Pregunta 1

Una empresa que produce computadores tiene que definir su plan de producción para satisfacer a sus clientes. Esta empresa fabrica dos productos, computadores de escritorio (PC) y computadores portátiles (Notebooks). La demanda por estos productos para los próximos 4 meses se muestra en la tabla siguiente:

Productos	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
PC	1000	1500	450	850
Notebooks	500	600	1200	650

La capacidad de producción interna de la planta es de 800 PC y 700 Notebooks por mes a un costo de 400US$ y 650US$ respectivamente.

La empresa tiene la alternativa de comprar a proveedores externos todo lo que necesite a un costo de 550US$ y 800US$ por cada PC y Notebook, respectivamente.

Las unidades compradas en un mes se reciben al mes siguiente. Si se quiere que la entrega se realice el mismo mes, los proveedores exigen que el costo se incremente en un 30%. Existe una bodega con capacidad de almacenaje de 200 metros cúbicos.

Un PC embalado ocupa un volumen de 1.4 metros cúbicos, mientras que un Notebook sólo 0.8 metros cúbicos. El costo de mantener en inventario un PC por mes es de 10US$ y 7US$ para un Notebook.

A comienzos del mes 1 existe un inventario de 20 PC's y 15 Notebooks y se quiere terminar el mes 4 con la misma cantidad.

Formule un modelo de PL que le permita a la empresa programar la producción para los próximos 4 meses. Con el objetivo de minimizar los costos a la producción, compra a proveedores y mantenimiento del inventario en cada mes. Defina las variables de decisión que puedan responder a lo siguiente:

¿Cuántos computadores PC y Notebook son producidos mensualmente?

¿Cuántos computadores PC y Notebook son comprados y recibidos en el mismo mes?

¿Cuántos computadores PC y Notebook son comprados en un determinado mes y son recibidos en el siguiente mes?

¿Cuántas unidades en inventario tiene la empresa de computadores y Notebook en cada mes?

No olvide expresar matemáticamente el conjunto de restricciones de balance de inventarios, producción y compra de cada producto en cada mes, así como también el conjunto de restricciones de capacidad de producción para cada mes y las restricciones de dominio de las variables o de no-negatividad.

Definición de variables de decisión

$Para\ cada\ mes\ t = 1{,}2{,}3{,}4$

Producción interna:

$\boldsymbol{x_t^{PC}}$: $número\ de\ PCs\ producidos\ en\ el\ mes\ t$

$\boldsymbol{x_t^{NB}}$: $número\ de\ Notebooks\ producidos\ en\ el\ mes\ t$

Compras externas:

$\boldsymbol{y_t^{PC,imm}}$: $número\ de\ PCs\ comprados\ y\ recibidos$ $\boldsymbol{inmediatamente}$ $en\ el\ mes\ t$

$\boldsymbol{y_t^{PC,del}}$: $número\ de\ PCs\ comprados\ en\ el\ mes\ t\ y\ entregados$ $\boldsymbol{el\ mes\ siguiente}$

$\boldsymbol{y_t^{NB,imm}}$: $número\ de\ Notebooks\ comprados\ y\ recibidos$ $\boldsymbol{inmediatamente}$ $en\ el\ mes\ t$

$\boldsymbol{y_t^{NB,del}}$: $número\ de\ Notebooks\ comprados\ y\ entregados$ $\boldsymbol{el\ mes\ siguiente}$

Inventario:

$\boldsymbol{I_t^{PC}}$: $inventario\ de\ PCs\ al\ final\ del\ mes\ t$

$\boldsymbol{I_t^{NB}}$: $inventario\ de\ Notebooks\ al\ final\ del\ mes\ t$

Restricciones

a) **Balance de inventario por producto y mes**

Para t = 1 a 4

PC: $x_t^{PC} + y_t^{PC,imm} + y_{t-1}^{PC,del} + I_{t-1}^{PC} = D_t^{PC} + I_t^{PC}$

NB: $x_t^{NB} + y_t^{NB,imm} + y_{t-1}^{NB,del} + I_{t-1}^{NB} = D_t^{NB} + I_t^{NB}$

