

## Matematica del Continuo Informatica per la Comunicazione Digitale

### Modelli di esercizi per la Parte 1

La **Parte 1** del compito scritto, o delle prove intermedie, potrebbe includere esercizi simili a quelli seguenti. Notare che la lista **non** è esaustiva!

#### Insiemistica

1. Si considerino gli insiemi

$$A := \{\text{numeri naturali divisibili per } 5\}$$

$$B := \{\text{numeri naturali pari}\}$$

$$C := \{5, 10, 9, 20\}$$

Determinare l'insieme

$$(A \cap B) \cap C.$$

**RISULTATO:**  $\{10, 20\}$

2. Si considerino i seguenti insiemi

$$A := \{\sqrt{2}, \pi, 42\}$$

$$B := \{\text{numeri naturali multipli di } 2\}$$

$$C := \{99\}$$

Determinare l'insieme

$$(A \cap B) \cup C.$$

**RISULTATO:**  $\{42, 99\}$

3. Si considerino i seguenti insiemi

$$A := \{\sqrt{2}, \pi, 33\}$$

$$B := \{\text{numeri naturali multipli di } 3\}$$

$$C := \{99\}$$

Determinare l'insieme

$$(A \cup C) \cap B.$$

**RISULTATO:**  $\{33, 99\}$

4. Si considerino i seguenti insiemi

$$A := \{\sqrt{2}, \pi, 77\}$$

$$B := \{\text{numeri naturali multipli di } 7\}$$

$$C := \{77\}$$

Determinare l'insieme

$$(A \cap B) \cap C.$$

**RISULTATO:**  $\{77\}$

5. Si considerino i seguenti insiemi:

$$A := \{\sqrt{2}, \pi, 77, 21\}$$

$$B := \{\text{numeri naturali multipli di } 7\}$$

$$C := \{77\}$$

Determinare l'insieme

$$(A \cap B) \setminus C.$$

**RISULTATO:**  $\{21\}$

6. Si considerino i seguenti insiemi:

$$A := \{\sqrt{11}, \pi, 55\}$$

$$B := \{\text{numeri naturali multipli di } 5\}$$

$$C := \{99\}$$

Determinare l'insieme

$$(A \cup C) \cap B.$$

**RISULTATO:**  $\{55\}$

7. Si considerino i seguenti intervalli:

$$A := (-\infty, 7)$$

$$B := [-2, 9)$$

$$C := [7, 10)$$

Determinare l'insieme

$$(A \cap B) \cup C.$$

**RISULTATO:**  $[-2, 10)$

### Proprietà delle funzioni

1. La funzione  $f(x) = e^{3(x+\pi)} - 1$  è iniettiva?

**RISULTATO:** SI

2. La funzione  $f(x) = \log(x^2 + 1)$  è iniettiva?

**RISULTATO:** NO

3. Quali sono le preimmagini di 1 tramite la funzione  $f(x) = e^{x^2-1}$  (ovvero gli  $x_0 \in \mathbb{R}$  tali che  $f(x_0) = 1$ )?

**RISULTATO:**  $\{1, -1\}$

4. Determinare il dominio di definizione della funzione  $f(x) = \log(x^4)$ .

**RISULTATO:**  $x \neq 0$  cioè  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ovvero  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

5. Sia  $A$  la preimmagine di 1 tramite la funzione  $f(x) = 2^x$ , ovvero

$$A := \{x_0 \in \mathbb{R} \text{ tali che } f(x_0) = 1\}.$$

Sia  $B := [0, \pi)$ . Determinare l'insieme  $A \cap B$ .

**RISULTATO:**  $\{0\}$

6. Sia  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione tale che  $f(x) = \log(x^3)$  per ogni  $x > 0$ . Calcolare la funzione inversa di  $f$ .

**RISULTATO:**  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

7. Siano  $f(x) = \log(x)$  e  $g(x) = 3x^2 + 2$ . Calcolare  $g \circ f$  e stabilire il suo dominio di definizione.

**RISULTATO:**  $(g \circ f)(x) = 3(\log(x))^2 + 2$ ,  $x > 0$

8. Siano  $f(x) = \log(x)$  e  $g(x) = 3x^2 + 2$ . Calcolare  $f \circ g$  e stabilire il suo dominio di definizione.

**RISULTATO:**  $(f \circ g)(x) = \log(3x^2 + 2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

### Equazioni e disequazioni elementari

1. Determinare tutti i valori di  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfano la seguente disequazione

$$\frac{(x^2 + \pi)(x^4 + 1)(7 - x)}{x - 1} < 0.$$

**RISULTATO:**  $x < 1$  o  $x > 7$  cioè  $\{x < 1\} \cup \{x > 7\}$  ovvero  $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$

2. Determinare tutti i valori di  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfano la seguente disequazione

$$\frac{e^{x-1}(x^2 + 5)(3 - x)}{x - 2} < 0.$$

**RISULTATO:**  $x < 2$  o  $x > 3$  cioè  $\{x < 2\} \cup \{x > 3\}$  ovvero  $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

3. Determinare tutti i valori di  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfano la seguente disequazione

$$\frac{x - 3}{x + 3} > \frac{x + 3}{x - 3}.$$

**RISULTATO:**  $x < -3$  o  $0 < x < 3$  cioè  $\{x < -3\} \cup \{0 < x < 3\}$  ovvero  $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

