La notion de connexion au $XX^{\text{ème}}$ siècle et la sortie du fibré tangent
UE 902 EC 3*

Léo Vacher

2024

1 Introduction

Une connexion (en anglais "connection") est un objet mathématique permettant de définir la notion de transport parallèle et de dérivation des objets géométriques dans un espace courbe. Ayant émergé de la volonté de définir un opérateur de différentiation qui soit invariant sous changement de coordonnées, la notion de connexion jouera un rôle central pour calculer les courbes géodésiques, la torsion et la courbure sur les variétés dites Riemanniennes. Une fois généralisées, les connexions fournissent un outil puissant permettant de définir le parallélisme sur des espaces aux dimensions et aux géométries diverses. Les connexions apparaissent ainsi au point de contact entre géométries non-Euclidiennes et calcul infinitésimal, à la naissance de la géométrie différentielle. La portée de cette notion en mathématiques (géométrie différentielle, espaces fibrés, cohomologie...) et en physique (connexions de Yang et Mills (1954), de Berry (1984), relativité générale (Einstein 1915) ...) est absolument gigantesque, en faisant désormais une notion incontournable en géométrie contemporaine.

Nous présenterons ici comment ce concept a émergé et s'est articulé lors de l'apparition de la géométrie différentielle moderne. En particulier, nous chercherons à comprendre comment la notion de connexion, d'abord irrémédiablement liée à la métrique – i.e. au fibré tangent – a pu s'en émanciper au $XX^{\text{ème}}$ siècle, pour permettre l'apparition de la notion générale d'espaces fibrés grâce à des acteurs comme Weyl, Cartan et Ehresmann. Nous défendrons la thèse que cette mutation s'est opérée sous l'influence d'une double nécessité : une première nécessité venant des théories physiques, en réponse au besoin d'étendre la relativité générale et de généraliser les théories de jauges au contexte de la toute jeune mécanique quantique et une seconde nécessité géométrique, provenant du besoin de réconcilier deux conceptions apparemment incompatibles de la notion d'espace géométrique données par Klein et Riemann. Comme nous le verrons, le poids de cette double nécessité fournit un cas d'école particulièrement frappant d'interdépendance des développements en physique et en mathématiques. Au cours de cette généralisation, des propriétés cruciales, comme la courbure et la torsion, cessent d'être des propriétés des espaces pour devenir des propriétés des connexions elles-mêmes, amplifiant de surcroît l'importance de ce concept.

En section 2, nous commencerons par une rapide mise en contexte présentant le statut de la géométrie dans laquelle la notion de connexion pourra émerger à la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle. Puis, en section 3, nous présenterons la genèse de la notion de connexion dans le cadre de la géométrie Riemannienne, de l'introduction des symboles de Christoffel en 1869 jusqu'à la notion de transport parallèle par Levi-Civita en 1917. Dans la section 4, qui représentera la contribution principale de cet essai, nous décrirons comment cette notion a été généralisée au cours du $XX^{\text{ème}}$ siècle. Enfin, nous concluerons en section 5. Des définitions complémentaires pouvant aider la lecture sont données en appendice A, suivies d'une présentation formelle des différentes approches contemporaines pour

*Pour toute requête, contacter vacher.leo.etu@gmail.com

définir les connexions en appendice B. Enfin, quelques éléments de la Weltgeometrie de H. Weyl sont donnés en appendice C. Je cite dès maintenant les précieux articles de Bourguignon (1992) et de Freeman (2011) qui ont servis de sources secondaires pour la trame du présent essai.

2 Le statut de la géométrie jusqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle : le chemin des géodésiques.

La notion de connexion apparaît naturellement dans le cadre de la géométrie différentielle, représentant l'union du calcul différentiel et de la géométrie dite non-Euclidienne. Comme nous le défendrons brièvement ici, cette rencontre s'est opérée à partir du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, en partie suite à l'intérêt porté par la communauté scientifique à l'étude des courbes extrémales (minimisantes et minimisantes) et tout particulièrement celle des courbes extrémisant la distance sur les surfaces, appelées géodésiques [1]. Au terme de cette aventure intellectuelle, les connexions émergeront comme l'opérateur différentiel ultime permettant de dériver l'équation des géodésiques sur les surfaces et plus généralement dans tout type d'espaces.

À la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, le puissant calcul différentiel apparait comme un nouvel outil permettant de dériver des résultats globaux sur les fonctions et les courbes à partir de l'étude de leurs propriétés locales (i.e. sur des éléments infinitésimaux). C'est à Leibniz (1684) et à Newton (1669) que l'on doit l'introduction d'un tel outil, notamment pour répondre à des besoins émergeant de la mécanique. Dans leurs développements, les deux auteurs proposent des approches très différentes tant techniquement que conceptuellement, qui seront ultérieurement démontrées comme équivalentes [2].

Dans l'optique de montrer toute la puissance du calcul différentiel, Jean Bernoulli (1696), ami et mentor de Leibniz, défie la communauté des géomètres de trouver la trajectoire mécanique associée au temps le plus court pour qu'un point mobile soumis uniquement à son propre poids relie deux points (défi de la brachistochrone). Un tel défi fournira en effet un terrain de jeux idéal pour l'application des méthodes du calcul différentiel auquel s'attèleront les experts du sujet comme Leibniz et Newton, mais aussi Jacques Bernoulli, le frère de Jean, le Marquis de l'Hôpital et Ehrenfried Walther von Tschirnhaus. Dans un contexte de rivalité entre les deux frères Bernoulli, les défis concernant les courbes aux propriétés particulières se succèderont avec notamment l'étude des courbes isopérimètres, proposée comme défi par Jacques Bernoulli (1697a) à son frère et à l'origine de nombreuses joutes publiques. La même année, Bernoulli (1697b) défiera la communauté de trouver les courbes géodésiques sur des surfaces quelconques. L'équation différentielle solution ne sera publiée que plus de trente ans plus tard indépendamment par Euler (1732), à la demande de son mentor Jean Bernoulli, et par Clairaut (1733). Pour dériver sa solution, Euler sera le premier à caractériser une surface générale par une expression différentielle du type $\mathrm{d}S(x, y, z) = 0$ dans un système de coordonnées (x, y, z), anticipant les développements futurs caractérisant les surfaces par des formes quadratiques (les métriques) [3]. On comprend alors progressivement que les géodésiques forment des courbes particulières permettant d'étudier les propriétés des surfaces elles-mêmes. Gauss (1828) utilisera ces courbes pour étudier et définir la notion de courbure et met en avant le caractère intrinsèque de cette quantité [4]. L'investigation menée par Gauss sur les surfaces représente un véritable tournant conceptuel, esquissant la plupart des outils modernes de la géométrie différentielle tel que l'élément linéaire différentiel de longueur $\mathrm{d}s$. À la suite de Gauss, l'étude extensive du cinquième postulat d'Euclide au XIX$^{\text{ème}}$ siècle amènera progressivement les mathématiciens à penser des géométries alternatives, dites "non-Euclidiennes". Gauss est un des premiers à identifier l'intérêt de ces géométries, qu'il appelle "anti-Euclidienne", mais ne publie pas à ce sujet par peur de la controverse. Les

1. J'ai eu la chance de traiter les premières étapes de l'étude moderne des courbes géodésiques dans le court essai disponible ici.

2. Pour plus de détails sur l'histoire du calcul différentiel, nous renvoyons à la lecture de Boyer (1959) et Freguglia et Giaquinta (2016).

3. Pour une histoire complète des courbes géodésiques voir notamment Eneström (1899).

4. à ce sujet, voir l'analyse de Nabonnand (1995)

mathématiciens russes et hongrois, Nikolai Lobachevsky et Janos Bolyai étudient des espaces aux propriétés particulières respectivement en 1829–1830 et en 1832, développant ce qui deviendra connu sous le nom de géométrie hyperbolique.

En parallèle, les méthodes du calcul différentiel se voient progressivement raffinées, notamment par le calcul δ proposé par Lagrange (1806) et étudié extensivement et systématiquement par Euler [5]. Ces nouveaux outils sont sublimés par les études mécaniques proposées par William Rowan Hamilton (1805-1865), Jopseph Liouville (1809-1882), Gaston Darboux (1842-1917) pour ne citer qu'eux. Ils donneront ainsi naissance à la mécanique analytique moderne dans laquelle les géodésiques et courbes minimisantes jouent encore un rôle primordial puisqu'elles caractérisent les trajectoires des systèmes physiques [6] (on parle aujourd'hui de mécaniques Lagrangienne et Hamiltonienne).

La réunion de tous ces développements amènera Riemann (1854) à introduire la notion de "n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit", aujourd'hui appelée variété (en anglais "manifold") de dimension n, lors de sa conférence d'habilitation, à la demande de Gauss qui était précédemment son directeur de thèse (le manuscrit ne sera publié qu'après la mort de Riemann en 1868). Ce travail, conceptuel et presque exempt de formules, donne les pistes pour généraliser à n'importe quelle dimension le travail de Gauss sur les surfaces. Riemann formalisera partiellement ces idées dans un essai ultérieur en latin non terminé traitant de considérations thermodynamiques en réponse à un concours lancé par l'Académie des Sciences Paris (Riemann 1861). Dans ce nouveau cadre, les distances sont données sur la variété par une forme quadratique $\mathrm{d}s^2$ généralisant l'élément linéaire de Gauss. $\mathrm{d}s^2$ sera exprimé plus tard par le tenseur métrique g, à partir duquel peut être définie la courbure [7]. Comme nous le verrons, c'est dans ce contexte qu'émerge la notion de connexion pour rendre compte de la notion de dérivation puis de parallélisme sur les variétés Riemanniennes.

3 La genèse des connexions, de Riemann à Levi-Civita

3.1 Christoffel 1869

Après leur introduction, les travaux de Riemann restent peu reconnus, si ce n'est par son directeur de thèse Gauss. Progressivement, cependant, l'étude formelle du nouveau cadre géométrique qu'il propose se met en place et de nombreux mathématiciens proposent des développements conséquents comme Lamé, Beltrami et Helmotz. Des avancées mathématiques majeures sont également amenées par les développements en physique comme la formulation de l'électromagnétisme proposée par James Clerk Maxwell [8]. Dans ce contexte, Erwin Bruno Christoffel (1869) et Rudolf Lipschitz (1869) étudient les propriétés de transformation des formes quadratiques par changement de coordonnées. Christoffel considère la relation (Eq. 1 p.47)

$$\sum \omega_{ik}\partial x_i \partial x_k = \sum \omega'_{ik}\partial x'_i \partial x_k, \tag{1}$$

traduisant l'invariance de la forme différentielle ω par changement de système de coordonnées $f : x \to x'$. On pourrait typiquement penser au cas particulièrement intéressant où $\omega = g$ est la métrique. Essentiellement, Christoffel cherche ici à construire des expressions covariantes (qui ne changent pas de formes par changement de coordonnées). En étudiant quelles contraintes doivent satisfaire les dérivées de la transformation $f(x_i)$ pour satisfaire la contrainte donnée par l'équation (1), Christoffel introduit par commodité l'objet $\begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix}$, plus tard appelé "symboles de Christoffel". Il est défini en fonction des dérivées de ω comme $\begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix} = \omega^{kl}(\partial_i \omega_{jl} + \partial_j \omega_{il} - \partial_l \omega_{ji})/2$ (Eq. 4 p.48). Dans le cas

5. A ce sujet, voir Woodhouse (1810) et Carathéodory (1937).

6. En mécanique Lagrangienne, les trajectoires des systèmes extrémisent l'action et en mécanique Hamiltonienne, elles sont des formes de géodésiques sur l'espace des phases pensé comme une variété symplectique.

7. Le tenseur de courbure apparait déjà sous la plume de Riemann comme un terme du second ordre dans l'expression de $\mathrm{d}s^2$. Cependant, il faut bien comprendre ici que la notion de tenseur n'existe pas encore et on préfère parler de "symboles". Pour plus de détails sur l'apparition du tenseur de courbure, voir Darrigol (2015).

8. Pour une histoire complète des mathématiques à la suite de Riemann, voir la partie II de Struik (1933) et le très complet exposé de Spivak (1999) contenant également une analyse des papiers de Gauss et de Riemann

où $\omega = g$, ceux familiers avec la géométrie Riemannienne reconnaitrons en $\left[{ij \atop k}\right]$ l'expression des coefficients de la connexion de Levi-Civita Γ^k_{ij} [9] (pour une définition voir l'appendice B).

Cependant, $\left[{ij \atop k}\right]$ n'est pas encore interprété comme lié à la notion de transport parallèle, et Christoffel fait apparaitre ce coefficient uniquement à la recherche de réduction algébrique des invariants différentiels [10].

