Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Trabalho 1

Sinais e Sistemas - ENG1400

Alunos: Leo Land Bairos Lomardo - 2020201
Matheus Valejo Gomes Pereira - 2011536
Lucca Vieira Rocha - 2011342

Professor: Guilherme Torelly

Rio de Janeiro, RJ
Outubro, 2023
Período 2023.2

Conteúdo

Lista de Figuras

1 Introdução

A função de tranferência apresentada abaixo, denotada por *H(Z)* descreve a relação entre a entrada e saída de um sistema dinâmico.

$$H(Z) = \frac{10Z(Z - 0{,}9Z)}{Z^3 - 0{,}8Z^2 - 0{,}25Z + 0{,}2} \tag{1}$$

Esta função de transferência, está presente no domínio $\mathbb{Z}$. A função apresenta coeficientes polinomiais no numerador e no denominador, onde esses coeficientes determinam as propriedades do sistema referente a função de transferência.

Iremos estudar algumas características deste sistema para nos auxiliar a interpretar algumas características do sistema

O nosso relatório está organizado de acordo com a ordem apresentada no documento do trabalho. Nós criamos uma sessão exclusiva para adicionar o código do MATLAB e o *prompt*.

2 Desenvolvimento

2.1 Diagrama de Blocos

Antes de montar o diagrama de blocos, iremos reescrever *H(Z)* em função de *Y(Z)*, afim de facilitar a montagem do diagrama.

$$H(Z) = \frac{10Z^2 - 9Z}{Z^3 - 0{,}8Z^2 - 0{,}25Z + 0{,}2} \tag{2}$$

$$\frac{Y_{(Z)}}{X_{(Z)}} = \frac{10Z^2 - 9Z}{Z^3 - 0{,}8Z^2 - 0{,}25Z + 0{,}2} \tag{3}$$

$$Y_{(Z)}(Z^3 - 0{,}8Z^2 - 0{,}25Z + 0{,}2) = X_{(Z)}(10Z^2 - 9Z) \tag{4}$$

$$Z^3Y_{(Z)} - 0{,}8Z^2Y_{(Z)} - 0{,}25ZY_{(Z)} + 0{,}2Y_{(Z)} = 10Z^2X_{(Z)} - 9ZX_{(Z)} \tag{5}$$

$$Y_{(Z)} = \frac{0{,}8Z^2Y_{(Z)}}{Z^3} + \frac{0{,}25ZY_{(Z)}}{Z^3} - \frac{0{,}2Y_{(Z)}}{Z^3} + \frac{10Z^2X_{(Z)}}{Z^3} - \frac{9ZX_{(Z)}}{Z^3} \tag{6}$$

$$Y_{(Z)} = \frac{0{,}8Y_{(Z)}}{Z} + \frac{0{,}25Y_{(Z)}}{Z^2} - \frac{0{,}2Y_{(Z)}}{Z^3} + \frac{10X_{(Z)}}{Z} - \frac{9X_{(Z)}}{Z^2} \tag{7}$$

Após chegarmos a equação 7, fica mais fácil montar o diagrama de blocos do sistema. Segue abaixo o diagrama de blocos:

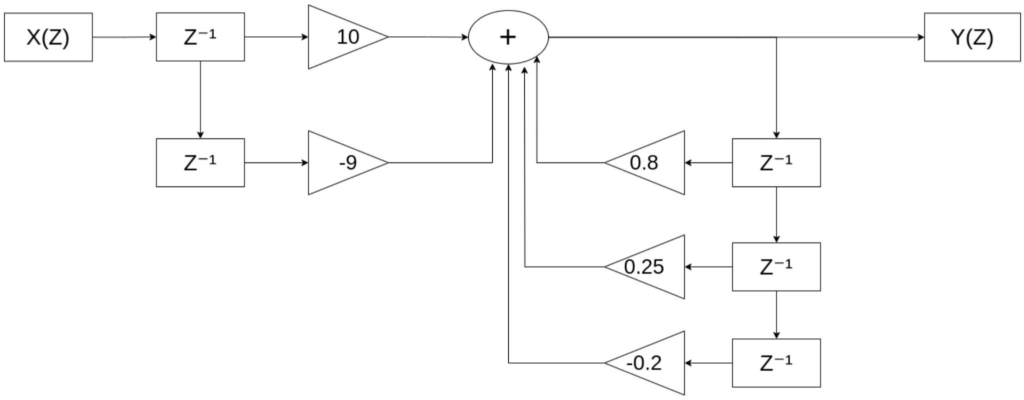

Figura 1: Diagrama de Blocos

2.2 Diagrama de Polos do Sistema

Para montar o diagrama de polos e zeros, tivemos que calcular os Polos e os Zeros do sistema. Utilizamos a fução *roots* do MATLAB para realizar o cálculo.

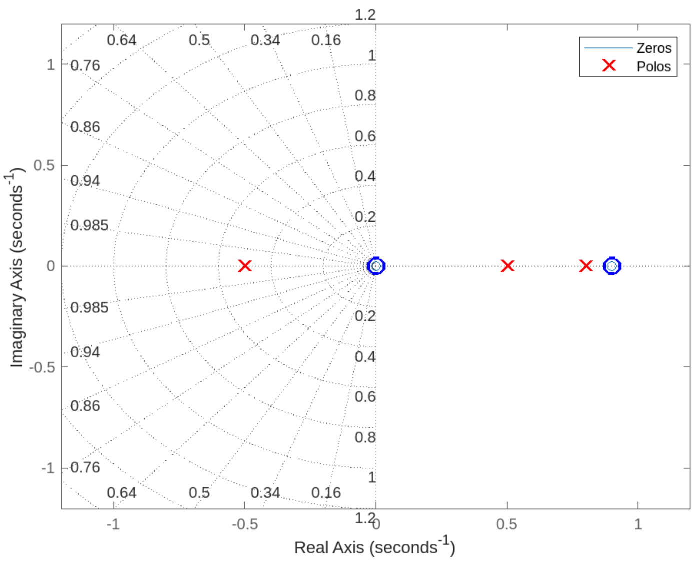

Figura 2: Diagrama de Polos-Zeros

Os valores dos polos e zeros do sistema são:

$$\text{Polos} = [-0{,}50; 0{,}80; 0{,}50]$$
$$\text{Zeros} = [0{,}00; 0{,}90]$$

2.3 Características do Sistema

2.3.1 Causalidade

A causalidade de um sistemas é uma característica relacionada à natureza do sistema em relação ao tempo. Em sistema causal, a resposta do sistema, em qualquer momento, depende apenas das entradas atuais e passadas, mas não das entradas futuras.

Para justificar a causalidade do sistema, realizaremos a transformada Z inversa da função de transferência (7):

$$Y_{(Z)} = \frac{0{,}8Y_{(Z)}}{Z} + \frac{0{,}25Y_{(Z)}}{Z^2} - \frac{0{,}2Y_{(Z)}}{Z^3} + \frac{10X_{(Z)}}{Z} - \frac{9X_{(Z)}}{Z^2} \tag{8}$$

$$y[n] = 0{,}8y[n-1] + 0{,}25y[n-2] - 0{,}2y[n-3] + 10x[n-1] - 9x[n-2] \tag{9}$$

Como se pode perceber na equação (9), todas as entradas dependem apenas de entradas no mesmo instante ou em um instante anterior. Logo, podemos afirmar que o sistema é Causal.

2.3.2 Estabilidade

Para definir se o sistema é Estável ou não, precisamos analisar os valores dos polos do mesmo. Caso todos os polos estejam dentro do círculo unitário(círculo de raio = 1), o sistema é estável.

Neste sistema oberva-se que os todos polos(p) possuem valor $\mid p \mid \leqslant 1$. Logo, o sistema é estável.

2.3.3 Atraso Resposta Impulsional

Na análise da existência de atraso na resposta impulsional do sistema, devemos analisar os valores de $h[0]$ e $h[v]$, onde $h[v] \neq 0$, e $v \neq 0$.