Para t = 1, se asume $y_0^{PC,del} = 0$ $\boldsymbol{y}$ $y_0^{NB,del} = 0$

b) **Capacidad de producción mensual**

$$X_t^{PC} \leq 800$$

$$x_t^{NB} \leq 700\ para\ t = 1,..,4$$

c) **Restricción de almacenamiento mensual**

$$1.4.I_t^{PC} + 0.8\, I_t^{NB} \leq 200 \;\; para\; t = 1,..,4$$

d) **Condiciones iniciales y finales**

$$I_0^{PC} = 20, \qquad I_0^{NB} = 15$$

$$I_4^{PC} = 20, \qquad I_4^{NB} = 15$$

e) **No negatividad**

$$x_t^{PC}, x_t^{NB}, y_t^{PC,imm}, y_t^{PC,del}, y_t^{NB,imm}, y_t^{NB,del}, I_t^{PC}, I_t^{NB} \geq 0$$

Función objetivo

$$\boldsymbol{min \sum_{t=1}^{4} \left[400.x_t^{PC} + 650.x_t^{NB} + 550.x_t^{PC,del} + 715.x_t^{PC,imm} + 800.x_t^{NB,del} + 1040.x_t^{NB,imm} + 10.x_t^{PC} + 7.x_t^{NB} \right]}$$

¿Cuántos computadores PC y Notebook son producidos mensualmente?

R/ El número de PC fabricados en el mes t viene dado por $P_{PC,t}$, y el número de portátiles fabricados es $P_{NB,t}$. Estos valores representan las cantidades de producción interna para cada mes $t = 1, 2, 3, 4$, limitadas por las capacidades de producción (800 PC y 700 portátiles al mes).

¿Cuántos computadores PC y Notebook son comprados y recibidos en el mismo mes?

R/ El número de ordenadores comprados y recibidos en el mismo mes t es $C_{PC,t}^S$, y para los portátiles es $C_{NB,t}^S$. Estos representan las unidades compradas con un recargo del 30 % (715 $ para los ordenadores de sobremesa y 1040 $ para los portátiles) para satisfacer la demanda dentro del mismo mes.

¿Cuántos computadores PC y Notebook son comprados en un determinado mes y son recibidos en el siguiente mes?

R/ El número de ordenadores comprados en el mes t y recibidos en el mes $t+1$ es $C_{PC,t}^N$, y para los portátiles es $C_{NB,t}^N$. Estos se compran a precios estándar (550 $ para los ordenadores personales y 800 $ para los portátiles) en los meses $t = 1, 2, 3$, ya que las compras del mes 4 para el mes 5 son irrelevantes.

¿Cuántas unidades en inventario tiene la empresa de computadores y Notebook en cada mes?

R/ El inventario al final del mes t es $I_{PC,t}$ para los ordenadores personales y $I_{NB,t}$ para los portátiles. Estos se determinan mediante las ecuaciones de saldo de inventario, comenzando con los inventarios iniciales (20 ordenadores personales, 15 portátiles), teniendo en cuenta la producción, las compras y la demanda, y asegurando que el inventario final en el mes 4 sea de 20 ordenadores personales y 15 portátiles.

Pregunta 2.

(1.5 Puntos) Luego de algunos años de trabajo, usted ha ahorrado una suma de 10 000 000 COP. Como actualmente, cuenta con una estabilidad económica, desea usar estos ahorros para invertir en el mundo de valores del mercado de renta fija, para incrementar su riqueza. Pero como no tiene muy claro en qué consisten realmente estas inversiones, le consulta a Logan, su asesor financiero de confianza. Usted ha establecido que estas inversiones quiere hacerlas en un horizonte de 4 meses.

Logan le comenta que este mercado funciona comprando bonos. Al precio de compra se le llama face value. Estos bonos tienen dos características principales: la tasa cupón (porcentaje de ganancias que generan los bonos cada mes en función del face value) y la duración (el tiempo de vida del bono). Por supuesto, cualquier beneficio obtenido en un mes se puede usar para volver a invertirlo en el siguiente mes o bien reservarlo.

Una vez termine el bono se retorna por completo el face value inicial (junto con el último beneficio generado). Finalmente, los bonos tienen una fecha en la que se puede hacer la compra, a esto se le llama fecha de disponibilidad. Estas fechas solo indican la posibilidad de hacer la compra del bono, por tanto, no afectan su duración ni los beneficios que generan.

Los posibles bonos se muestran a continuación, en la Tabla 1.