3.2 Ricci-Curbastro 1901

Il faut attendre les développements de Gregorio Ricci-Curbastro (Ricci 1887 ; Ricci 1888), suivis du manuscrit central co-écrit avec son étudiant Tullio Levi-Civita : "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications" (Ricci et Levi-Civita 1901). L'essai frappe par son style clair et moderne et est considéré comme le premier à avoir formellement introduit la notion de tenseur [12] et la distinction entre quantités covariantes et contravariantes.

Dans leur manuscrit, Ricci et Levi-Civita se basent sur les propriétés d'invariances étudiées par Christoffel [13] pour définir un opérateur de dérivation sur les variétés Riemanniennes qui soit invariant par changement de coordonnées. Pour le cas particulier d'un vecteur $X_r = \partial X/\partial x_r$, où X est une fonction et x_r est une coordonnée, les auteurs définissent la dérivée covariante de X_r par rapport à x_s selon "la forme fondamentale" (la métrique) comme (Eq. 19 à 19"' p.138)

$$X_{rs} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \sum_{q=1}^{n} \left\{{rs \atop q}\right\} X_q. \tag{2}$$

Ainsi, il est démontré que l'objet X_{rs}, aujourd'hui couramment noté $\nabla_s X_r$, peut être compris comme une dérivée du vecteur X_r dans la direction d'un vecteur pointant selon x_s, dont la valeur est invariante par changement de référentiel et conserve la forme de la métrique. Un saut conceptuel majeur s'opère : on étend là les notions de calcul différentiel à des objets géométriques que sont les vecteurs et les tenseurs dans un espace courbe. C'est donc tout l'objet du "calcul différentiel absolu" que de définir des dérivées qui soient indépendantes du choix de coordonnées, dans la volonté de raisonner sur des objets géométriques dont la nature est indépendante d'un choix arbitraire de base dans laquelle les exprimer. Dans Ricci et Levi-Civita (1901), le lien crucial est également fait avec les courbes géodésiques et les trajectoires de la mécanique analytique de Lagrange, qui sont comprises comme des courbes dont la dérivée covariante $\nabla_u u$ du vecteur tangent u est nulle en tout point (voir discussion dans le Chapitre V, p.178). Il s'agit donc bien ici du point de naissance de la notion de dérivée covariante, et donc de celle de connexion.

Cependant, comme le déclarera Levi-Civita lui même "for many more years it was used almost exclusively by its inventor and a few of his students", jusqu'à ce qu'en relativité générale "Ricci's

9. Comme argumenté dans cette discussion, la notation $\Gamma^i{}_{jk}$ Einstein (1914) (p.1058) Einstein (1915) (p. 783). Le choix de la lettre gamma pourrait être associé au mot "gravitation". Au cours du XX$^{\text{ème}}$ siècle, les notations en crochets de Christoffel $\left[{ij \atop k}\right]$ et $\left\{{ij \atop k}\right\}$ se verront progressivement remplacées dans la littérature par $\Gamma^i{}_{jk}$.

10. Il n'est d'ailleurs absolument pas question de calcul différentiel sur les variétés dans les travaux de Christoffel, qui utilise uniquement des méthodes algébriques (contrairement à Lipschitz (1869) qui lui utilise une approche basée sur le calcul des variations). L'étude des propriétés d'invariance des formes quadratiques par changement de référentiel était alors un sujet phare à l'époque (particulièrement en Italie) et déjà initiée par d'autres mathématiciens comme Casorati (1862) [11].

12. On peut argumenter que de tels outils avaient déjà été développés, au moins partiellement, avec le calcul extérieur de Grassmann (1844).

13. Les auteurs sont très clairs sur ce point et il me semble important d'en citer l'extrait suivant : "M. Christoffel a remarqué le premier que si un système d'ordre m, $X_{r_1,r_2 \ldots r_m}$ est covariant, le système d'ordre $m+1$

$$X_{r_1,r_2\ldots r_m,r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1,r_2\ldots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} \left\{{r_l r_{m+1} \atop q}\right\} X_{r_1,r_2\ldots r_{l-1} q r_{l+1}\ldots r_m}$$

est aussi covariant. Nous appelons dérivation covariante [...] l'opération par laquelle, cette forme aidant, on passe d'un système donné $X_{r_1,r_2\ldots r_m}$ au système $X_{r_1,r_2\ldots r_m,r_{m+1}}$" (Ricci et Levi-Civita (1901), p.138) calculus revealed itself to be not only useful but truly indispensable"[14]. En effet, le formalisme proposé par Ricci et Levi-Civita apparaitra comme un outil indispensable pour le développement de la théorie de la relativité générale par Albert Einstein (1915), qui représentera ainsi un énorme succès pour le calcul différentiel absolu. Cette théorie physique décrit la force de gravité comme la manifestation d'un espace-temps courbe (modélisé par une variété de Riemann[15] en quatre dimensions) sur lequel les objets se déplacent en suivant des mouvements géodésiques. Cependant, d'après Bourguignon (1992) il s'agit là d'une "occasion manquée" pour les connexions, car elles ne sont pas interprétées géométriquement ni même étudiées individuellement : il n'existe qu'une manière de différentier les objets sur l'espace-temps, à travers l'utilisation des symboles de Christoffel (Eq. 2), et il s'agit là avant tout d'une opération algébrique et non géométrique.

3.3 Levi-Civita 1917

Le prochain saut majeur est effectué par Levi-Civita (1917)[16] qui propose une interprétation géométrique des objets formels du calcul de Ricci associés à la géométrie Riemannienne[17]. Il aboutit à de tels résultats en cherchant originellement à simplifier la complexité des dérivations associées au calcul différentiel absolu. Levi-Civita commence son essai en cherchant à généraliser le "parallélisme ordinaire" – définit dans un espace Euclidien – sur une variété Riemannienne V_n. Pour cela, il écrit la condition du parallélisme ordinaire dans l'espace euclidien entre deux directions α et α' situés en deux points infinitésimalement proches P et P' comme la conservation des angles $\widehat{(f)(\alpha)} = \widehat{(f)(\alpha')}\ \forall f$. L'enjeu est alors de demander que cette condition soit satisfaite pour des vecteurs appartenant à l'espace tangent de V_n en P et P' ($\alpha, f \in TV_n$[18]). En notant ξ^i les coordonnées d'un vecteur définissant la direction α en P, $\xi^i + \mathrm{d}\xi^i$ celles d'un vecteur associé à la direction α' en P', et $\mathrm{d}x_j$ la distance infinitésimale PP', Levi-Civita démontre que la condition de parallélisme devient (Eq. A p. 174)

$$\mathrm{d}\xi^{(i)} + \sum_{jl}^{n} \left\{ {jl \atop i} \right\} \mathrm{d}x_j \xi^{(l)} = 0. \tag{3}$$

En considérant alors une courbe paramétrique $x_j(s)$ reliant P et P', l'équation (3) est équivalente à l'annulation de la dérivée covariante $\nabla_v \xi = 0$ où $v = (\mathrm{d}x^j/\mathrm{d}s)\,\partial_j$ est le vecteur tangent à $x(s)$ (en notations modernes). Cela permet ainsi à Levi-Civita de définir le "transport parallèle" du vecteur ξ dans la direction v, correspondant au roulement sans glissement du vecteur sur la variété et comprend donc que c'est la connexion qui définit le parallélisme sur une variété Riemannienne à travers la dérivée covariante. En considérant qu'il est toujours possible d'immerger la variété V_n dans un espace Euclidien S_N tel que $N > n$[19], Levi-Civita comprend que la dérivée covariante correspond au projeté orthogonal de la variation du vecteur dans S_N, c'est-à-dire $\nabla_u u = P_{\gamma(\tau)} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ où $P : S_N \to TV_n$ est le projecteur orthogonal de l'espace Euclidien englobant vers l'espace tangent[20], ainsi le vecteur est dérivé dans l'espace ambiant puis "plaqué" sur la variété aussi rigidement que possible, correspondant à l'expérience que l'on aurait à déplacer aussi parallèlement que possible un objet sur une surface courbe. L'équation des géodésiques $\nabla_u u = 0$ se comprend alors comme "la vitesse u d'une géodésique est transportée aussi parallèlement que possible le long de la courbe". Ce dernier développement représente donc une étape majeure qui donne une visualisation géométrique

14. Citations empruntées à Freeman (2011).

15. Plus exactement une variété "pseudo-Riemannienne", car le produit scalaire définit par la métrique en chaque point n'est pas défini positif.

16. Voir la traduction en anglais de Godina (2022).

17. Des développements similaires furent également entrepris indépendamment par G. Hessenberg et J.A. Schouten (Reich 1992 ; Cogliati 2016).

18. L'angle $\widehat{(u)(v)}$ entre deux vecteurs u et v est défini par la métrique g dans chaque espace tangent comme $\cos\left[\widehat{(u)(v)}\right] = g(u,v)/g(u,u)/g(v,v)$.

19. Ce constat est en fait le point de départ de Levi-Civita, et il utilise le fait que tous les vecteurs de TV_n sont aussi des vecteurs de S_N pour dériver l'équation (3).

20. Pour une analyse fine de la dérivée covariante définie ainsi, voir l'excellent cours de Faure (2021a).

de ∇ et amène progressivement à penser les connexions comme un objet en soi. Fort de ces résultats, Levi-Civita donne également une interprétation géométrique au tenseur de courbure. En considérant un parallélogramme géodésique $PQQ'P'$, il démontre que le tenseur de courbure permet de calculer la différence de longueur $P'Q'^2 - PQ^2$.

4 Les connexions au XX$^{\text{ème}}$ siècle et la sortie du fibré tangent

La notion de connexion introduite jusqu'ici est irrémédiablement définie et liée à la métrique et ainsi aux propriétés géométriques de l'espace dans lequel elle est définie. Elle permet de calculer les géodésiques et la courbure et – comme l'a montré Levi-Civita – définit une notion de transport parallèle des objets géométriques en accord avec l'intuition de transporter un objet (e.g. un vecteur) aussi "rigidement" que possible dans l'espace sans lui induire de rotation supplémentaire. Aussi crucial que soit ce concept, il s'agit pourtant aujourd'hui d'un cas particulier de connexion, appelée connexion de Levi-Civita, définie sur le fibré tangent (où vivent les vecteurs et les tenseurs). Un saut conceptuel majeur va alors s'opérer au XX$^{\text{ème}}$ siècle, permettant de définir le parallélisme et le transport parallèle d'objets plus abstraits. Comme nous cherchons à le défendre ici, cette transition s'est opéré sous l'influence de deux nécessités indépendantes : un besoin motivé par la description physique des interactions au-delà de la gravité d'Einstein et la volonté d'unifier la géométrie proposée par Riemann et celle proposée par Klein.

4.1 La nécessité de la physique : de Weyl à Yang-Mills

Les deux premières décennies du XX$^{\text{ème}}$ siècle voient le succès de la relativité générale et les prémices de la physique quantique. C'est dans ce nouveau cadre que des connexion plus générales que celle de Levi-Civita apparaitront, d'abord dans une tentative échouée d'étendre la relativité générale pour inclure l'électromagnétisme, avant d'être imposées par le formalisme de la mécanique quantique relativiste et de la physique des particules. Le mathématicien et physicien allemand Hermann Weyl (1918c) est le premier à définir formellement les connexions affines, indépendamment de la métrique, se libérant ainsi de l'unique connexion de Levi-Civita étudiée jusqu'alors pour envisager d'autres connexions possibles, faisant d'elles un objet mathématique à part. Dans cet essai crucial, il est d'ailleurs le premier à appeler l'objet associé aux symboles de Christoffel "Zusammenhang", pouvant se traduire par "connexion". Formellement, Weyl réalise en fait que la notion de parallélisme n'est pas contenue dans la variété (M, g) seule, mais nécessite l'ajout de la structure Γ supplémentaire définissant le parallélisme [21] i.e. il est possible de définir Γ indépendamment de g dont la connexion de Levi-Civita est seulement un cas particulier [22] [23].

Immédiatement après ces premières réflexions mathématiques, Weyl fournit un exemple de connexion affine alternative dans Weyl (1918a) puis dans le livre Weyl (1918b) [24], alors qu'il cherche à unir électromagnétisme et gravitation dans une seule théorie des champs unifiés : la Weltgeometrie. La motivation originale de Weyl vient du fait que l'utilisation de la connexion affine de Levi-Civita Γ pour décrire l'espace-temps ne semble naturelle ni du point de vue des mathématiques – car elle permet un changement de direction des vecteurs lors du transport parallèle, mais pas de longueur, elle n'est donc pas le cas le plus général – ni du point de vue de la physique, car elle permet de définir les longueurs de manière absolue sur l'ensemble de l'espace-temps, et les principes physiques ayant guidé l'émergence de la relativité restreinte et générale préfèreraient une théorie entièrement

21. à ce sujet voir également les suppléments associés à Bell et Korté (2016).

