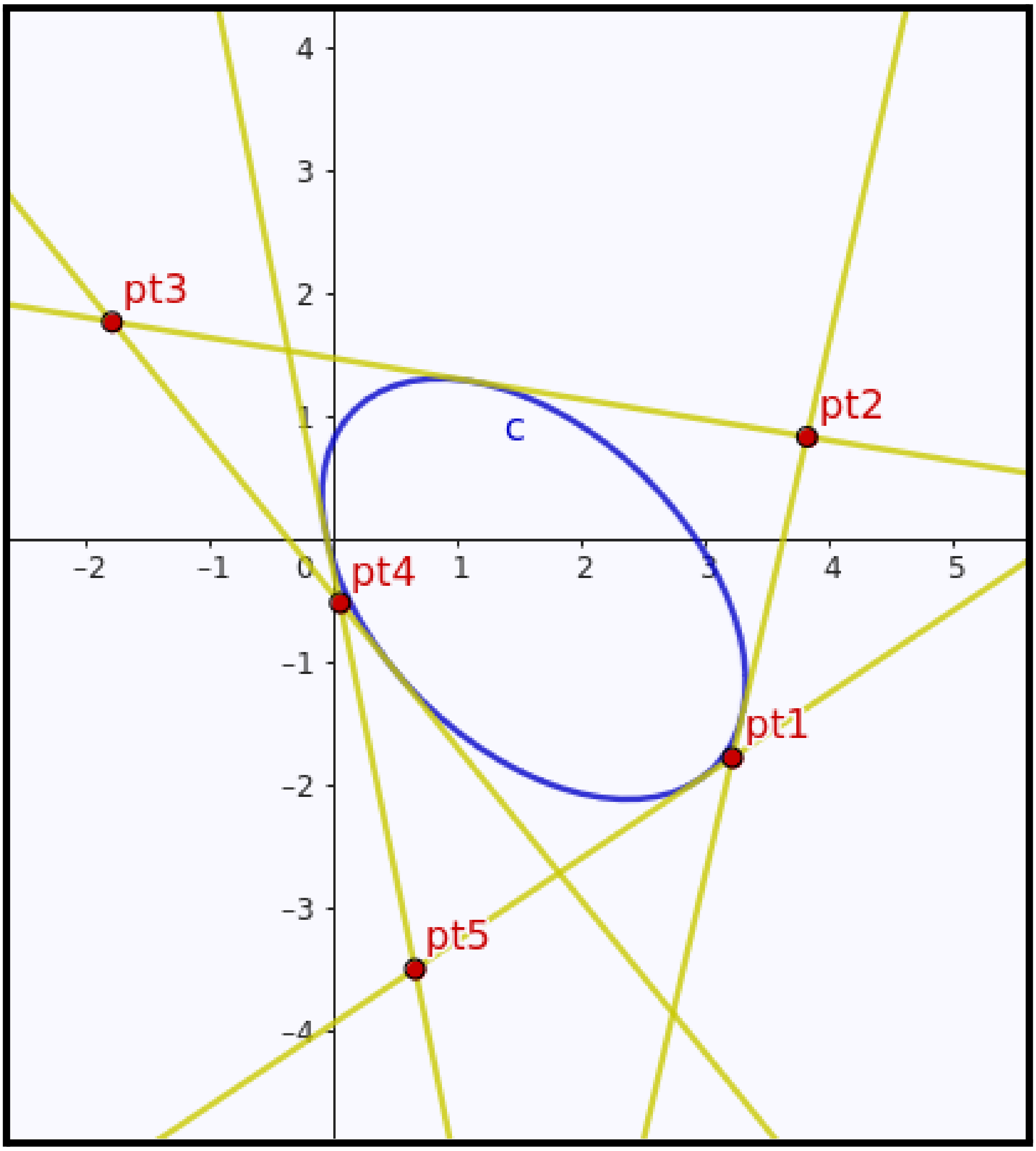
MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE 22 NOVEMBRE 2023

PROJET CONIQUES

Léo SALAUN - Mailis BONHOMMÉ



PARTIE MATHÉMATIQUES

Questions préliminaires

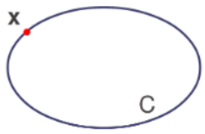
Afin de trouver les coefficients d'une conique, il convient de résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & xw & yw & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 0$$

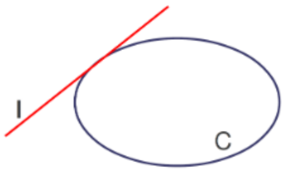
$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1w_1 & y_1w_1 & w_1^2 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2w_2 & y_2w_2 & w_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & x_nw_n & y_nw_n & w_n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les (x_i,y_i,w_i) sont les points par lesquels passent la conique. Il n'est nécessaire que d'avoir 5 points pour résoudre ce système car la coordonnée w_i représente la coordonnée homogène qui est remplacée par la constante 1 dans une représentation avec des coordonnées euclidiennes. Cela réduit de 1 le nombre de degrés de liberté.

On sait que l'appartenance d'un point x à une conique C est représentée par l'équation : $x^T C x = 0$



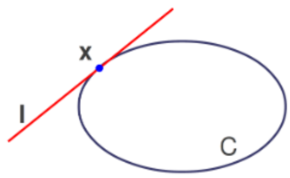
On sait également qu'une droite l est une tangente à la conique C si : $l^T C^{-1} l = 0$



On peut également dire que la tangente l d'une conique C passe par le point C si $l = Cx$. En effet, si l'on injecte Cx dans l'équation de la tangente, cela nous donne :

$$l^T C^{-1} l = 0$$
$$\Leftrightarrow (Cx)^T C^{-1} Cx = 0$$
$$\Leftrightarrow x^T C^T C^{-1} Cx = 0$$
$$\Leftrightarrow x^T Cx = 0$$

car $C^T C^{-1} = Id$ où Id représente la matrice identité



Construire une conique à partir de tangentes

Il est possible de trouver les coefficients d'une conique à partir de 5 de ses tangentes. L'idée est, pour chaque tangente, de trouver le point qui appartient à la conique. Ainsi, on trouve 5 points avec lesquels nous pourrons appliquer le raisonnement précédent. Voici la méthode :

```
Déterminer 5 points A, B, C, D, E, d'intersection des tangentes (chaque tangente
s'intersecte avec deux autres)
Pour chaque tangente T :
   -  Estimer F le point de la tangente appartenant à la conique
      (on ne connaît pas encore ses coordonnées mais on sait qu'il existe)
   -  Construire un hexagone ABCFDE
      (là encore on ne le connaît pas exactement mais on sait qu'il existe)
   -  Tracer les deux diagonales BD et CE de ABCFDE ne passant pas par F
   -  Définir O le point d'intersection de BD et CE
   -  Déterminer la troisième diagonale AO passant par F
      (toutes les diagonales d'un même hexagone s'intersectent en un même
      point)
   -  Déterminer F comme point d'intersection de AO et T
   -  Ajouter F à la liste de points de la conique
```