

Trabajo Práctico n° 3:

Filtrado analógico y digital



Integrantes:

Huarita, Leonel Iván

Schymansky, Leonardo

Vinokur, Gastón

Fecha de entrega: martes 31 de mayo, 2016.

FILTRADO ANALÓGICO

a) Se desea implementar electrónicamente un circuito que realice la función transferencia:

$$H(s)_{PBand} = \frac{a \cdot s^2}{s^4 + b \cdot s^3 + c \cdot s^2 + d \cdot s + e}$$

Cumpliendo las siguientes especificaciones:

-Tipo de aproximación: Butterworth.

- $f_0 = 110$ Hz

- $BW = 0,5 \cdot 110$ Hz = 55 Hz

Obtenemos de esta manera:

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi [\text{rad}] \cdot 110 [\text{Hz}] = 691,15 \text{ rad/seg}$$

$$B = 2 \cdot \pi [\text{rad}] \cdot 55 [\text{Hz}] = 345,57 \text{ rad/seg}$$

Y definimos frecuencias de corte superior e inferior:

$$B = \omega_b - \omega_a \rightarrow \omega_b = B + \omega_a$$

$$\omega_0^2 = \omega_a \cdot \omega_b \rightarrow \omega_0^2 = \omega_a(B + \omega_a)$$

$$\omega_a^2 + B \cdot \omega_a - \omega_0^2 = 0 \rightarrow \omega_a = 539,63 \text{ rad/seg} \rightarrow \omega_b = 885,2 \text{ rad/seg}$$

Dado a que se debe realizar un filtro pasa-banda de orden 4, la estrategia consistió en aplicar la transformación correspondiente a un filtro pasa-banda de orden 2 a la aproximación de Butterworth, de esta manera se obtuvo la función de transferencia de orden 4 buscada.

La función de transferencia para un filtro normalizado de Butterworth de orden 2 se define:

$$H(s)_N = \frac{1}{s_N^2 + \sqrt{2} \cdot s_N + 1}$$

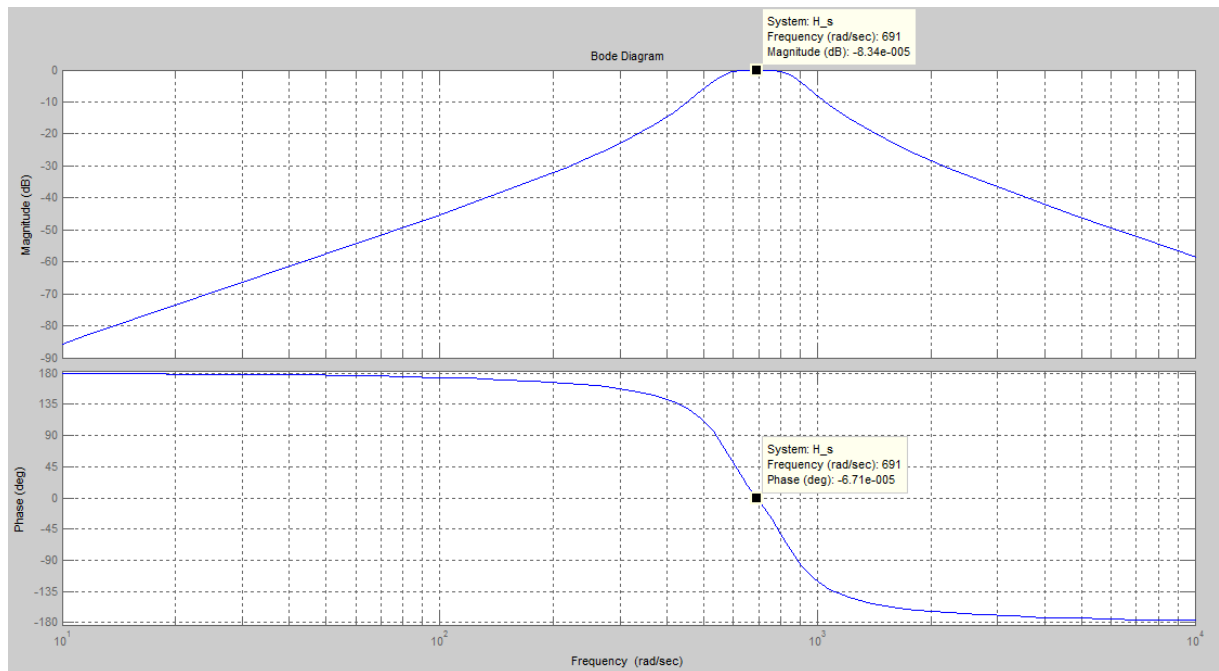
Aplicando transformación para filtro pasa-banda reemplazamos:

$$s_N = \frac{s^2 + \omega_0^2}{B \cdot s}$$

Obtenemos utilizando MATLAB la función transferencia pasa-banda buscada:

$$H(s)_{PBand} = \frac{1,194 \cdot 10^5 \cdot s^2}{s^4 + 488,7 \cdot s^3 + 1,075 \cdot 10^6 \cdot s^2 + 2,335 \cdot 10^8 \cdot s + 2,282 \cdot 10^{11}}$$

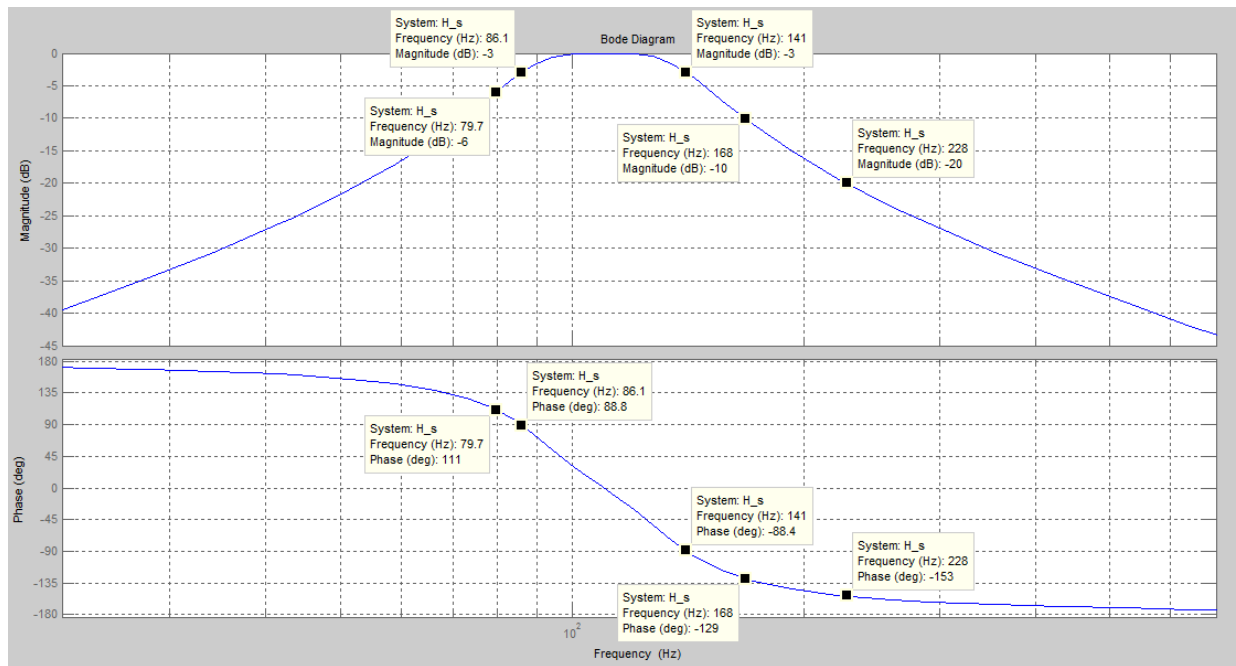
b) Procesando la función transferencia $H(s)_{\text{PBand}}$ obtenida en a), mediante MATLAB, obtuvimos los respectivos diagramas de magnitud y fase:



c) En los diagramas de magnitud y fase presentados, observamos que se verifica con gran aproximación nuestro $\omega_0 = 691,15$ rad/seg, calculado en a). Encontrándose el mismo en la banda de paso, prácticamente a 0 dB, es decir sin atenuación. Por otro lado, en el diagrama de fase vemos que a ω_0 la fase es prácticamente nula, lo cual es esperable para que la señal no sufra desfasaje y en la banda de paso sea lo más fidedigna posible.

A partir de la observación del diagrama de fase, podemos afirmar que estamos en presencia de un filtro pasa-banda debido a que dicha función excursiona de $+180^\circ$ a -180° característico de este tipo de filtro.

Para completar el cuadro 1 de simulación matemática, extrajimos datos de los diagramas de magnitud y fase como se aprecia en la gráfica:



Se modificó la escala de frecuencias de rad/seg a Hz para una mejor visualización con el cuadro.

Cuadro 1: Simulación Matemática			
Frecuencia [Hz]	V_o / V_i	$20 \cdot \log(V_o / V_i)$ [dB]	Defasaje $V_o - V_i$ [°]
$f_0 = 109,97$	1	$-8,34 \times 10^{-5}$	$-6,71 \times 10^{-5}$
$f_a = 86,1$	0,708	-3	88,8
$f_b = 141$	0,708	-3	-88,4
$f_y = 79,7$	0,501	-6	111
$f_x = 168$	0,316	-10	-129
$f_z = 228$	0,1	-20	-153

A partir del cuadro podemos comparar las frecuencias de corte superior e inferior, definidas a -3 dB para la banda de paso del filtro, con las calculadas en a), por lo tanto:

En a) obtuvimos: $\omega_a = 539,63$ rad/seg; $\omega_b = 885,2$ rad/seg

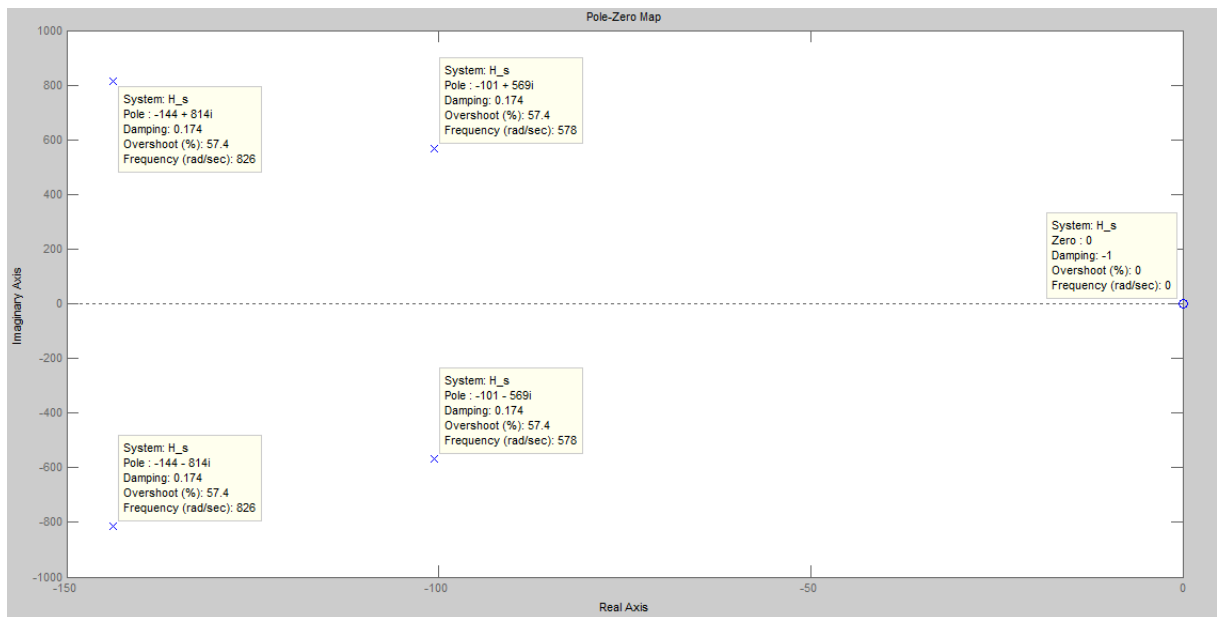
Del cuadro:

$$\omega_a' = 2 \cdot \pi [\text{rad}] \cdot f_a = 2 \cdot \pi [\text{rad}] \cdot 86,1 [\text{Hz}] = 540,98 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_b' = 2 \cdot \pi [\text{rad}] \cdot f_b = 2 \cdot \pi [\text{rad}] \cdot 141 [\text{Hz}] = 885,929 \text{ rad/seg}$$

De esta manera verificamos las frecuencias de corte superior e inferior para las especificaciones de nuestro filtro pasa-banda, y en consecuencia, también se verifica el ancho de banda requerido.

d) Empleando MATLAB calculamos y obtuvimos el diagrama de polos y ceros de nuestro filtro pasa-banda $H(s)_{PBand}$ en el plano S:



De la gráfica definimos los polos (P_n) y ceros (Z_n):

$$P_1 = -144 + 814i$$

$$P_2 = -144 - 814i$$

$$P_3 = -101 + 569i$$

$$P_4 = -101 - 569i$$

Cero al origen de orden 2: $Z_{1,2}=0$.

e) A partir de la observación del diagrama de polos y ceros podemos caracterizar a los polos como 2 pares de complejos conjugados, todos con parte real negativa. De esta manera todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano S, lo cual define la estabilidad del sistema, en consecuencia nuestro sistema es absolutamente estable.

f) El filtro pasa-banda que obtuvimos en a):

$$H(s)_{PBand} = \frac{1,194 \cdot 10^5 \cdot s^2}{s^4 + 488,7 \cdot s^3 + 1,075 \cdot 10^6 \cdot s^2 + 2,335 \cdot 10^8 \cdot s + 2,282 \cdot 10^{11}}$$

Puede ser factorizado y expresado de la siguiente forma:

$$H(s)_{PBand} = H(s)_{PBAJO} \cdot H(s)_{PALTO}$$

Donde:

$H(s)_{PBAJO}$: es la función transferencia de un filtro pasa-bajo.