22. Au cours de ces mêmes développements mathématiques, Weyl introduit également C, aujourd'hui connu sous le nom "tenseur de Weyl", outil indispensable pour catégoriser les différents types d'espace-temps en relativité générale.

23. Peu de temps après, d'autres mathématiciens tels que Schouten (1922) s'attèlent à généraliser la notion de parallélisme proposée par Levi-Civita (pour une discussion complète voir e.g. Struik (1933) et Cogliati (2016)).

24. Le livre discutera la Weltgeometrie seulement à partir de sa troisième édition en 1921.

locale[25]. Comme nous le détaillons en appendice C, Weyl construit alors sa théorie en faisant appel à une forme générale d'invariance des propriétés de l'espace-temps, appellée "Massstab Invarianz" puis "Eich Invarianz"[26], qui sera le précurseur moderne de l'invariance de jauge définie de manière moderne et qui servira de guide à de nombreux développements subséquents en physique (O'Raifeartaigh et Straumann 1998 ; Jackson et Okun 2001). En plus des changements de référentiels dans l'espace-temps, il est demandé que la théorie reste invariante sous la transformation conjointe[27] $g \to e^{\Lambda} g$ et $A = A - \mathrm{d}\Lambda$, où $\Lambda(x)$ est une fonction arbitraire sur l'espace-temps. La transformation de g (appelée aujourd'hui transformation conforme) traduit l'impossibilité de calculer les longueurs de manière absolue sur l'ensemble de l'espace-temps tout en conservant les angles, et la transformation de A est la transformation de jauge classique du potentiel électromagnétique. Avant d'être identifié avec le potentiel électromagnétique, A est originellement introduit dans la théorie afin de définir le transport parallèle des objets de manière unique à l'aide d'une nouvelle connexion affine (dite "de Weyl") impliquant à la fois la connexion de Levi-Civita Γ et le potentiel électromagnétique A. Alors que Γ induit la rotation des vecteurs lors du transport parallèle, la contribution de A peut modifier leur longueur. A est ainsi a lui seul un nouveau type de connexion introduit par Weyl, régissant le transport parallèle des longueurs. D'un point de vue physique, le champ électromagnétique, comme le champ gravitationnel, devient alors lui aussi une propriété de l'espace-temps (et influence les mesures de temps et d'espace). La proposition de la Weltgeometrie est donc particulièrement révolutionnaire, car elle prédate la formalisation de la mécanique quantique ainsi que la compréhension moderne de l'électromagnétisme comme un champ de jauge.

Einstein décrira la Weltgeometrie comme “a coup of genius of the first rate...” mais devra admettre à Weyl que "although your idea is so beautiful, I have to declare frankly that, in my opinion, it is impossible that the theory corresponds to nature"[28]. En effet, Einstein constate que, la longueur des objets et le temps mesuré par les montres étant dépendant de leur trajectoire dans l'espace-temps dans la Weltgeometrie, la fréquence des horloges atomiques devrait dépendre de la position et de l'histoire passée des atomes, en contradiction flagrante avec l'expérience. Weyl continuera cependant à défendre hardiment sa théorie pendant plus de dix ans, motivé par sa beauté mathématique. L'avènement de la mécanique quantique permettant de choisir une unité universelle de longueur à travers $\hbar$ finit par convaincre Weyl que la longueur peut bien être choisie globalement et qu'il doit renoncer à la Weltgeometrie au début des années 20. Il se concentrera alors sur des études purement mathématiques jusqu'en 1926. Cependant, les idées de Weyl ont été largement réutilisées en physique, notamment dans les développements ultérieurs menés par Kaluza et Klein dans lesquels l'électromagnétisme émerge d'une cinquième dimension de l'espace-temps (Kaluza 1921)[29], mais également dans la recherche de théories conformes (ou invariantes de Weyl) en théories quantique des champs, cosmologie et théorie des cordes[30].

Au regard des connexions, ce premier apport de Weyl est donc conséquent : d'une part, il isole la connexion comme un objet en soi, central pour la physique et les mathématiques et, motivé par une théorie physique, il fournit un exemple de connexion alternative à celle de Levi-Civita.

Au milieu des années 1920, l'avènement de la formalisation moderne de la mécanique quantique va de nouveau bouleverser le rôle joué par les connexions en physique et les généraliser grandement, sans pour autant que les physiciens en prennent conscience. Schrödinger (1922), remarque que la théorie proposée par Weyl pourrait décrire non pas la métrique, mais les propriétés de la fonction d'onde de l'électron à condition que la transformation de jauge proposée soit donnée par une phase complexe (et non réelle comme proposé par Weyl). Des considérations similaires seront effectuées à

25. À savoir que les points de l'espace-temps sont maximalement indépendants les uns des autres et que l'information peut se transmettre d'un point à un autre de proche en proche à une vitesse inférieure à celle de la lumière.

26. Ce nom lui est suggéré suite à des échanges avec Einstein (Scholz 2004).

27. Ici en notations modernes.

28. citations empruntées à Straumann (1996) (p.1).

29. Pour une introduction formelle voir e.g. Coquereaux et Jadcyzk (1988).

30. Pour une discussion sur la recrudescence moderne de la théorie de Weyl, voir e.g. Sanomiya et al. (2020), Farnsworth, Luty et Prilepina (2017), Barceló, Carballo-Rubio et Garay (2018), Scholz (2018) et Scholz (2020).

nouveau ultérieurement par Fock (1926) et London (1927) [31]. Alors que Schrödinger (1926) développe sa reformulation de la mécanique quantique en termes de fonction d'ondes à travers son équation éponyme, il apparaît de plus en plus clairement aux physiciens que l'électromagnétisme intervient dans la théorie quantique à travers l'opérateur de quantité de mouvement $p_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

Un tournant majeur s'opère lorsque Dirac (1928) démontre que, pour adhérer avec la relativité restreinte [32], la fonction d'onde décrivant l'électron doit avoir quatre composantes (il s'agit d'un spineur [33]). Weyl propose alors l'année suivante une généralisation de la connexion de Levi-Civita aux spineurs [34] [35] (Weyl 1929b ; Weyl 1929a). Les connexions se voient donc étendues pour agir sur des objets ne vivant pas sur le fibré tangent (vecteurs et tenseurs) mais sur des espaces complexes (associés au fibré tangent) où agissent des représentations alternatives du groupe de rotation. Ce développement atteint son point culminant lorsque, à la fin du papier, il démontre de manière cruciale que l'interaction électromagnétique peut être dérivée en demandant à la théorie de respecter une symétrie de jauge. En effet, une fois le choix de repère fixé sur l'espace-temps, Weyl remarque qu'il reste une liberté dans la définition du champ de Dirac ψ laissant la théorie invariante sous la transformation $\psi \to e^{i\Lambda}\psi$. Weyl argumente que, comme on peut faire un choix arbitraire de référentiel en chaque point de l'espace-temps, on doit pouvoir en faire de même avec le choix de la phase du spineur, et Λ doit alors être une fonction de x. Pour accommoder ce choix et préserver l'invariance du terme $\partial_\mu\psi$ dans l'équation de Dirac [36], il est nécessaire d'ajouter un nouveau champ A à la théorie, entrant dans la quantité de mouvement $\partial_\mu - ieA_\mu$ et se transformant comme $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\Lambda$ lors d'un changement de phase de ψ (appelé ici encore changement de jauge). A peut alors être identifié comme le champ électromagnétique. On retrouve donc une structure similaire à celle de la Weltgeometrie, où ψ joue le rôle de g et l'exponentielle de la transformation conforme contient un facteur imaginaire supplémentaire. En utilisant le théorème de Noether (1918), Weyl associe également invariance de jauge et conservation de la charge électrique, comme il avait déjà tenté de le faire pour la première fois en 1918 [37]. Face à ces nouveaux résultats, Weyl reste prudent après la déception de sa première grande ambition d'unification et la visibilité de ses travaux reste faible comparée à l'ampleur de sa réalisation [38]. De plus, alors que Weyl réalise indubitablement que A est une connexion affine dans sa théorie de 1918, il ne semble pas qu'il identifie de nouveau A comme une connexion en 1929, dont F serait la courbure (voir discussion section 4.3). Il fait alors inconsciemment un pas de géant hors du fibré tangent pour la théorie des connexions.

La procédure employée par Weyl pour générer une interaction à partir d'une symétrie de jauge, sera lentement assimilée par les physiciens et réutilisée ultérieurement pour modéliser toutes les interactions fondamentales connues. Yang et Mills (1954) proposent une modélisation similaire de l'interaction forte avec une transformation de jauge agissant sur le doublet proton/neutron à travers le groupe non-abélien SU(2) modélisant la symétrie d'isospin [39]. Ce même modèle sera réadapté ultérieurement indépendamment par Glashow (1961), Weinberg (1967) et Salam (1969) pour proposer

31. A ce sujet, voir la discussion complète donnée par Yang (1987).

32. La réalité est un peu plus complexe, Klein (1926) et Gordon (1926) ayant déjà proposé une équation de Schrödinger relativiste pour une fonction d'onde scalaire. Dirac lui cherche une équation relativiste qui soit linéaire.

33. Objet déjà découvert dans un contexte géométrique par Cartan (1913), qui sera un des principaux acteurs de notre prochaine section.

34. Fock (1929) proposera un développement similaire. Pour une comparaison des approches de Weyl et de Fock, voir Scholz (2004).

35. Comme les spineurs de Dirac transforment sous la représentation $(1/2, 1/2)$ du groupe de Lorentz O(1,3), Weyl doit introduire les tétrades ou repères mobiles étudiés largement par Cartan afin de définir la connexion (voir section prochaine).

36. Pour des définitions, voir l'appendice A.

37. Pour une discussion très enrichissante sur l'histoire des liens entre transformation de jauge et conservation de la charge électrique, voir Brading (2002).

38. Comme remarqué par Yang (1987), généraliser l'objection d'Einstein à la Weltgeometrie à la nouvelle théorie de jauge de Weyl prédit la possibilité de mesurer (e.g. par interférences) une différence de phase entre des électrons ayant suivi une trajectoire différente. Il s'agit là en fait de la prédiction de l'effet bien connu présenté par Aharonov et Bohm (1959) et observé ultérieurement par Tonomura et al. (1982).

39. Il ne semble pas que Yang et Mills connaissaient les travaux de Weyl et citent à la place un papier de Pauli de 1941 pour les théories de jauges.

l'existence de l'interaction électrofaible unifiant force électromagnétique et nucléaire faible dans un seul formalisme et également pour modéliser l'interaction forte à travers la symétrie de couleur d'un triplet de quarks sous l'action du groupe SU(3) (Gell-Mann 1964). Cependant, l'interaction faible semble violer la symétrie de jauge de par la masse des bosons vecteurs W. Il est alors fascinant de constater que, pour préserver le principe de jauge introduit et défendu par Weyl, l'existence d'un nouveau champ scalaire, le boson de Higgs, a été prédite indépendamment en 1964 par plusieurs physiciens (Englert et Brout 1964 ; Higgs 1964 ; Guralnik, Hagen et Kibble 1964). Il sera enfin détecté au Large Hadron Collider (LHC) en 2012 (CMS Collaboration 2012 ; Atlas Collaboration 2012). Le statut des théories de jauges, encore aujourd'hui, est que les champs de matières physiques ψ vivent dans des espaces fibrés associés aux groupes de structure G=U(1) pour électromagnétisme, G=SU(2) pour l'interaction faible et G=SU(3) pour l'interaction forte, les connexions A étant les champs de bosons médiateurs (respectivement les photons, les bosons $\mathrm{W}^{\pm}$ et Z, et les gluons) vivant dans le fibré adjoint. Les transformations de jauges traduisent alors simplement l'invariance par changement de coordonnées dans la fibre. Cependant il semble clair que, jusqu'aux années 1970, pas ou peu de physiciens identifient les champs de jauges avec les connexions au même titre que celle de Levi-Civita sur l'espace-temps (voir à nouveau la discussion en Sec.4.3).

