第五章 广义逆矩阵

§5.1 基本概念

1. 定义: 设$A \in C^{m\times n}$. 如$X \in C^{n\times m}$ 满足下列四个Penrose 方程

(1) $AXA = A$; (2) $XAX = X$;

(3) $(AX)^H = AX$; (4) $(XA)^H = XA$

的某几个或全部，则称X为A 的广义逆矩阵。满足全部四个方程的广义逆矩阵称为A 的Moore-Penrose逆.

注：

(1). 满足一个、二个、三个或四个Penrose 方程的广义逆矩阵，一共有$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ 类

(2). 若A可逆，则$X = A^{-1}$满足四个Penrose方程.

(3). 若A不可逆，则除了Moore-Penrose逆以外的其他14类广义逆矩阵都不唯一.

2. 定义：设$A \in C^{m\times n}$，如$X \in C^{n\times m}$ 满足Penrose 方程中的第(i), (j)，$\cdots$, (l) 等方程，则称X 为A 的$\{\mathrm{i},\mathrm{j},\cdots,\mathrm{l}\}$-逆，记为$A^{(\mathrm{i},\mathrm{j},\cdots,\mathrm{l})}$, 其全体记为$A\{\mathrm{i},\mathrm{j},\cdots,\mathrm{l}\}$。$A$ 的唯一的Moore-Penrose 逆记为A^{+}，也称之为A 的加号逆。

2. 定义：设$A \in C^{m\times n}$，如$X \in C^{n\times m}$ 满足Penrose 方程中的第(i), (j)，$\cdots$, (l) 等方程，则称X 为A 的$\{\mathrm{i},\mathrm{j},\cdots,\mathrm{l}\}$-逆，记为$A^{(\mathrm{i},\mathrm{j},\cdots,\mathrm{l})}$，其全体记为$A\{\mathrm{i},\mathrm{j},\cdots,\mathrm{l}\}$。$A$ 的唯一的Moore-Penrose 逆记为A^{+}，也称之为A 的加号逆。

应用较多的广义逆矩阵是以下5 类：

$$A\{1\},\ A\{1,2\},\ A\{1,3\},\ A\{1,4\},\ A^{+}$$

§5.2 {1}-逆的计算及性质

一、{1}-逆的计算

1. 定理：设$A \in C_r^{m\times n}$ $(r>0)$, 且有$S \in C_m^{m\times m}$ 和n 阶置换矩阵P 使得

$$SAP = \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (K \in C^{r\times(n-r)})$$

则对任意$L \in C^{(n-r)\times(m-r)}$, $n \times m$ 阶矩阵

$$X = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} S$$

是A 的{1}-逆; 当$L=0$ 时，X 是A 的{1,2}-逆.

例1：已知$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，

求$A^{(1)}$ 和$A^{(1,2)}$.

解：由第三章方法可求得$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$P = (e_1, e_3, e_2, e_4)$ 使得$SAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$A^{(1)} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \alpha & -\alpha & \alpha \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \beta & -\beta & \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in C)$$

$$A^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 定理：设$A \in C_r^{m\times n}$ 且$S \in C_m^{m\times m}$ 和$T \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$SAT = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$A\{1\} = \left\{ T \begin{pmatrix} I_r & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} S \;\middle|\; L_{12} \in C^{r\times(m-r)}, \; L_{21} \in C^{(n-r)\times r}, \; L_{22} \in C^{(n-r)\times(m-r)} \right\}$$

证明：因为$A = S^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$, 令$X = T\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} S$, 直接验证可知$AXA = A$, 即$X \in A\{1\}$. 反之，若$X \in A\{1\}$, 可设$X = T\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} S$, 由$AXA = A$, 得

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = SAT = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，$L_{11} = \mathrm{I}_r$.