Bono	1	2	3
Face value (COP)	120.000	200.000	1.000.000
Tasa cupón (%)	5%	3.5%	12%
Duración (meses)	3	2	1
Fecha de disponibilidad (mes)	1 y/o 2	2 y/o 3	3 y/o 4

Tabla 1. Datos de los bonos disponibles,

$T: meses\ \{1, \ldots 4\}$

$I: tipos\ de\ inversiones\ \ \{1,2,3\}$

TC_{i}: $tasa\ cupón\ del\ bono\ i \in I$

C_{i}: $face\ value\ del\ bono\ i \in I$

Variables de decisión

$x_{i,t}$: número de bonos tipo i comprados en el mes t

$Sobra_t$: dinero que no se invirtió en el mes t

$Se\ Tiene_t$: dinero disponible al inicio del mes t

Función objetivo

Para cada mes t, el dinero disponible es: $Se\ Tiene_t = \ Sobra_{t-1} + \ Ingresos_t$

Donde los ingresos en el mes t se componen de:

- Intereses de los bonos aún activos en el mes t
- Face value devuelto por los bonos que terminan en el mes t

La cantidad invertida en mes t debe cumplir:

$$\sum_{i\epsilon I} C_i \; . X_{i,t} \; + Sobra_t \quad \leq \; Tengo_t$$

Al maximizar $Tengo_5 = \; Sobra_4 \; + interese \; y \; retornos \; de \; bonos \; que \; finalizn \; en \; mes \; 4.$

Formalmente se puede expresar:

$$Maximizar \; Sobra_4 \; + \; \sum_{i \in I} \sum_{\substack{t \in T \\ t+d_i-1=4n}} x_{i,t} \; . C_i . (1 + TC_i . d_i)$$

Pregunta 3.

City Developments Limited (CDL) es una compañía internacional singapurense de bienes raíces. En 2016 fue catalogada como la décima compañía más sustentable en el mundo, según la clasificación que hace Corporate Knights. Por lo tanto, además de ser una de las compañías más grandes de Singapur por su fortaleza económica, es una de las empresas que hace uso responsable de los recursos mientras aprovecha al máximo su capital.

CDL quiere desarrollar una serie de proyectos que le permitirán mejorar sus condiciones de trabajo y productividad. Para el desarrollo de los proyectos, CDL ha definido un periodo de planeación correspondiente a un conjunto (T) de meses, al cabo de los cuales todos los proyectos deben haberse terminado. Cada proyecto j ∈ P tiene un costo un costo cj y una duración igual a un mes (inicia el primer día del mes y finaliza el último día del mes).

Una vez finalizado, el proyecto *j* ∈ *P* genera mensualmente una utilidad libre para inversión igual a bj (por ejemplo, si el proyecto j se hace en el periodo 5, se dispondrá de un monto bj tanto en el periodo 6, como en el 7, y en los periodos subsiguientes). De esa manera, el presupuesto en cada periodo para la realización de estos proyectos está dado por una base m (cada mes) más la suma de las utilidades libres para inversión de los proyectos que ya se hayan terminado. Todo dinero que no se utilice en un periodo se pierde.

Los proyectos 3 y 4 deben finalizarse antes de que inicie la realización del proyecto 5. También debe tenerse en cuenta que los proyectos 7 y 8 deben desarrollarse en periodos consecutivos, sin importar cuál de los dos se hace primero.

Usted debe construir un modelo de optimización que indique en qué mes se debe realizar cada proyecto, de tal forma que los costos por periodo sean lo más homogéneos posibles. En la primera parte debe interpretar las ecuaciones incluidas, mientras que en la segunda debe modelar la situación. Usted es libre de decidir si utilizará (o no) algunos elementos de la primera parte en la segunda.

1 (20%) Interpretación: Explique, en sus propias palabras y de manera concisa, lo que representan las siguientes expresiones:

a) expresión:

$$r = \sum_{j \epsilon P} C_J$$

¿Cuál es la definición en palabras de r?