$H(s)_{PALTO}$: es la función transferencia de un filtro pasa-alto.

Por lo tanto, haciendo uso de los polos calculados de $H(s)_{PBand}$ podemos reescribir el denominador de la función de la siguiente forma:

$$H(s)_{PBand} = \frac{1,194 \cdot 10^5 \cdot s^2}{(s - P_1) \cdot (s - P_2) \cdot (s - P_3) \cdot (s - P_4)}$$

$$H(s)_{PBand} = \frac{1,194 \cdot 10^5}{(s - P_1) \cdot (s - P_2)} \cdot \frac{s^2}{(s - P_3) \cdot (s - P_4)}$$

Y definimos:

$$H(s)_{PBAJO} = \frac{1,194 \cdot 10^5}{(s - P_1) \cdot (s - P_2)}$$

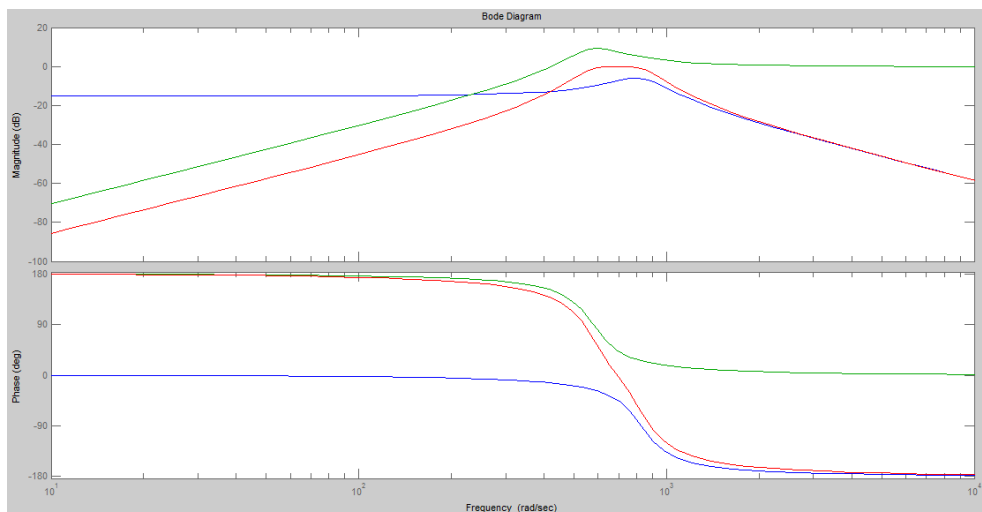
$$H(s)_{PALTO} = \frac{s^2}{(s - P_3) \cdot (s - P_4)}$$

Procesando las funciones con MATLAB obtenemos:

$$H(s)_{PBAJO} = \frac{1,194 \cdot 10^5}{s^2 + 287,5 \cdot s + 6,827 \cdot 10^5}$$

$$H(s)_{PALTO} = \frac{s^2}{s^2 + 201,2 \cdot s + 3,342 \cdot 10^5}$$

Graficamos diagrama de magnitud y fase (azul: $H(s)_{PBAJO}$, verde: $H(s)_{PALTO}$, rojo: $H(s)_{PBand}$).



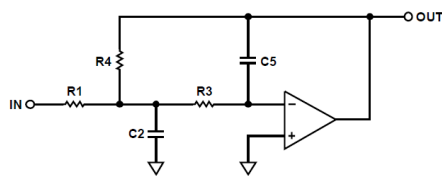
g) A partir de los filtros pasa-bajo y pasa-alto hallados en f) para definir $H(s)_{PBand}$:

$$H(s)_{PBAJO} = \frac{1,194 \cdot 10^5}{s^2 + 287,5 \cdot s + 6,827 \cdot 10^5}$$

$$H(s)_{PALTO} = \frac{s^2}{s^2 + 201,2 \cdot s + 3,342 \cdot 10^5}$$

Nos basamos en las realizaciones de Múltiples Realimentaciones para diseñar el circuito analógico correspondiente que represente nuestro filtro pasa-banda. Por lo tanto, siguiendo el tutorial provisto por la cátedra:

Para $H(s)_{PBAJO}$:



$$H(s)_{PBAJO} = \frac{-H \cdot \omega_0^2}{s^2 + \alpha \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

$$H(s)_{PBAJO} = \frac{-H \cdot \frac{1}{R1 \cdot R3 \cdot C2 \cdot C5}}{s^2 + s \cdot \frac{1}{C2} \cdot \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R3} + \frac{1}{R4} \right) + \frac{1}{R3 \cdot R4 \cdot C2 \cdot C5}}$$

Donde podemos establecer las siguientes relaciones (no se consideró el signo menos para los cálculos, ya que sólo invierte la señal):

$$\omega_0^2 = 6,827 \cdot 10^5 \rightarrow \omega_0 = 826,2566$$

$$H \cdot \omega_0^2 = 1,194 \cdot 10^5 \rightarrow H = \frac{1,194 \cdot 10^5}{\omega_0^2} = 0,1749$$

$$\alpha \cdot \omega_0 = 287,5 \rightarrow \alpha = \frac{287,5}{\omega_0} = 0,348$$

$$\text{Definimos } k = \omega_0 \cdot C5$$

Donde:

$C5$: es un capacitor que establecemos como diseño de partida. $C5 = 10 \text{ nF}$

$$k = \omega_0 \cdot C5 = 8,26 \cdot 10^{-6}$$

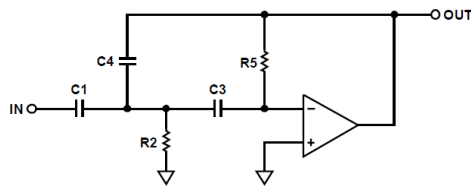
$$C2 = \frac{4}{\alpha^2} \cdot (H + 1) \cdot C5 \rightarrow C2 = 0,388 \mu\text{F}$$

$$R1 = \frac{\alpha}{2 \cdot H \cdot k} \rightarrow R1 = 120,4 \text{ K}\Omega$$

$$R3 = \frac{\alpha}{2 \cdot (H+1) \cdot k} \rightarrow R3 = 17,924 \text{ K}\Omega$$

$$R4 = \frac{\alpha}{2 \cdot k} \rightarrow R4 = 21,0588 \text{ K}\Omega$$

Para $H(s)_{\text{PALTO}}$:



$$H(s)_{\text{PALTO}} = \frac{-H.s^2}{s^2 + \alpha.\omega_0.s + \omega_0^2}$$

$$H(s)_{\text{PALTO}} = \frac{-s^2 \cdot \frac{C1}{C4}}{s^2 + s \cdot \left(\frac{C1+C3+C4}{C3.C4.R5} \right) + \frac{1}{R2.R5.C3.C4}}$$