二、$\{1\}$-逆的性质

1. 定理：设$A \in C^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$, 则

(1) $(A^{(1)})^H \in A^H\{1\}$, $(A^{(1)})^T \in A^T\{1\}$;

(2) $\lambda^+ A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$, 其中$\lambda \in C$ 且

$$\lambda^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

(3) 当$S \in C_m^{m\times m}$, $T \in C_n^{n\times n}$ 时，有

$$T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in (SAT)\{1\}$$

(4) $\mathrm{rank}A^{(1)} \geq \mathrm{rank}A$;

(5) $\mathrm{rank}(AA^{(1)}) = \mathrm{rank}(A^{(1)}A) = \mathrm{rank}A$;

(6) $AA^{(1)} = \mathrm{I_m} \Leftrightarrow \mathrm{rank}A = m$;

(7) $A^{(1)}A = \mathrm{I_n} \Leftrightarrow \mathrm{rank}A = n$.

证明：(1) – (3) 直接验证.

证明：(1) – (3) 直接验证.

(4) $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(AA^{(1)}A) \leq \mathrm{rank}A^{(1)}$.

(5) $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(AA^{(1)}A) \leq \mathrm{rank}(A^{(1)}A) \leq \mathrm{rank}A$.

(6) 如$AA^{(1)} = \mathrm{I_m}$, 则

$$m = \mathrm{rank}\,\mathrm{I_m} = \mathrm{rank}(AA^{(1)}) = \mathrm{rank}A$$

反之，若$\mathrm{rank}A = m$, 则 $\mathrm{rank}(AA^{(1)}) = \mathrm{rank}A = m$,

即$AA^{(1)}$ 可逆. 由$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}$, 两边同乘以$(AA^{(1)})^{-1}$

即得$AA^{(1)} = \mathrm{I_m}$.

推论：设$A \in C^{m\times n}$, 则A 有唯一$\{1\}$-逆的充要条件是$m = n$, 且$\mathrm{rank} A = n$, 即A 可逆，这个唯一的$\{1\}$-逆就是A^{-1}.

证明：根据性质的(6)、(7)以及逆矩阵定义可以直接得到该推论。

2. 定理：设$A \in C^{m\times n}$, $B \in C^{p\times q}$, $D \in C^{m\times q}$, 则矩阵方程$AXB = D$ 有解的充要条件是

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D \tag{1}$$

其中$A^{(1)} \in A\{1\}$, $B^{(1)} \in B\{1\}$. 当矩阵方程有解时，其通解为 $(Y \in C^{n\times p}$ 任意)

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)} \tag{2}$$

证明：如果(1) 成立，则$A^{(1)}DB^{(1)}$ 是$AXB = D$ 的解. 反之，如果$AXB = D$ 有解，则

$$D = AXB = AA^{(1)}AXBB^{(1)}B = AA^{(1)}DB^{(1)}B$$

将(2) 代入AXB 可算出它等于D, 这说明(2) 是矩阵方程$AXB = D$ 的解. 设X_0 是$AXB = D$ 的任一解，则有

$$\begin{aligned} X_0 &= A^{(1)}DB^{(1)} + X_0 - A^{(1)}DB^{(1)} \\ &= A^{(1)}DB^{(1)} + X_0 - A^{(1)}AX_0BB^{(1)} \end{aligned}$$

即X_0 可表示为(2) 的形式，故(2) 为$AXB = D$ 的通解.

推论1：设$A \in C^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$. 则有

$$A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)} \mid Z \in C^{n\times m} \text{ 任意}\}$$

推论1：设$A \in C^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$. 则有

$$A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)} \mid Z \in C^{n\times m} \text{ 任意}\}$$

推论2：设$A \in C^{m\times n}$, $b \in C^{m}$. 则线性方程组$Ax = b$ 有解的充要条件是

$$AA^{(1)}b = b$$

其中$A^{(1)} \in A\{1\}$. 如果$Ax = b$ 有解，其通解为

$$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y \quad (y \in C^{n} \text{ 任意})$$

例2：用广义逆矩阵方法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

例2：用广义逆矩阵方法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

解：令 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

由例1 知

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

易验证$AA^{(1)}b = (5, 1, -4)^T = b$. 所以方程组有解，且通解为

$$x = A^{(1)}b + (\mathrm{I} - A^{(1)}A)y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

3. 定理：设$A \in C^{m\times n}$, $b \in C^m$, $X \in C^{n\times m}$. 若对$Ax = b$有解的所有b，$x = Xb$ 都是解，则$X \in A\{1\}$.

