Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior Física Matemáticas

Ingienería Matemática

Métodos Númericos l

Grupo:3MM1

Fórmulario
Unidad l

Fecha de entrega: 23 de Marzo de 2023

Profesor:

Mendel Esquivel Ricardo

Alumno:

Valencia Gallegos Leonardo Pavel

Índice

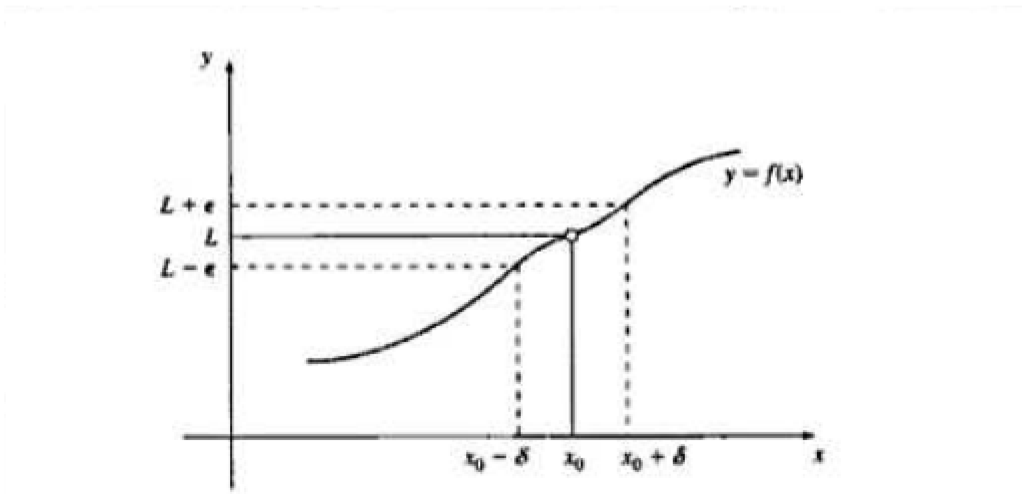
1. Límites

1.1. Definición 1

Una función f definida en un conjunto X de números reales tiene el límite L en x_0, denotado por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si, dado cualquier número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que
$| f(x) - L |< \epsilon$, siempre que $x \in X$ y $0 <| x - x_0 |< \delta$



1.2. Definición 2

Sea f una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$. Enonces f es **continua** en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La función f es continua en el conjunto X si es continua en cada número de X.

1.3. Definición 3

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e una sucesión infinita de números reales. La sucesión converge a un número x (el limite si $\forall \epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que $n > N(\epsilon)$ implica $| X_n - x |< \epsilon$)

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Significa que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

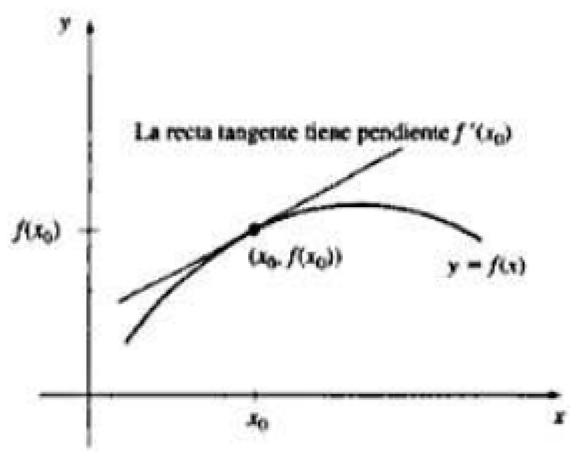
1.4. Definición 4

Si f es una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes
a. f es continua en x_0
b. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en x que converge a x_0, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

1.5. Teorema 1

Sea f una dunción definida en un intervalo abiero que contiene a x_0. La función f es **derivable** en x_0 si

$$f\,'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}$$

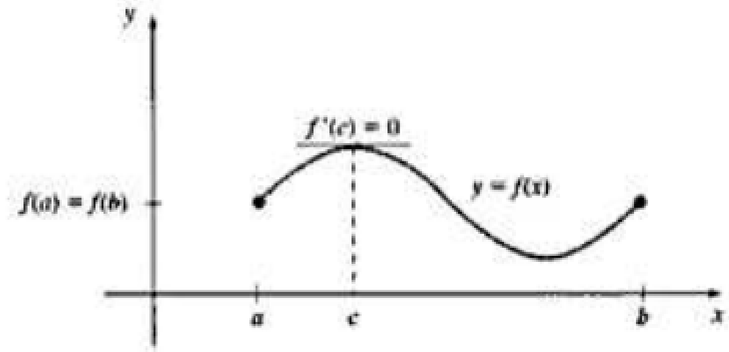


1.6. Teorema 2

Si la función f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

1.7. Teorema de Rolle

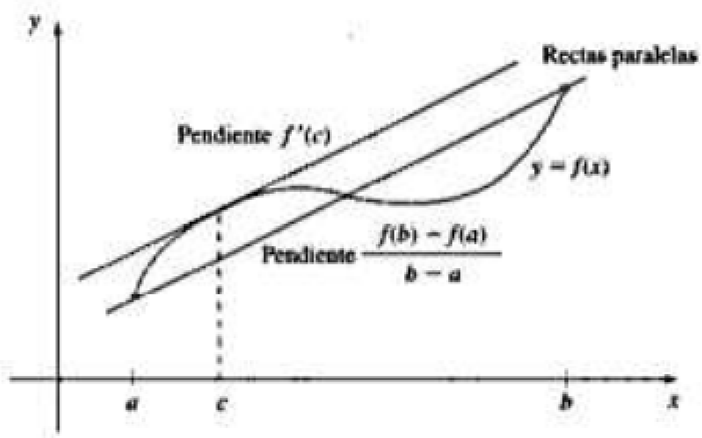
Suponga que $f \in C[a, b]$ y que f es derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f\,'(c) = 0$



