

# Sillage et traînée

**But du TP** : visualiser l'écoulement autour et en aval d'un cylindre, utiliser un moyen de mesure de vitesse classique, le tube de Pitot, puis mobiliser les notions de mécanique des fluides abordées au semestre S5 pour mesurer la force de traînée s'exerçant sur le cylindre.

## 1 Écoulement autour d'un cylindre

La physique de l'écoulement autour d'un cylindre est essentiellement gouvernée par la valeur du nombre de Reynolds,  $Re_D$ , construit pour cet écoulement en utilisant respectivement comme longueur et vitesse de référence le diamètre  $D$  du cylindre et la vitesse  $U_\infty$  relevée à grande distance en amont du cylindre, soit :

$$Re_D = \frac{\rho D U_\infty}{\mu}. \quad (1)$$

L'augmentation du nombre de Reynolds conduit à l'observation de différentes topologies d'écoulement de complexité croissante, comme l'illustre la figure 1. Lorsque les effets visqueux dominent les effets d'inertie (écoulement de Stokes,  $Re_D \ll 1$ ), les écoulements amont et aval sont symétriques par rapport à l'axe vertical du cylindre (figure 1(a)). Cette symétrie est perdue lorsque l'inertie devient prépondérante, conduisant à un resserrement des lignes de courant en amont du cylindre et, au contraire, à un espacement en aval (figure 1(b)).

Si l'inertie augmente encore, le fluide n'est plus capable de suivre la courbure de la paroi en aval du point d'épaisseur maximum, conduisant à un décollement de la couche limite se développant depuis le point d'arrêt amont. Cela se traduit par l'apparition d'une zone de recirculation (ou zone d'eau morte) composée de deux tourbillons contrarotatifs symétriques par rapport à l'axe horizontal du cylindre (figure 1(c)).

Pour  $Re_D \gtrsim 50$ , cette symétrie disparaît et l'écoulement devient instationnaire, avec des croissance puis éjection vers l'aval alternativement des tourbillons supérieurs et inférieurs (figure 1(d)).

Ces tourbillons ont une taille du même ordre de grandeur que le diamètre  $D$  et sont émis selon une fréquence dépendant principalement de  $D$  et  $U_\infty$ , avec :

$$f_{\text{émission}} \simeq 0,198 \left( 1 - \frac{19,7}{Re_D} \right) \frac{U_\infty}{D}. \quad (2)$$

Une fois émis, ils sont entraînés vers l'aval par l'écoulement contournant le cylindre avec une vitesse  $U_{\text{convection}} \simeq 0,85 U_\infty$ . Comme la durée de vie de ces tourbillons est grande devant la période d'émission, il se forme dans le sillage du cylindre une succession de tourbillons se déplaçant vers l'aval, appelée allée de Bénard-von Kármán.

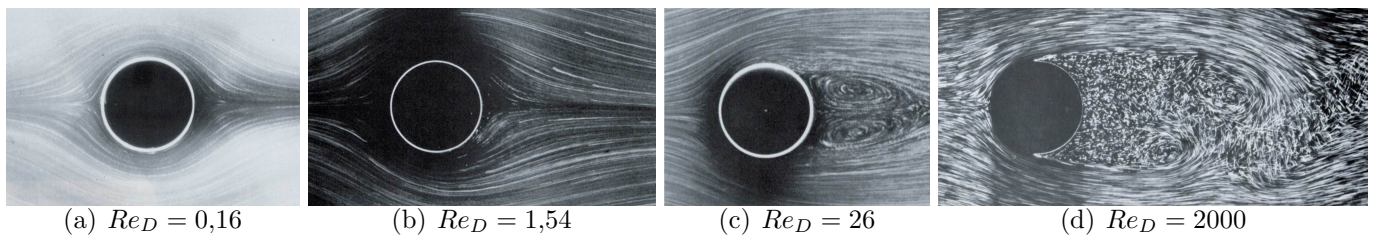
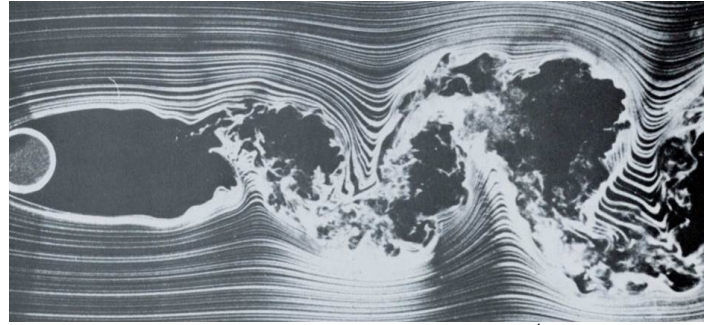


FIGURE 1 – Évolution de l'écoulement autour d'un cylindre en fonction du nombre de Reynolds. Repris de Van Dyke [1].