3. 定理：设$A\in C^{m\times n}$, $b\in C^m$, $X\in C^{n\times m}$. 若对$Ax=b$ 有解的所有b，$x=Xb$ 都是解，则$X\in A\{1\}$.

证明：记a_j 为A 的第j 列，则线性方程组$Ax=a_j$ 都有解（因为$x=e_j$ 就是解）. 由于$x=Xa_j$ 是线性方程组的解，即$AXa_j=a_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$ 从而

$$AXA=AX(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=A$$

故$X\in A\{1\}$.

§4.3 Moore-Penrose 逆A^+ 的计算及其应用

一、A^+ 的计算

1. 直接计算方法

   利用奇异值分解计算

   利用满秩分解计算

2. 迭代计算方法

   矩阵迭代计算方法

   Greville 递推法

1. 定理：设矩阵$A \in C_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为：

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} V^H$$

则

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m} U^H$$

证明：直接验证四个Penrose方程。

例：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，利用矩阵的奇异值分解求$A^+$.

例：设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，利用矩阵的奇异值分解求$A^+$.

解：A 的奇异值分解为$A=U\begin{pmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{pmatrix}V^H$, 其中

$$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$V^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

因此

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m} U^H = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

2. 定理：设$A \in C_r^{m\times n}$, $(r > 0)$, 且A 的满秩分解为

$$A = FG \quad (F \in C_r^{m\times r},\ G \in C_r^{r\times n})$$

则

$$A^+ = G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H$$

2. 定理：设$A \in C_r^{m\times n}$, $(r > 0)$, 且A 的满秩分解为

$$A = FG \quad (F \in C_r^{m\times r},\ G \in C_r^{r\times n})$$

则

$$A^+ = G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H$$

推论1：设$A \in C^{m\times n}$. 则

(1)当rank$A = m$ 时，有$A^+ = A^H(AA^H)^{-1}$;

(2)当rank$A = n$ 时，有$A^+ = (A^HA)^{-1}A^H$

例: 求下列矩阵的Moore-Penrose 逆:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解：(1) A的满秩分解

为$A = FH = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，于是

$$A^{+} = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) $A^{+} = (A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{14}(1, 2, 3)$.

推论2：设$a, b \in C^n$，且$a \neq 0, b \neq 0$，则

(1) $(ab^{\mathrm{H}})^{+} = \frac{1}{a^{\mathrm{H}}ab^{\mathrm{H}}b} ba^{\mathrm{H}}$;

(2) $a^{+} = \frac{1}{a^{\mathrm{H}}a} a^{\mathrm{H}}$, $(b^{\mathrm{H}})^{=} \frac{1}{b^{\mathrm{H}}b} b$.

推论2：设$a, b \in C^n$，且$a \neq 0, b \neq 0$，则

(1) $(ab^{\mathrm{H}})^{+} = \frac{1}{a^{\mathrm{H}}ab^{\mathrm{H}}b}ba^{\mathrm{H}}$;

(2) $a^{+} = \frac{1}{a^{\mathrm{H}}a}a^{\mathrm{H}}$, $(b^{\mathrm{H}})^{=}\frac{1}{b^{\mathrm{H}}b}b$.

证明：

(1) $(ab^{\mathrm{H}})^{+} = b(b^{\mathrm{H}}b)^{-1}(a^{\mathrm{H}}a)^{-1}a^{\mathrm{H}} = \frac{1}{a^{\mathrm{H}}ab^{\mathrm{H}}b}ba^{\mathrm{H}}$;

(2) $a \in C^n$，$\mathrm{rank}a = 1$，由推论1，$a^{+} = \frac{1}{a^{\mathrm{H}}a}a^{\mathrm{H}}$

同理，$b \in C^n$，$\mathrm{rank}b^{\mathrm{H}} = 1$，由推论1，$(b^{\mathrm{H}})^{=}\frac{1}{b^{\mathrm{H}}b}b$.