Pour résumer, nous citons Dyson (1983) : "So the story of gauge fields is full of ironies. A fashionable idea, invented for a purpose which turns out to be ephemeral, survives a long period of obscurity and emerges finally as a corner-stone of physics", illustrant donc l'ironie que Weyl ait introduit d'abord triomphalement les champs de jauges comme des connexions alternatives à celle de Levi-Civita en 1918, unifiant toute la physique connue alors, avant de renoncer à son idée originale pour réintroduire timidement ceux-ci en 1929 alors qu'il fait, certainement inconsciemment, une découverte majeure qui bouleversera la physique quelques décennies plus tard. On rajoutera à cette dimension ironique, que Weyl réintroduira les champs de jauges sans les identifier comme des connexions, à la suite de quoi mathématiciens et physiciens ont suivis parallèlement les voies extraordinairement prometteuses des connexions sans réaliser immédiatement qu'ils parlaient du même objet.

4.2 La nécessitée géométrique : de Cartan à Ehresmann

Revenons donc au point de départ du papier de Levi-Civita de 1917 pour étudier les développements entrepris indépendamment sur les théories des connexions sous le poids d'une nécessité géométrique. Au-delà de l'impact majeur des propositions de Riemann et de leurs développements discutés plus haut, le statut de la géométrie au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle est entraîné par un second développement majeur : le programme Erlanger initié par le mathématicien et physicien allemand Felix Klein (1893). Il se fonde sur les groupes et algèbres de Lie (1888) [40] qui sont des groupes dépendant d'un paramètre continu [41]. Ils peuvent ainsi traduire les transformations continues (e.g. translations et rotations) et il est possible de définir des notions de calcul différentiel sur eux à travers la notion de transformations infinitésimale [42].

Le programme Erlanger entrepris par Klein, prenant racine dans la géométrie projective, propose de caractériser les espaces de la géométrie par un ou plusieurs groupes de transformation agissant sur eux et les laissant invariants. Ainsi, l'espace Euclidien est caractérisé par le groupe orthogonal O(3), laissant invariantes les longueurs et celui de Minkowski de la relativité restreinte par le groupe de Poincaré O(1,3) laissant invariant l'intervalle d'espace-temps. Cependant, les espaces courbes de Riemann, pour lesquels les invariances (données par la métrique) ne sont définies que localement, ne semblent pas pouvoir rentrer dans le cadre géométrique proposé par Klein.

C'est au mathématicien et physicien français Élie Cartan que l'on doit l'unification de ces deux approches à travers l'introduction de nouveaux espaces, qu'il appelle "espaces généralisés" ou "espaces

40. Le nom aurait été donné par Weyl en 1930. Notons ici que Weyl a également réalisé un travail majeur sur les groupes de Lie et leur application à la physique quantique (Weyl 1928).

41. Pour une histoire des groupes de Lie, voir Hawkins (2000).

42. Chaque groupe de Lie est en fait assimilable à une variété différentielle.

non holonomes", qui seront les précurseurs des espaces fibrés. En faisant cela, Cartan est également motivé par la volonté de généraliser la géométrie de Riemann et le parallélisme de Levi-Civita à d'autres types d'espaces à travers des développements géométriques épurés, s'opposant aux lourds calculs analytiques de Ricci qu'il décrit comme une "orgie d'indices" (Cartan 1928).

La première révolution majeure introduite par Cartan consiste à étudier le comportement des repères mobiles [43], considérant notamment comment un tel repère se comporte lorsqu'il est transporté parallèlement le long de courbes ou de boucles. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que la donnée d'un repère orthonormal en chaque point d'un espace définit aussi la notion d'orthonarmalité en chaque point, ce qui est équivalent à la donnée d'une métrique. En plus de cela, le repère contient une information sur la notion d'orientation et il est possible de lui appliquer des rotations en chaque point i.e. il se transforme sous l'action des groupes de Lie de symétrie de l'espace, dans l'esprit du programme Erlanger de Klein. Raisonner ainsi sur les repères mobiles amènera progressivement à penser l'espace des repères et non l'espace tangent comme l'objet d'intérêt pour étendre la géométrie et expliquera donc la place centrale occupée par la notion de fibré principal dans la définition moderne des connexions [44]. La méthode du repère mobile trouve ses origines dans les applications à la mécanique de Darboux (1894) et Cartan l'applique dès 1910 pour l'étude des groupes de Lie et des espaces de Klein [45] (Cartan 1910). Il formalise alors partiellement les espaces généralisés dans Cartan (1922) où il discute les fondements mathématiques de la relativité générale. Il offre également ici une nouvelle définition et une interprétation géométrique de la connexion de Levi-Civita et de la courbure à partir de leurs actions sur les repères mobiles. Toutes ces considérations seront raffinées dans de nombreuses publications au cours des années 1922 et 1923, principalement centrées sur les mathématiques de la relativité générale et leur extension, résultant d'idées ayant maturées depuis 1910 [46]. Dans Cartan (1923), il souligne notamment l'importance des repères comme représentants des groupes pour définir les connexions et comprend qu'une connexion permet d'identifier deux espaces tangents (affine) infiniment proches en donnant les transformations des groupes de Lie permettant de passer de l'un à l'autre : "Une variété à connexion affine est une variété qui, au voisinage immédiat de chaque point, a tous les caractères d'un espace affine, et pour laquelle on a une loi de repérage des domaines entourant deux points infiniment voisins : cela veut dire que si, en chaque point, on se donne un système de coordonnées cartésiennes ayant ce point pour origine, on connait les formules de transformation (de même nature que dans l'espace affine) qui permettent de passer d'un système de référence à tout autre système de référence d'origine infiniment voisine". Les connexions "collent" ainsi les espaces tangents les uns aux autres. Additionnellement, Cartan fournit une étude étendue des connexions à torsion non nulle [47], qui sont des propositions de connexions affines différentes de l'unique connexion de Levi-Civita mais qui ne changent pas l'équation des géodésiques [48].

Cartan réalise alors progressivement les points absolument cruciaux suivants : 1) les espaces sur lesquels il est possible de définir le transport parallèle peuvent être différents des espaces tangents e.g. être des espaces de Klein définis en chaque point d'une variété 2) Les groupes peuvent agir sur ces espaces de Klein sans agir sur la variété M et donc jouer un rôle central et indépendant.

Il développe ainsi sa théorie des espaces généralisés dans Cartan (1924a) et dans Cartan (1924b) il considère une variété à laquelle est attaché en chaque point un espace projectif associé à un repère. Il s'agit donc bien là d'un exemple d'espace généralisé où un espace de Klein est donné en chaque point

43. Egalement appelés trièdes par Cartan. On trouve également l'appellation tétrades, vierbein ou n-beins selon la dimension de l'espace dans laquelle elles sont définies.

44. Voir appendice B.

45. On parle alors de "groupes continus" et "d'espaces homogènes" respectivement.

46. Pour une histoire détaillée des espaces généralisés chez Cartan, voir Nabonnand (2009) et Nabonnand (2016) et les références associées ainsi que Marle (2014) et Cogliati et Mastrolia (2018) pour une approche centrée sur les connexions.

47. voir encore l'appendice B

48. Ces développements auront des impacts majeurs en physique moderne et contemporaine où la torsion est fréquemment invoquée dans des extensions de la relativité générales comme les théories dites "d'Einstein-Cartan" et leurs généralisations (e.g. théories $f(T)$) pouvant expliquer notamment l'énergie noire ou l'inflation, voir e.g. Trautman (2006).

d'un espace de Riemann. Il définit ensuite une connexion sur cet espace comme l'objet mathématique permettant de relier de proche un proche les espaces projectifs entre eux, c'est-à-dire d'identifier les points appartenant à deux espaces projectifs infinitésimalement proches. Nous faisons là face à une définition incroyablement moderne de connexion, définie par son action sur les repères (i.e. le fibré principal) et qui n'est pas sur le fibré tangent. Le saut hors du fibré tangent pour les connexions est ainsi conscient et pleinement effectué en mathématiques.

Cartan résume parfaitement son apport indispensable à la généralisation des connexions depuis Levi-Civita comme :[49] : "L'idée fondamentale se rattache à la notion de parallélisme que M. T. Levi-Civita a introduite de manière si féconde. Les nombreux auteurs qui ont généralisé la théorie des espaces métriques sont tous partis de l'idée fondamentale de M. Levi-Civita, mais, semble-t-il, sans pouvoir la détacher de l'idée de vecteur. Cela n'a aucun inconvénient quand il s'agit de variétés à connexion affine [...] Mais cela semblait interdire tout espoir de fonder une théorie autonome de variétés à connexion conforme ou projective. En fait, ce qu'il y a d'essentiel dans l'idée de M. Levi-Civita, c'est qu'elle donne un moyen pour raccorder entre eux deux petits morceaux infiniment voisins d'une variété, et c'est cette idée de *raccord* qui est féconde".

Dans Cartan (1926), il définit et étudie extensivement les groupes d'holonomies sur les espaces généralisés, a savoir l'angle acquis par un vecteur au même point lorsqu'il a été transporté parallèlement avec une connexion le long d'une boucle. Ce développement permet la définition moderne et géométrique de la courbure et aura un impact énorme sur études le futur de la géométrie afin de caractériser les espaces (théorie des boucles, espaces de Kähler etc). Suite à ces développements majeurs, Cartan résume et complète sa théorie des espaces généralisés et des repères mobiles dans le livre Cartan et Leray (1937).

Weyl sera également un acteur majeur suite aux développements entrepris par Cartan, en particulier en cherchant à populariser et à unifier les différentes propositions faites pour définir les connexions et le parallélisme. Il adressera des reproches à l'approche de Cartan dès 1925 et publie en 1929 une critique plus détaillée associée à une présentation faite à Princeton (Weyl 1929c). Weyl considère alors que la théorie de Cartan nécessite une relation supplémentaire entre les espaces de Klein et les espaces tangents à M en chaque point, afin de relier ces espaces à la variété originale M, de la même manière que les espaces tangents peuvent être déterminés uniquement à partir de la structure différentielle de M. Cartan n'est absolument pas satisfait de la critique de Weyl, et il lui écrit dans une lettre en 1930 : "Je ne crois pas fondées les critiques que vous adressez à ma théorie des espace à connexion projective ... L'exposition que vous faites de ma théorie ne répond pas tout à faites à mon point de vue."[50]. En effet, Cartan souhaite donner la direction la plus générale possible à son travail, anticipant les développements des espaces fibrés, et souhaite que les espaces de Klein soient le plus indépendants possible de la variété à laquelle ils sont associés. La critique de Weyl peut être partiellement expliquée par le fait que les espaces de Klein étaient appelés par Cartan "espaces projectifs tangents", source de confusion car impliquant un lien avec l'espace tangent. De plus, suivre la critique de Weyl et connecter les espaces de Klein avec la variété M amènera a des développements riches et importants connues aujourd'hui comme la "géométrie de Cartan" . Les deux auteurs finissent par progressivement se mettre d'accord suite à des échanges de lettres mais Weyl (1938) réitèrera des critiques similaires à l'approche de Cartan avant de se raviser dans Weyl (1949) où il loue désormais l'approche de Cartan et l'indépendance entre les repères définis dans les espaces de Klein et le choix de coordonnées sur M et réalise qu'il a du faire appel inconsciemment à l'approche de Cartan en introduisant les spineurs sur l'espace-temps dans Weyl (1929b)[51].

Les espaces généralisés de Cartan seront ensuite absorbés dans la définition plus générale d'espace fibré par Seifert (1933)[52], permettant ensuite naturellement à Jean-Louis Koszul (1950) et enfin à l'élève de Cartan, Charles Ehresmann (1951) de définir les connexions sur ces espaces. Alors que la

49. Attribué à Cartan en 1924 et emprunté à Marle (2014) (je n'ai pas pu trouver le texte associé à la source principale).

50. Citation empruntée à Scholz (2022).

51. Pour une histoire détaillée du débat entre Weyl et Cartan, voir Bell et Korté (2016) et Scholz (2022)).

52. Pour une histoire complète des espaces fibrés voir McCleary (2011).

définition de Koszul généralise la dérivation covariante, celle de Ehresmann comme un choix de sous espace de l'espace tangent d'un fibré principal [53] en fait un objet abstrait mais purement géométrique, complètement indépendant de tout lien avec M et sa métrique. Dans ce nouveau cadre, déjà largement initié par Cartan, la courbure et la torsion deviennent des propriétés de la connexion et non plus de l'espace, en faisant donc un objet absolument central. Notons encore une fois qu'il est intéressant que ces développements se soient fait complètement indépendamment des développements en physique post-relativité générale décrits dans la section précédente, alors même que Weyl fut un acteur majeur des deux développements.