(a) régime laminaire ( $Re_D = 2.10^2$ )



(b) régime turbulent ( $Re_D = 10^4$ )

FIGURE 2 – Allée tourbillonnaire de Bénard–von Kármán. Repris de de Van Dyke [1].

Lorsque le sillage du cylindre reste laminaire et bidimensionnel, cette allée présente une organisation très régulière, comme le montre la figure 2(a). Cette organisation perdure sous une forme plus chaotique lorsque le  $Re_D$  continue à augmenter et que le sillage devient turbulent et donc tridimensionnel (figure 2(b)).

## 2 Force et coefficient de traînée

Les tourbillons émis dans le sillage du cylindre induisent des variations des efforts exercés par l'écoulement sur le cylindre. Ces efforts sont donc instationnaires et fluctuent en temps avec une fréquence fondamentale égale à celle de l'émission des tourbillons. Même si le caractère instationnaire des efforts peut avoir des conséquences importantes<sup>1</sup>, il est souvent suffisant pour l'ingénieur de considérer la valeur *moyenne* au cours du temps de ces efforts.

Dans le cas de la force exercée dans la direction normale à l'écoulement, appelée portance, cette valeur moyenne est nulle, car l'émission des tourbillons se produit alternativement au-dessus et en dessous de l'axe horizontal du cylindre (figure 2(a)). En effet, à chaque instant  $t$  pour lequel un tourbillon induit une force dont la composante normale est orientée vers le haut, il est possible d'associer un instant  $t' \simeq t + \frac{1}{2f_{\text{émission}}}$  auquel un tourbillon symétrique du précédent par rapport à l'axe horizontal du cylindre va induire une force de composante normale de même valeur absolue, mais orientée vers le bas.

En revanche, la force induite sur le cylindre par les tourbillons a une projection dans la direction de l'écoulement de valeur égale aux instants  $t$  et  $t'$ . Cette force  $T$ , dite de force de traînée, n'est donc pas à moyenne temporelle nulle. Une analyse dimensionnelle du problème permet de montrer que :

$$\frac{T}{\rho U_\infty^2 D^2} = f\left(\frac{\rho D U_\infty}{\mu}, \frac{D}{L}\right), \quad (3)$$

$L$  désignant la longueur du cylindre. L'écoulement considéré étant bidimensionnel, soit directement (sillage laminaire), soit en moyenne temporelle (sillage turbulent), le rapport d'aspect  $L/D$  n'a pas d'influence sur sa dynamique et n'est qu'un paramètre purement géométrique, ce qui permet de réécrire 3 comme :

$$T = \rho U_\infty^2 D L \times f(Re_D) \quad (4)$$

où le produit  $D L$  correspond à la surface du cylindre projetée dans le plan perpendiculaire à l'écoulement : le maître couple. Pour définir le coefficient de traînée  $C_x$ , on rajoute un facteur  $\frac{1}{2}$  à la normalisation pour que celle-ci corresponde à la force qui serait exercée sur le maître couple par la

1. Par exemple dans le cas de tours de grande hauteur soumises à un fort vent, lorsque la fréquence des tourbillons de sillage s'accorde avec une fréquence propre de la structure, conduisant à des déplacements de grande amplitude au sommet.

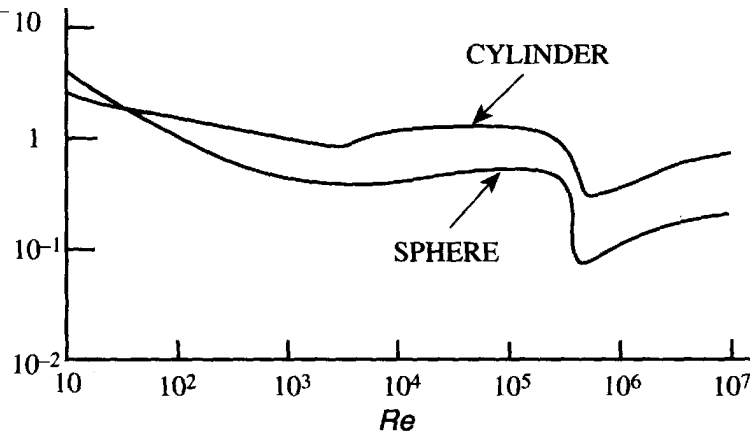


FIGURE 3 – Évolution du coefficient de traînée  $C_x$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_D$ .