3. 定理：对于任意矩阵 $A \in C_r^{m\times n}$，设$\sigma_1, \cdots \sigma_r$ 为A 的 r 个非零奇异值，记 $c = max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots \sigma_r^2\}$，则当 $0 < \alpha < \frac{2}{c}$ 时，由迭代格式

$$\begin{cases} X_0 = \alpha A^H \\ X_k = X_{k-1} + \alpha(I - \alpha A^H A)^k A^H, \ k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

得到的迭代序列 $\{X_k\}$ 收敛于 A^+，即

$$A^+ = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(I - \alpha A^H A)^k A^H$$

在上述定理的条件下，有下面的几个推论:

在上述定理的条件下，有下面的几个推论：

推论1：在定理的条件下，由迭代格式

$$\begin{cases} \tilde{X}_0 = \alpha A^H \\ \tilde{X}_k = \tilde{X}_{k-1} + \alpha A^H (I - \alpha A^H A)^k, \ k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

得到的迭代序列$\{\tilde{X}_k\}$收敛于A^+，即

$$A^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha A^H (I - \alpha A A^H)^k$$

推论2：在定理的条件下，由迭代格式

$$\begin{cases} X_0 = \alpha A^H \\ X_k = X_{k-1} + X_0(I - AX_{k-1}),\ k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

得到的迭代序列$\{X_k\}$ 也收敛于A^+

推论2：在定理的条件下，由迭代格式

$$\begin{cases} X_0 = \alpha A^H \\ X_k = X_{k-1} + X_0(I - AX_{k-1}),\ k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

得到的迭代序列$\{X_k\}$ 也收敛于A^+

推论3：在定理的条件下，由迭代格式

$$\begin{cases} Z_0 = \alpha A^H \\ Z_{k+1} = Z_k(2I - AZ_k),\ k = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

得到的迭代序列$\{Z_k\}$ 也收敛于A^+.

4. 定理：设$A=(a_1,\cdots,a_n)\in C^{m\times n}$，记$A_k\in C^{m\times k}$为$A$ 的前k 列组成的矩阵，将A_k 分块为

$$A_k=(A_{k-1},a_k),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

其中$A_1=a_1$，$A_n=A$. 则有

$$A_k^+=\begin{pmatrix} A_{k-1}^+-d_kb_k^H \\ b_k^H \end{pmatrix},\quad k=2,\cdots,n$$

其中

$$d_k = A_{k-1}^{+} a_k, \quad c_k = a_k - A_{k-1} d_k$$

$$b_k^H = \begin{cases} c_k^{+}, & c_k \neq 0 \\ \frac{d_k^H A_{k-1}^{+}}{1+d_k^H d_k}, & c_k = 0 \end{cases}$$

其中

$$d_k = A_{k-1}^+ a_k, \quad c_k = a_k - A_{k-1} d_k$$

$$b_k^H = \begin{cases} c_k^+, & c_k \neq 0 \\ \frac{d_k^H A_{k-1}^+}{1+d_k^H d_k}, & c_k = 0 \end{cases}$$

Greville 递推法是一种以迭代形式实现的直接方法，在理论上n 步就可以精确得到A^+. 从计算量的角度，这种方法只用到了矩阵和向量的乘法，并没有用到矩阵和矩阵的乘法，因此计算量要比其他的矩阵迭代方法小。

二、A^+ 的基本性质

1. 定理：设$A \in C^{m\times n}$, 则 A 的 Moore-Penrose 逆 A^+ 存在且唯一。

由于 A^+ 同时满足所有四个Penrose方程，这表明任意矩阵的15类广义逆矩阵都是存在的，但需要指出的是，在所有15 类广义逆矩阵中，除了 A^+ 是唯一的以外，其余14类广义逆矩阵都不一定唯一。

