Trabalho 2

Sinais e Sistemas - ENG1400

Alunos:
Leo Land Bairos Lomardo - 2020201
Lucca Vieira Rocha - 2011342

Professor: Guilherme Torelly

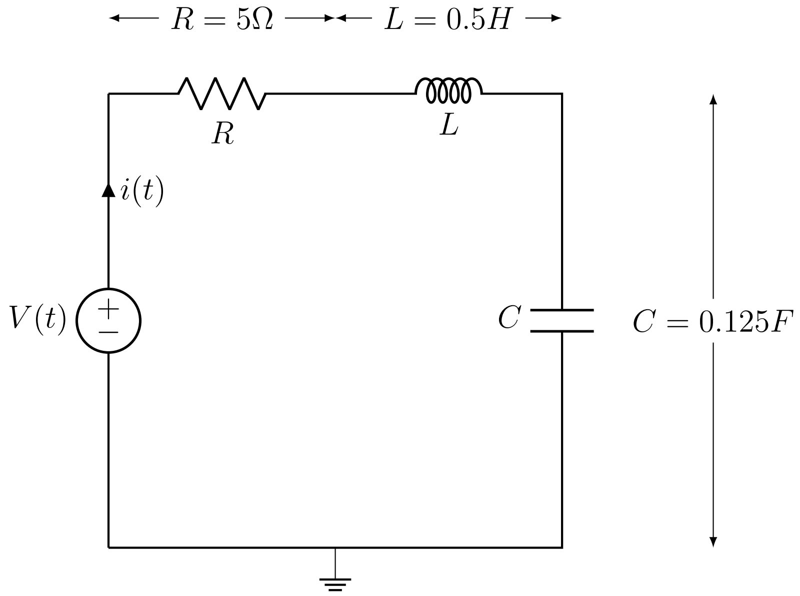
Rio de Janeiro, RJ
Novembro, 2023
Período 2023.2

Conteúdo

Lista de Figuras

1 Introdução

Neste segundo trabalho da disciplina "Sinais e Sistemas", trabalharemos com o circuito RLC mostrado abaixo. Os valores referentes ao capacitor, resistor e indutor do circuito, estão explicitados no diagrama.



As relações entre a tensão ($v_x(t)$) e a corrente ($i(t)$), em cada componente do circuito, é dado pela equações abaixo:

$$v_r(t) = Ri(t)$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\ dt$$

$$v_l(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

O foco do trabalho será como a transformada de Laplace pode ser utilizada para analisar este tipo de sistema.

2 Desenvolvimento

2.1 Tranformada de Laplace

O cálculo da Transformada de Laplace para uma função, transforma o domínio de uma função, onde inicialmente está variando de acordo com o tempo, e agora irá variar de acordo com S.

Ela é definida como:

$$F(S) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-St}\, dt$$

Para o cálculo da transformada de Laplace para cada componente, assumimos um *I(s)* genérico para os cálculos, visto que o valor da corrente não foi informado. Segue abaixo os valores obtivos após a transformada de Laplace em cada componente:

$$V_r(S) = \mathcal{L}\{v_r(t)\} = RI(S)$$

$$V_c(S) = \mathcal{L}\{v_c(t)\} = \frac{I(S)}{CS}$$

$$V_l(S) = \mathcal{L}\{v_l(t)\} = LSI(S)$$

2.2 Função de Transferência H(S)

Para calcularmos a função de transferência *H(S)* do circuito, é preciso primeiro saber o valor de *v(t)*. Para isso usaremos a lei de Kirchhoff.

$$v(t) = v_c(t) + v_l(t) + v_r(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\ dt + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

Com a equação montada fazemos a transformada de Laplace com cada um desses sinais. Como já fizemos isso na etapa anterior é só substituir na equação.