- C_J es el costo de realizar el proyecto j.
- P es el conjunto de todos los proyectos.
- La Suma de todos los proyectos $j \epsilon P$
- r es el presupuesto total que se requiere para realizar todos los proyectos

b) Variable:

$$x_{jt}: \begin{cases} 1;\ si\ el\ proyecto\ j \in P, \\ se\ realiza\ en\ el\ mes\ t \in T \\ 0;\ de\ lo\ contrario. \end{cases}$$

Expresiones:

$$\sum_{t \in T} t.x_{1t} \leq \sum_{t \in T} t.x_{2t} + 3$$
$$\sum_{t \in T} t.x_{1t} \leq \sum_{t \in T} t.x_{2t} + 1$$

EL CEO de la compañía tiene conocimientos de investigación de operaciones y le ha presentado a Usted las expresiones anteriores. Suponiendo que se cumple lo solicitado en el literal (b) de la segunda parte, ¿qué quiere decir tales restricciones?

R/

$\sum t.x1t \leq \sum t.x2t + 3$

Esta restricción establece que el proyecto 1 debe realizarse como máximo 3 meses después de que se haya realizado el proyecto 2. Es decir, el inicio del proyecto 1 está condicionado temporalmente al inicio del proyecto 2, asegurando que exista un límite de tiempo entre ambos.

$\sum t.x1t \leq \sum t.x2t + 1$

Esta restricción indica que el proyecto 1 debe realizarse como máximo 1 mes después de que se haya realizado el proyecto 2. Similar a la primera restricción, pero con un intervalo de tiempo más estricto.

2. **80% Modelación : Plantee la modelación y/o formulación de la situación anterior.**

a) Define la(s) variable(s) que permite(n) modelar el problema descrito y determina su naturaleza.

R/

$x_{jt} = \begin{cases} 1 \; si \; el \; proyecto \; j \; se \; realiza \; en \; el \; mes \; t \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases}$ $j \epsilon P: conjunto \; de \; proyectos$ $t \in T: conjunto \; de \; meses$
b) Escriba la(s) restricción(es) que garantiza(n) que todos los proyectos se realizan una vez en el periodo de planeación. **R/** Cada proyecto debe ejecutarse exactamente una vez en algún mes del periodo de planeación. **$\sum t \in T \; xjt$ = 1 para todo j ∈ P** Esto asegura que cada proyecto j se realice en un único mes dentro del periodo de planeación
c) (Escriba la(s) restricción(es) que cuantifica(n) el costo en el que se incurre en cada periodo. **R/** El costo total en el mes t está dado por la suma de los costos de los proyectos realizados en ese mes: $C_{t:}$ $costo \; total \; de \; ejecucion \; de \; proyectos \; en \; el \; mes \; t$ $c_{j:}$ $costo \; de \; realizar \; el \; proyecto \; j$
d) Plantee la(s) restricción(es) que limita(n) el costo de cada periodo con el presupuesto. **R/** El costo total en cada mes no puede exceder el presupuesto disponible en ese mes: **$ct \leq m + \sum bk \cdot ykt$** para todo t ∈ T, donde: **m:** Base presupuestaria mensual. **bk:** Utilidad libre generada por el proyecto k ya finalizado. **ykt:** Variable binaria que indica si el proyecto k ya ha sido finalizado antes del mes t.
e) Escriba la(s) restricción(es) que garantizan que los proyectos 3 y 4 deben finalizarse antes de que inicie la realización del proyecto 5. **R/** **$\sum t \in T \; t \cdot x3t \leq \sum t \in T \; t \cdot x5t - 1$.** **$\sum t \in T \; t \cdot x4t \leq \sum t \in T \; t \cdot x5t - 1$.** Esto asegura que los proyectos 3 y 4 se realicen antes de que inicie el proyecto 5
f) Escriba la(s) restricción(es) que garantizan que los proyectos 7 y 8 deben realizarse en periodos consecutivos, sin importar cuál de los dos se hace primero. **R/** **$\lvert \sum t \in T \; t \cdot x7t - \sum t \in T \; t \cdot x8t \rvert = 1$**. Esto asegura que los proyectos **7** y **8** se realicen en meses consecutivos.

g) Escriba la(s) función objetivo y la(s) restricción(es) auxiliares, en caso de que sea(n) necesaria(s).

R/

Función objetivo:

Minimizar la variabilidad de los costos mensuales para que sean lo más homogéneos posibles:

Min $\sum (ct - \overline{c})^2$ para todo t ∈ T, donde:

$\overline{c}$: Promedio de los costos mensuales.

Restricciones auxiliares:

$xjt \in \{0, 1\}$ para todo j ∈ P, t ∈ T.

$ct \geq 0$ para todo t ∈ T.

Estas restricciones aseguran que las variables sean válidas y que los costos sean no negativos.