Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior Física Matemáticas

Ingienería Matemática

Métodos Númericos l

Grupo:3MM1

Fórmulario
Unidad l

Fecha de entrega: 05 de Abril de 2023

Profesor:

Mendel Esquivel Ricardo

Alumno:

Valencia Gallegos Leonardo Pavel

Índice

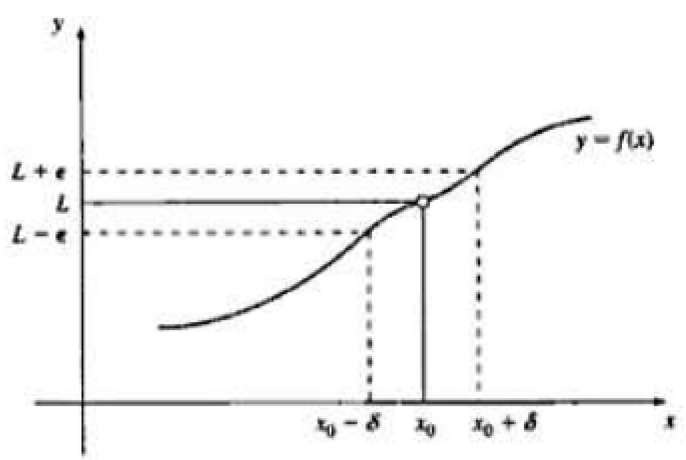
1. Límites

1.1. Definición 1

Una función f definida en un conjunto X de números reales tiene el límite L en x_0, denotado por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si, dado cualquier número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$, siempre que $x \in X$ y $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$



1.2. Definición 2

Sea f una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$. Enonces f es **continua** en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La función f es continua en el conjunto X si es continua en cada número de X.

1.3. Definición 3

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e una sucesión infinita de números reales. La sucesión converge a un número x (el limite si $\forall \epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que $n > N(\epsilon)$ implica $\mid X_n - x \mid < \epsilon$)

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Significa que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

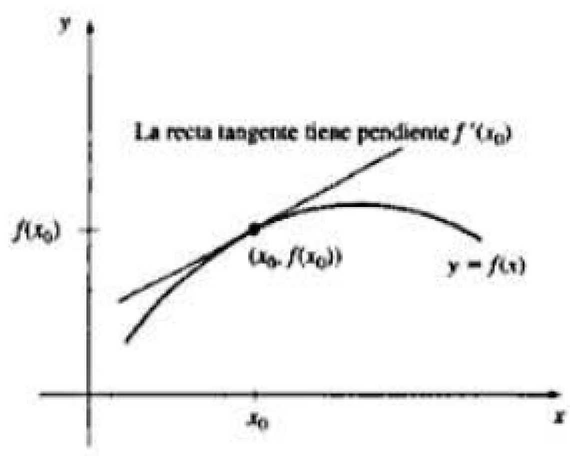
1.4. Definición 4

Si f es una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes
a. f es continua en x_0
b. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en x que converge a x_0, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

1.5. Teorema 1

Sea f una dunción definida en un intervalo abiero que contiene a x_0. La función f es **derivable** en x_0 si

