4 模糊函数

4.1 模糊函数的推导
4.2 模糊函数与分辨力的关系
4.3 模糊函数与匹配滤波器输出响应的关系
4.4 模糊函数的主要性质
4.5 模糊图的切割
4.6 模糊函数与精度的关系
4.7 利用模糊函数对单载频矩形脉冲雷达信号进行分析

4.1 模糊函数的推导

1、为什么要研究模糊函数?

分辨力、精度、模糊度、抑制杂波能力，统一数学工具。

2、模糊函数（平均模糊函数）的概念

在感兴趣的时间间隔和多普勒频移上的固有“模糊性”的度量，对随机信号采用平均模糊函数。

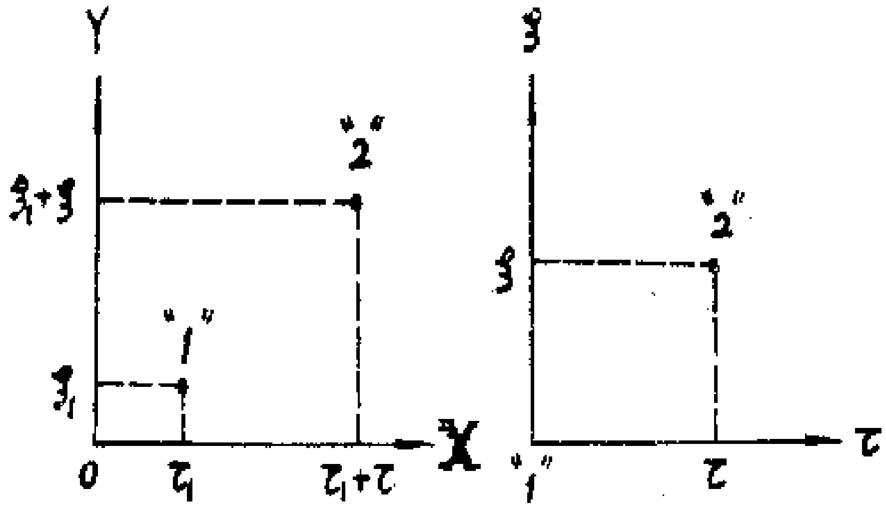
3、研究模糊函数的条件

- 窄带信号
- 点目标
- 无加速度
- $f_d \ll f_0$

一、从二维分辨力导出

1、条件

- 距离速度不同（二维）
- 目标2大于1
- 距离速度取正
- 不考虑噪声（分辨）
- 回波强度一样



2、准则（均方差）

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| s_{r1}(t) - s_{r2}(t) \right|^2 dt$$

$$= 4E - 2\left|\chi(\tau,\xi)\right| \cos[2\pi f_0 \tau + arctg\,\chi(\tau,\xi)]$$

$$\chi(\tau,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u^*(t+\tau) e^{j2\pi\xi t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(f) u(f-\xi) e^{-j2\pi f\tau} df$$

$$\varphi(\tau,\xi) = \left|\chi(\tau,\xi)\right|^2 = \chi(\tau,\xi) \bullet \chi^*(\tau,\xi)$$

$$\chi^*(\tau,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t) u(t+\tau) e^{-j2\pi\xi t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(f) u^*(f-\xi) e^{j2\pi f\tau} df$$

二、模糊函数的表示法

1、τ 、ξ 为正

$$\varphi(\tau,\xi)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u^*(t+\tau)e^{j2\pi\xi t}dt\right|^2$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u^*(f)u(f-\xi)e^{-j2\pi f\tau}df\right|^2$$

2、τ为正，ξ 为负

$$\varphi(\tau,\xi)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u^*(t+\tau)e^{-j2\pi\xi t}dt\right|^2$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u^*(f)u(f+\xi)e^{-j2\pi f\tau}df\right|^2$$

3、τ为负，ξ 为正

$$\varphi(\tau,\xi)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u^*(t-\tau)e^{j2\pi\xi t}dt\right|^2$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u^*(f)u(f-\xi)e^{j2\pi f\tau}df\right|^2$$

4、对称型

$$\varphi(\tau,\xi)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau/2)u^*(t+\tau/2)e^{j2\pi\xi t}dt\right|^2$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u^*(f+\xi/2)u(f-\xi/2)e^{-j2\pi f\tau}df\right|^2$$

4.2 模糊函数与分辨力的关系

一、模糊函数的图形

1、概述

主峰、边峰和小突起（自杂波/旁瓣）

2、主峰 $|\chi(\tau,\xi)|^2 \le |\chi(0,0)|^2 = 4E^2$

距离、速度均相同，ε^2 最小，即$|\chi(0,0)|$最大，无法分辨。

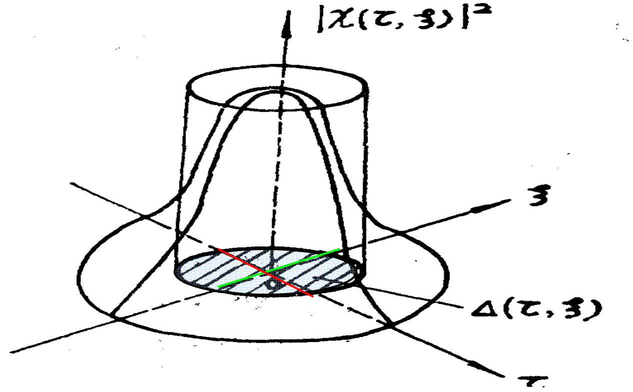
3、模糊图的体积

（体积不变性）$\iint |\chi(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi = (2E)^2$

- 体积是固定的，与能量有关，与信号形式无关
- 不同信号形式只能改变模糊图表面形状

二、模糊函数与二维分辨力的关系

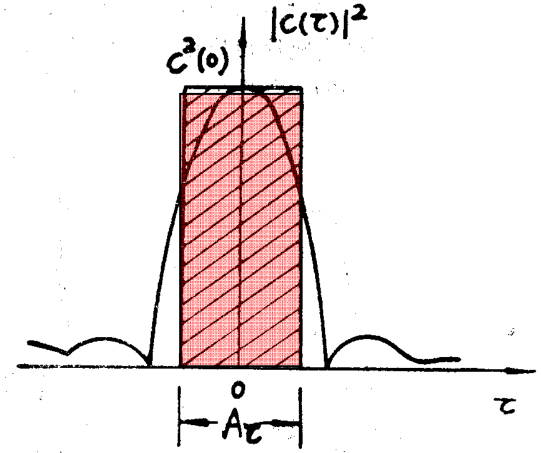
$$\frac{|\chi(\tau,\xi)|^2}{|\chi(0,0)|^2} << 1$$



组合时间-频率分辨常数：

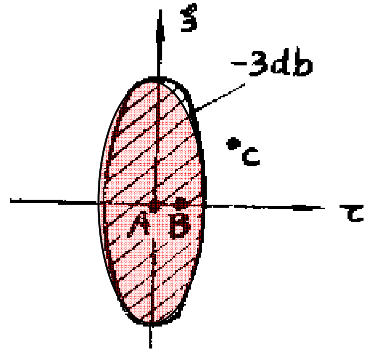
$$\Delta(\tau,\xi) = \frac{\iint |\chi(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi}{|\chi(0,0)|^2}$$

$$\Delta(\tau,\xi) \equiv 1$$



雷达模糊原理：改变发射信号形式→ 改变模糊曲面→不能改变组合分辨常数→即距离速度组合分辨力受限→模糊图体积无论哪个轴减小另一必增大！

模糊度图：



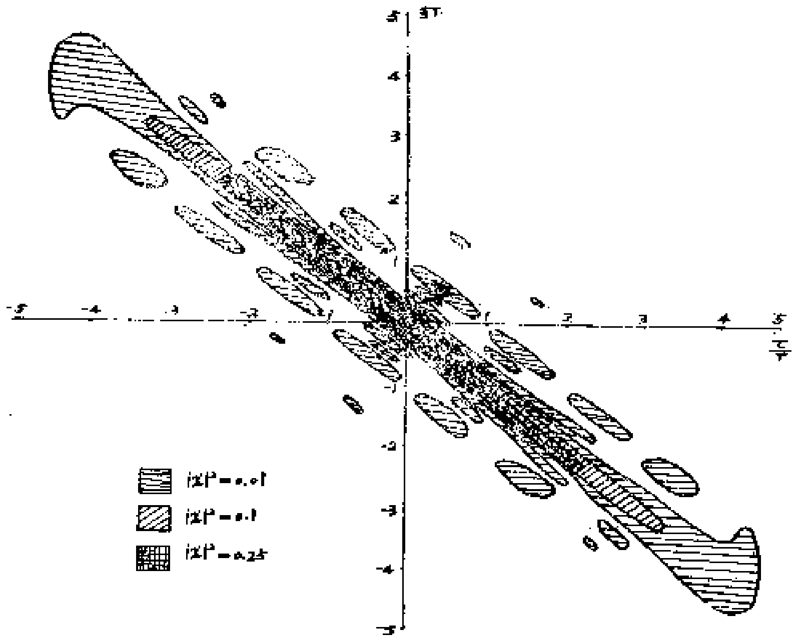
等效模糊面

等差图:

$$|\chi(\tau_A,0)|^2 \approx |\chi(\tau_B,0)|^2$$

$$|\chi(\tau_C,\xi_C)|^2 << |\chi(\tau_A,\xi_A)|^2$$

模糊度图



三、模糊函数与一维分辨力的关系

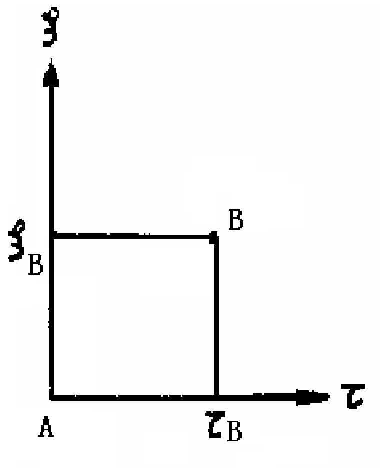
$$\varphi(\tau,0)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u^*(t+\tau)e^{j2\pi\xi t}dt\right|^2=\left|C(\tau)\right|^2$$

$$\Delta(\tau,0)=\frac{\int\int\left|\chi(\tau,0)\right|^2 d\tau d\xi}{\left|\chi(0,0)\right|^2}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|C(\tau)\right|^2 d\tau}{C^2(0)}=A_\tau$$

$$\varphi(0,\xi)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u^*(t+\tau)e^{j2\pi\xi t}dt\right|^2=\left|K(\xi)\right|^2$$

$$\Delta(0,\xi)=\frac{\int\int\left|\chi(0,\xi)\right|^2 d\tau d\xi}{\left|\chi(0,0)\right|^2}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(\xi)\right|^2 d\tau}{K^2(0)}=A_\xi$$

4.3 模糊函数与匹配滤波器输出响应的关系



研究的目的：

- 运算
- 检测、估计、分辨
- 物理意义
- 信号处理与AF关系

A目标回波：$u_A(t)=u(t-\tau_A)e^{j2\pi\xi_A(t-\tau_A)}$　　$h_{Am}(t)=u_A^*(t_0-t-\tau_A)e^{-j2\pi\xi_A(t_0-t-\tau_A)}$

B目标回波：$u_B(t)=u(t-\tau_B)e^{j2\pi\xi_B(t-\tau_B)}$

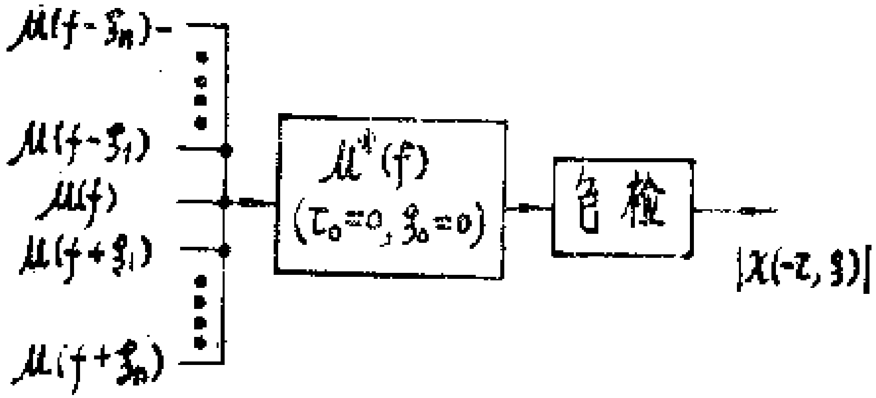
匹配滤波器输出：

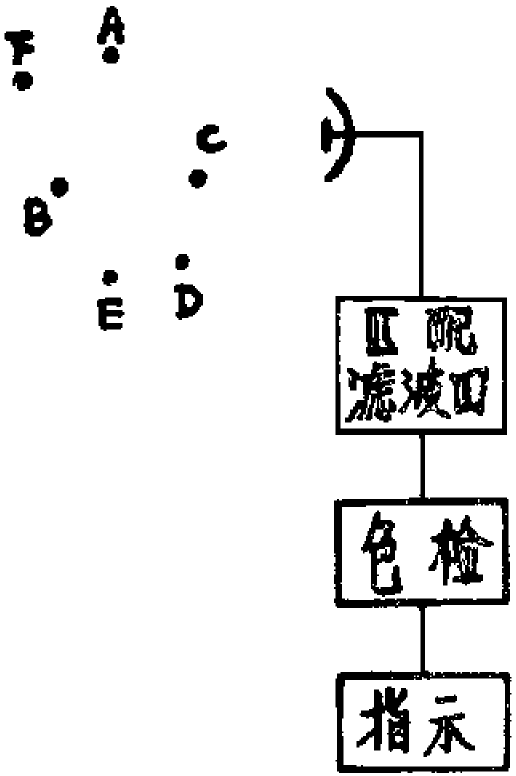
$$g_C(t)=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau')u^*(\tau'-t)e^{j2\pi\xi\tau'}d\tau'\right]e^{j2\pi\xi_A t}$$

$$V(\tau,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u^*(t-\tau)e^{j2\pi\xi t}dt$$

$$\left|\chi(\tau,\xi)\right|^2=\left|V(-\tau,\xi)\right|^2$$

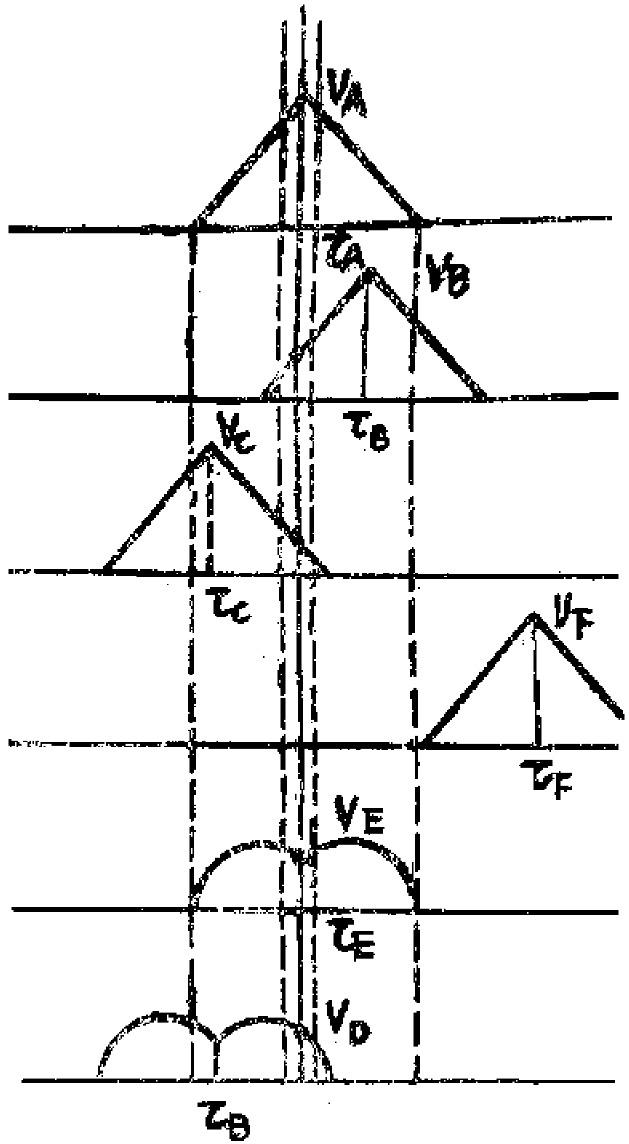
$$V(\tau,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}u^*(f)u(f-\xi)e^{j2\pi f\tau}df$$