2. 定理：设$A \in C^{m\times n}$, 则

(1) $(A^+)^+ = A$;

(2) $(A^+)^H = (A^H)^+$, $(A^+)^T = (A^T)^+$;

(3) $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$, 其中$\lambda \in C$, 且

$$\lambda^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

(4) $\operatorname{rank} A^+ = \operatorname{rank} A$;

(5) $\mathrm{rank}(AA^+) = \mathrm{rank}(A^+A) = \mathrm{rank}\, A$;

(6) $A^+ = (A^HA)^+A^H = A^H(AA^H)^+$;

(7) $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+,\ (AA^H)^+ = (A^H)^+A^+$;

(8) 当U 和V 分别是m 阶与n 阶酉矩阵时，有

$$(UAV)^+ = V^HA^+U^H$$

(9) $AA^+ = \mathrm{I_m}$ 的充要条件是 $\mathrm{rank}\, A = m$;

(10) $A^+A = \mathrm{I_n}$ 的充要条件是 $\mathrm{rank}\, A = n$.

注：(i) 一般地，$(AB)^+ \neq B^+A^+$. 如设$A=(1\ \ 1)$,
$B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, 于是$AB=(1)$, 而

$$(AB)^+=(1),\quad A^+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad B^+=(1\ \ 0)$$

故 $B^+A^+=(\frac{1}{2})\neq(AB)^+$.

(ii) 一般地，$AA^+\neq A^+A$. 如设$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,
有$A^+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, 从而

$$AA^+=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq A^+A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

3. 定理：设$A \in C^{m\times n}$, $b \in C^m$, 则 $Ax = b$ 有解的充要条件是 $AA^+b = b$, 且通解为

$$x = A^+b + (\mathrm{I} - A^+A)y \quad (y \in C^n \text{ 任意})$$

若解不唯一，则它的唯一极小范数解为 $x_0 = A^+b$.

3. 定理：设$A \in C^{m\times n}$, $b \in C^m$, 则 $Ax = b$ 有解的充要条件是 $AA^+b = b$, 且通解为

$$x = A^+b + (\mathrm{I} - A^+A)y \quad (y \in C^n \text{ 任意})$$

若解不唯一，则它的唯一极小范数解为 $x_0 = A^+b$.

证明：事实上A^+ 也是一种特殊的$\{1\}$-逆，根据$\{1\}$-逆的性质可得有解的条件及通解形式，下面只需证明极小范数解。

由$Ax=b$ 的通解表达式可得

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 = x^Hx &= [A^+b+(\mathrm{I}-A^+A)y]^H[A^+b+(\mathrm{I}-A^+A)y] \\ &= \|A^+b\|_2^2+\|(\mathrm{I}-A^+A)y\|_2^2 \\ &\quad +b^H(A^+)^H(\mathrm{I}-A^+A)y+y^H(\mathrm{I}-A^+A)^HA^+b \\ &= \|A^+b\|_2^2+\|(\mathrm{I}-A^+A)y\|_2^2 \\ &\quad +b^H[(\mathrm{I}-A^+A)yA^+]^Hy+y^H(\mathrm{I}-A^+A)A^+b \\ &= \|A^+b\|_2^2+\|(\mathrm{I}-A^+A)y\|_2^2\end{aligned}$$

可见$\|x\|_2 \geq \|A^+b\|_2$, 即A^+b 是极小范数解.

下证唯一性. 设x_0 是$Ax=b$ 的极小范数解,

则$\|x_0\|_2=\|A^+b\|_2$, 且存在 $y_0\in C^n$ 使得

$$x_0=A^+b+(\mathrm{I}-A^+A)y_0$$

利用前面的推导过程有

$$\|x_0\|_2^2=\|A^+b\|_2^2+\|(\mathrm{I}-A^+A)y_0\|_2^2$$

从而$\|(\mathrm{I}-A^+A)y_0\|_2=0$, 即$(\mathrm{I}-A^+A)y_0=0$, 故

$x_0=A^+b$.