$$f\,'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}$$

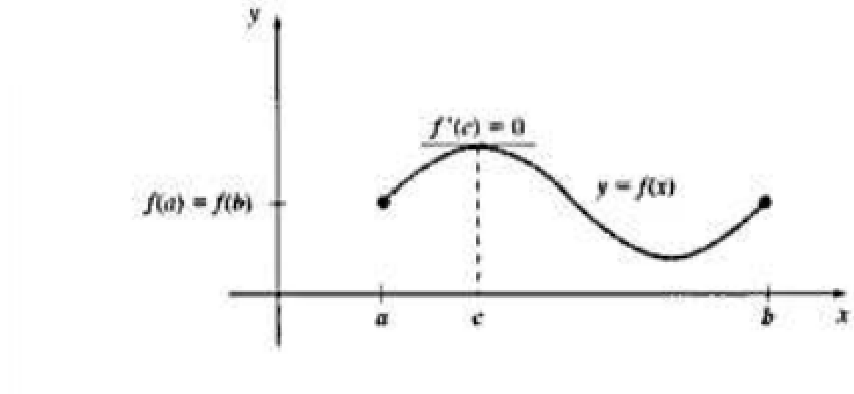


1.6. Teorema 2

Si la función f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

1.7. Teorema de Rolle

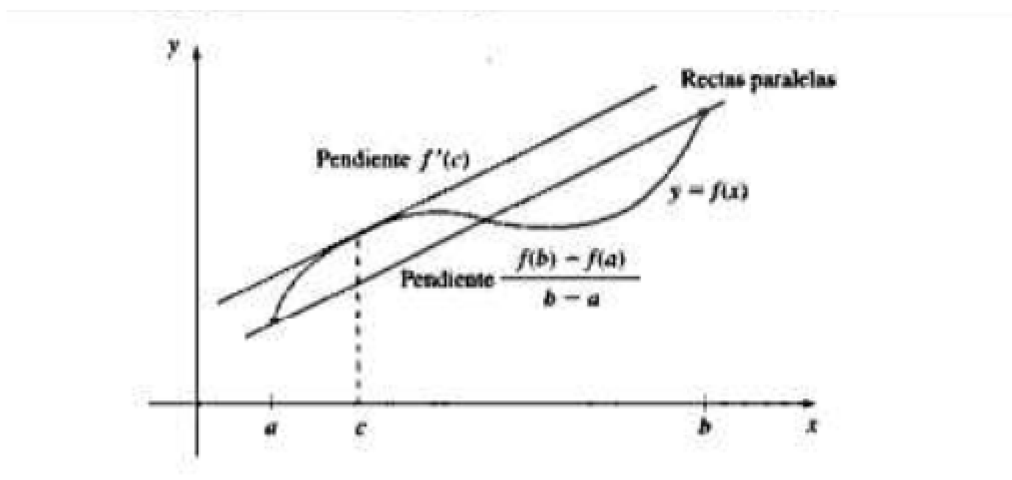
Suponga que $f \in C[a,b]$ y que f es derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número c en (a,b) tal que $f\,'(c) = 0$



1.8. Teorema del valor medio

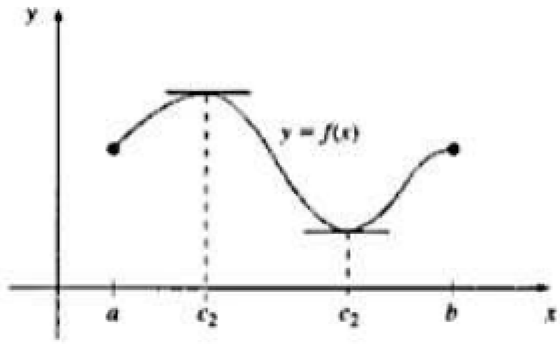
Si $f \in C[a, b]$ y f es derivable en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



1.9. Teorema de los valores extremos

Si $f \in C[a, b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a, b]$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para toda $x \in [a, b]$. Además si f es derivable en (a, b), entonces los números c_1 y c_2 aparecen en los extremos de $[a, b]$, o bien donde se anula $f\,'$.

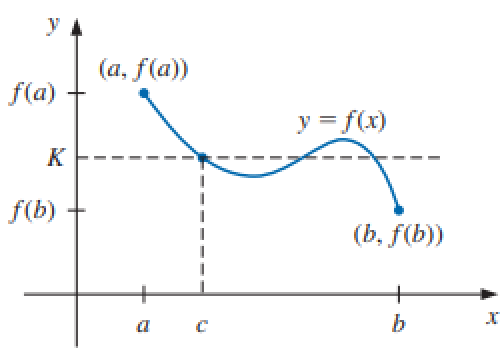


1.10. Teorema generalizado de Rolle

Suponga que $f \in C[a,b]$ en n veces difenciable en (a,b). Si $f(x)=0$ en los $n+1$ números distintos a $a \leq x_0 < x_1 \dots x_n \leq b$, entonces un número c en (x_0, x) y, por lo tanto , en (a,b) existe con $f^{(n)}(c)=0$.

1.11. Teorema del valor intermedio

Si $f \in C[a,b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a,b) para el cual $f(c)=K$.