Donde podemos establecer las siguientes relaciones (no se consideró el signo menos para los cálculos, ya que sólo invierte la señal):

$$\omega_0^2 = 3,342 \cdot 10^5 \rightarrow \omega_0 = 578,1$$

$$H = 1$$

$$\alpha.\omega_0 = 201,2 \rightarrow \alpha = \frac{201,2}{\omega_0} = 0,348$$

$$\text{Definimos } k = \omega_0 \cdot C1$$

Donde:

C1: es un capacitor que establecemos como diseño de partida. $C1 = 100 \text{ nF}$

$$k = \omega_0 \cdot C1 = 5,781 \cdot 10^{-5}$$

$$C3 = C1 \rightarrow C3 = 100 \text{ nF}$$

$$C4 = \frac{C1}{H} \rightarrow C4 = 100 \text{ nF}$$

$$R2 = \frac{\alpha}{k \cdot (2 + \frac{1}{H})} \rightarrow R2 = 2,00678 \text{ K}\Omega$$

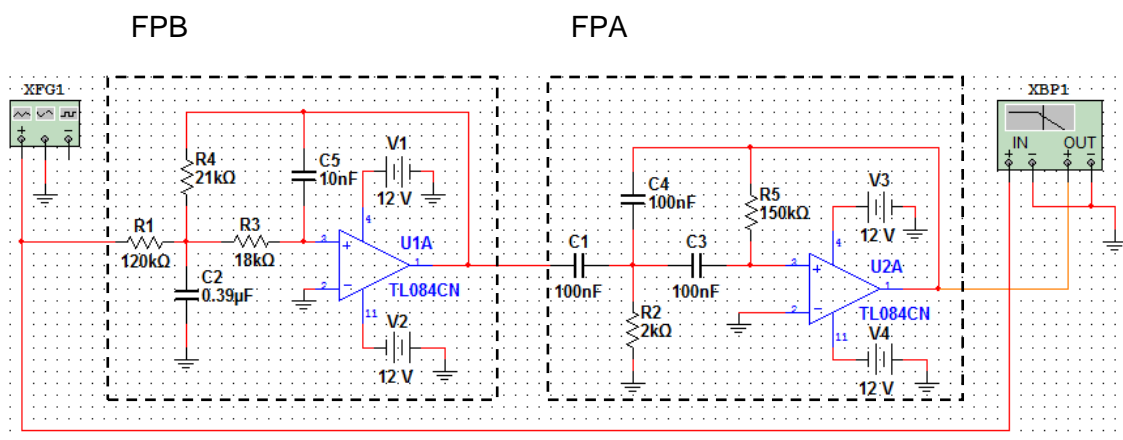
$$R5 = \frac{H \cdot (2 + \frac{1}{H})}{\alpha \cdot k} \rightarrow R5 = 149,105 \text{ K}\Omega$$

h) A partir de los valores calculados, definimos los valores comerciales a utilizar más aproximados para implementar los filtros:

$H(s)_{\text{PBAJO}}$		
Componente	Valor Calculado	Valor Comercial
C5	10 nF	10 nF
C2	0,388 μF	0,39 μF
R1	120,4 K Ω	120 K Ω
R3	17,924 K Ω	18 K Ω
R4	21,0588 K Ω	10 K Ω + 10 K Ω + 1 K Ω

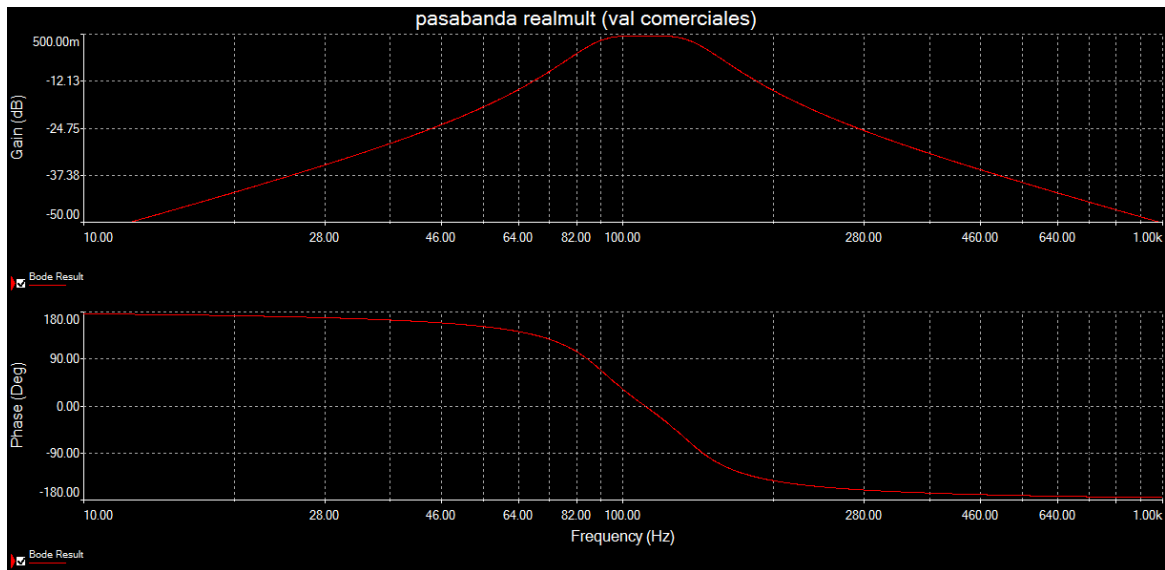
$H(s)_{PALTO}$		
Componente	Valor Calculado	Valor Comercial
C1	100 nF	100 nF
C3	100 nF	100 nF
C4	100 nF	100 nF
R2	2,00678 K Ω	1 K Ω + 1 K Ω
R5	149,105 K Ω	150 K Ω

i) A partir de todo lo desarrollado en los puntos f), g) y h) para el diseño de un circuito analógico con las especificaciones de nuestro filtro pasa-banda, propusimos el siguiente circuito para simular en Multisim:



Donde FPB y FPA hacen referencia al filtro pasa-bajo y filtro pasa-alto, respectivamente, calculados en g). XFG1 es un generador de funciones, para establecer la señal de entrada. XBP1 es un instrumento para graficar diagramas de Bode. Como se observa en el diseño son dos etapas FPB y FPA en serie que en su conjunto definen nuestro filtro pasa-banda. Se decidió colocar primero la etapa de FPB ya que como se observó en f) dicho filtro tiene una ganancia menor que FPA, por lo tanto es aconsejable colocarla primero para no saturar las entrada de la etapa siguiente. La simulación se realizó con los valores comerciales propuestos para los componentes, de esta manera buscamos encontrar resultados más cercanos a la realidad que a lo ideal.