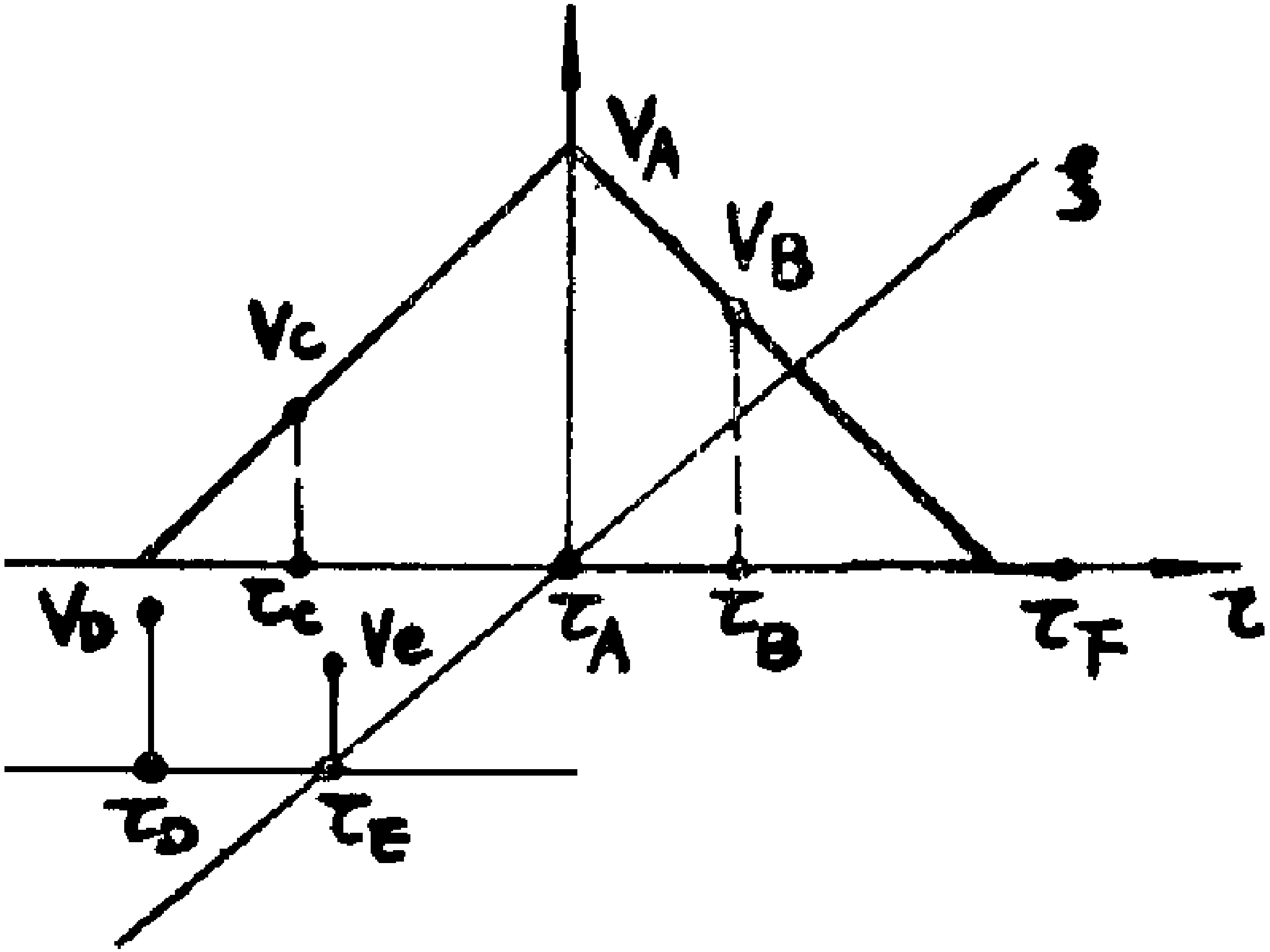




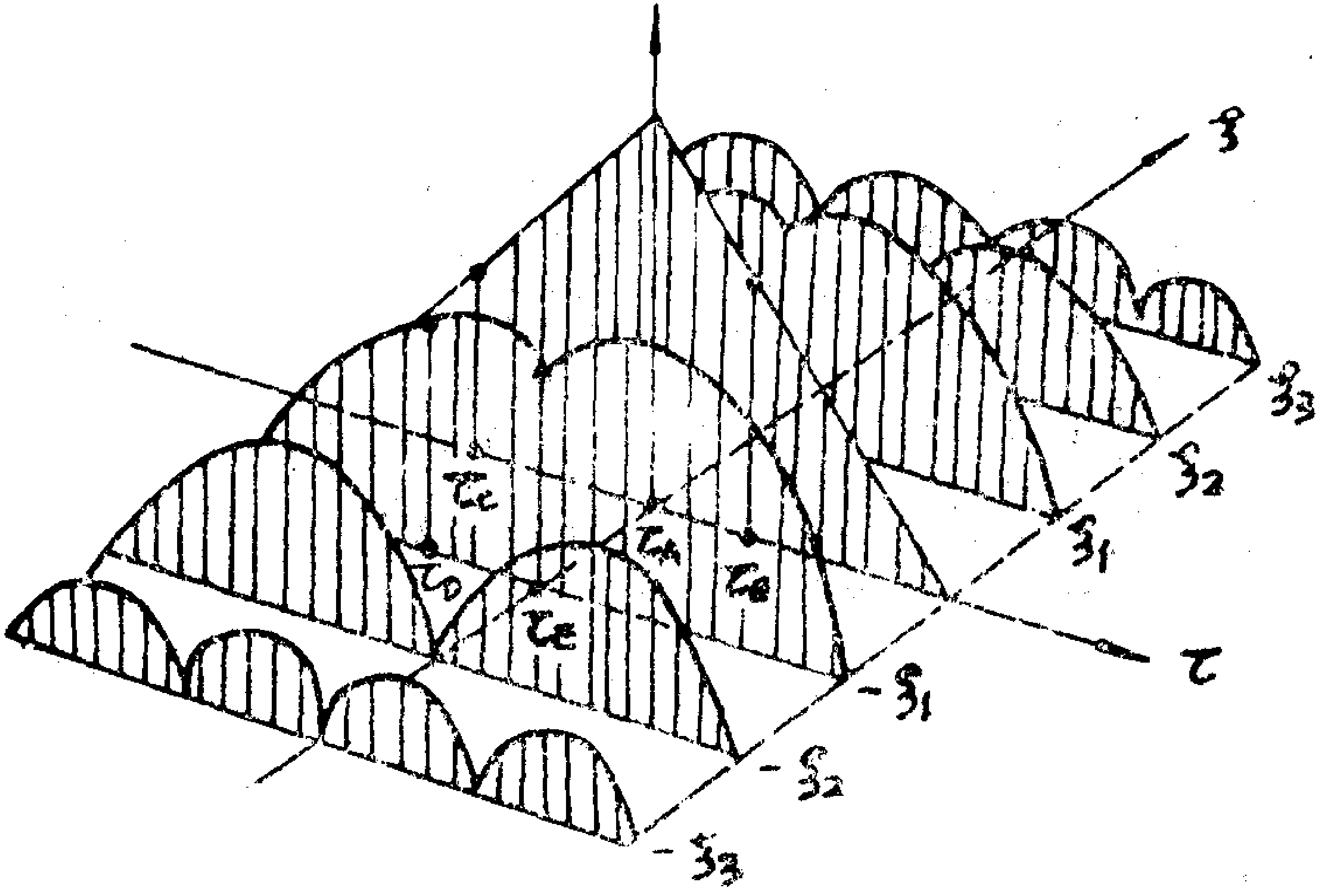
$$V_A = V_B = V_C = V_F,\quad V_D = V_E$$