1.12. Teorema de Taylor

Suponga que $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ existe en $[a,b]$, y $x_0 \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$. existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x con

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

y

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

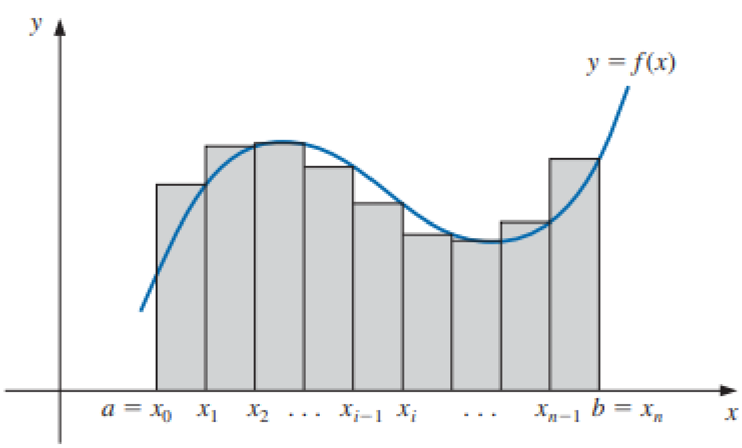
2. Integrales

2.1. Definición: Integral de Riemann

La integral de Riemann de la función f en el intervalo [a,b] es el siguiente límite, si éxiste:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{máx \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

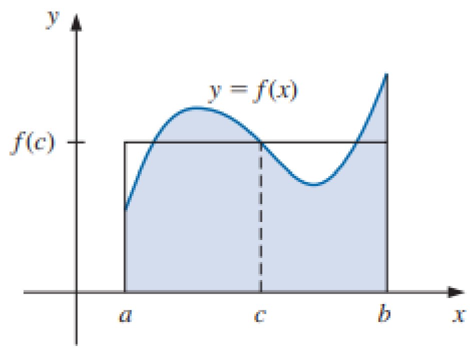
donde los números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ satisfacen $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, y z_i se selecciona de manera arbitraria en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



2.2. Teorema del valor promedio para integrales

Suponga que $f \in C[a,b]$, la integral de Rienmann de g existe en $[a,b]$, y $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$. Entonces existe un número c en (a,b) con

$$\int_a^b f(x)\dot{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\dot{d}x$$



3. Definiciones y Teoremas

3.1. Método de bisección

Para comenzar, sea $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y sea p_1 es el punto medio de $[a,b]$, es decir.

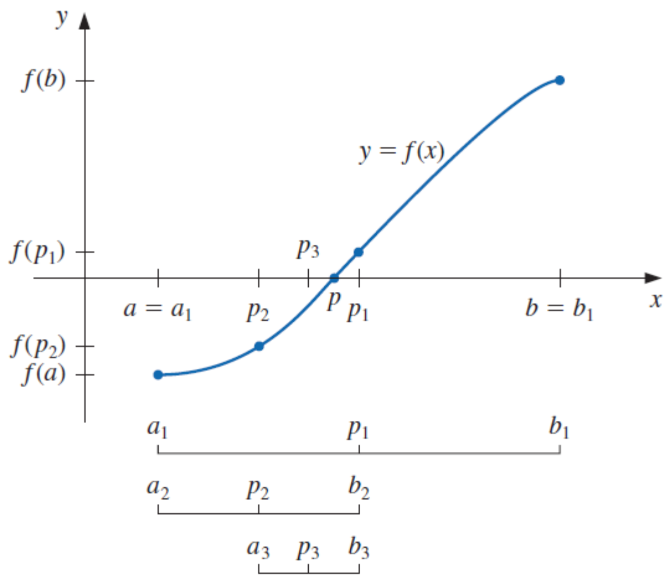
$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_2}{2}$$

.

Si $f(p_1) = 0$, entonces $p = p_1$ y terminamos.
Si $f(p_i) \neq 0$, entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que ya sea $f(a_1)$ o $f(b_1)$.

- Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, $p \in (p_1, b_1)$. Sea $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$.
- Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el signos opuestos, $p \in (p_1, b_1)$. Sea $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$.

