蒙特卡洛模拟

电气21-2 闫枫元

（以下所有代码以及函数均来自于Matlab,使用Markdown编写）

一.名字的由来：

> 蒙特卡洛是摩纳哥公国的一座城市，位于欧洲地中海之滨、法国的东南方，属于一个版图很小的国家摩纳哥公国，世人称之为“赌博之国”。
> 这种模拟的方法则是通过随机模拟的方法不停地“赌博”进而寻找逼近于最优解的解，从而被命名为“蒙特卡洛模拟”。

二.原理以及逻辑：

> 由大数定理可知，当样本容量足够大时，事件发生的频率可近似作为时间发生的概率。
> 在变量所在的定义域里面，通过randi函数进行随机取值，带入目标函数求得解作为最优解，然后不停地循环，若找到更优解则替换掉上一个最优解，循环次数越多解就越优。

三.算法的优点、缺点：

1.优点：

- 简单粗暴，不需要有过多的代码逻辑就可以完成；
- 在模型正确且重复数量足够的情况下，求得的解近似为最优解；
- 也可作为一种验证模型科学性的一种方法。

2.缺点：

- 由于方法过于简单粗暴，没有数学建模里面必要的数学逻辑以及模型，所以无法作为直接解决题目问题的方法，仅可作为求解模型的方法；
- 在对于某些约束条件极多的规划、TSP问题等方面，蒙特卡洛模拟的时间复杂度尤其之高，甚至超百年，无法采用此方法（现在计算机每秒可运行3亿次运算，可用prod函数判断能否使用蒙特卡洛模拟）。

（例如2022年Mathorcup的D题，完全可以直接使用蒙特卡洛模拟进行求解，但是需要极高的运算时间以及花费，也没有模型，不符合数学建模大赛的目的以及意义）

3.改进方法：

- 可以通过智能算法进行优化，比如粒子群算法、蚁群算法、模拟退火算法等等，这些算法运算起来时间复杂度低，比如20个城市的TSP问题，在没有任何约束的情况下蒙特卡洛模拟需要计算633年，而蚁群算法在0.05秒内就能找到最优解，但是需要的思维量较大，比较难以掌握。
- 在实在不会智能算法的情况下，可以稍微减少蒙特卡洛模拟的循环次数，然后多次进行模拟根据解的分布情况逐步缩小上下界的范围，进而使解更优。

四、蒙特卡洛模拟的典型例子

引例：布丰投针实验

取一张白纸，在上面画许多条间距为 a 的平行线，取一根长为 l 的针 $(l \leqslant a)$，随机向画有平行线的纸投掷 n 次，计算针与直线相交的概率。

在现实里，这个问题可以用几何概型来计算，最终答案为 $\frac{2l}{\pi n}$,进而可以把 π 给计算出近似解，但是在计算机里可用蒙特卡洛模拟解决这个问题。

代码：

```
clear
clc
l = 1; %针的长度（任意）
a = 2; %平行线的间距（大于1即可）
n = 100000; %循环次数，n越大求出来的值越接近π
m = 0;
x = rand(1,n)*a/2; %在[0,a/2]内随机取n个数，x表示针中点和最近一条平行线之间的距离
phi = rand(1,n)*pi; %在[0,pi]内随机取n个数，phi表示针与最近平行线的夹角
for i=1:n
    if x(i) < 1/2*sin(phi(i)) %判断是否相交
        m = m+1
    end
end
p = m/n %计算概率
realpi = (2*l)/(a*p) %验证
```

1.蒙特卡洛求解有约束的非线性规划问题

目标函数	约束条件	变量
$\max f(x)=x_1x_2x_3$	$-x_1+2x_2+2x_3 \geqslant 0$ $x_1+2x_2+2x_3 \leqslant 72$ $10 \leqslant x_2 \leqslant 20$ $x_1-x_2=10$	x_1,x_2,x_3

思路：

> 从约束条件中求出每个变量受限的大致范围，从中用随机数生成若干组成实验点，并验证它们是否满足所有的约束条件，若满足，则将其划分到可行组，再从可行组中找到函数的最大值和最小值。