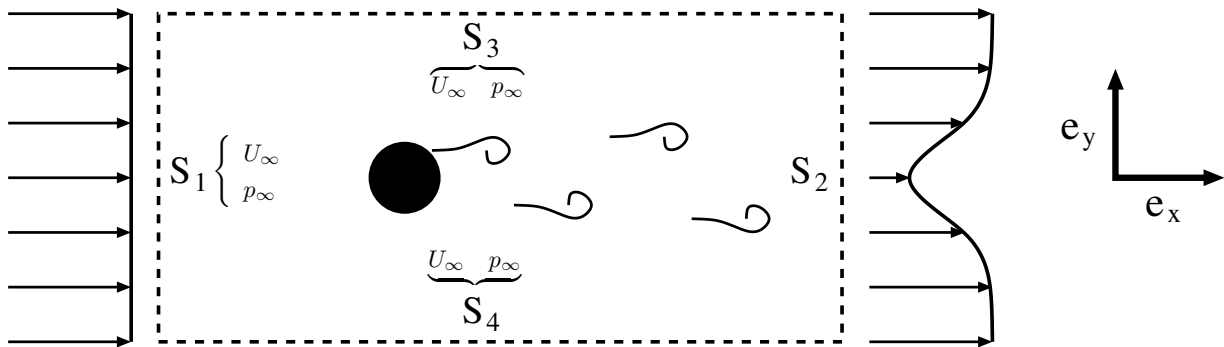


FIGURE 4 – Volume de contrôle avec indication des valeurs de la composante longitudinale  $U_x$  de la vitesse et de la pression  $p$  aux frontières.

pression dynamique de l'écoulement, soit :

$$C_x = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L} = f(Re_D) \quad (5)$$

L'évolution du coefficient de traînée  $C_x$  en fonction du seul paramètre  $Re_D$  dont il dépend est tracée en figure 3. On y constate en particulier que le coefficient présente une valeur quasi-constante d'environ 1,3 sur une plage de nombre de Reynolds relativement large allant de  $8 \cdot 10^3$  à  $2 \cdot 10^5$ .

### 3 Mesure de la traînée

Le moyen le plus direct de mesurer les efforts s'exerçant sur le cylindre est de relier celui-ci à une balance d'efforts (ou balance aérodynamique). Un tel dispositif est relativement complexe à mettre en œuvre, en particulier en ce qui concerne la séparation des différentes composantes des efforts. Il est souvent plus simple de recourir à une mesure indirecte à partir de la mesure du champ de vitesse en aval du cylindre en appliquant du théorème de conservation de la quantité de mouvement à un volume de contrôle bien choisi englobant le cylindre. Un tel volume de contrôle est illustré à la figure 4.

En régime instationnaire, l'équation de conservation de la quantité de mouvement n'est valable que pour des grandeurs instantanées (mesurées à un instant donné  $t$ ), alors que l'on cherche à obtenir une valeur moyenne des efforts exercés sur le cylindre. Il faut donc calculer une moyenne temporelle de chacun des termes de l'équation de quantité de mouvement. Comme l'écoulement est en moyenne bidimensionnel, il suffit de considérer un volume de contrôle également bidimensionnel : les efforts ainsi calculés sont alors des efforts par unité de longueur du cylindre.

De plus, cette opération de moyenne fait disparaître le terme volumique instationnaire  $\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{U}) dV$ . Elle introduit cependant des termes supplémentaires dans l'intégrale de surface. L'analyse de ces

termes dépasse de loin le cadre de ce TP, mais il est possible de montrer que si les surfaces  $S_2$  à  $S_4$  sont situées à une distance suffisante du cylindre, ces termes deviennent négligeables.