4.3 Le point de contact

Cartan et Weyl ont la double casquette de physicien et de mathématicien et font progresser les deux disciplines de concert en développant les mathématiques de la relativité générale (et de la physique quantique pour Weyl). Curieusement, il semble cependant que les développements mathématiques et physiques suivant les années 1920, amenant les connexions "hors du fibré tangent" se soient fait de manière indépendante par les mathématiciens et les physiciens. Alors que Weyl 1918 parle bien de connexion (de longueur) pour A, il n'utilise plus ce terme en 1929 [54]. On donne souvent pourtant crédit à Weyl pour l'identification des connexions et des champs de jauge et la compréhension de l'operateur quantique $\partial_\mu - ieA_\mu$ comme une dérivation covariante. Cartan avait déjà développé, au moins en partie, sa théorie des connexions sur les espaces généralisés en 1924, et celle-ci était déjà bien connue par Weyl en 1929. On peut alors se risquer à expliquer l'impossibilité pour Weyl de voir A comme une connexion par les désaccords entre Cartan et Weyl discutés dans la section précédente et par son impossibilité de penser une connexion qui ne soit pas intimement liée à la variété sur laquelle elle est définie et à son fibré tangent.

Identifier alors qui a le premier réussi à comprendre que les champs de jauges étaient bel et bien des connexions est un problème crucial qui n'est pourtant pas facile à résoudre et le sujet est étonnement peu discuté dans la littérature [55]. On peut clairement affirmer que l'identification était établie dans les années 1970 et certainement attribuer à Wu et Yang (1975) la popularisation de cette identification auprès des physiciens (voir table I qui fait le pont entre théories de jauges et espaces fibrés). Il reste alors un gigantesque vide entre 1930 et 1975.

On attribue parfois cette découverte à Trautman (1970). Il ne fait en effet ici aucun doute que Trautman avait réalisé cela puisqu'il affirme clairement que "classical electrodynamics may be interpreted as a theory of an infinitesimal connection in a principal fibre bundle with the structure group U(1)" (p.30). Dans ce qui est des notes de cours, Trautman semble traiter ce fait comme une évidence, avec un mépris certain pour les physiciens qui n'ont pas su le voir : "Few words have been abused by physicists more than relativity, symmetry, covariance, invariance and gauge or coordinate transformations. These notions used extensively since the advent of the theory of relativity, are hardly ever precisely defined in physical texts. [...] fibre bundles provide a convenient framework for discussing the concepts of relativity, invariance, and gauge transformations." (p.29).

On peut alors légitimement se demander si Trautman est le premier à faire ce constat. Des bribes de l'identification champ de jauge/connexion peuvent être trouvées antérieurement dans le papier de Lubkin (1963), relativement technique et certainement peu accessible aux physiciens. Je n'ai pas pu trouver d'autres articles intermédiaires traitant du sujet, si ce n'est celui de Utiyama (1955) dans lequel il dérive des équations très similaires à celle de Yang-Mills en cherchant à établir des règles générales pour introduire de nouveaux champs médiateurs des interactions à partir des propriétés d'invariances de jauge, identiquement à Weyl en 1929 (et probablement indépendamment de lui, car

53. Voir appendice B.

54. Dans Weyl (1929a), le mots "curvature" n'apparait que trois fois, dont deux pour courbure de Riemann et une fois pour courbure scalaire (la trace du tenseur de Ricci $R = g^{\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$). Le mot connection apparait cinq fois, uniquement dans le sens courant i.e. hors du contexte mathématique e.g. "the connection between Einstein's theory of teleparallelism and the spin theory of the electron".

55. Je remercie ici les personnes anonymes qui m'ont donné des pistes de réflexions dans cette discussion.

il ne le cite pas). Il fait alors des parallèles forts entre la connexion affine de Levi-Civita agissant sur les spineurs [56] et les champs de jauges [57], mais il n'identifie pas clairement les deux concepts, et il me semble que ce papier peut être simplement vu comme une généralisation technique du papier de Weyl [58], et non conceptuelle. Une analyse plus détaillée de comment les champs de jauges ont été identifiés comme étant des connexions me semblerait extrêmement souhaitable mais dépasserait malheureusement trop le cadre du présent essai. A partir des années 1975 donc, le pont est clairement établi entre champs de jauges et connexions, et la théorie des connexions est très largement développée dans sa forme contemporaine.

5 Conclusion

Nous avons vu comment, partant de simples coefficients apparents dans les relations liées aux transformations des formes quadratiques en géométrie Riemannienne, la notion de connexion a pu progressivement s'imposer comme un pilier de la géométrie et de la physique contemporaine. Entrainées par une double nécessité, physique et géométrique, les connexions sont apparues comme l'objet indispensable afin de définir la dérivation et le parallélisme des objets géométriques de manière invariante dans tout type d'espaces. De par ses multiples facettes et sa richesse, elle a nécessitée de nombreux développements en physique et en mathématiques avant de pouvoir converger. Les développements mathématiques et physiques se sont d'abord fait de concerts de 1861 aux années 1920 dans le cadre de la géométrie Riemannienne et de la relativité générale, pour se séparer et se faire indépendamment dans le cadre de la théorie des espaces fibrés d'un coté et de la mécanique quantique, puis de la physique des particules de l'autre, avant de se réunir au cours des années 1970. Tout au long du XX$^{\text{ème}}$ siècle, la notion de connexion aura ainsi permis aux mathématiciens d'unifier les géométrie de Klein et de Riemann et aux physiciens d'unifier toutes les interactions fondamentales connues dans un même formalisme, en fournissant – comme son nom l'indique – un "liant" indispensable à la science contemporaine.

Références

Aharonov, Y. et D. Bohm (août 1959). « Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory ». In : *Phys. Rev.* 115 (3), p. 485-491. DOI : 10.1103/PhysRev.115.485. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.485.

Atlas Collaboration (sept. 2012). « Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC ». In : *Physics Letters B* 716.1, p. 1-29. DOI : 10.1016/j.physletb.2012.08.020. arXiv : 1207.7214 [hep-ex].

Baez, J. C. et J. P. Muniain (1994). *Gauge Fields, Knots and Gravity (Series on Knots and Everything)*. Series on Knots and Everything. World Scientific Publishing Company. ISBN : 9789810217297 ; 9810217293 ; 9810220340 ; 9789810220341.

Barceló, C., R. Carballo-Rubio et L. J. Garay (nov. 2018). « Absence of cosmological constant problem in special relativistic field theory of gravity ». In : *Annals of Physics* 398, p. 9-23. DOI : 10.1016/j.aop.2018.08.016. arXiv : 1406.7713 [gr-qc].

Bell, J. L. et H. Korté (2016). « H. Weyl ». In : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Sous la dir. d'Edward N. Zalta. Winter 2016. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Bernoulli, J. (1696). « Problema novum ad cujus solutionem invitantur ». In : *Acta eruditorum : anno 1696 publicata*. prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium. URL : https://books.google.it/books?id=AK1iB3AGxAEC.

56. Traduisant l'invariance de la derivation des spineurs sous l'action des représentations de spin 1/2 de SO(3,1)
57. Traduisant l'invariance de la dérivation des spineurs sous l'action d'un certain groupe de Lie général G.
58. Generalisation aux groupes de Lie non-abéliens.

Bernoulli, J. (1697a). *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et de curva Syncrona seu radiorum unda construenda.* prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium. URL : https://books.google.it/books?id=wYlDTJa4gfsC.

— (1697b). « Le Journal des sçavans ». In : sous la dir. de J. Cusson (Paris). Bibliothèsque nationale de France. URL : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56544f/f387.image.pagination.

Berry, M. V. (mars 1984). « Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes ». In : *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 392.1802, p. 45-57. DOI : 10.1098/rspa.1984.0023.

Bleeker, D. (1981). *Gauge Theory And Variational Principles.* Dover.

Bourguignon, Jean-Pierre (1992). « Transport parallèle et connexions en Géométrie et en Physique ». In : *1830–1930 : A Century of Geometry.* Sous la dir. de Luciano Boi, Dominique Flament et Jean-Michel Salanskis. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 150-164. ISBN : 978-3-540-47058-8.

Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development.* Dover Publications. ISBN : 0486605094 ; 9780486605098.

Brading, Katherine A. (2002). « Which symmetry ? Noether, Weyl, and conservation of electric charge ». In : *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 33.1, p. 3-22. ISSN : 1355-2198. DOI : https://doi.org/10.1016/S1355-2198(01)00033-8. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1355219801000338.

Carathéodory, C. (1937). « The Beginning of Research in the Calculus of Variations ». In : *Osiris* 3, p. 224-240. ISSN : 03697827, 19338287. URL : http://www.jstor.org/stable/301588 (visité le 13/11/2023).

Cartan, E. (1910). *La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile.* Bulletin des sciences mathématiques, 34 (1910), p. 250-284 ; OC III, 1, p. 145-178.

— (1913). « Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane ». fr. In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 41, p. 53-96. DOI : 10.24033/bsmf.916. URL : http://www.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.916/.

— (1922). « Sur les équations de la gravitation d'Einstein ». fre. In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 1, p. 141-204. URL : http://eudml.org/doc/235383.

— (1923). « Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) ». fr. In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3e série, 40, p. 325-412. DOI : 10.24033/asens.751. URL : http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.751/.

— (1924a). « Les récentes généralisations de la notion d'espace, » fr. In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 48, p. 294-320.

— (1924b). « Sur les variétés à connexion projective ». fr. In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52, p. 205-241. DOI : 10.24033/bsmf.1053. URL : http://www.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.1053/.

— (1926). « Les groupes d'holonomie des espaces généralisés ». In : *Acta Mathematica* 48.1-2, p. 1-42. DOI : 10.1007/BF02629755. URL : https://doi.org/10.1007/BF02629755.

— (1928). *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Gauthier-Villars.

Cartan, E. et J. Leray (1937). *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle : traitées par la méthode du repère mobile.* Cahiers Scientifiques : Publiés sous la Direction de M. Gaston Julia. Gauthier-Villars. URL : https://books.google.it/books?id=wELvAAAAMAAJ.

Casorati, F. (1862). *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve.* Coi tipi della S. Congreg. de propaganda fide. URL : https://books.google.it/books?id=3anmAAAAMAAJ.

Christoffel, E. B. (1869). In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1869.70, p. 46-70. DOI : doi:10.1515/crll.1869.70.46. URL : https://doi.org/10.1515/crll.1869.70.46.

Clairaut, A.C. (1733). « Sur quelques questions de maximis et minimis. » In : *Histoire de l'Academie des Science p. 186-194*.

CMS Collaboration (sept. 2012). « Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC ». In : *Physics Letters B* 716.1, p. 30-61. DOI : 10.1016/j.physletb.2012.08.021. arXiv : 1207.7235 [hep-ex].

Cogliati, A. (2016). « Schouten, Levi-Civita and the notion of parallelism in Riemannian geometry ». In : *Historia Mathematica* 43.4, p. 427-443. ISSN : 0315-0860. DOI : https://doi.org/10.1016/j.hm.2016.08.003. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086016300441.

Cogliati, A. et P. Mastrolia (2018). « Cartan, Schouten and the search for connection ». In : *Historia Mathematica* 45.1, p. 39-74. ISSN : 0315-0860. DOI : https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.09.001. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S031508601730071X.

Coquereaux, R. (2002). *ESPACES FIBRÉS ET CONNEXIONS*. URL : http://www.cpt.univ-mrs.fr/~coque/EspacesFibresCoquereaux.pdf.

Coquereaux, R. et A. Jadczyk (1988). *Riemannian geometry, fiber bundles, Kaluza-Klein theories, and all that...* T. 16. DOI : 10.1142/0488. URL : https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1988rgfb.book.....C.

Darboux, G. (1894). *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal : ptie. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces. 1894*. Cours de géométrie de la faculté des sciences. Gauthier-Villars. URL : https://books.google.it/books?id=hGMSAAAAIAAJ.

Darrigol, O. (2015). « The mystery of Riemann's curvature ». In : *Historia Mathematica* 42.1, p. 47-83. ISSN : 0315-0860. DOI : https://doi.org/10.1016/j.hm.2014.03.001. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086014000299.

Dell'Aglio, L. (1996). « On the genesis of the concept of covariant differentiation ». In : *Revue d Histoire des Mathematiques* 2, p. 215-264. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:53522738.

Dirac, P. A. M. (fév. 1928). « The Quantum Theory of the Electron ». In : *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 117.778, p. 610-624. DOI : 10.1098/rspa.1928.0023.

Disney-Hogg, L. (2019). *Ehresmann, Kozul, and Cartan connections*. URL : https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/EKC/LindenNotes.pdf.

Dyson, F. J. (1983). « Unfashionable pursuits ». In : *The Mathematical Intelligencer* 5, p. 47-54. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:189884676.

