在与之相容的向量范数。

证明：对 $\mathbf{x} \in C^n$，记 X 是由 n 个 x 为列向量组成的矩阵，即 $X = (x, x, \cdots, x)^T \in C^{n\times n}$。定义 C^n 上函数 $\|x\| = \|X\|_m$。易证 $\|x\|$ 是 C^n 上的范数，并且对任意 $A \in C^{n\times n}$，有

$$\|Ax\| = \|(Ax, Ax, \cdots, Ax)\|_m = \|AX\|_m$$

$$\leq \|A\|_m \|X\|_m = \|A\|_m \|x\|,$$

即向量范数 $\|\cdot\|$ 与给定矩阵范数 $\|\cdot\|_m$ 相容。