En projetant l'équation obtenue sur l'axe  $\vec{e}_x$  correspondant à l'orientation de l'écoulement en amont du cylindre, on obtient l'équation reliant la traînée moyenne par unité de longueur de cylindre  $T$  aux valeurs des vitesses et pression moyenne aux frontières du domaine de contrôle :

$$T = - \iint_{\cup_{i=1}^4 S_i} \rho U_x (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS - \iint_{\cup_{i=1}^4 S_i} p \vec{n} \cdot \vec{e}_x dS \quad (6)$$

Pour peu que les surfaces  $S_1$ ,  $S_3$  et  $S_4$  soient situées à grande distance du cylindre, on a sur ces surfaces  $U_x = U_\infty$ . De même, la pression sur ces surfaces est égale à la pression amont  $p_\infty$ . La force de traînée peut donc être calculée à partir des seules distributions de vitesse et de pression sur la surface  $S_2$ . Il reste alors à obtenir ces dernières pour pouvoir calculer la traînée à partir des seules mesures de vitesse.

Le théorème de Bernoulli constitue la méthode habituelle pour relier la vitesse à la pression. Cependant, dans la zone de sillage du cylindre<sup>2</sup>, il n'est pas possible de l'appliquer, car l'écoulement n'y est ni irrotationnel, ni stationnaire, ce qui contredit les hypothèses du théorème respectivement sous ses formes instationnaire et stationnaire.

En revanche, une analyse en ordre de grandeur des équations de Navier-Stokes<sup>3</sup> permet de montrer que si la surface  $S_2$  est située loin en aval du cylindre (de l'ordre de 25 diamètres ou plus), la pression y est constante. La continuité de pression aux jonctions  $S_2/S_3$  et  $S_2/S_4$  impose donc que  $p = p_\infty$  sur  $S_2$ . Dans ce cas, le second terme de l'équation 6 correspond à l'intégration d'une intégrande constante en norme sur une surface fermée et est donc nul par application du théorème du gradient.

Si la surface  $S_2$  est située à moins de 25 diamètres en aval du cylindre, la pression sur la surface  $S_2$  varie significativement avec  $y$ , avec  $p(y) < p_\infty$ . En tenant compte du fait que le  $\vec{n} \cdot \vec{e}_x = 0$  sur  $S_3$  et  $S_4$ , le second terme de l'équation 6 devient :

$$- \iint_{\cup_{i=1}^4 S_i} p \vec{n} \cdot \vec{e}_x dS = \int_{S_1} p_\infty dy - \int_{S_2} p(y) dy \quad (7)$$

En supposant le fluide incompressible avec  $\rho = Cste$  l'équation 6 se simplifie finalement en :

$$\begin{aligned} T &= \rho \left( \int_{S_1} U_\infty^2 dy - \int_{S_2} U_x(y)^2 dy - \int_{S_3} U_\infty U_y(x) dx + \int_{S_4} U_\infty U_y(x) dx \right) \\ &+ \underbrace{\int_{S_1} p_\infty dy - \int_{S_2} p(y) dy}_{\neq 0, \geq 0 \text{ si } S_2 \text{ proche de l'obstacle}} \end{aligned} \quad (8)$$

Il est alors possible d'utiliser l'équation de conservation de la masse moyenne<sup>4</sup> pour éliminer les intégrales sur  $S_1$ ,  $S_3$  et  $S_4$ . De plus, le théorème de Bernoulli est applicable entre l'amont de la soufflerie et la surface  $S_1$  (écoulement irrotationnel), ce qui permet de calculer  $p_\infty$  en fonction de la pression atmosphérique  $p_{atm}$  et de la vitesse  $U_\infty$ . En posant,

$$\Delta p(y) = p_{atm} - p(y),$$

2. Zone en aval du cylindre présentant un déficit de vitesse par rapport à la vitesse  $U_\infty$ , comme l'illustre le profil de la figure 4 au niveau de la surface  $S_2$ .

3. Hypothèse de couche mince similaire à celle formulée dans le cas d'une couche limite, voir cours de mécanique des fluides du semestre S6.

4. identique à l'équation de conservation de la masse stationnaire si  $\rho = Cste$  :  $\iint_{\cup_{i=1}^4 S_i} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dS = 0$ .

on obtient l'expression de la traînée  $T$  suivante :

$$T = \rho \int_{S_2} U_x(y) \left[ U_\infty - U_x(y) \right] dy + \underbrace{\int_{S_2} \Delta p(y) - \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 dy}_{\neq 0, \geq 0 \text{ si } S_2 \text{ proche de l'obstacle}}$$

Une expression analytique de la fonction  $U_x(y)$  n'est connue que pour des positions aval éloignées du cylindre de plusieurs dizaines de fois son diamètre<sup>5</sup>. Le calcul pratique de l'intégrale dans l'équation 9 pour des surfaces plus proches du cylindre nécessite donc d'avoir recours à une méthode d'intégration numérique comme la méthode des trapèzes.