Realizando la simulación correspondiente en Multisim, se obtuvieron los siguientes diagramas de Magnitud y Fase:



A partir de dichos diagramas y utilizando los cursores para desplazarnos sobre las curvas, se levantaron los datos para completar el cuadro 2 de simulación electrónica, que sigue a continuación:

Cuadro 2: Simulación Electrónica			
<i>Frecuencia [Hz]</i>	<i>Vo/ Vi</i>	<i>20.log (Vo /Vi) [dB]</i>	<i>Defasaje Vo – Vi [°]</i>
f0=109,73	1,0076	0,06597779	0,03935
fa=86,1	0,707	-3,0097	90,6
fb=140,6	0,7078	-3,002	-90,4
fy=79,48	0,5016	-5,9928	111,674
fx=167,2	0,315	-10,0241	-129,486
fz=226,345	0,09986	-20,0117	-153,59

A partir de la comparación de los diagramas de magnitud y fase obtenidos por MATLAB y Multisim, como también entre los cuadros 1 y 2 que en definitiva son valores de dichos diagramas, podemos afirmar que el diseño del circuito analógico para el filtro pasa-banda simulado es muy preciso, ya que los resultados obtenidos fueron muy aproximados. Estos buenos resultados podemos atribuirlos a que se buscó aproximar lo más posible los componentes calculados a los valores comerciales para implementar el circuito. Por otro lado, la simulación se llevo a cabo con componentes ideales, sin tener en cuenta fuentes de ruido, lo cual ayuda a la calidad de los resultados.

FILTRADO DIGITAL

l) Diseñamos un filtro pasa-banda digital:

Cambiamos el requisito de ancho de banda a 30 Hz. La frecuencia central sigue siendo 110Hz.

Buscamos la función de Butterworth normalizada pasa banda de orden 2:

$$H(s)_N = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1}$$

Sustituimos:

$$s = \frac{s^2 + \omega_o^2}{B \cdot s}$$

Obtenemos:

$$H(s) = \frac{3.553 \cdot 10^4 \cdot s^2}{s^4 + 266.6 \cdot s^3 + 9.909 \cdot 10^5 \cdot s^2 + 1.273 \cdot 10^8 \cdot s + 2.282 \cdot 10^{11}}$$

Lo dividimos en 2 filtros pasa-banda de orden 2:

$$H(s)_1 = \frac{188.5 \cdot s}{s^2 + 146.1 \cdot s + 5.796 \cdot 10^5}$$

$$H(s)_2 = \frac{188.5 \cdot s}{s^2 + 120.4 \cdot s + 3.937 \cdot 10^5}$$

Obtendremos la transformada Z de estos filtros utilizando la aproximación Bilineal:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Donde T: es el inverso de la frecuencia de muestreo.

De esta manera conseguimos:

$$H[z]_1 = \frac{-9.343 \cdot 10^{-3} \cdot z^{-2} + 9.343 \cdot 10^{-3}}{0.9855 \cdot z^{-2} - 1.98 \cdot z^{-1} + 1}$$

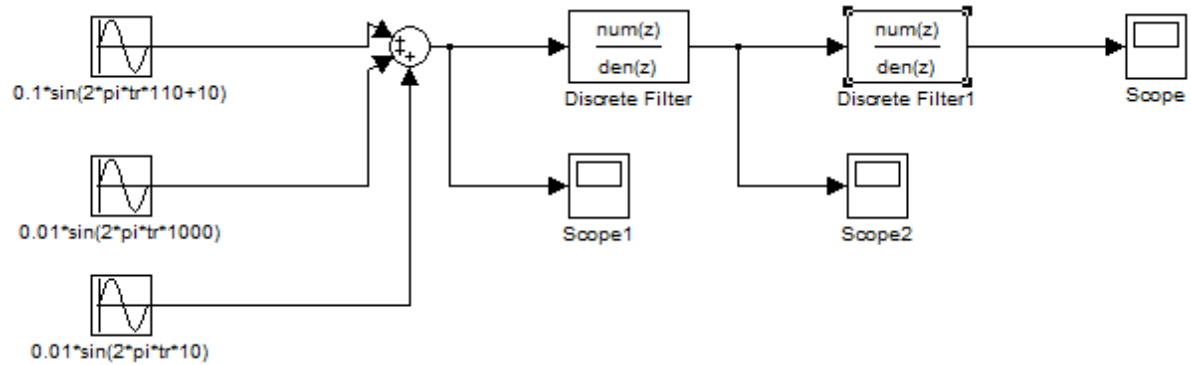
$$H[z]_2 = \frac{-9.359 \cdot 10^{-3} \cdot z^{-2} + 9.359 \cdot 10^{-3}}{0.988 \cdot z^{-2} - 1.984 \cdot z^{-1} + 1}$$

m) y n) Despejamos y buscamos la ecuación en diferencias:

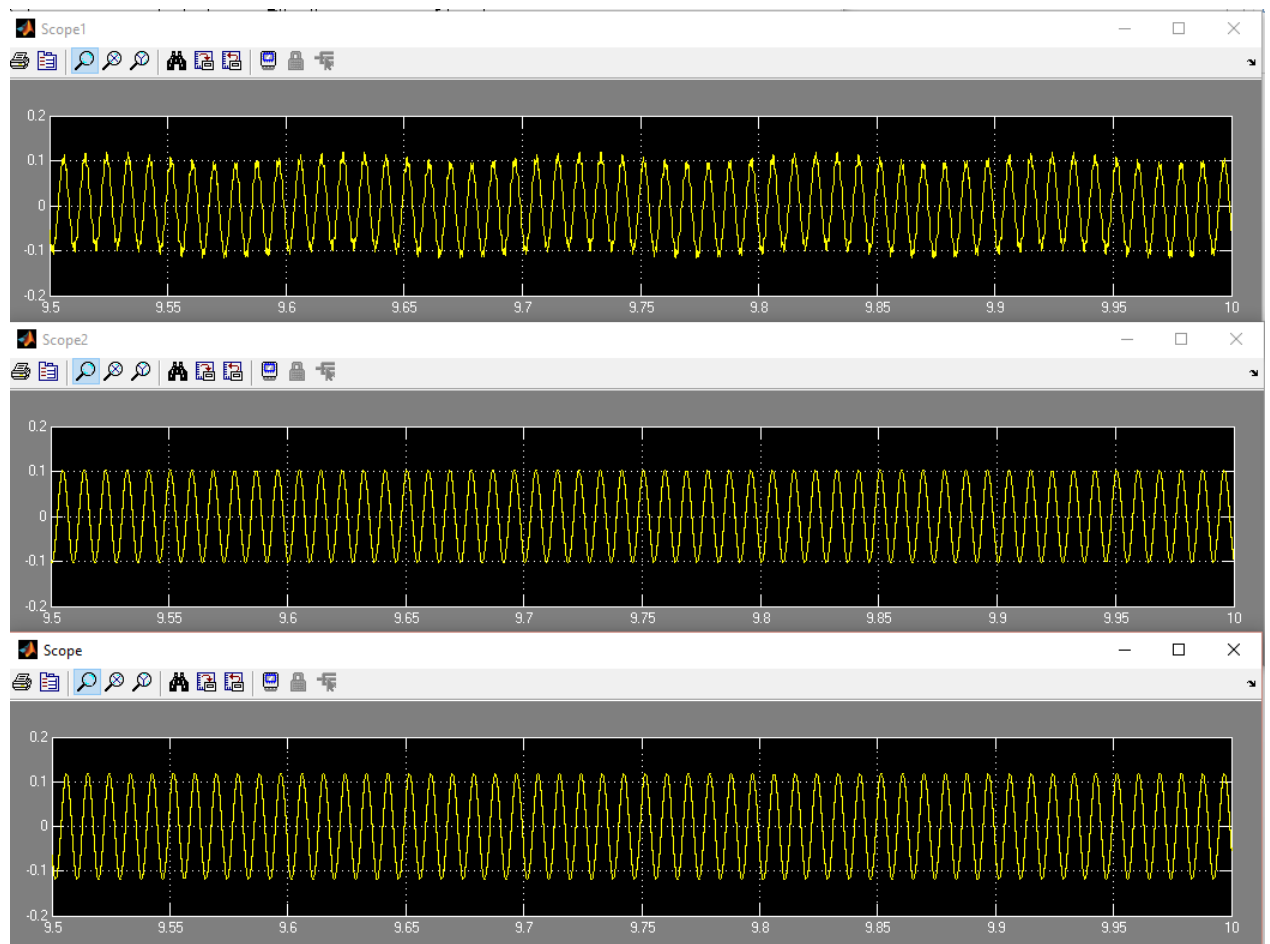
$$Y_1[n] = 9.343 \cdot 10^{-3} \cdot X[n] - 9.343 \cdot 10^{-3} \cdot X[n-2] + 1.98 \cdot Y[n-1] - 0.9855 \cdot Y[n-2]$$

$$Y_2[n] = 9.359 \cdot 10^{-3} \cdot X[n] - 9.359 \cdot 10^{-3} \cdot X[n-2] + 1.984 \cdot Y[n-1] - 0.988 \cdot Y[n-2]$$

Implementamos el filtro en *Simulink* haciendo uso de la herramienta *Discrete Filter* en la cual insertamos el numerador y el denominador para cada filtro.



Obteniendo como resultado el filtrado de la señal:



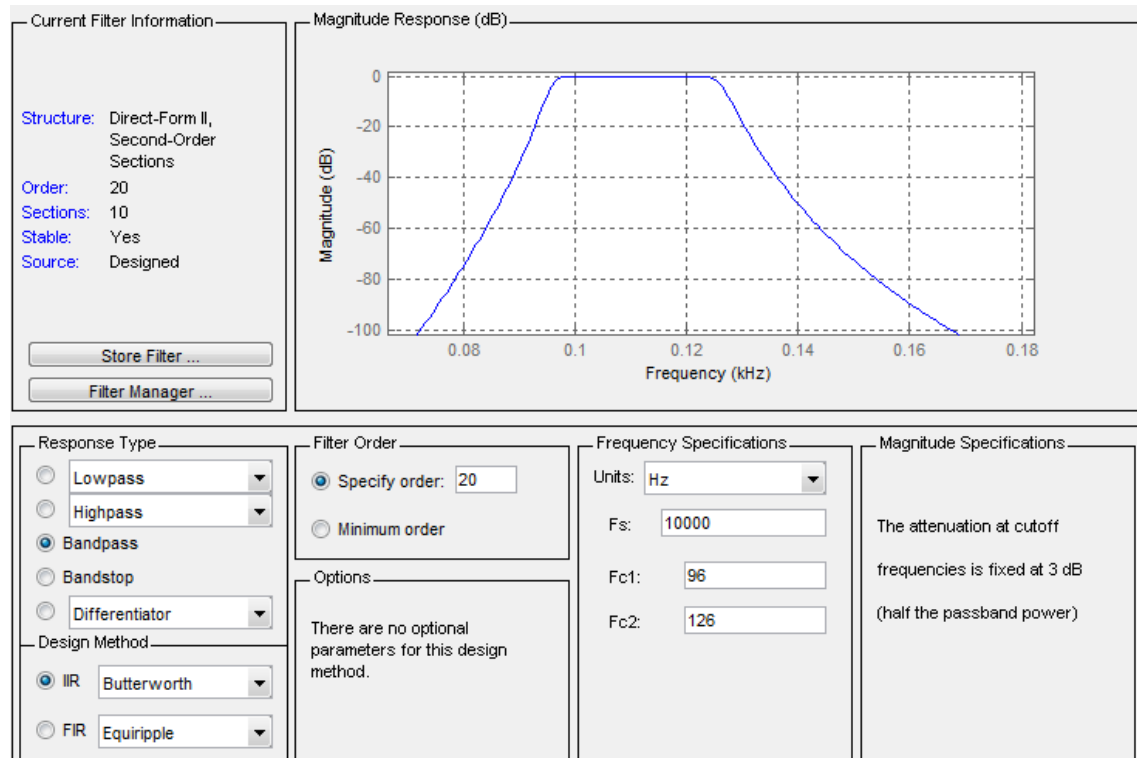
ñ) Utilizando *FDAtool* diseñamos un filtro Butterworth pasa banda IIR de orden 20 para una frecuencia de muestreo de 10 KHz. Para determinar las frecuencias de corte superior e inferior, planteamos igual que en el punto a), las siguientes ecuaciones:

$$B = \omega_{cs} - \omega_{ci} \rightarrow \omega_{cs} = B + \omega_{ci}$$

$$\omega_0^2 = \omega_{ci} * \omega_{cs} \rightarrow \omega_0^2 = \omega_{ci}(B + \omega_{ci})$$