Para calcular os valores $h[0]$ e $h[v]$, precisamos antes realizar a transformada inversa da função de transferência $H(Z)$:

$$H(Z) = \frac{10Z(Z-0{,}9)}{Z^3 - 0{,}8Z^2 - 0{,}25Z + 0{,}2} \tag{10}$$

$$h[n] = 40\frac{(\frac{1}{2})^n}{3} - 140\frac{(\frac{-1}{2})^n}{13} - 100\frac{(\frac{4}{5})^n}{39} \tag{11}$$

Os valores obtidos de $h[n]$ para $n = 0$ e $n = 5$ foram:

$$h[0] = 0 \qquad\qquad h[5] = \frac{-87}{1000} = -0{,}087$$

Como $h[5] \neq 0$, podemos afirmar que há um atraso na resposta impulsional do sistema.

2.4 Respostas do Sistema à Diferentes Entradas

Abaixo podemos observar como o sistema se conmporta a vários tipos de entradas diferentes. Para isto usamos a fórmula da convolução:

$$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{12}$$

- $x_1[\eta] = \delta[\eta]$

  Para começar, usamos como entrada o impulso unitário, sistema que somente no momento que $n = 0$ o sistema terá valor 1, caso contrário o sinal será sempre 0.

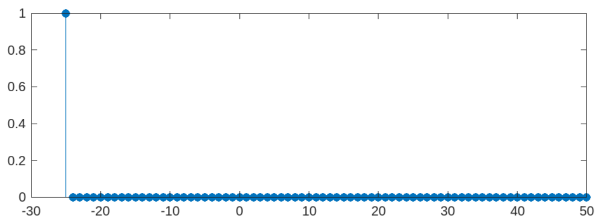

Figura 3: Impulso $x_1[\eta]$

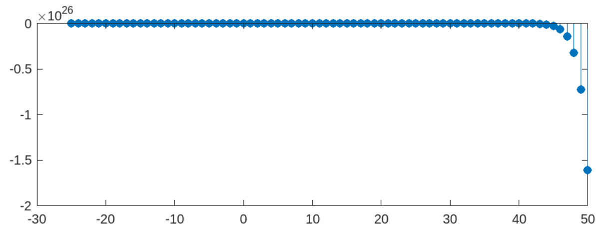

Figura 4: Resposta $x_1[\eta]$

- $x_2[\eta] = u[\eta]$

  Já para x_2, usamos como entrada o degrau unitário, onde para qualquer valor $n \geq 0$, ele tem valor 1.

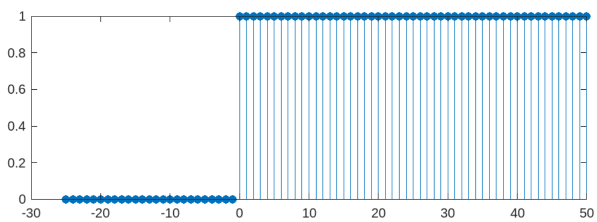

Figura 5: Impulso $x_2[\eta]$

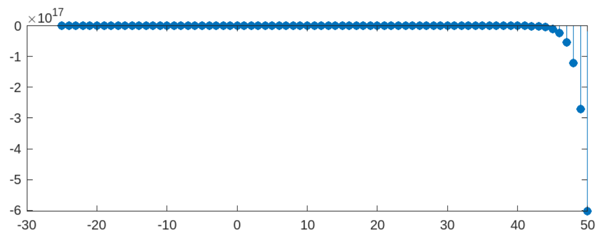

Figura 6: Resposta $x_2[\eta]$

- $x_3[\eta] = 2\delta[\eta] + 3\delta[\eta - 1] - 5\delta[\eta - 2] + 4\delta[\eta - 3] - \delta[\eta - 4]$