En supposant  $U_x$  et  $\Delta p$  connues en  $N$  points de la surface  $S_2$  d'altitude  $y_i, i = 1, \dots, N$  avec  $y_{i+1} > y_i$  et en posant :

$$\mathcal{F}_i = \rho U_x(y_i) \left[ U_\infty - U_x(y_i) \right] + \Delta p(y_i),$$

la traînée  $T$  est estimée comme :

$$T \simeq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mathcal{F}_{i+1} + \mathcal{F}_i}{2} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (y_N - y_1) \quad (9)$$

L'approximation 9 sera précise pour peu que l'espacement vertical  $y_{i+1} - y_i$  entre deux mesures soit suffisamment petit dans les régions où le profil de vitesse présente une variation verticale importante, *i. e.* dans la zone de sillage.

La valeur du coefficient de traînée  $C_x$  est finalement obtenue à partir de l'équation 5 avec  $L = 1$  puisque la valeur de  $T$  issue de 9 est exprimée par unité de longueur de cylindre.

## 4 Dispositif expérimental

La soufflerie utilisée pour ce TP est une soufflerie à veine fermée et circuit ouvert (type *Eiffel*) avec une veine d'essai de section rectangulaire égale à  $0,2 \times 0,3 \text{ m}^2$ . L'air est mis en mouvement par un ventilateur situé en aval de la veine d'essai et la vitesse de l'écoulement est stabilisée par un régulateur. La vitesse dans la veine d'essai peut varier sur une plage allant de  $1 \text{ m.s}^{-1}$  à environ  $15 \text{ m.s}^{-1}$  suivant la valeur de tension sélectionnée au niveau du régulateur.

Des cylindres de différents diamètres peuvent être fixés au centre de la veine d'essai, normalement à l'écoulement, au moyen d'une tige cylindrique horizontale traversant la soufflerie latéralement. Une trappe située sur la paroi supérieure de la soufflerie permet d'avoir accès à la veine d'essai pour positionner le cylindre. Cette trappe doit être fermée lorsque des mesures sont effectuées de manière à assurer une bonne qualité d'écoulement dans la veine d'essai.

La soufflerie est équipée d'un dispositif de visualisation des trajectoires des particules fluides par filets de fumée. La fumée est créée par la vaporisation d'un mélange de glycérine et de savon coulant le long d'un fil vertical situé à l'entrée de la veine d'essai et chauffé par effet Joule. Une fente longitudinale en Plexiglas<sup>TM</sup> située sur la paroi inférieure de la soufflerie permet d'éclairer au moyen d'une lampe de forte puissance une fine tranche verticale de l'écoulement centrée sur le plan médian de la veine d'essai.

La soufflerie dispose d'une sonde de vitesse de type Pitot dont la position en aval de la tige de support est fixe, mais qui peut être déplacée verticalement. Ce tube de Pitot est relié à un manomètre différentiel permettant de mesurer :

5. Le profil de la vitesse déficitaire prend alors une forme gaussienne :  $U_\infty - U(y) = \alpha e^{-(\frac{y}{\beta})^2}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  dépendant de  $Re_D$  et de la distance au cylindre.

- la différence entre la pression d'arrêt (extrémité du tube) et la pression statique (corps du tube), utile pour mesurer la vitesse dans l'écoulement,
- la différence entre la pression atmosphérique et la pression statique, utile pour mesurer la pression statique dans l'écoulement.

Un fascicule décrivant les procédures de démarrage/arrêt de la soufflerie et du système de visualisation est déposé à côté du régulateur de vitesse. **Il est essentiel de se conformer scrupuleusement à ces procédures.**

## 5 Travail préparatoire

1. Donner la relation liant la vitesse à la différence entre pressions d'arrêt et statique mesurées par le tube de Pitot.
2. Calculer pour une vitesse d'écoulement  $U_\infty = 1 \text{ m.s}^{-1}$  les nombres de Reynolds dans le cas :
  - d'une tige cylindrique de diamètre  $D = 1 \text{ mm}$ ,
  - d'un cylindre de diamètre  $D = 2,5 \text{ cm}$ .
3. Formuler le théorème de conservation de la masse moyenne (voir la note de bas de page 4. à la page 4) pour le volume de contrôle défini à la figure 4 et multiplier l'équation obtenue par la constante  $U_\infty$ .
4. Utiliser le théorème de Bernoulli entre l'extérieur de la soufflerie et la surface  $S_1$  pour exprimer  $p_\infty$  en fonction de la pression atmosphérique  $p_{atm}$  et de la vitesse  $U_\infty$ .
5. Injecter les résultats des questions 3 et 4 dans l'équation 8 pour retrouver l'équation 9.