4. Determinare tutte le soluzioni di

$$\sqrt{x - 1} > -2.$$

**RISULTATO:**  $x \geq 1$  cioè  $\{x \geq 1\}$  ovvero  $[1, +\infty)$

5. Determinare tutte le soluzioni di

$$|x - 2| \geq x + 3.$$

**RISULTATO:**  $x \leq -1/2$  cioè  $\{x \leq -1/2\}$  ovvero  $(-\infty, -1/2]$

6. Determinare tutti i valori di  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfano la seguente disequazione

$$\frac{\log(x)}{x^3 - 1} < 0.$$

**RISULTATO:** nessun  $x \in \mathbb{R}$  cioè  $\emptyset$

7. Determinare tutti i valori di  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfano la seguente disequazione

$$\frac{\log(1+x^2)}{\cos(x)-2} \leq 0.$$

**RISULTATO:** ogni  $x \in \mathbb{R}$  cioè  $\mathbb{R}$

8. Determinare tutti i valori di  $x \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{(x-\pi)(25+x^2)}{15-x} \geq 0.$$

**RISULTATO:**  $\pi \leq x < 15$  cioè  $\{\pi \leq x < 15\}$  ovvero  $[\pi, 15)$

### Numeri complessi

1. Determinare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione

$$z^2 = 2i.$$

Scrivere le soluzioni in forma cartesiana.

**RISULTATO:**  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = -1 - i$

2. Determinare la parte immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1+i}.$$

**RISULTATO:**  $\Im(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Sia  $z = 3 + \sqrt{3}i$ . Scrivere  $z$  in forma trigonometrica.

**RISULTATO:**  $z = 2\sqrt{3}(\cos(\pi/6) + \sin(\pi/6)i)$

4. Sia  $z = 1 + i$ . Calcolare  $z^5$ , scrivendo il risultato nella forma trigonometrica.

**RISULTATO:**  $z^5 = 2^{5/2}(\cos(5\pi/4) + \sin(5\pi/4)i)$

5. Sia  $z$  il numero complesso scritto in forma trigonometrica

$$z = 2(\cos(5\pi/6) + \sin(5\pi/6)i).$$

Scrivere  $z$  in forma cartesiana.

**RISULTATO:**  $z = -\sqrt{3} + i$

6. Sia  $z$  un numero complesso che soddisfa la seguente relazione

$$iz = \frac{1}{i}.$$

Determinare la parte reale di  $z$  (oppure determinare il modulo di  $z$ , oppure scrivere  $z$  in forma cartesiana).

**RISULTATO:**  $\Re(z) = -1$  ( $|z| = 1$ ,  $z = -1 + 0i = -1$ )

7. Calcolare la parte reale del numero complesso  $z = \frac{\pi + 3i}{i}$ .

**RISULTATO:**  $\Re(z) = 3$

8. Determinare tutti i numeri complessi che soddisfano la seguente relazione

$$(1 + i)z = i.$$

Scrivere le soluzioni in forma cartesiana.

**RISULTATO:**  $z = 1/2 + i/2$

9. Consideriamo i seguenti numeri complessi:

$$a = 2 + i, \quad b = 1 - 2i, \quad c = \sqrt{3}.$$

Calcolare

$$\frac{|a|^2 |b|^2}{5} - |c|.$$

**RISULTATO:**  $5 - \sqrt{3}$

10. Consideriamo i seguenti numeri complessi:

$$a = 1 + 2i, \quad b = 3 - i.$$

Calcolare  $a\bar{b}$ . Scrivere la soluzione in forma cartesiana.

**RISULTATO:**  $1 + 7i$

### Calcolo combinatorio

1. Quanti sono i numeri naturali di 3 cifre tutte distinte?

**RISULTATO:**  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

2. Quanti sono i numeri naturali di 3 cifre tutte distinte la cui prima cifra risulta essere un numero pari?

**RISULTATO:**  $4 \cdot 9 \cdot 8 = 288$

3. Determinare il numero degli anagrammi della parola PIPPO.

**RISULTATO:**  $5!/3!$

4. Quante sono le parole di 5 lettere che si possono scrivere usando solo le lettere A, B, C e D?

**RISULTATO:**  $4^5$

5. Quante sono le parole con 4 lettere tutte distinte che si possono scrivere usando solo le lettere A, B, C, D ed E?

**RISULTATO:**  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

6. Quanti sono i sottoinsiemi con 5 elementi dell'insieme  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ?

**RISULTATO:**  $\binom{7}{5} = 21$

7. Sia  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Quanti sono gli elementi  $(a, b) \in A \times A$  tali che  $a \neq b$ ?

**RISULTATO:** 12

**Funzioni elementari**

1. Calcolare  $\log_2(1/8)$ .

**RISULTATO:**  $-3$

2. Calcolare  $\sqrt[3]{1/8}$ .

**RISULTATO:**  $1/2$

3. Calcolare  $\tan(-\pi/3)$ .

**RISULTATO:**  $-\sqrt{3}$

4. Calcolare  $\log(e^5)$ .

**RISULTATO:** 5

5. Calcolare  $e^{-\log 10}$ .

**RISULTATO:**  $1/10$