Ehresmann, C. (1951). « Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable ». In : URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118764689.

Einstein, A. (jan. 1914). « Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ». In : *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 1030-1085.

— (jan. 1915). « Zur allgemeinen Relativitätstheorie ». In : *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 778-786.

Eneström, G. (1899). « Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques ». In : *Bibliotheca Mathematica*.

Englert, F. et R. Brout (août 1964). « Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons ». In : *Physical review letters* 13.9, p. 321-323. DOI : 10.1103/PhysRevLett.13.321.

Euler, L. (1732). « De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente ». Latin. In : *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 3, pp. 110-124*. URL : https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/9/ (visité le 13/11/2023).

Farnsworth, Kara, Markus A. Luty et Valentina Prilepina (oct. 2017). « Weyl versus conformal invariance in quantum field theory ». In : *Journal of High Energy Physics* 2017.10, 170, p. 170. DOI : 10.1007/JHEP10(2017)170. arXiv : 1702.07079 [hep-th].

Faure, F. (2021a). *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*. URL : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/.

Faure, F. (2021b). *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique.* URL : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/.

Fock, V. (fév. 1926). « Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt ». In : *Zeitschrift fur Physik* 39.2-3, p. 226-232. DOI : 10.1007/BF01321989.

— (mars 1929). « Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons ». In : *Zeitschrift fur Physik* 57.3-4, p. 261-277. DOI : 10.1007/BF01339714.

Freeman, K. (2011). « A historical overview of connections in geometry ». In : URL : https://soar.wichita.edu/handle/10057/3953.

Freguglia, P. et M. Giaquinta (2016). « The Early Period of the Calculus of Variations ». In : DOI : 10.1007/978-3-319-38945-5.

Gauss, C.F. (1828). *Preliminary Catalogue of Fixed Stars : Intended for a Prospectus of a Catalogue of the Stars of the Southern Hemisphere Included Within the Tropic of Capricorn : Now Reducing from the Observations Made in the Observatory at Paramatta.* Analytische Untersuchung d. dreieckigen Pyramide. Imp. de L. Bouchard-Huzard. URL : https://books.google.it/books?id=bX0AAAAAMAAJ.

Gell-Mann, M. (juill. 1964). « The symmetry group of vector and axial vector currents ». In : *Physics Physique Fizika* 1 (1), p. 63-75. DOI : 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.63. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.63.

Glashow, S. L. (1961). « Partial Symmetries of Weak Interactions ». In : *Nucl. Phys.* 22, p. 579-588. DOI : 10.1016/0029-5582(61)90469-2.

Godina, M. (oct. 2022). « Tullio Levi-Civita : Notion of Parallelism on a Generic Manifold and Consequent Geometrical Specification of the Riemannian Curvature ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2210.13239, arXiv :2210.13239. DOI : 10.48550/arXiv.2210.13239. arXiv : 2210.13239 [gr-qc].

Gordon, W. (jan. 1926). « Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie ». In : *Zeitschrift für Physik* 40.1, p. 117-133. ISSN : 0044-3328. DOI : 10.1007/BF01390840. URL : https://doi.org/10.1007/BF01390840.

Grassmann, H. (1844). *Die Ausdehnungslehre von 1844 : die lineale Ausdehnungslehre.* Otto Wigand (1878).

Guralnik, G. S., C. R. Hagen et T. W. B. Kibble (nov. 1964). « Global Conservation Laws and Massless Particles ». In : *Phys. Rev. Lett.* 13 (20), p. 585-587. DOI : 10.1103/PhysRevLett.13.585. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.585.

Hawkins, T. (2000). *Emergence of the Theory of Lie Groups : An Essay in the History of Mathematics 1869–1926 (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences).* Springer. ISBN : 1461270421 ; 9781461270423.

Higgs, P. W. (sept. 1964). « Broken symmetries, massless particles and gauge fields ». In : *Physics Letters* 12.2, p. 132-133. DOI : 10.1016/0031-9163(64)91136-9.

Jackson, J. D. et L. B. Okun (sept. 2001). « Historical roots of gauge invariance ». In : *Rev. Mod. Phys.* 73 (3), p. 663-680. DOI : 10.1103/RevModPhys.73.663. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663.

Kaluza, T. (oct. 1921). « Zum Unitätsproblem in der Physik. » In : *Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)*, p. 966-972.

Klein, F. (1893). « Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen ». In : *Mathematische Annalen* 43, p. 63-100. URL : http://eudml.org/doc/157672.

Klein, O. (déc. 1926). « Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie ». In : *Zeitschrift für Physik* 37.12, p. 895-906. ISSN : 0044-3328. DOI : 10.1007/BF01397481. URL : https://doi.org/10.1007/BF01397481.

Kobayashi, S. et K. Nomizu (1996). *Foundations of Differential Geometry, Volume 1.* Wiley Classics Library. Wiley-Interscience. ISBN : 9780471157335 ; 0471157333.

Koszul, J. L. (1950). « Homologie et cohomologie des algèbres de Lie ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 78, p. 65-127. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123778424.

Lagrange, J.L. (1806). *Leçons sur le calcul des fonctions*. Courcier. URL : https://books.google.it/books?id=aos3AAAAMAAJ.

Leibniz, G.W. (1684). « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationals quantitates moratur ». In : *Acta eruditorum*.

Levi-Civita, T. (1917). « Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana ». In : *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)* 42, p. 173-204. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122088291.

Lie, S. (1888). *Theorie der transformationsgruppen ..* Theorie der transformationsgruppen. B.G. Teubner. URL : https://books.google.fr/books?id=uSwDzgEACAAJ.

Lipschitz, R. (1869). In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1869.70, p. 71-102. DOI : doi:10.1515/crll.1869.70.71. URL : https://doi.org/10.1515/crll.1869.70.71.

London, F. (mai 1927). « Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl ». In : *Zeitschrift fur Physik* 42.5-6, p. 375-389. DOI : 10.1007/BF01397316.

Lubkin, E. (1963). « Geometric definition of gauge invariance ». In : *Annals of Physics* 23.2, p. 233-283. ISSN : 0003-4916. DOI : https://doi.org/10.1016/0003-4916(63)90194-5. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491663901945.

Marle, C.M. (jan. 2014). « The works of Charles Ehresmann on connections : from Cartan connections to connections on fibre bundles ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1401.8272, arXiv :1401.8272. DOI : 10.48550/arXiv.1401.8272. arXiv : 1401.8272 [math.DG].

Marsh, A. (déc. 2014). « Riemannian Geometry : Definitions, Pictures, and Results ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1412.2393, arXiv :1412.2393. arXiv : 1412.2393 [gr-qc].

— (juill. 2016). « Gauge Theories and Fiber Bundles : Definitions, Pictures, and Results ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1607.03089, arXiv :1607.03089. DOI : 10.48550/arXiv.1607.03089. arXiv : 1607.03089 [math.DG].

McCleary, J. (2011). *A History of Manifolds and Fibre Spaces : Tortoises and Hares*. URL : https://pages.vassar.edu/mccleary/files/2011/04/history.fibre_.spaces.pdf.

Nabonnand, P. (1995). « Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques au XIXe siècle ». fr. In : *Revue d'histoire des mathématiques* 1.2, p. 159-200. URL : http://www.numdam.org/item/RHM_1995__1_2_159_0/.

— (2009). « La notion d'holonomie chez Élie Cartan ». FR. In : *Revue d'histoire des sciences* 62.1. Place : Paris Publisher : Armand Colin, p. 221-245. ISSN : 9782200925987. DOI : 10.3917/rhs.621.0221. URL : https://www.cairn.info/revue-d-histoire-des-sciences-2009-1-page-221.htm.

— (jan. 2016). « L'apparition de la notion d'espace généralisé d'Élie Cartan en 1922 ». In : *Eléments d'une biographie de l'espace géométrique*. Sous la dir. de Lise Bioesmat-Martagon. Histoires de géométries. PUN-Edulor, p. 313-336. URL : https://hal.science/hal-01264561.

Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*.

Newton, I. (1669). « De analysi per aequationes numero terminorum infinitas ». In : URL : https://books.google.it/books/about/De_analysi_per_aequationes_numero_termin.html?id=P04UzQEACAAJ&redir_esc=y.

Noether, E. (1918). « Invariante Variationsprobleme ». ger. In : *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1918, p. 235-257. URL : http://eudml.org/doc/59024.

O'Raifeartaigh, L. et N. Straumann (oct. 1998). « Early History of Gauge Theories and Kaluza-Klein Theories, with a Glance at Recent Developments ». In : *arXiv e-prints*, hep-ph/9810524, hep-ph/9810524. DOI : 10.48550/arXiv.hep-ph/9810524. arXiv : hep-ph/9810524 [hep-ph].

Reich, K. (1992). « Levi-Civitasche Parallelverschiebung, affiner Zusammenhang, Übertragungsprinzip : 1916/17—1922/23 : Zum 50. Todestag von Tullio Levi-Civita (29. 3. 1873–20. 12. 1941) ». In : *Archive for History of Exact Sciences* 44.1, p. 77-105. ISSN : 00039519, 14320657. URL : http://www.jstor.org/stable/41133928 (visité le 02/01/2024).

Ricci, G. (1887). *Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale.* URL : https://books.google.it/books?id=YbOKnQAACAAJ.

— (1888). *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella analisi applicata.* Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario dalla origine della Università di Bologna. tip. del Seminario. URL : https://books.google.it/books?id=V9WiQwAACAAJ.

Ricci, G. et T. Levi-Civita (1901). *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* URL : http://eudml.org/doc/157997.

Riemann, B. (1854). « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ». In : *Physikalische Blätter* 10.7, p. 296-306. DOI : https://doi.org/10.1002/phbl.19540100702. eprint : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/phbl.19540100702. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/phbl.19540100702.

— (1861). « Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Illma Academia Parisiensi propositae : "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfeni pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température q'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes." » In.

Ryckman, T. (fév. 2005). *The Reign of Relativity : Philosophy in Physics 1915-1925.* Oxford University Press. ISBN : 9780195177176. DOI : 10.1093/0195177177.001.0001. URL : https://doi.org/10.1093/0195177177.001.0001.

Salam, A (oct. 1969). « Weak and electromagnetic interactions. » In : *pp 367-77 of ElementaryParticle Theory. Svartholm, Nils (ed.). New York, John Wiley and Sons, Inc., 1968.* URL : https://www.osti.gov/biblio/4767615.

Sanomiya, T. A. T. et al. (jan. 2020). « Weyl's unified field theory : Perspectives for a new approach ». In : *International Journal of Modern Physics A* 35, 2040005, p. 2040005. DOI : 10.1142/S0217751X20400059.

Scholz, E. (sept. 2004). « Local spinor structures in V. Fock's and H. Weyl's work on the Dirac equation (1929) ». In : *arXiv e-prints*, physics/0409158, physics/0409158. DOI : 10.48550/arXiv.physics/0409158. arXiv : physics/0409158 [physics.hist-ph].

— (2018). « The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20-th century physics ». In : *Einstein Stud.* 14, p. 261-360. DOI : 10.1007/978-1-4939-7708-6_11. arXiv : 1703.03187 [math.HO].

— (2020). « Gauging the Spacetime Metric - Looking Back and Forth a Century Later ». In : *One Hundred Years of Gauge Theory ; Past, Present and Future Perspectives*, p. 25-89. DOI : 10.1007/978-3-030-51197-5_2.

— (2022). « H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2206.07576, arXiv :2206.07576. DOI : 10.48550/arXiv.2206.07576. arXiv : 2206.07576 [physics.hist-ph].

Schouten, J. A. (1922). « Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimen-sionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können ». In : *Mathematische Zeitschrift* 13, p. 56-81. URL : http://eudml.org/doc/167691.

Schrödinger, E. (1922). « Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons ». In : *Zeitschrift für Physik* 12, p. 13-23. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123753812.

— (déc. 1926). « An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules ». In : *Phys. Rev.* 28 (6), p. 1049-1070. DOI : 10.1103/PhysRev.28.1049. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.28.1049.

Schuller, F.P. (2016). *Lectures on the Geometric Anatomy of Theoretical Physics.*

Seifert, H. (1933). « Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume ». In.

Spivak, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition Volume 1.* 3rd. Publish or Perish. ISBN : 9780914098706 ; 0914098705.

Straub, W. O. (2005). « Weyl' S Theory of the Combined Gravitational-electromagnetic Field ». In : URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:13907890.