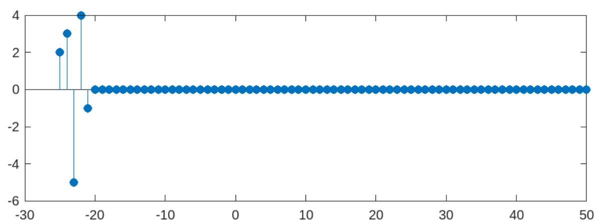

Figura 7: Impulso $x_3[\eta]$

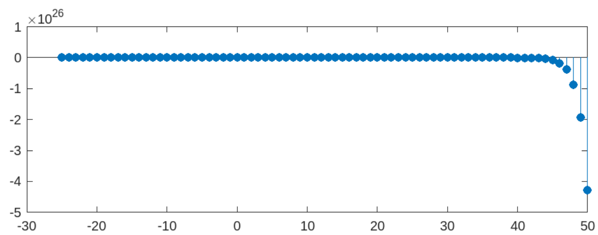

Figura 8: Resposta $x_3[\eta]$

- $x_4[\eta] = \cos(3\eta)u[\eta]$

  Nesta função de entrada, notamos a combinação do produto $\cos(3\eta)$ e da função degrau unitário. Devido à presença do degrau unitário, a função inicia sua oscilação somente a partir de $\eta \geq 0$.

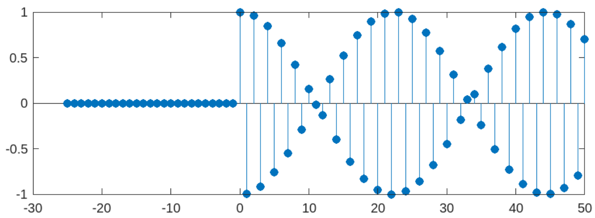

Figura 9: Impulso $x_4[\eta]$

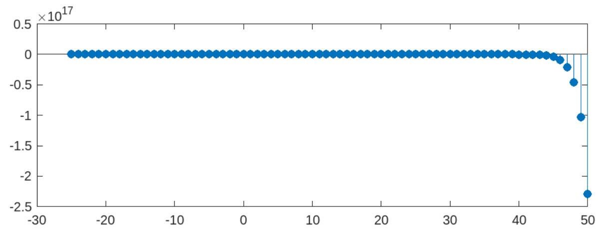

Figura 10: Resposta $x_4[\eta]$

2.5 Código MATLAB

Para dar continuidade ao trabalho, optamos por utilizar a ferramenta *MATLAB*, devido a maior facilidade e suporte, da prórpia ferramenta, para os cálculos que iremos realizar.

2.5.1 Definindo Função de Transferência

```
num = [10, -9, 0];
den = [1, -0.8, -0.25, 0.2];
H = tf(num, den);
poles = roots(den);
zero = roots(num);
```

Na primeira parte inicial do código, definimos os vetores referentes ao numerador e ao denominador da função de transferência, e a prórpia função de transferência. Com essas informações, podemos utilizar a função *roots*, nativa do MATLAB, para calcular os polos e zeros da função.

2.5.2 Transformada Z inversa de H(Z)

```
syms z;
H = (10*z*(z-0.9))/(z^3-0.8*z^2-0.25*z+0.2);
invH = iztrans(H, z);
disp('Transformada Z inversa de H(z):');
disp(invH);
```

Nesse trecho do código, criamos a função resultante da transformada z inversa de $H(Z)$, que chamamos de *invH*.

2.5.3 Atraso Resposta Impulsional

```
inv_H_at_z_0 = subs(inv_H, z, 0);
inv_H_at_z_5 = subs(inv_H, z, 5);
disp('Transformada Z inversa de H(z) com z = 0:');
disp(inv_H_at_z_0);
disp('Transformada Z inversa de H(z) com z = 5:');
disp(inv_H_at_z_5);
```

Agora calculamos os valores de $invH$ para os valores de $z = 0$ e $z = 5$, afim de comentar sobre o atraso na resposta impulsional do sistema.

2.5.4 Definindo Função Degrau Unitário

```
n = -25:50;
u = zeros(size(n));
u(n>=0) = 1;
```

No decorrer do código, precisaremos da função de degrau unitário, e essa parte do código define ela e seu comportamento.