$$V(S) = \frac{I(S)}{CS} + LSI(S) + RI(S)$$

Após montar a função referente a *V(S)*, podemos calcular *H(S)* utilizando a equação abaixo, retirada do livro [6, p. 700]:

$$H(S) = \frac{\text{Sinal de Saída}}{\text{Sinal de Entrada}} = \frac{V_c(S)}{V(S)}$$

$$H(S) = \frac{\frac{I(S)}{CS}}{\frac{I(S)}{CS} + LSI(S) + RI(S)}$$

$$H(S) = \frac{\frac{I(S)}{CS}}{I(S)(\frac{1}{CS} + LS + R)}$$

$$H(S) = \frac{\frac{1}{CS}}{1(\frac{1}{CS} + LS + R)}$$

$$H(S) = \frac{1}{CS(R + LS + \frac{1}{CS})}$$

$$H(S) = \frac{1}{RCS + CLS^2 + 1}$$

$$H(S) = \frac{1}{CL(S^2 + \frac{RS}{L} + \frac{1}{CL})}$$

$$H(S) = \frac{\frac{1}{CL}}{S^2 + \frac{RS}{L} + \frac{1}{CL}}$$

Substituindo na equação, os valores do resistor, do capacito e do indutor, ficamos com a seguinte equação:

$$H(S) = \frac{\frac{1}{0.125 \ 0.5}}{S^2 + \frac{5S}{0.5} + \frac{1}{0.125 \ 0.5}}$$

$$H(S) = \frac{\frac{1}{0.0625}}{S^2 + 10S + \frac{1}{0.0625}}$$

$$H(S) = \frac{16}{S^2 + 10S + 16}$$

2.3 Análise do circuito no domínio da frequência

Para realizar a análise do circuito no domínio da frequência, vamos assumir o valor de $S = j\omega$:

$$H(S) = \frac{16}{(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 16}$$

$$H(S) = \frac{16}{-\omega^2 + 10j\omega + 16}$$

Com essa equação montada, podemos analisar o módulo e a fase de $H(S)$:

$$|H(j\omega)| = \frac{16}{\sqrt{(-\omega^2 + 10j\omega + 16)(-\omega^2 - 10j\omega + 16)}}$$

$$\angle(H(j\omega) = \arctan\left(\frac{Im(H(j\omega))}{Re(H(j\omega))}\right)$$

Em ambas as equações, os valores variam de acordo com ω. Para facilitar a análise, utilizamos a ferramenta $MATLAB$ para testar diferentes valores de ω, variando no intervalo $[10^0, 10^3]$ na escala logarítmica. Segue abaixo os resultados obtidos:

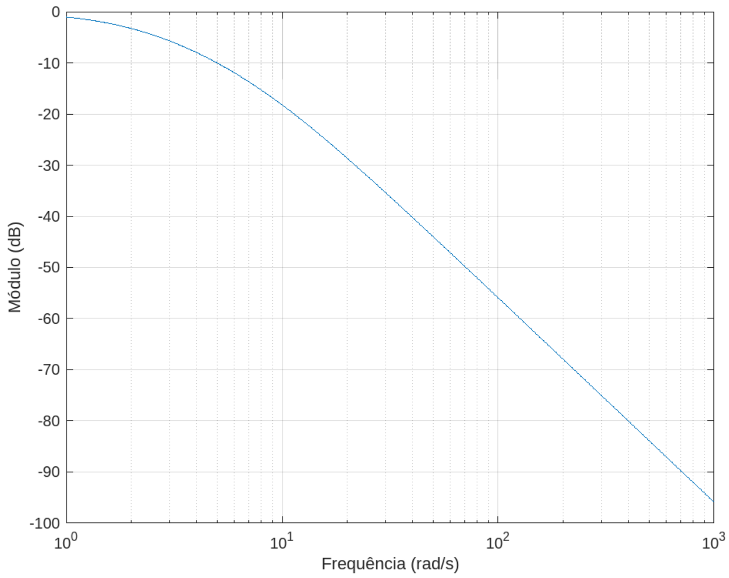


Figura 1: Módulo da Função de Transferência

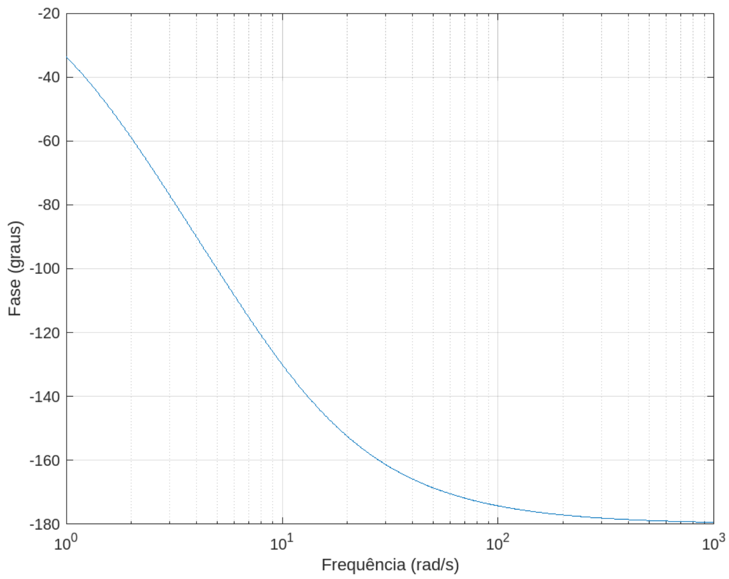


Figura 2: Fase da Função de Transferência

Analisando apenas a parte positiva do gráfico $|H(j\omega)|$ x $Frequencia(\omega)$, percebemos que o módulo de $H(j\omega)$ diminui a medida em que a frequência aumenta, isso se deve pelo fato do módulo da função de transferência ser inversamente proporcional a ω. Tal característica, mostra que existe sim um filtro no circuito, e ele é do tipo "*Filtro Passa-Baixa*".

Agora supondo que o valor de C seja igual a 0.01 F. A função de transferência é alterada para:

$$H(S) = \frac{\frac{1}{0.01\ 0.5}}{S^2 + \frac{5S}{0.5} + \frac{1}{0.01\ 0.5}}$$

$$H(S) = \frac{200}{S^2 + 10S + 200}$$

$$H(S) = \frac{200}{(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 200}$$

Com esta mudança a resposta em frequência do sistema é dada por:

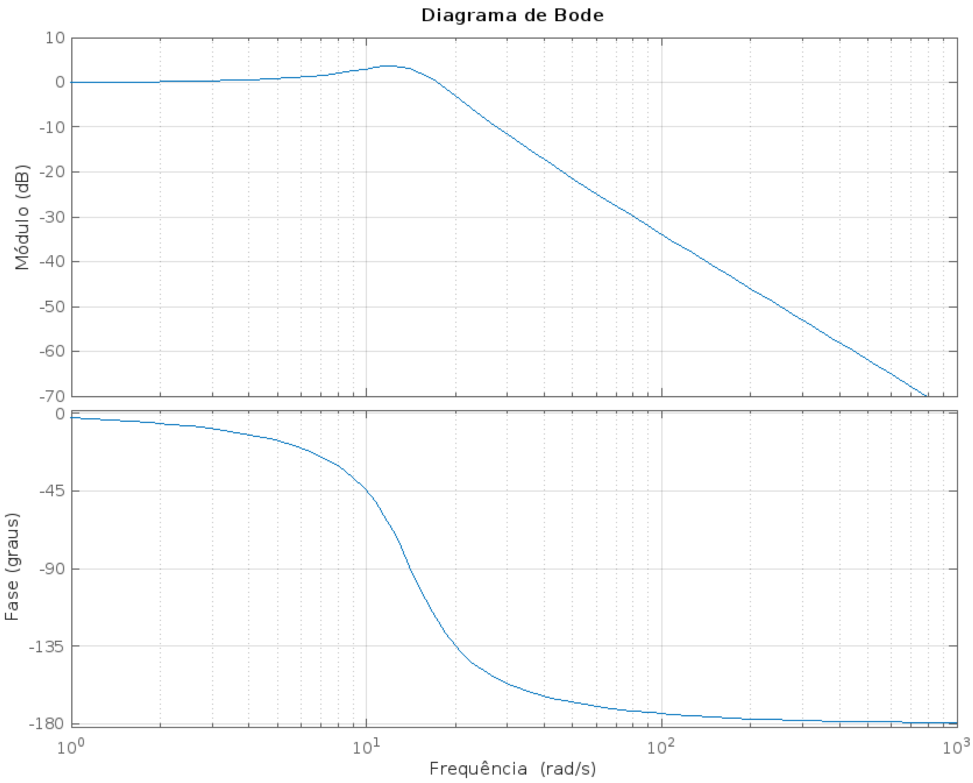


Figura 3: Resposta em frequência com C alterado

Vemos pelo gráfico que o módulo de *H(s)* que se diminuirmos o valor de C o módulo irá demorar mais para decair ao aumentar a frequência. Agora no gráfico de fase a fase demora mais para atingir o ponto de queda, começando a decair mais rápido a partir da frequência 10 rad/s.

2.4 Código MATLAB

Neste trecho do *MATLAB*, definimos a função de transferência $H(j\omega)$ e também o intervalo dos diferentes valores que ω varia.

```
omega = logspace(0, 3, 1000);
H = 16 ./ (-omega.^2 + 10j.*omega + 16);
```

Aqui utilizamos *abs()* e *angle()*, duas funções nativas do *MATLAB*, para calcular o ângulo e o módulo da função de transferência.

```
magnitude_H = abs(H);
fase_H = angle(H);
```

Neste trecho do código geramos o gráfico do módulo de $H(j\omega)$.

```
figure;
semilogx(omega, 20 * log10(magnitude_H));
xlabel('Frequencia (rad/s)');
ylabel('Modulo (dB)');
title('');
grid on;
```

E por fim geramos o gráfico do ângulo de $H(j\omega)$.

```
figure;
semilogx(omega, rad2deg(fase_H));
xlabel('Frequencia (rad/s)');
ylabel('Fase (graus)');
title('');
grid on;
```

3 Conclusão

Nesta projeto saímos um pouco da teoria e vimos como a transformada de laplace pode ser utilizado para compreender e analisar sistemas do mundo real, como um circuito RLC. Aplicando a transformada de laplace em cada um dos componentes foi fundamental para calcular a função de transferência. Com esse estudo é possível concluir que a aplicação da Transformada de Laplace proporcionou uma abordagem prática e eficiente na análise de circuitos RLC, representando uma ferramenta valiosa na compreensão de sistemas do mundo real.

Além disso, a comparação dos resultados dos dois valores de capacitância através do diagrama de Bode viabilizaram uma compreensão mais profunda do sistema e de circuitos RLC. Assim, este projeto não apenas ampliou nosso entendimento teórico, mas também fortaleceu a conexão entre a teoria e a aplicação prática, destacando a importância da transformada de Laplace como uma ferramenta essencial na análise de circuitos elétricos complexos.

4 Referências

Para a realização do trabalho, utilizamos vídeos no *YouTube*, livros acadêmicos, tutoriais da internet.Segue abaixo o endereço web do conteúdo utilizado:

[1] *Como Montar Função de Transferência MATLAB*. 2023. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=fLkyjsO2LyQ&ab_channel=MarcioJr.Lacerda`.

[2] *Documentação Desenho Circuitos LaTeX*. 2023. URL: `https://www.overleaf.com/learn/latex/CircuiTikz_package`.

[3] *Documentação LaTeX*. 2023. URL: `https://www.latex-project.org/help/documentation/`.

[4] *Documentação MATLAB*. 2023. URL: `https://www.mathworks.com/help/?s_tid=mlh_sn_help`.

[5] *Função de Transferência de um Circuito RLC Serie*. 2023. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=SpIoxXQAfXg&ab_channel=SupLucianoMauro`.

[6] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky e S. Nawab Hamid. *Signals and Systems*. 2ª ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997. ISBN: 0-13–814757–4.

Também utilizamos a tecnologia ChatGPT para nos auxiliar no desenvolvimento do relatório e do código, sanando dúvidas exclusivamente relacionadas a sintaxe da linguagem do LaTeX.