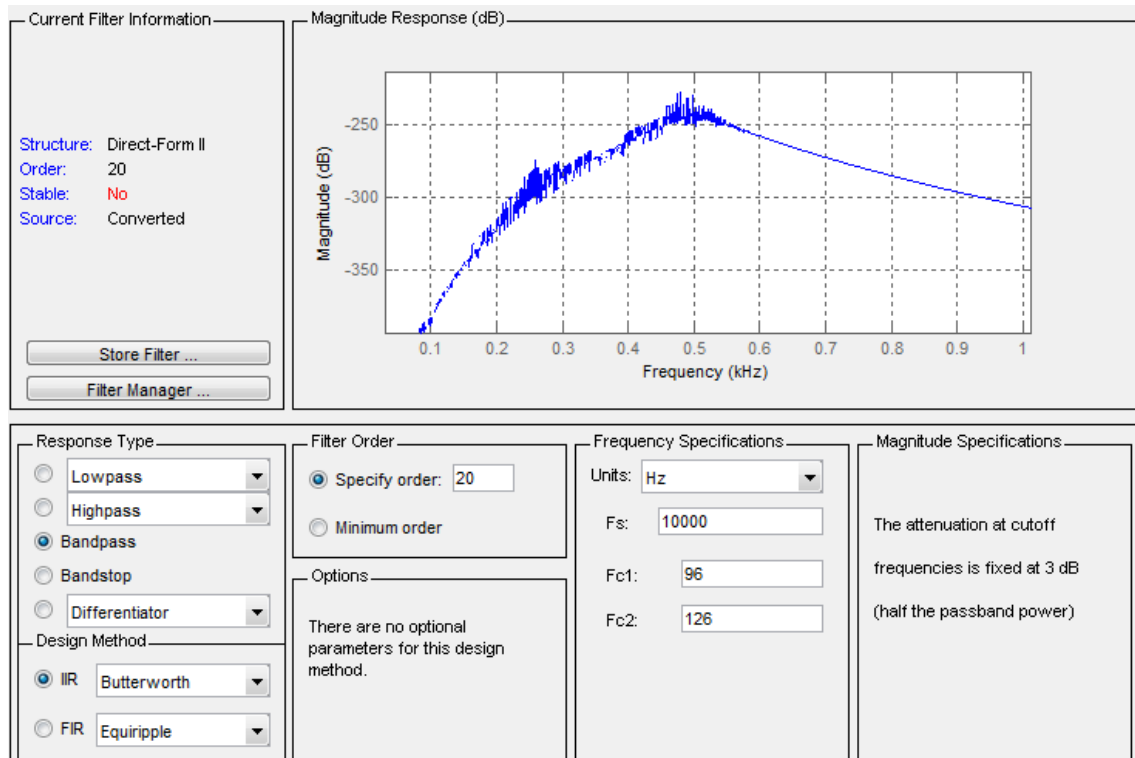
$$\omega_{ci}^2 + B * \omega_{ci} - \omega_0^2 = 0 \rightarrow \omega_{ci} = 603,3 \left[\frac{rad}{seg} \right] \rightarrow \omega_{cs} = 791,8 \left[\frac{rad}{seg} \right]$$

Obtenemos primero el filtro diseñado por la herramienta en secciones de orden 2:



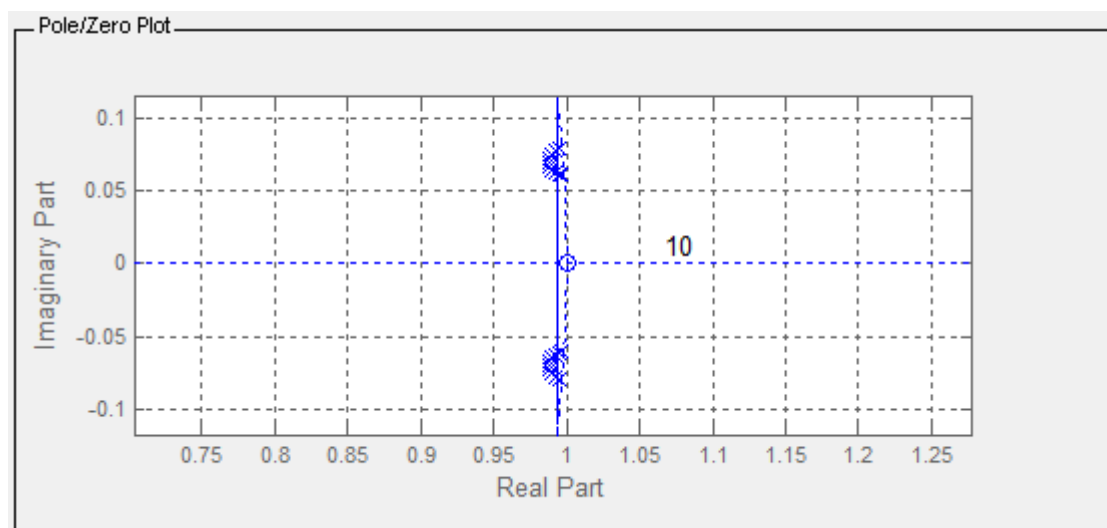
Dado que el filtro es de orden 20 y lo diseñamos con secciones de orden 2, este contará con 10 secciones.

A continuación, en *Edit* elegimos la opción *Convert to Single Section* y así obtenemos el filtro convertido a una sola sección:

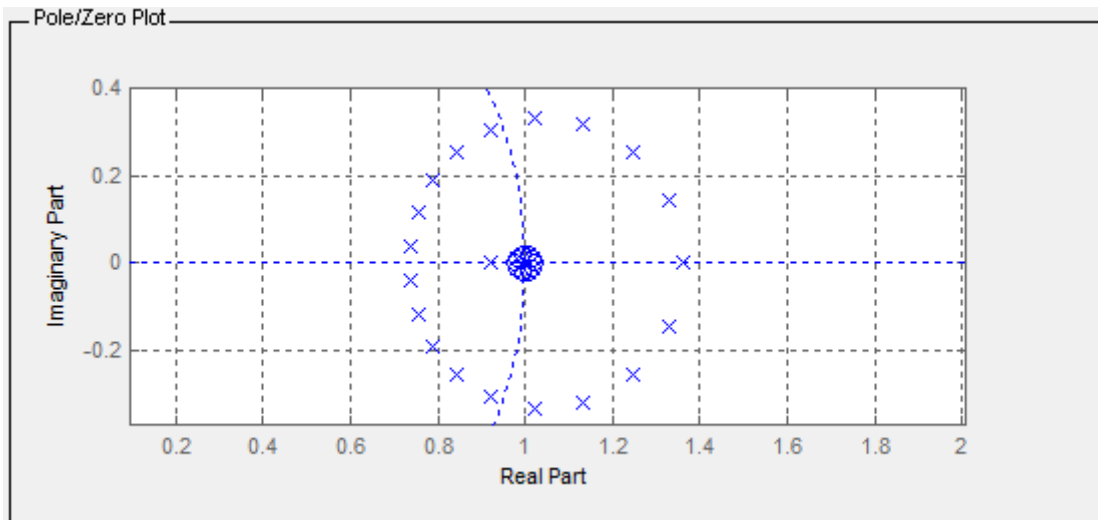


Observamos que el filtro obtenido no es estable.