$$R_B \fallingdotseq R_C \fallingdotseq R_D \fallingdotseq R_F,\quad R_A = R_E$$





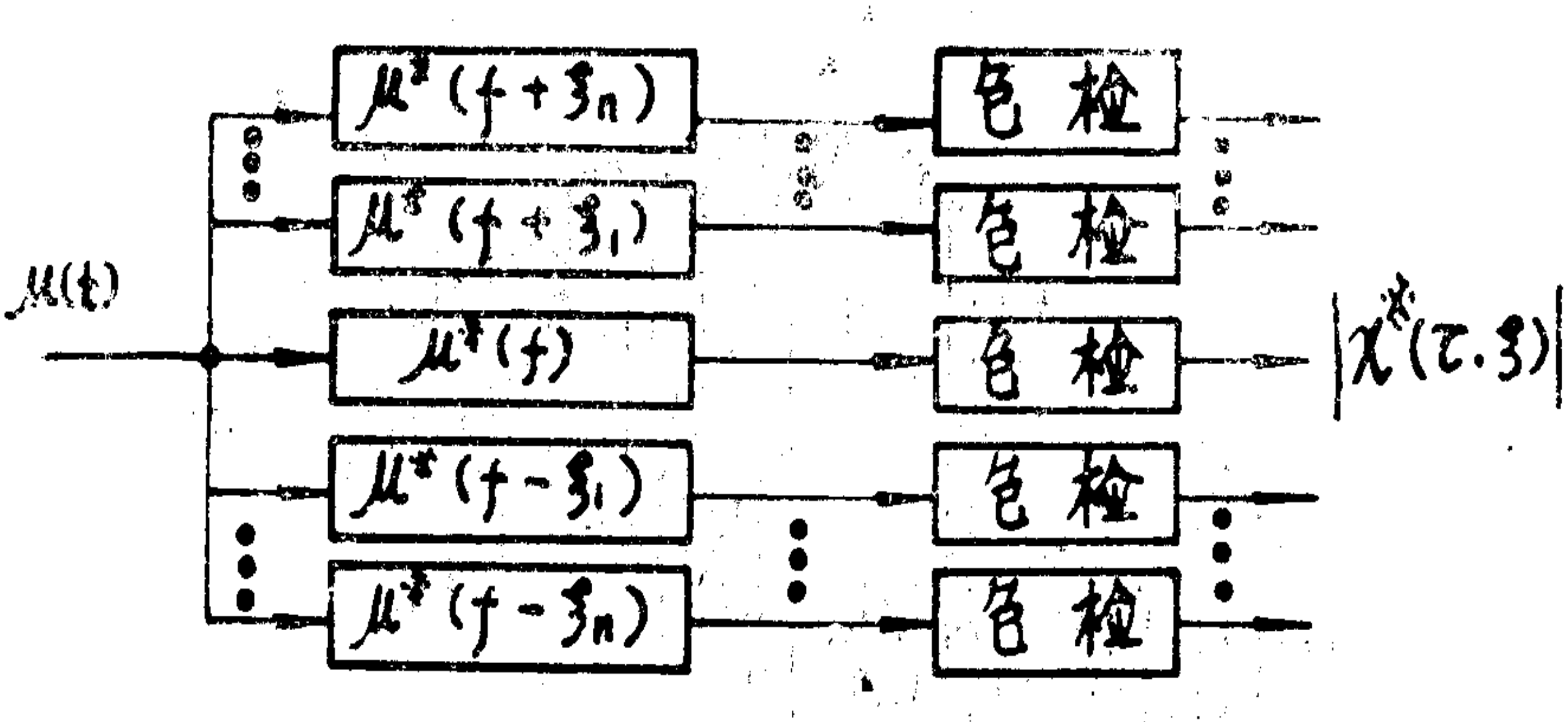
V_A
V_B
V_C
V_D
V_E
ξ
τ_C
τ_A
τ_B
τ_F
τ
τ_D
τ_E



ξ
ξ_3
ξ_2
ξ_1
τ
$-\xi_1$
$-\xi_2$
$-\xi_3$
τ_C
τ_A
τ_B
τ_D
τ_E

$$\left|\chi^*(\tau,\xi)\right|^2 = \left|\chi^*(\tau,\xi)\bullet[\chi^*(\tau,\xi)]^* = \left\|\chi(\tau,\xi)\right|^2$$

$$\left|\chi^*(\tau,\xi)\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u^*(t)u(t+\tau)e^{-j2\pi\xi t}dt\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(f)u^*(f-\xi)e^{j2\pi f\tau}df\right|^2$$



4.4 模糊函数的主要性质

一、本身的性质

1、原点对称性 $\left|\chi(\tau,\xi)\right|^2=\left|\chi(-\tau,-\xi)\right|^2$

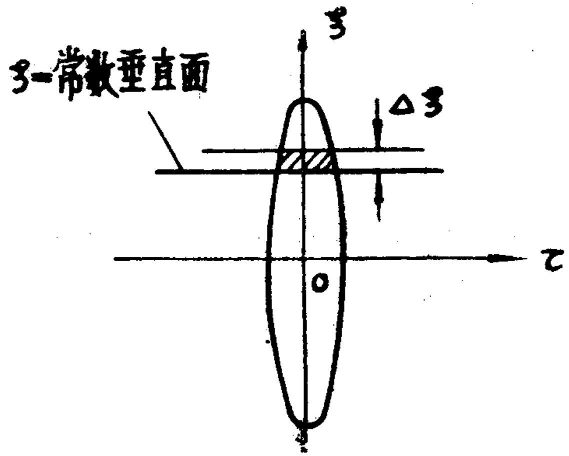
2、峰值在原点 $\left|\chi(\tau,\xi)\right|^2\le\left|\chi(0,0)\right|^2=(2E)^2$

3、体积不变性 $\int\int\left|\chi(\tau,\xi)\right|^2 d\tau d\xi=(2E)^2$

4、自变换性 $\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|\chi(\tau,\xi)\right|^2 e^{j2\pi\xi Z}e^{-j2\pi Y\tau}d\tau d\xi=\left|\chi(Z,Y)\right|^2$

模糊函数的二维付氏变换仍为模糊函数。

5、体积分布的限制



$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\chi(\tau,\xi)\right|^{2}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\chi(\tau,0)\right|^{2}e^{-j2\pi\xi\tau}d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\chi(\tau,\xi)\right|^{2}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\chi(0,\xi)\right|^{2}e^{j2\pi\xi\tau}d\xi$$

$$\left|\chi(\tau,0)\right|^{2}=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mu(t)\mu^{*}(t+\tau)dt\right|^{2}=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mu(f)\right|^{2}e^{-j2\pi f\tau}df\right|^{2}$$

$$\left|\chi(0,\xi)\right|^{2}=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mu(f)\mu^{*}(f-\xi)df\right|^{2}=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mu(t)\right|^{2}e^{j2\pi\xi t}dt\right|^{2}$$

二、变换关系

1、组合关系　若：$\mu(t)=\mu_1(t)+\mu_2(t)$

$$\chi_{\mu}(\tau,\xi)=\chi_{\mu_1}(\tau,\xi)+\chi_{\mu_2}(\tau,\xi)+\chi_{\mu_1\mu_2}(\tau,\xi)$$
$$+\chi^{*}_{\mu_1\mu_2}(-\tau,-\xi)e^{-j2\pi\xi\tau}$$

2、共轭关系　若：$\mu(t)=\mu_1^*(t)$ ，$\mu(f)=\mu_1^*(f)$

$$\chi_\mu(\tau,\xi)=\chi_{\mu_1}^*(\tau,-\xi)=e^{-j2\pi\xi\tau}\cdot\chi_{\mu_1}(-\tau,\xi)\ ,\ \chi_\mu(\tau,\xi)=\chi_{\mu_1}^*(-\tau,\xi)=e^{-j2\pi\xi\tau}\cdot\chi_{\mu_1}^*(\tau,-\xi)$$

3、比例关系　$\mu(t)=\mu_1(at)$　$\chi_\mu(\tau,\xi)=\dfrac{1}{|a|}\chi_{\mu_1}(a\tau,\dfrac{\xi}{a})$

$\mu(f)=\mu_1(af)$　$\chi_\mu(\tau,\xi)=\dfrac{1}{|a|}\chi_{\mu_1}(\dfrac{\tau}{a},a\xi)$

4、时间、频率偏移的影响

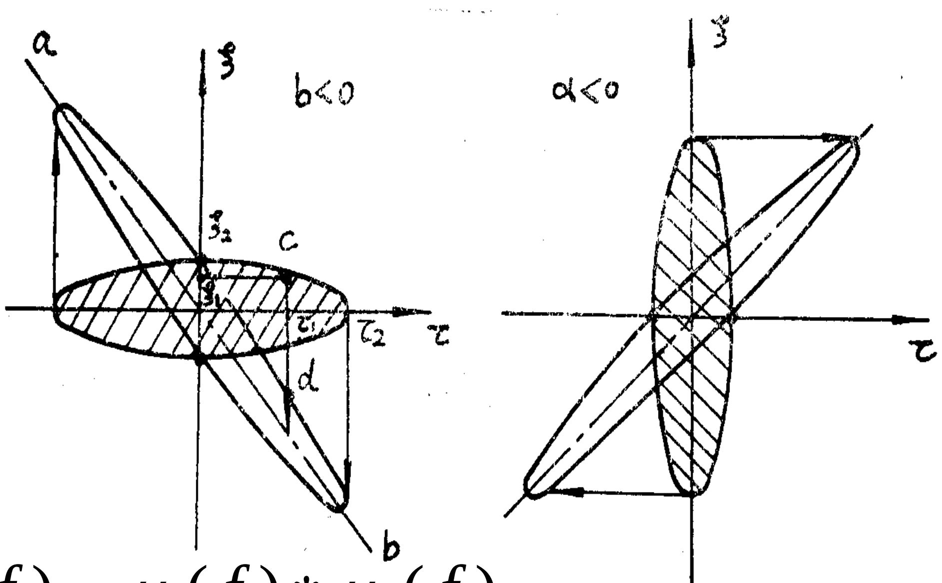
$$\mu(t)=\mu_1(t-\tau_0)e^{j2\pi\xi_0(t-\tau_0)}\quad \chi_\mu(\tau,\xi)=e^{j2\pi(\xi\tau_0-\xi_0\tau)}\cdot\chi_{\mu_1}(\tau,\xi)$$