Straumann, N. (nov. 1996). « Early History of Gauge Theories and Weak Interactions ». In : *Physics with Neutrinos*. Sous la dir. de Milan P. Locher, p. 153. DOI : 10.48550/arXiv.hep-ph/9609230. arXiv : hep-ph/9609230 [hep-ph].

Struik, D. J. (1933). « Outline of a History of Differential Geometry : II ». In : *Isis* 19.1, p. 92-120. ISSN : 00211753, 15456994. URL : http://www.jstor.org/stable/225188 (visité le 04/11/2023).

Tonomura, A. et al. (mai 1982). « Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography ». In : *Phys. Rev. Lett.* 48 (21), p. 1443-1446. DOI : 10.1103/PhysRevLett.48.1443. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1443.

Trautman, A. (1970). « Fibre bundles associated with space-time ». In : *Reports on Mathematical Physics* 1.1, p. 29-62. ISSN : 0034-4877. DOI : https://doi.org/10.1016/0034-4877(70)90003-0. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0034487770900030.

— (juin 2006). « Einstein-Cartan Theory ». In : *arXiv e-prints*, gr-qc/0606062, gr-qc/0606062. DOI : 10.48550/arXiv.gr-qc/0606062. arXiv : gr-qc/0606062 [gr-qc].

Utiyama, R. (mars 1955). « Invariant Theoretical Interpretation of Interaction ». In : *Phys. Rev.* 101 (5), p. 1597-1607. DOI : 10.1103/PhysRev.101.1597. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.101.1597.

Weinberg, S. (nov. 1967). « A Model of Leptons ». In : *Phys. Rev. Lett.* 19 (21), p. 1264-1266. DOI : 10.1103/PhysRevLett.19.1264. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264.

Weyl, H. (mai 1918a). « Gravitation und Elektrizität ». In : *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 465-478. DOI : 10.1007/978-3-663-19510-8_11.

— (1918b). *Raum, Zeit, Materie : Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*. Springer. URL : https://books.google.it/books?id=2t3KoAEACAAJ.

— (1918c). « Reine Infinitesimalgeometrie ». In : *Mathematische Zeitschrift* 2, p. 384-411. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:186232500.

— (1928). *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. S. Hirzel. URL : https://books.google.it/books?id=-VReAAAAIAAJ.

— (mai 1929a). « Elektron und Gravitation. I ». In : *Zeitschrift fur Physik* 56.5-6, p. 330-352. DOI : 10.1007/BF01339504.

— (1929b). « Gravitation and the Electron ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 15.4, p. 323-334. ISSN : 00278424. URL : http://www.jstor.org/stable/85331 (visité le 19/12/2023).

— (1929c). « On the foundations of general infinitesimal geometry ». In.

— (1938). « Cartan on groups and differential geometry ». In.

— (1949). « Relativity Theory as a Stimulus in Mathematical Research ». In : *Proceedings of the American Philosophical Society* 93.7, p. 535-541. ISSN : 0003049X. URL : http://www.jstor.org/stable/3143143 (visité le 10/01/2024).

Woodhouse, R. (1810). *A Treatise on Isoperimetrical Problems and the Calculus of Variations*. J. Smith, printer to the University, et sold by Deighton. URL : https://books.google.it/books?id=5kwDAAAAQAAJ.

Wu, T. T. et C. N. Yang (déc. 1975). « Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields ». In : *Phys. Rev. D* 12 (12), p. 3845-3857. DOI : 10.1103/PhysRevD.12.3845. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.3845.

Yang, C. N. (1987). « Schrödinger : Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger ». In : URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118231294.

Yang, C. N. et R. L. Mills (oct. 1954). « Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance ». In : *Phys. Rev.* 96 (1), p. 191-195. DOI : 10.1103/PhysRev.96.191. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.191.

A Définitions utiles

Mathématiques :

- **Un espace fibré** est un triplet (E, M, π) où E et M sont deux variétés différentiables appelées respectivement l'espace total et l'espace de base. $\pi : E \to M$ est appelé la projection. L'espace $F = \pi^{-1}(x)$ pour $x \in M$ est appelé la fibre au (dessus du) point x.
- **pullback et pushforward** : Soit $\phi : M \to N$ une application lisse entre deux variétés M et N. Soit $f \in C^\infty(N)$ une fonction lisse $f : N \to \mathbb{R}$. Le pullback de f par ϕ, $\phi^* f$ est la fonction $\phi^* f : M \to \mathbb{R}$ définie comme $\phi^* f = f \circ \phi$. Le pushforward permet de passer d'un vecteur sur $v \in TM$ à un vecteur $\phi_* v \in TN$ définit comme $\phi_* v(f) = v(\phi^* f)\, \forall f \in C^\infty(M)$. Enfin, le pullback de ϕ peut être utilisé pour transformer une 1-forme (covecteur) ω sur TN^* en une 1-forme $\phi^*\omega$ sur TM^* comme $(\phi^*\omega)v = \omega(\phi_* v)\, \forall v \in TN$.
- La **dérivée extérieure** (ou différentielle) d'une fonction est définie comme la 1-forme $\mathrm{d}f(v) = v(f)\, \forall v \in TM, f \in C^\infty(M)$. Elle peut être généraliser pour agir sur les formes de n'importe quelle dimension, en demandant la condition $\mathrm{d}^2 = 0$.

Physique :

- En physique quantique, la **fonction d'onde** $\psi(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ d'un système décrit la probabilité d'observer le système à la position x lors d'une observation comme $P(x) = \psi^*\psi$ où ψ^* est la conjugaison complexe.
- **L'équation de Schrödinger** décrit l'évolution dans le temps des fonctions d'ondes associées à un système comme $\hat{H}\psi = ß\hbar\partial_t\psi$, où $\mathcal{H}$ est l'opérateur Hamiltonien (l'énergie) du système et t est le temps (Cette équation peut en fait être vue, en terme de groupes de Lie, comme la définition de l'énergie comme le générateur des translations dans le temps).
- **L'équation de Dirac** généralise l'équation de Schrödinger au cas incluant la relativité restreinte. Elle s'écrit $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$ où γ^μ sont les "matrices de Dirac", représentant la base de l'algèbre de Clifford de l'espace-temps et ψ est ici une généralisation de la fonction d'onde à 4 composantes (spineur de Dirac). Pour inclure électromagnétisme, le terme $\partial_\mu\psi$ se voit remplacé par la derivée covariante $\partial_\mu - ieA_\mu$, où A_μ joue le rôle d'une connexion.

B 50 nuances de connexions

La notion de connexion peut être définie et pensée d'une multitude de manières différentes, traduisant une grande diversité d'applications possibles et en faisant un concept subtil à saisir. Nous présentons ici quelques définitions communément utilisées afin d'aider à la lecture du texte. J'admets ici une certaine familiarité du lecteur avec la géométrie Riemannienne et la théorie des espaces fibrés. Dans le cas contraire, je recommande chaudement la lecture de Baez et Muniain (1994), Coquereaux (2002) et Faure (2021b) (et les cours vidéos de Schuller (2016)) pour des introductions pédagogiques et Bleeker (1981), Kobayashi et Nomizu (1996) et Nakahara (2003) pour une lecture plus avancée. Des cours condensés peuvent être trouvés en Marsh (2014) et Marsh (2016) pour la géométrie Riemannienne et les espaces fibrés respectivement. Nous nous appuierons également sur Disney-Hogg (2019) pour définir les connexions dans ce qui suit. La présentation suivante ne prétend ni être exhaustive ni parfaitement rigoureuse, et vise seulement à introduire les différentes notions discutées dans le corps du texte afin de mieux en saisir le contenu conceptuel.

Dans ce qui suit, nous utiliserons la convention d'Einstein sur les indices répétés : $x_a y^a = \sum_a x_a y^a$. Nous ferons également de notre mieux pour respecter les conventions suivantes : les indices grecs μ, ν, λ, ρ sont réservés aux objets appartenant au fibré tangent et les indices latins i, j, k sont réservés aux indices internes pour décrire la fibre d'un espace fibré. L'indice α est réservé pour la décomposition des éléments des algèbres de Lie sur la base des générateurs.

B.1 Connexions affines sur le fibré tangent et connexion de Levi-Civita

Soit M une variété différentielle, TM son fibré tangent[59] et $\Gamma(TM)$ les sections du fibré tangent i.e. les champs de vecteurs. Une **connexion affine** $\nabla : X, Y \to \nabla_X Y$ est une application bilinéaire $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ telle que pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et pour tout $X, Y \in \Gamma(M)$:

— $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ (linéarité pour la première entrée)

— $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (règle de Leibniz permettant d'identifier ∇ avec une différentiation).

$\nabla_X Y$ permet donc de définir sur M comment dériver (et déplacer) un vecteur Y dans une direction donnée par X (cette définition se généralise également aux tenseurs).

La **courbure** de ∇ est une 2-forme (tenseurs anti-symétrique de rang (2,0)) à valeures dans $\mathrm{End}(TM) : TM \to TM$ agissant sur un vecteur Z comme

$$R_{X,Y} Z = \left([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\right) Z. \tag{4}$$

En un point de M, R permet de calculer l'holonomie associée à une boucle infinitésimale (la rotation induite sur un vecteur transportée parallèlement sur la boucle) ou la déviations entre deux géodésiques proches.

La **torsion** est un tenseur de rang-2 agissant sur un couple de vecteurs (X, Y) comme

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{5}$$

Elle quantifie la tendance qu'aurait un repère à tourner dans le plan perpendiculaire à une courbe lorsqu'il est transporté parallèlement le long de celle-ci.

Soit maintenant $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ une métrique (pseudo)-Riemannienne définie sur M. La **connexion de Levi-Civita** est l'unique connexion affine compatible avec la métrique et de torsion nulle, c'est à dire satisfaisant :

— $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$: compatibilité avec la métrique : le transport parallèle selon ∇ ne change pas la longueur des vecteurs (plus généralement, elle s'écrit $\nabla g = 0$).

— $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ avec le crochet de Lie $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Comme l'a montré Levi-Civita en 1917, cette connexion définie le transport parallèle de manière "intuitive" et correspond au transport du vecteur sur M de la manière la plus "parallèle" possible (sans induire de rotation) et sans changement de longueur.

Soit maintenant $e_\mu = \partial_\mu$ une base du fibré tangent sur une charte $U \subseteq M$, on définit les composantes de la connexion, Γ comme :

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} e_\lambda \tag{6}$$

On a alors, par la règle de Leibniz et en décomposant les vecteurs dans une base du fibré tangent $X = X^\mu e_\mu$ et $Y = Y^\nu e_\nu$:

$$\nabla_X Y = (X^\nu \partial_\nu Y^\lambda + \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} Y^\mu X^\nu) e_\lambda \tag{7}$$

Pour le cas de la connexion de Levi-Civita, on peut montrer que Γ se calcule à partir des dérivées première de g comme :

$$\Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \tag{8}$$

où la condition de symétrie $\Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\ \nu\mu}$ traduit l'annulation de la torsion.

B.2 Connexions sur le fibré principal : connexions de Ehresmann et de Cartan

Soit P un fibré principal $P \xrightarrow{\pi} M$ de groupe structurel G. On peut penser à P comme l'ensemble des repères possibles d'un espace vectoriel en chaque point de M (liées les unes aux autres par

59. Un point $p \in TM$ du fibré tangent est donné localement par un doublet (x, v) où x est un point de M et v est un vecteur associé à x (par localement nous entendrons toujours "dans un choix de trivialisation local").

des transformations du groupe de Lie G). Dans le cas du fibré tangent, P est l'ensemble des bases e_μ dans lesquelles décomposer les vecteurs tangents, reliées entre elles en chaque points par des transformations de $G = \mathrm{GL}(n)$. Localement, un point $p = (e, x) \in P$ correspond à un choix de repère e au dessus du point x.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G (Il est possible de penser G elle même comme une variété et $\mathfrak{g}$ comme son espace tangent à l'unité T_eG). Soit T_pP l'espace tangent de P au point p. Les vecteurs $X_p \in T_pP$ représentent des changement infinitésimaux de repères. L'application de projection $\pi : P \to M$, $\pi(p) = x$ renvoie le point de $x \in M$ auquel "est associé" le repère e. Identiquement, π peut être utilisée pour obtenir un vecteur $v \in TM$ au dessus de x à partir d'un vecteur X_p de T_pP comme $\pi_*(X_p) = v \in TM$ (à l'aide du pushforward définit plus haut). On définit le sous espace vertical V_pP au point p comme

$$\begin{aligned} V_pP &= \ker((\pi_*)_p) && (9) \\ &= \{X^\xi \in T_pP \,/\, (\pi_*)_p(X_p) = 0\} && (10) \end{aligned}$$

V_pP correspond à l'ensemble des transformations de référentiels correspondant à des "rotations pures" (des mouvements dans la fibre), qui ne sont associés à aucune translation du repère sur M. A chaque $X^\xi \in V_pP$, on peut associer un élément ξ de $\mathfrak{g} = T_eG$ selon l'action sur les fonctions

$$X_p^\xi f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(pe^{t\xi}))\bigg|_{t=0} = \mathbb{i}(\xi)(f) \tag{11}$$

où nous avons introduit l'application $\mathbb{i} : \mathfrak{g} \to T_pP$, $\xi \to X_p^\xi$.