1.8. Teorema del valor medio

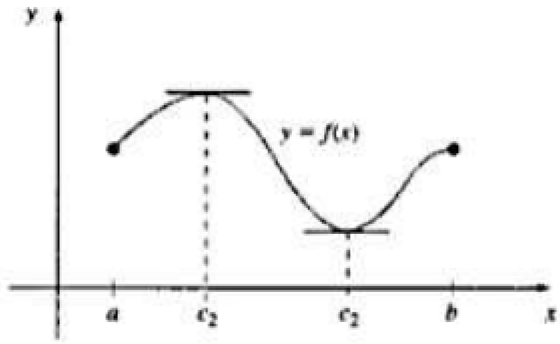
Si $f \in C[a,b]$ y f es derivable en (a,b), entonces existe un número c en (a,b) tal que

$$f´(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



1.9. Teorema de los valores extremos

Si $f \in C[a,b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para toda $x \in [a,b]$. Además si f es derivable en (a,b), entonces los números c_1 y c_2 aparecen en los extremos de $[a,b]$, o bien donde se anula $f´$.

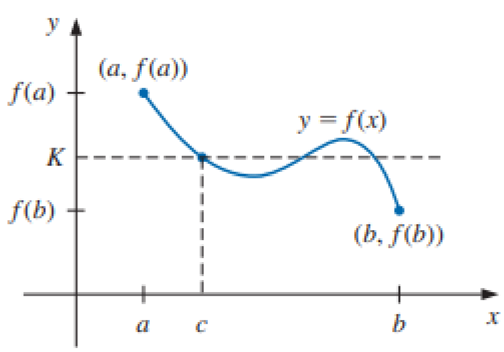


1.10. Teorema generalizado de Rolle

Suponga que $f \in C[a,b]$ en n veces difenciable en (a,b). Si $f(x) = 0$ en los $n+1$ números distintos a $a \leq x_0 < x_1 \ldots x_n \leq b$, entonces un número c en (x_0, x) y, por lo tanto , en (a,b) existe con $f^{(n)}(c) = 0$.

1.11. Teorema del valor intermedio

Si $f \in C[a,b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a,b) para el cual $f(c) = K$.



1.12. Teorema de Taylor

Suponga que $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ existe en $[a,b]$, y $x_0 \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$. existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x con

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f\,'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

y

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

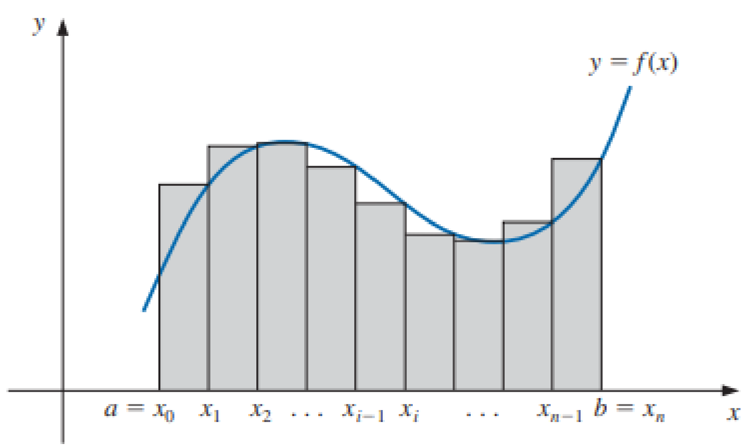
2. Integrales

2.1. Definición: Integral de Riemann

La integral de Riemann de la función f en el intervalo [a,b] es el siguiente límite, si éxiste:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{máx \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

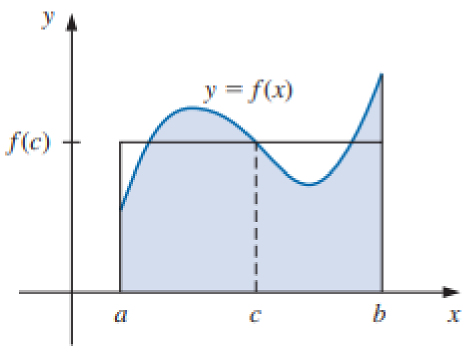
donde los números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ satisfacen $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, y z_i se selecciona de manera arbitraria en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



2.2. Teorema del valor promedio para integrales

Suponga que $f \in C[a,b]$, la integral de Rienmann de g existe en $[a,b]$, y $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$. Entonces existe un número c en (a,b) con

$$\int_a^b f(x)\dot{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\dot{d}x$$



Referencias

[1] Richard L. Burden, J. D. F. y. A. M. B. (2005). Análisis numérico.