5、时/频域平方相位的影响

$$\mu(t)=\mu_1(t)e^{j\pi bt^2}\qquad \chi_\mu(\tau,\xi)=e^{-j\pi b\tau^2}\cdot\chi_{\mu_1}(\tau,\xi-b\tau)$$

$$\mu(f)=\mu_1(f)e^{j\pi\alpha f^2} \qquad \chi_\mu(\tau,\xi)=e^{j\pi\alpha\xi^2}\cdot\chi_{\mu_1}(\tau+\alpha\xi,\xi)$$

$$\begin{cases}\tau=\tau' \\ \xi=\xi'-b\tau'\end{cases}$$



① $\xi=0,\xi'=b\tau'$

② $\tau=0,\xi=\xi'$

6、相乘特性

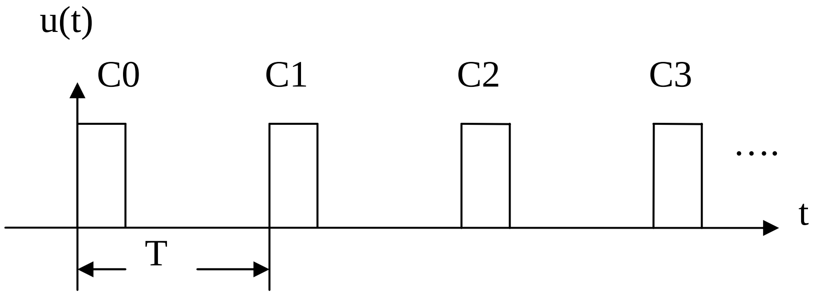
$$\mu(t)=\mu_1(t)\cdot\mu_2(t) \qquad \mu(f)=\mu_1(f)*\mu_2(f)$$

$$\chi_\mu(\tau,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\mu_1}(\tau,q)\cdot\chi_{\mu_2}(\tau,\xi-q)\mathrm{d}q$$

$$\mu(f)=\mu_1(f)\cdot\mu_2(f) \qquad \mu(t)=\mu_1(t)*\mu_2(t)$$

$$\chi_\mu(\tau,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\mu_1}(\lambda,\xi)\cdot\chi_{\mu_2}(\tau-\lambda,\xi)\mathrm{d}\lambda$$

7、周期信号模糊函数



$$\mu(t)=\sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \mu_1(t-nT)$$

$$\chi_{\mu}\left(\tau,\xi\right)=\sum_{m=1}^{N-1} e^{j2\pi\xi mT} \cdot \chi_{\mu 1}\left(\tau+mT,\xi\right)\cdot \sum_{i=0}^{N-1-m} c_i c_{i+m}^{*} e^{j2\pi\xi iT}$$

$$+\sum_{m=0}^{N-1} \chi_{\mu 1}\left(\tau-mT,\xi\right)\cdot \sum_{i=0}^{N-1-m} c_i c_{i+m}^{*} e^{j2\pi\xi iT}$$

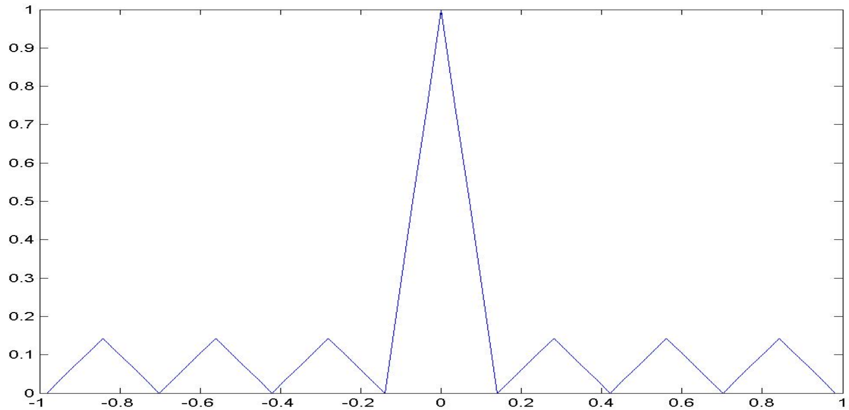
4.5 模糊图的切割

一、$\xi = 0$ 的切割

1、切割平面过最大值

2、MF输出响应时间倒置

3、距离自相关函数

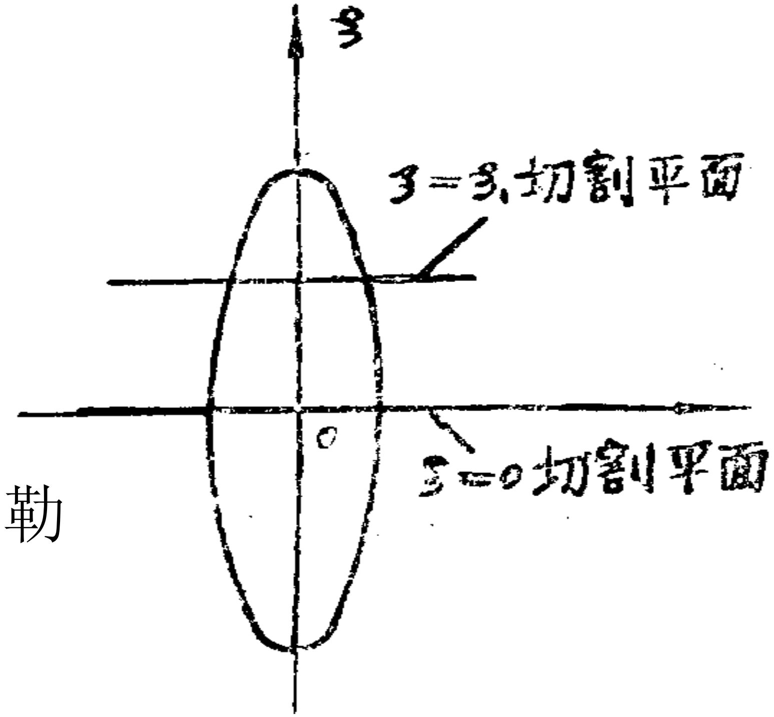


二、$\xi = \xi_1$ 的切割

1、切割平面不过最大值

2、MF失配输出时间倒置

3、距离互相关函数



结论:

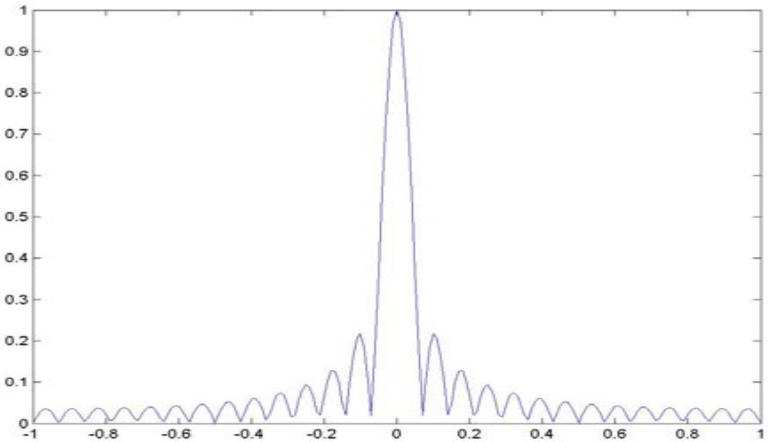
不同多普勒切割得到MF对不同多普勒信号输出响应的时间倒置。

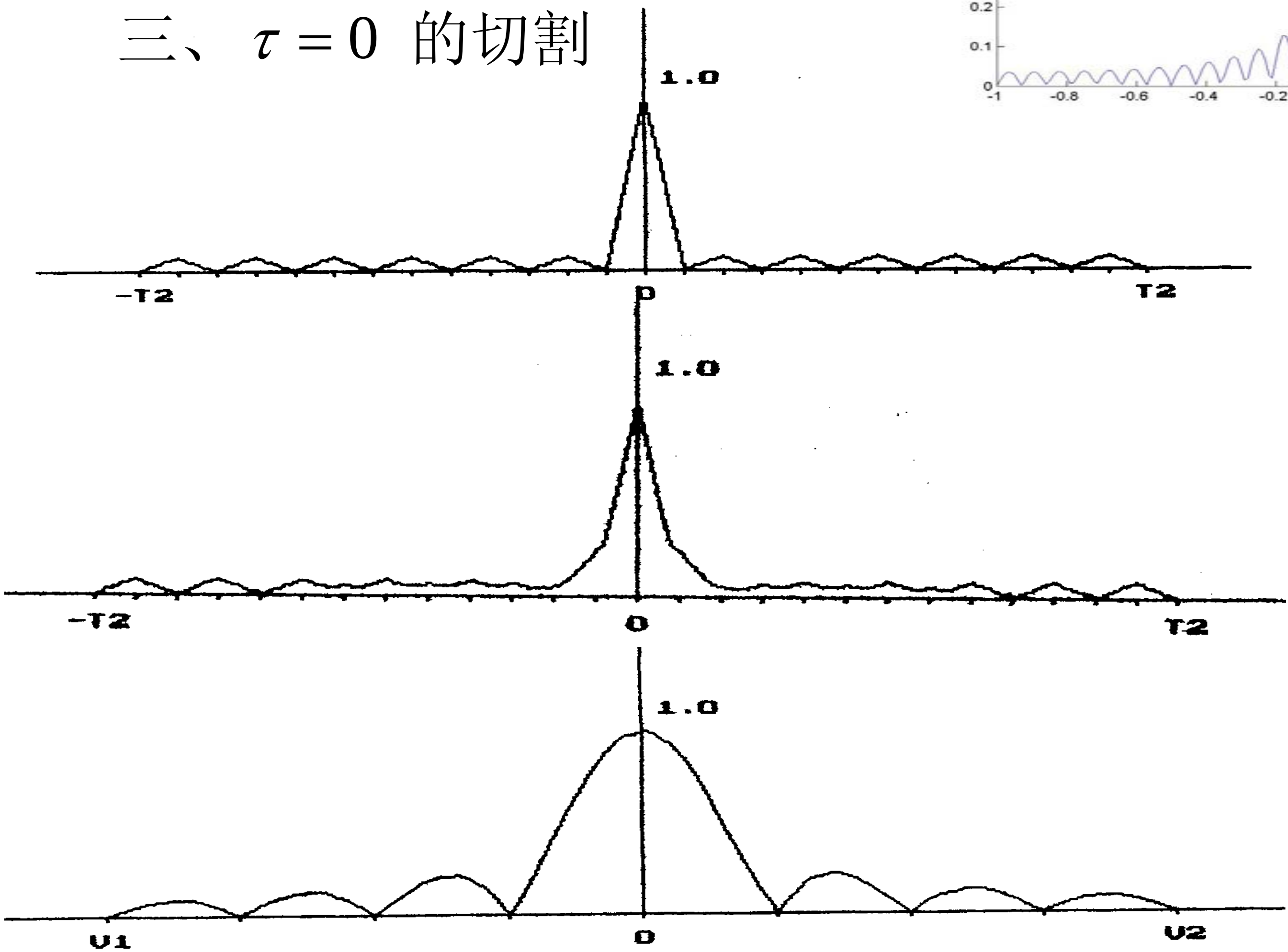
避免时间倒置：

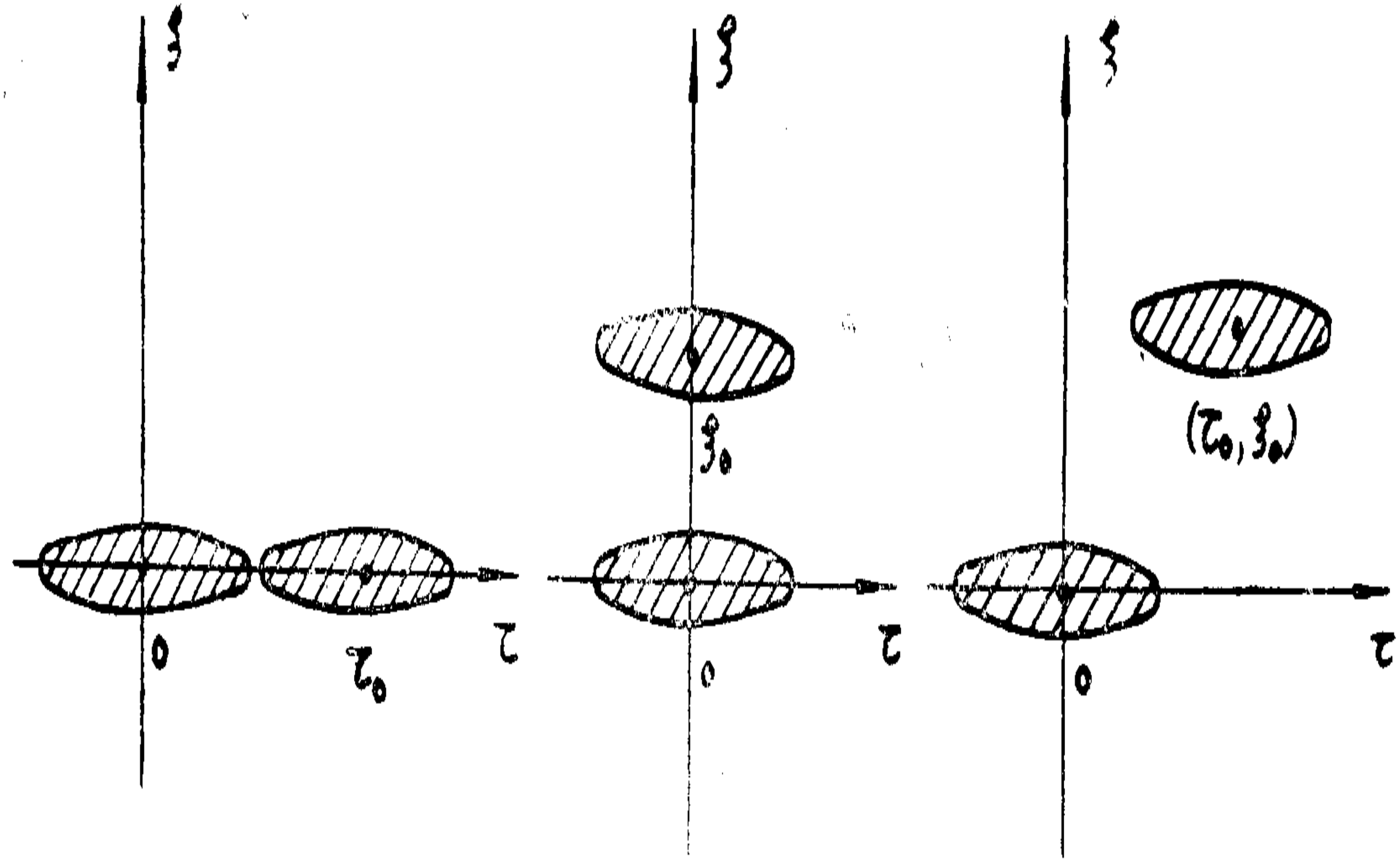
1、移动模糊图原点

2、$\xi = -\xi_1$ 切割

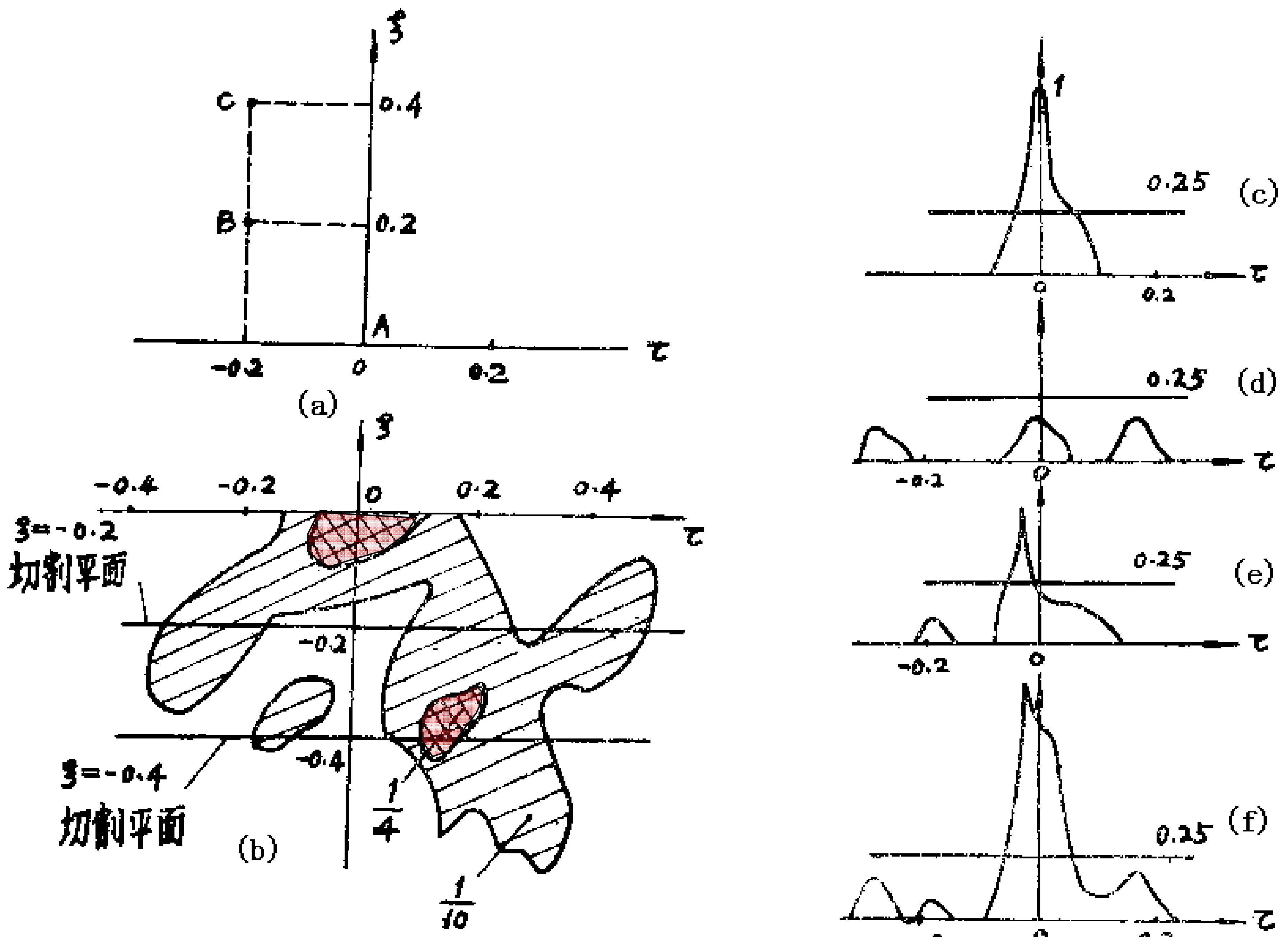
三、$\tau = 0$ 的切割







ξ
0
τ₀
τ
ξ
ξ₀
0
τ
ξ
(τ₀, ξ₀)
0
τ



ξ
C
B
A
0.4
0.2
-0.2
0
0.2
τ
(a)
ξ
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
τ
ξ=-0.2
切割平面
-0.2
ξ=-0.4
切割平面
-0.4
1/4
1/10
(b)
1
0.25
(c)
0
0.2
τ
0.25
(d)
-0.2
0
τ
0.25
(e)
-0.2
0
τ
0.25
(f)
-0.2
0
0.2
τ

4.6 模糊函数与精度的关系

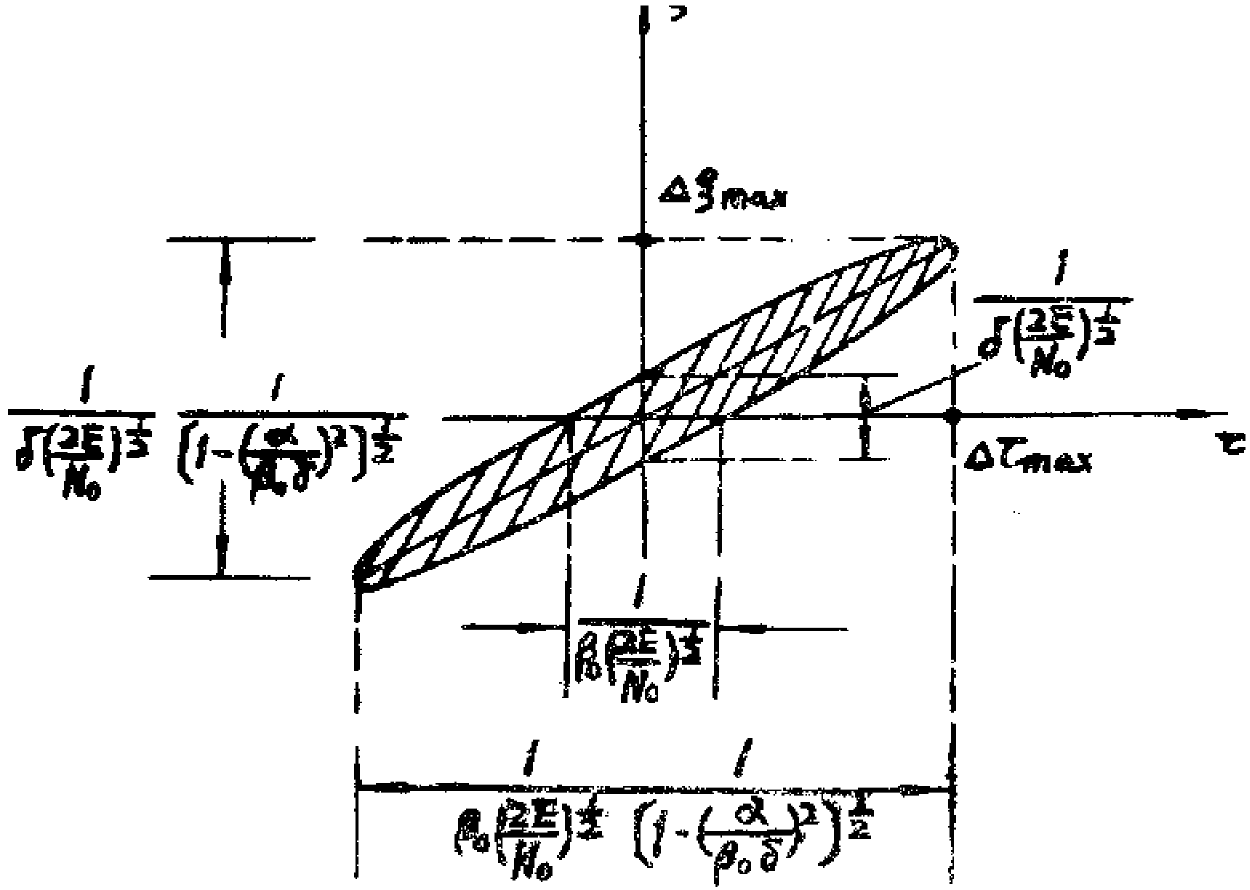
$$\left|\chi(\tau,\xi)\right|^2 \approx \left|\chi(0,0)\right|^2 - (\tau^2 {\beta_0}^2 - 2\tau\xi\alpha + \xi^2\delta^2)\left|\chi(0,0)\right|^2$$

$$= (2E)^2[1 - \tau^2 {\beta_0}^2 + 2\tau\xi\alpha - \xi^2\delta^2]$$

$$\phi(t) = 0(\alpha = 0), \xi = 0$$

$$\frac{\left|\chi(\tau,0)\right|^2}{\left|\chi(0,0)\right|} \approx 1 - \beta_0^2\tau^2$$

$$\tau^2 {\beta_0}^2 - 2\tau\xi\alpha + \xi^2\delta^2 = 1 - \frac{\left|\chi(\tau,\xi)\right|^2}{\left|\chi(0,0)\right|^2} = K^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N_0}{2E}}\right)^2$$



ξ
$\Delta\xi_{max}$
τ
$\Delta\tau_{max}$
$\frac{1}{\delta\left(\frac{2E}{N_0}\right)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{1}{\delta\left(\frac{2E}{N_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\alpha}{\beta_0\delta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{1}{\beta_0\left(\frac{2E}{N_0}\right)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{1}{\beta_0\left(\frac{2E}{N_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\alpha}{\beta_0\delta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$\Delta\tau = \frac{1}{\beta_0\sqrt{\frac{2E}{N_0}}} \qquad \Delta\xi = \frac{1}{\delta\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}$$

$$\Delta\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2\beta_0\sqrt{\frac{2E}{N_0}}[1-(\frac{\alpha}{\beta_0\delta})^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad \Delta\xi_{\max} = \pm\frac{1}{2\delta\sqrt{\frac{2E}{N_0}}[1-(\frac{\alpha}{\beta_0\delta})^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$S = K^2\frac{\pi}{({\beta_0}^2\delta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}$$