Entonces, volvemos a aplicar el proceso al intervalo $[a_2, b_2]$.



3.2. Tipo de errores

Sea x_0 el valor aproximado de x_T, entonces se define:

Error absoluto: $e_a = \mid x_T - x_a \mid$

Error relativo: $e_t = \mid \frac{x_T - x_a}{x_T} \mid$

Error porcentual: $e_p = \mid \frac{x_T - x_a}{x_T} \mid \times 100\,\%$

3.3. Definición

Sea $\{x_n\}$ una secuencia sucesiva de aproximaciones a la raìz α de la ecuación $f(x) = 0$
El error ϵ_n de la n-ésima iteración está definido por:

$$\epsilon_n = \alpha - x_n$$

Definimos:

$$\ell_n = x_{n+1} - x_n = \epsilon_n - \epsilon_{n+1}$$

Como una aproximación de ϵ_n
El proceso de iteración converge si y sólo si $\epsilon_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$

3.4. Definición Orden de convergencia

Si un método iterativo converge y existem dos constantes $p \geq 1$ y $c \geq 0$ tales que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^p} \right| = c$$

entonces p se llama orden de convergencia del método y c es la constante de error asintótico

3.5. Definición

Por definición: $\mid \epsilon_n \mid = \mid \alpha - x_n \mid$
y notamos que: $\mid \alpha - x_n \mid \leqslant \mid b_n - a_n \mid$ y $\mid b_n - a_n \mid = \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2} = \frac{|b_{n-2} - a_{n-2}|}{2} = \ldots = \frac{|b_0 - a_0|}{2}$
por lo tanto

$$\mid \epsilon_n \mid \leqslant \frac{\mid b_0 - a_0 \mid}{2^n}$$

luego

$$\mid \epsilon_{n+1} \mid \leqslant \frac{\mid b_0 - a_0 \mid}{2^{n+1}}$$

Así:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\mid \epsilon_{n+1} \mid}{\mid \epsilon_n \mid} \cong \frac{1}{2}$$

$\therefore$ El orden de convergencia del método de bisección es 1

3.6. Definición Iteración de punto fijo

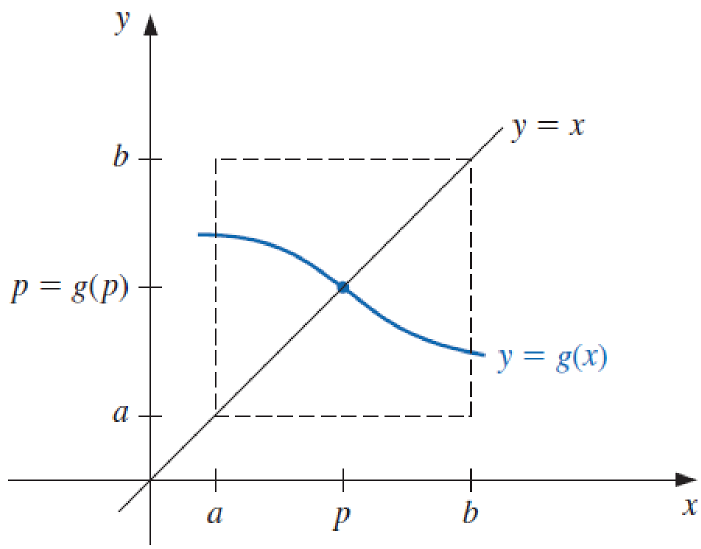
Si el número p es un **punto fijo** para una función dada g si $g(p) = p$.

3.7. Teorema

El siguiente teorema proporciona suficientes condiciones para la existencia y unicidad de un punto fijo.
i) Si $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]$ para todas $x \in [a,b]$, entonces g tiene por lo menos un punto fijo en $[a,b]$.
ii) Si, además, $g'(x)$ existe en (a,b) y hay una constante positiva $k < 1$ con

$$| g'(x) | \geq k, \text{ para todas las } x \in (a, b)$$

entonces, existe exactamente un punto fijo en $[a, b]$



Referencias

[1] Richard L. Burden, J. D. F. y. A. M. B. (2005). Análisis numérico.