Une **connexion de Ehresmann** sur P au point p est un choix d'espace horizontal $H_p \subset T_pP$ tel que $T_pP = V_pP \oplus H_pP$ et satisfaisant $\forall g \in G, p \in P$ et $X_p \in H_pP : g_*X_p \in H_{pg}P$, i.e. agir avec g sur un vecteur horizontal X_p au point p redonne un vecteur horizontal au point pg. Une fois qu'un tel choix a été effectué, tout vecteur $X_p \in T_pP$ peut ainsi être décomposé en $X_p = \mathrm{Ver}(X_p) + \mathrm{Hor}(X_p)$avec $\mathrm{Ver}(X_p) \in V_pP$ et $\mathrm{Hor}(X_p) \in H_pP$ (Attention ici ! Même si V_pP est donné par π et ne dépend pas de la connexion, la valeur de $\mathrm{Ver}(X_p)$ et $\mathrm{Hor}(X_p)$ dépendent tous les deux du choix de la connexion (voir illustration dans Schuller (2016), cours numéro 21)).

En cela, le choix d'une connexion définit bien la notion "d'horizontalité" associées aux translations des bases sur M (et le transport parallèle associé) en identifiant localement les points sur des fibres infinitésimalement proches (la notion de verticalité étant elle définie de manière naturelle par les rotations de bases autour d'un même point de M).

Une **connexion de Cartan** est une 1-forme à valeures dans $\mathfrak{g}$, $\omega : TP \to \mathfrak{g}$ satisfaisant

- $\forall p \in P, \omega_p : T_pP \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme d'espace vectoriels.
- $\forall g \in G \;:\; g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$.
- $\forall \xi \in \mathfrak{g}, \omega(X^\xi) = \xi$.

avec l'application 'adjointe' faisant agir le groupe sur lui même comme $\mathrm{Ad}(g) : G \to G, h \to ghg^{-1}$ (formant ainsi une représentation de G).

A la connexion de Ehresmann, on peut associer la connexion de Cartan comme la 1-forme à valeures dans $\mathfrak{g}$ satisfaisant

- $\omega(X^\xi) = \xi$ si $X^\xi \in V_pP$
- $\omega(X) = 0$ si $X \in H_pP$

ou encore, en utilisant l'application $\mathbb{i} : \mathfrak{g} \to T_pP$, $\mathbb{i}(\xi) \to X_p^\xi$ définie plus haut :

$$\omega_p(X_p) = \mathbb{i}^{-1}(\mathrm{Ver}(X_p)) \tag{12}$$

H_pP peut être retrouvé à partir de ω comme $H_pP = \ker(\omega_p)$.

B.3 Connexions sur le fibré vectoriel associé : connexions de Kozsul

La définition donnée précédemment de la connexion affine est en fait modernisée et présentée comme un cas particulier d'une connexion plus générale : une connexion de Koszul.

Soit E un fibré vectoriel (fibré associé $P \times_\rho V \to M$), associant en chaque point de M un espace vectoriel V (fibre) tel que en chaque point de M, $u \in E$ est défini localement par le doublet $u = (e, \psi) \in P \times V$ obéissant à la relation d'équivalence $(e, \psi) \sim (eg, \rho(g^{-1})\psi)$, où ρ est une représentation de G sur V.

Soit maintenant $s \in \Gamma(E)$ une section de E. On définit la connexion de Koszul $\nabla_X(s)$ comme l'application $\Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ obéissant à

— $\nabla_{fX} s = f\nabla_X s$

— $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s$.

On voit donc que la connexion affine telle que nous l'avons définie plus haut est un cas particulier de connexion de Koszul pour laquelle le le fibré vectoriel associé est le fibré tangent TM.

Voyons maintenant comment une connexion de Ehresmann donnée par une connexion de Cartan ω sur P, induit une connexion de Kozsul sur E. Soit $e : U \to P$ une section locale de P (telle que $\pi \circ e = \mathrm{Id}$) e.g. un choix de repères au dessus d'une région $U \subset M$. On peut obtenir une connexion de Koszul à partir d'une 1-forme de Cartan ω comme $\mathcal{A} = e^*\omega$, c'est à dire

$$\mathcal{A}(v) = \omega(e_*(v)) \tag{13}$$

$\mathcal{A}$ est alors une 1-forme sur M à valeures dans $\mathfrak{g}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\alpha_\mu \mathrm{d}x^\mu \otimes \xi_\alpha$ (où ξ_α est une base de $\mathfrak{g}$).

On peut faire agir $\mathcal{A}$ sur E en utilisant la représentation ρ

$$\rho(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^\alpha{}_\mu)^i{}_j \mathrm{d}x^\mu \otimes \rho(\xi_\alpha)^j{}_i \tag{14}$$

finalement, pour arriver jusqu'à une connexion de Kozsul sur E, on impose [60]

$$\nabla_{e_\mu} e_i = e_j \mathcal{A}^j{}_{\mu i} \tag{15}$$

avec $\mathcal{A}^j{}_{\mu i} = (\mathcal{A}^\alpha{}_\mu)^i{}_j \rho(\xi_\alpha)^j{}_i$. En utilisant la règle de Leibniz, on peut alors expliciter localement l'action de ∇_v sur une section $s = s^i e_i$ comme

$$\nabla_v s = e_i(\mathcal{A}^i{}_{j\mu} s^j + \partial_\mu s^i) v^\mu \tag{16}$$

La courbure de la connexion sur E est définie comme

$$F = \mathrm{d}\mathcal{A} + [\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_\mathfrak{g} \tag{17}$$

où le crochet est défini sur l'algèbre de Lie : $[\omega \wedge \mu]_\mathfrak{g}(v, w) := [\omega(v), \mu(w)] = \omega(v)\mu(w) - \mu(w)\omega(v)$.

Dans le cas où $P = LM$ et $E = TM$, dans un choix de coordonnées x sur $U \subset M$, un choix naturel de section $e : U \to LM$ est définie comme $e = \partial_i$. $G = \mathfrak{g} = \mathrm{GL}(\dim(M), \mathbb{R})$. La connexion $\mathcal{A} = e^*\omega$ est alors le cas particulier de la connexion affine définie plus haut : $\mathcal{A}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk}$.

Seul dans ce cas on peut définir la torsion

$$T = \mathrm{d}\theta + \Gamma \wedge \theta \tag{18}$$

où $\theta : TM \to TM$ est la "forme de soudure" $\theta = e_\mu \otimes \epsilon^\mu$ où ϵ^μ est la base cotangente associée à e_μ i.e. $\epsilon^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$ (voir 4.4 de Coquereaux (2002)). Même si nous ne le détaillerons pas ici, il est possible de démontrer que les équations (17) et (18) sont respectivement équivalent aux équations (4) et (5) lorsqu'on les fait agir sur des vecteurs, dans le cas d'une connexion affine.

60. Il est possible de dériver rigoureusement l'équivalence entre la connexion de Ehresmann sur P et la connexion de Kozsul ainsi proposée sur E – ainsi que l'interprétation géométrique associée – en introduisant la notion de relèvement horizontal (Nakahara (2003), Sec. 10.4) et/ou de dérivée covariante extérieure sur les fonctions équivariantes (Schuller 2016 ; Disney-Hogg 2019). Il existe de multiples manières de procéder. On peut par exemple définir $\nabla_v \psi|_p = (\mathrm{d}\psi)_p(\mathrm{hor}(X^v))$, où $X^v \in T_pP$ tel que $\pi_* X^v = v$ et $\psi \in C^\infty_G(P, V)$ est la représentation de $s \in E$ donnée par une fonction équivariante sur P.

C Elements de Weltgeometrie

Nous présentons ici quelques éléments de la Weltgeometrie proposée par Weyl afin de mieux comprendre les enjeux d'une telle théorie pour le développement de la notion de connexion. Pour une présentation plus complète, nous renvoyons au Chap. 6 de Ryckman (2005) ainsi qu'à Bell et Korté (2016), O'Raifeartaigh et Straumann (1998) et Scholz (2022) et la présentation très claire de Straub (2005).

Les développements suivants ont été proposés par Weyl graduellement de 1918 à 1924. Il cherchait alors à généraliser la géométrie Riemannienne au cœur de la relativité générale afin de présenter une théorie de l'espace-temps qui soit purement locale. En géométrie Riemannienne, la longueur ℓ d'un vecteur v, est définie de manière générale sur l'ensemble d'une variété par la donnée d'une métrique g comme $\ell = g(v, v)$. Weyl cherche à abolir cette notion absolue qu'il voit comme un héritage de la géométrie Euclidienne, en proposant que les longueur ne peuvent être comparées entre elles qu'en un seul et même point. Pour cela, il cherche à établir une géométrie invariante sous les transformation dites conformes (préservant les angles), correspondant à des transformations de la métrique du type

$$\bar{g} = \Omega^2 g \tag{19}$$

où $\Omega(x)$ est une fonction quelconque sur la variété M. Dans une telle géométrie, il est alors impossible de comparer les longueurs pour des points distant et seul les ratios de longueur sont clairement définis. La longueur devient donc une notion "relative" (comme la vitesse) et non absolue comme en géométrie Riemannienne. Dans ce nouveau cadre cependant, la connexion Γ préservant la métrique n'est plus unique, et toute connexion reliées par une transformation du type

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\delta^{\lambda}_{\mu}\theta_{\lambda} + \delta^{\lambda}_{\nu}\theta_{\mu} - g_{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\theta_{\rho}) \tag{20}$$

– où $\theta = \theta_\mu \mathrm{d}x^\mu$ est une 1-forme quelconque – est également valide.

Weyl cherche alors un moyen de déterminer une unique connexion Γ, définissant le transport parallèle sur M. Pour cela, Weyl doit introduire une nouvelle 1-forme $A_\mu \mathrm{d}x^\mu$ qu'il appelle la connexion métrique (aujourd'hui souvent appelée connexion de longueur (Bell et Korté 2016)), qui détermine comment la longueur $\ell = g(v, v) = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ d'un vecteur v varie lors du transport parallèle :

$$\mathrm{d}\ell = -\ell A_\mu \mathrm{d}x^\mu \tag{21}$$

Il est alors possible de définir une unique connexion, dite connexion de Weyl comme

$${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\delta^{\lambda}_{\mu}A_\nu + \delta^{\lambda}_{\nu}A_\mu - g_{\mu\nu}g^{\lambda\rho}A_\rho) \tag{22}$$

${}_{\mathrm{W}}\Gamma$ est donc la somme de la connexion de Levi-Civita Γ, quantifiant le changement d'orientation des vecteurs sous le transport parallèle et d'une autre contribution dépendante de A. Cette unique connexion est invariante sous la transformation jointe

$$\begin{cases} \bar{g}_{\mu\nu} & = e^{\Lambda(x)}g_{\mu\nu}(x) \\ \bar{A}_\nu & = A_\nu - \partial_\nu \Lambda \end{cases} \tag{23}$$

où $\Lambda(x)$ est une fonction quelconque. La transformation de la métrique n'est autre qu'une réécriture de la transformation conforme originellement demandée par Weyl en notant $\Lambda(x) = \ln(\Omega^2)$. La transformation de A est identifiable à une transformation de jauge caractéristique du potentiel vecteur électromagnétique et associée à la conservation de la charge électrique. Weyl interprète alors A comme le potentiel électromagnétique, auquel on peut associer la courbure

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu = (\mathrm{d}A)_{\mu\nu}, \tag{24}$$

qui n'est autre que le tenseur électromagnétique, quantifiant l'évolution du champ électromagnétique et son interaction avec la matière (les relations $\mathrm{d}F = \star\mathrm{d}\star F = 0$ redonnant les équations de Maxwell dans le vide, avec $\star$ le dual de Hodge).

La théorie ainsi proposée unie donc bien gravité et électromagnétisme dans un seul et unique cadre géométrique. La contribution de A transforme la longueur des vecteurs lors du transport parallèle. Le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est alors interprété comme une "courbure de longueur" (Streckenkrümmung). Le transport parallèle change la direction à travers la contribution de Levi-Civita et la longueur (à travers A).