Esto se debe a que el algoritmo utilizado para diseñar los filtros trabaja mejor con secciones de orden 2, es decir, diseña el filtro de orden 20 de a pares complejos conjugados, lo que le da más "control" sobre los valores que tendrán los polos. Cuando observamos la gráfica de polos y ceros en el filtro de secciones de orden 2, vemos que todos los polos están muy cerca –pero dentro– de la circunferencia unitaria, además de muy cercanos entre sí:

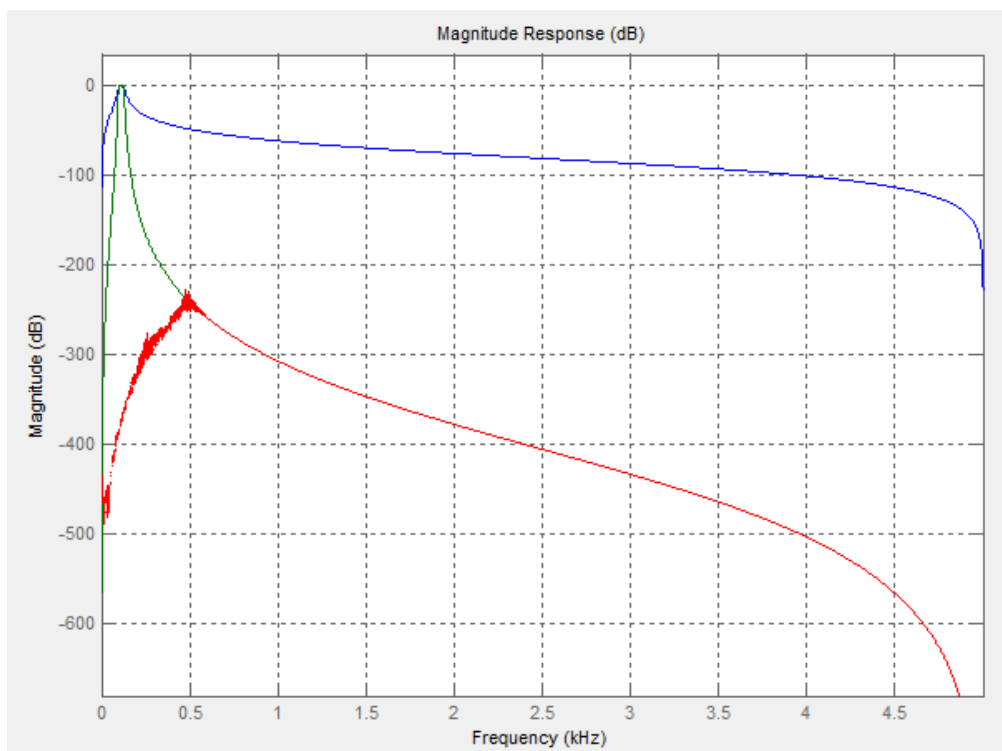


Al convertir el filtro, el algoritmo tiene que pasar todos los polos a una sola sección, lo que hace imposible colocarlos de manera que el filtro sea estable. Vemos en la gráfica de polos y ceros que no todos los polos quedan dentro de la circunferencia unitaria:



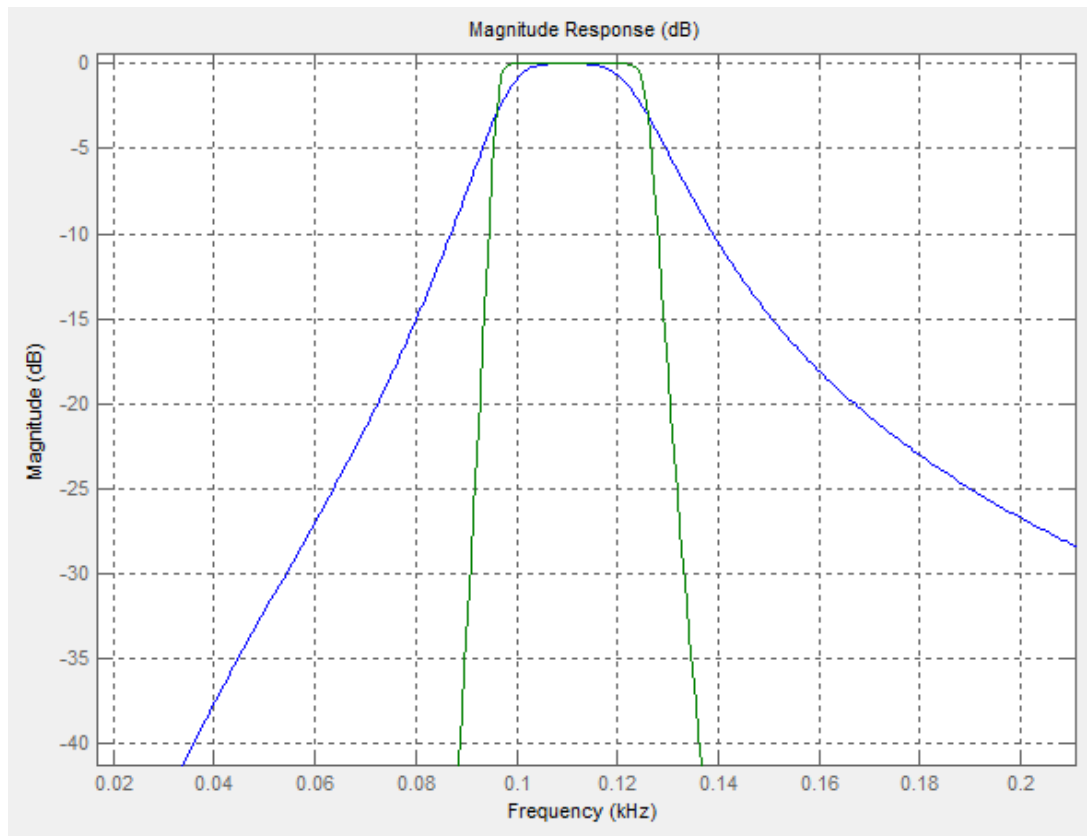
Es por esto que el filtro de una sola sección no es estable.

o) Para ver el desempeño de los filtros obtenidos, utilizamos la herramienta FVtool. Vemos los gráficos de la respuesta en frecuencia de los tres filtros simultáneamente:



Se observa a simple vista que el filtro de una sola sección (en rojo) es inestable y no satisface los requisitos para el filtro que queremos.

Para comparar los otros dos filtros, hacemos zoom sobre la zona de paso y vemos la atenuación que logramos con cada uno:



Vemos que el filtro de orden 20 (en verde) atenúa mucho más que el que diseñamos inicialmente de orden 4 (en azul), como es de esperarse. La elección de nuestro filtro dependerá de qué tan exigente será el requisito de atenuación, además de cómo lo implementaremos. Si utilizamos componentes activos, el filtro de orden 4 será la elección más sensata; sin embargo, si el diseño no está restringido por la implementación física (por ejemplo si hacemos un filtro digital), creemos que el filtro IIR de orden 20 ofrece el mejor desempeño.