INF1608 – Análise Numérica

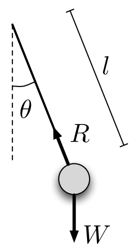
Projeto: Movimento de um Pêndulo

Leonardo Quatrin Campagnolo

lquatrin@tecgraf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Descrição



Considere um pêndulo simples como o mostrado na figura. O corpo de peso W está preso a uma haste sem peso de comprimento l. As únicas forças atuantes no corpo são seu peso e a tensão R na haste. A posição do corpo em qualquer instante é expresso pelo ângulo θ. A equação diferencial de segunda ordem que rege o movimento do pêndulo é:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

onde g representa a aceleração da gravidade. A solução desta equação exige o uso de um método numérico.

Se considerarmos que θ é pequeno, podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$, e então ficamos com a equação diferencial:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Esta equação simplificada tem solução analítica simples:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Neste caso, o período (tempo necessário para o pêndulo completar um ciclo) é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Tarefa

O objetivo deste trabalho é usar o método Runge-Kutta de ordem 4, *com passo adaptativo*, para resolver a equação diferencial original e comparar os resultados com os obtidos através da simplificação de linearização da expressão. Deve-se usar passo adaptativo, limitando o erro local de cada passo em $\epsilon = 10^{-5}$. Pode-se usar a estratégia de dobrar o passo ou usar o método acoplado de Runge-Kutta para avaliar o erro. Numa primeira etapa, deve-se usar passo constante para validação do sistema.

Para diferentes valores de θ_0, plote o gráfico de $\theta \times t$ de um ciclo completo, considerando a solução numérica e a solução analítica aproximada. Calcule também o valor do período T do ciclo. Confirme que a solução simplificada só é uma boa aproximação para ângulos pequenos.

Para calcular numericamente o valor do período, pode-se monitorar a mudança de sinal da velocidade. Por exemplo, se no tempo t_1 a velocidade for v_1 e no tempo t_2 a velocidade for v_2 com $v_1 \cdot v_2 <= 0$, então o período pode ser estimado por interpolação linear:

$$T = 2\left[t_1 + \frac{|v_1|}{|v_1| + |v_2|}(t_2 - t_1)\right]$$

Para aumentar a precisão, pode-se medir o tempo da, por exemplo, décima inversão da velocidade, e calcular o tempo de dez períodos, e então achar o tempo de um período.

Análise

Ao desenvolver seu trabalho e testá-lo, procure, baseado em experimentos computacionais, responder as seguintes perguntas:

- Faça um comparativo do valor do período calculado e do número de passos, para diferentes ângulos iniciais θ_0:
  - Considerando a solução analítica simplificada
  - Considerando um passo constante: $h = 0.01$
  - Considerando um passo constante: $h = 0.001$
  - Considerando um passo constante: $h = 0.0001$
  - Considerando o uso de passo adaptativo
- Baseado no seu experimento, qual o ângulo inicial θ_0 máximo para que a fórmula simplificada reporte um período com erro menor que 0.001?
- Qual o tempo de execução da simulação para 10 períodos considerando as diferentes estratégias de passo listadas no item do quadro comparativo?
- Seu sistema executa em tempo real? Isto é, você itera o sistema em tempo físico menor que o passo de integração usado?