## 6 Travail en séance

### 6.1 Visualisation

**En présence de l'enseignant responsable**, démarrer la soufflerie et ajuster le niveau du régulateur de manière à obtenir des tensions affichées comprises entre 0,5 et 1 V), ce qui correspond à une vitesse dans la veine d'essai de l'ordre de  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . Allumer ensuite le système de visualisation et, en enfonçant *très légèrement* le piston de la seringue contenant le mélange à vaporiser, en faire glisser une goutte le long du fil. Visualiser l'écoulement se développant en aval de la tige de fixation cylindrique. Placer ensuite le cylindre de diamètre 2,5 cm et visualiser le nouvel écoulement.

Ces visualisations pourront être analysées par comparaison avec les photographies des figures 1–2 en utilisant les valeurs de  $Re_D$  calculées durant le travail de préparation. On pourra également s'intéresser aux variations d'un cas à l'autre de la taille des tourbillons et de la distance séparant deux tourbillons consécutifs et les relier aux valeurs des diamètres des cylindres, fréquence d'émission et vitesse de convection fournies au paragraphe 1.

### 6.2 Calcul de la traînée

Il est demandé de mesurer une valeur du coefficient de traînée  $C_x$  pour l'un des deux cylindres suivants :

- $D = 2,5 \text{ cm}$ ,
- $D = 3,1 \text{ cm}$ .

Les vitesses sont à sélectionner dans la plage  $[8 \text{ m.s}^{-1}, 12 \text{ m.s}^{-1}]$  pour laquelle l'écoulement dans la veine d'essai présente les meilleures qualités d'homogénéité spatiale et de stabilité temporelle. On adaptera judicieusement la vitesse au diamètre du cylindre de manière à obtenir, au choix, des nombres de Reynolds identiques ou, au contraire, les plus différents possibles. On procédera de la manière suivante pour effectuer la mesure de  $C_x$  :

- En l'absence de cylindre, ajuster la vitesse en faisant varier la tension du régulateur jusqu'à obtenir une mesure par tube de Pitot à mi-hauteur de la veine qui corresponde à la vitesse désirée. On veillera lors des mesures à ce que le tube de Pitot soit toujours bien aligné avec la direction de l'écoulement.
- Toujours en l'absence de cylindre, effectuer quelques relevés de vitesse pour différentes altitudes. Ces valeurs serviront à déterminer, au moyen d'un raisonnement que l'on précisera, la vitesse  $U_\infty$  en amont du cylindre (surface  $S_1$  sur le schéma 4).
- Placer ensuite le cylindre à l'intérieur de la veine d'essai *sans changer la tension du régulateur ni arrêter la soufflerie*. Procéder avec précaution pour que le cylindre ne soit pas entraîné dans la partie avale de la soufflerie, sans oublier de refermer la trappe d'accès après positionnement.
- Relever au long de la surface  $S_2$  les valeurs de vitesse et de pression pour différentes altitudes. On veillera à prendre un nombre de valeurs suffisant dans la région du sillage de manière à représenter correctement la variation de vitesse dans cette zone. L'écoulement étant fortement instationnaire, les valeurs considérées correspondront à une moyenne des valeurs relevées sur quelques secondes.
- Tracer le profil de vitesse déficitaire  $U_\infty - U_x(y)$ .
- Calculer la valeur de la traînée  $T$  puis du coefficient de traînée  $C_x$ .

Les résultats obtenus devront être analysés et discutés à la lumière des informations fournies aux paragraphes 2 et 3, des incertitudes de mesure, des limitations éventuelles du dispositif expérimental et des améliorations qu'il conviendrait d'y apporter.

Une fois la traînée mesurée pour l'un des deux configurations (diamètre  $D$  et vitesse  $U_\infty$ ), estimer *a priori* les coefficient et force de traînée que l'on devrait observer pour l'autre configuration en se servant de la figure 3 puis conclure.

## Références

- [1] M. van Dyke. *An album of fluid motion*. The Parabolic Press, Stanford, California, 1982.