4.7 利用模糊函数对典型脉冲雷达信号进行分析

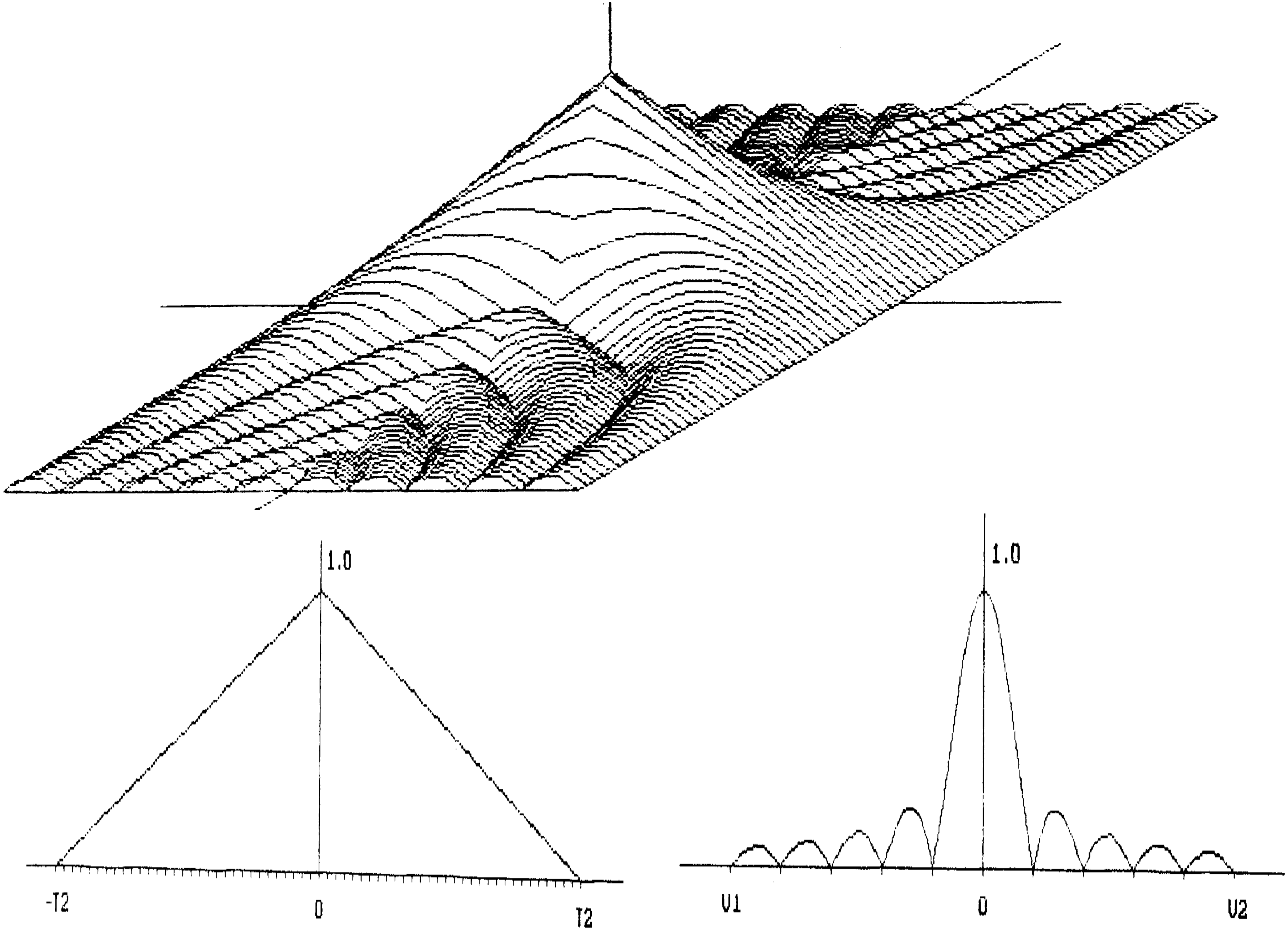
一、模糊函数的计算

$$\mu(t)=\begin{cases}\sqrt{1/T} & 0<t<T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad \mu(\mathrm{t})=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}}rect[\frac{t-\frac{T}{2}}{T}]$$

$$\chi(\tau,\xi)=\begin{cases}e^{j\pi\xi(T-\tau)}\dfrac{\sin\pi\xi(T-|\tau|)}{\pi\xi(T-|\tau|)}\left(\dfrac{T-|\tau|}{T}\right) & |\tau|<T\\ 0 & |\tau|>T\end{cases}$$

$$|\chi(\tau,\xi)|^2=\begin{cases}\left[\dfrac{\sin\pi\xi(T-|\tau|)}{\pi\xi(T-|\tau|)}\left(\dfrac{T-|\tau|}{T}\right)\right]^2 & |\tau|<T\\ 0 & |\tau|>T\end{cases}$$

$$|\chi(\tau,0)|^2=\left|\frac{T-|\tau|}{T}\right|^2\qquad |\chi(0,\xi)|^2=\left[\frac{\sin\pi\xi T}{\pi\xi T}\right]^2=[\sin c(\xi T)]^2$$


1.0
-T2
0
T2
1.0
V1
0
V2

二、性能

1、不能同时给出很高的距离和速度分辨力；

$$W_e = \frac{3}{2}\frac{1}{T}, \quad T_e = T, \quad W_e T_e = \frac{3}{2}$$

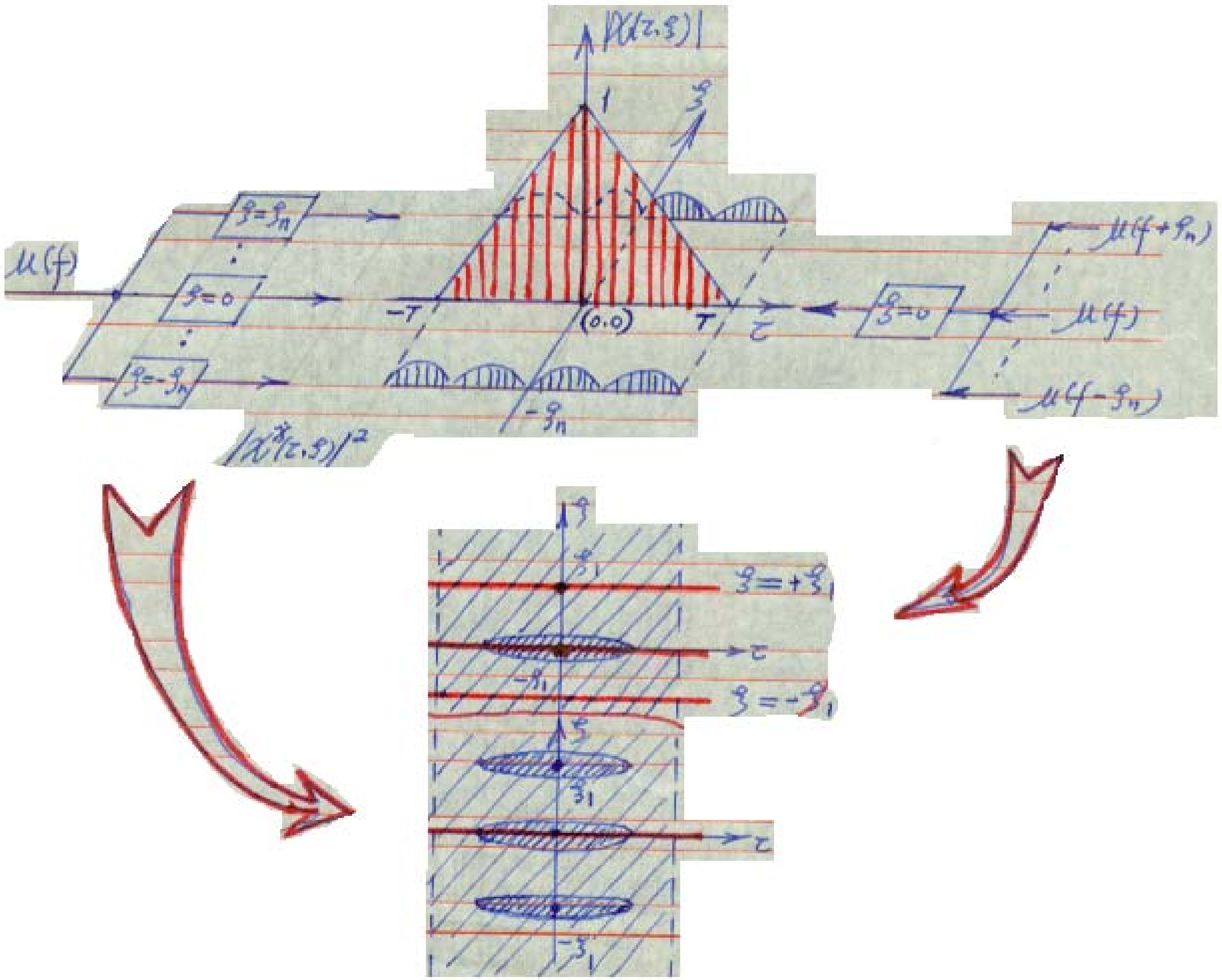
2、不能同时给出很高的测距和测速精度；

$$\beta_0^{\,2} = \frac{2B}{T}; \quad \delta^2 = \frac{\pi^2}{3}T^2, \quad \beta_0^{\,2}\delta^2 = \frac{2\pi^2}{3}BT \approx \frac{2}{3}\pi^2, \alpha = 0$$

3、发射功率（作用距离）与距离分辨力和测距精度存在不可克服矛盾；

4、多普勒不敏感。

作业：1、用切割的概念来理解模糊函数的物理意义。



作业：2、模糊图解释窄脉冲信号不能测速，而连续波信号能够测速。

3、同一信号改变参量和不同信号形式的模糊图体积分布变化是否相同？