2.5.5 Plot Diagrama de Polos e Zeros

```
figure;
plot(real(poles), imag(poles), 'ro', 'MarkerSize',
    10, 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(real(zeros), imag(zeros), 'bx', 'MarkerSize',
    10, 'LineWidth', 2);
fmt=['Polos =[' repmat(' %0.3f ',1,numel(poles)) '
   ]\n'];
fprintf(fmt,poles);
legend('Polos', 'Zeros');
title('Diagrama de Polos e Zeros');
xlabel('Parte Real');
ylabel('Parte Imaginaria');
axis equal;
grid on;
```

Nesta parte, além de plotar o Diagrama de Polos e Zeros, o código também imprime os valores dos polos, facilitando a identificação dos seus valores.

2.5.6 Estabilidade do Sistema

```
isStable = all(abs(roots(den)) < 1);
if isStable
    disp('O sistema e estavel.');
else
    disp('O sistema  nao e estavel.');
end
```

Para avaliar a estabilidade do sistema, utilizamos uma estrutura condicional simples com o operador lógico *if*. Essa estrutura verifica se todos os valores das raízes do denominador da função de transferência são menores que 1.

Não foi necessário verificar se esses valores também são maiores que -1, uma vez que utilizamos a função *abs* do MATLAB. Essa função calcula os valores absolutos (módulos), garantindo que consideremos apenas o valor numérico das raízes, independentemente de serem positivas ou negativas.

2.5.7 Impulso Unitário

```
x1 = [1; zeros(75,1)];
y1 = lsim(H, x1, n);
figure;
subplot(2, 1, 1);
stem(n, x1, 'filled');
subplot(2, 1, 2);
stem(n, y1, 'filled');
```

A variável x_1 representa um impulso unitário, caracterizado pela presença de um valor 1 na primeira posição e zeros nas demais posições.

A variável y_1 é responsável por armazenar a resposta do sistema quando submetido ao impulso unitário x_1.

Neste e nos demais gráficos presentes neste código, fazemos uso da função *stem*, que gera representações visuais por meio de gráficos de hastes.

2.5.8 Degrau Unitário

```
x2 = u;
y2 = lsim(H, x2, n);
figure;
subplot(2, 1, 1);
stem(n, x2, 'filled');
subplot(2, 1, 2);
stem(n, y2, 'filled');
```

2.5.9 Trem de Impulsos

```
x3 = [2; 3; -5; 4; -1; zeros(71, 1)];
y3 = lsim(H, x3, n);
figure;
subplot(2, 1, 1);
stem(n, x3, 'filled');
subplot(2, 1, 2);
stem(n, y3, 'filled');
```

Nesse código, x_3 é a varíavel que contém o vetor representando o trem de impulso. Já a variável y_3 recebe a resposta do sistema que teve como entrada x_3.

No *plot* dos gráficos, em todo o código, aumentamos o limite dos eixos x e y, afim de tornar a visualização melhor.

2.5.10 x4 [n] = cos(3n) u[n]

```
x4 = cos(3 * n) .* u;
y4 = lsim(H, x4, n);
figure;
subplot(2, 1, 1);
stem(n, x4, 'filled');
subplot(2, 1, 2);
stem(n, y4, 'filled');
```

3 Conclusão

Neste projeto, estudamos um sistema definido por uma função de transferência e aprendemos a utilizar o MATLAB e seus comandos para nos auxiliar na visualização e no cálculo das características deste sistema. Observamos que o sistema é causal, estável e apresenta atraso em sua resposta impulsional.

Além de auxiliar no cálculo das características do sistema, o MATLAB também nos ajudou a observar as diferentes respostas do sistema para diversas entradas, o que contribuiu para uma melhor compreensão do trabalho e do conteúdo abordado.

4 Fontes

Para a realização do trabalho, utilizamos vídeos no youtube, livros acadêmicos, tutoriais da internet.Segue abaixo o endereço web do conteúdo utilizado:

- Estabilidade
- Documentação MATLAB
- But what is a convolution?- 3Blue1Brown
- But what is the Fourier Transform? A visual introduction.- 3Blue1Brown
- Como montar uma função de transferência no Matlab.
- Sinais e Sistemas - Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky
- Documentação LaTeX

Também utilizamos a tecnologia ChatGPT para nos auxiliar no desenvolvimento do relatório e do código, sanando dúvidas exclusivamente relacionadas a sintaxe da linguagem do *LaTeX*.