技巧：

- 由 $x_1-x_2=10$，可知 $x_2=x_1-10$，则 $f(x)=x_1(x_1-10)x_3$;
- $10 \leqslant x_2 \leqslant 20$，可知 $20 \leqslant x_1 \leqslant 30$;
- 由 $-x_1+2x_2+2x_3 \geqslant 0$，可知：$x_3 \geqslant \frac{1}{2}(x_1-2x_2) \geqslant \frac{1}{2}(20-2*20)=-10$;
- 由 $x_1+2x_2+2x_3 \leqslant 72$，可知：$x_3 \leqslant \frac{1}{2}(72-x_1-2x_2)=\frac{1}{2}(72-20-2*10)=16$，即最终 $x_3 \in [-10,16]$。

代码：

```
n = 1000000; %生成随机数组数
x1 = unifrnd(20,30,n,1); %生成在[20,30]分布，n行1列的向量构成x1
x2 = x1 - 10;
x3 = unifrnd(-10,16,n,1); %同x1
fmax = -inf; %初始化最大数为负无穷（找到比这个数大的数就迭代）
for i = 1:n;
    x = [x1(i),x2(i),x3(i)]; %构建x向量
    if (-x(i) + 2*x(2) + 2*x(3) >= 0) & (x(1) + 2*x(2) + 2*x(3) <= 72)
        result = x(1)*x(2)*x(3);
        if result > fmax
            fmax = result;
            X = x; %将此时的x1,x2,x3保存到一个变量中
        end
    end
end
disp(strcat('蒙特卡洛模拟得到的最大值为：',num2str(fmax)))
disp('最大处x1,x2,x3的取值为：')
disp(X)
```

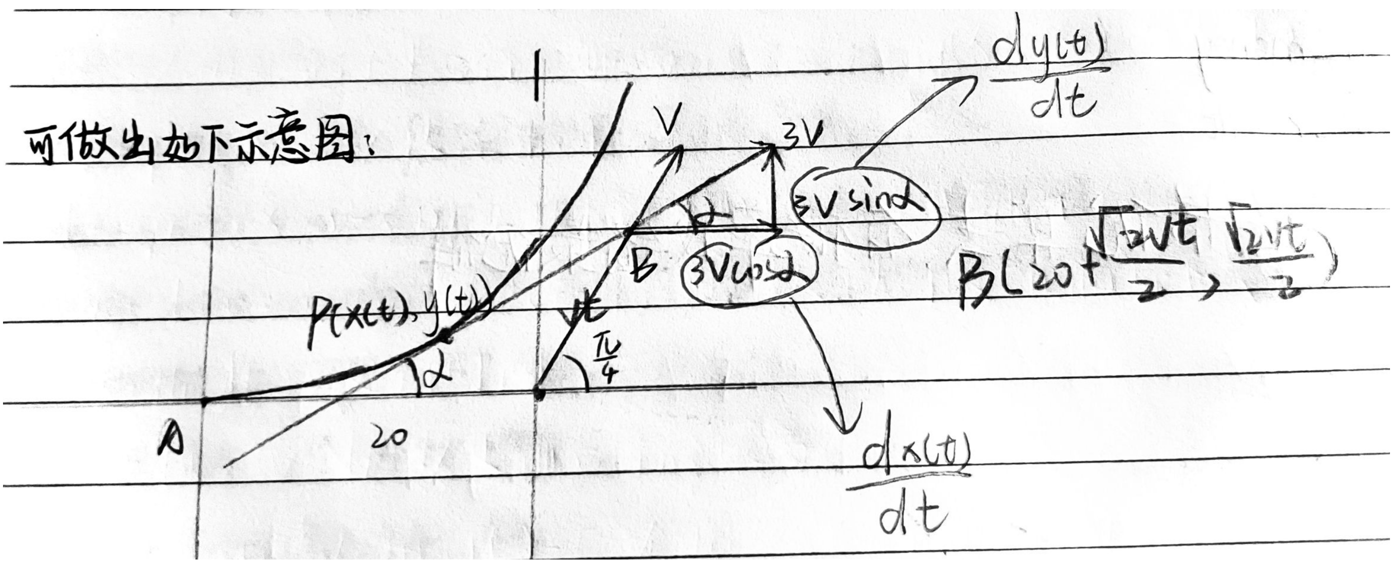
注：此代码求出来的为初始值，还需缩小范围再次模拟

2.蒙特卡洛求解导弹追击问题

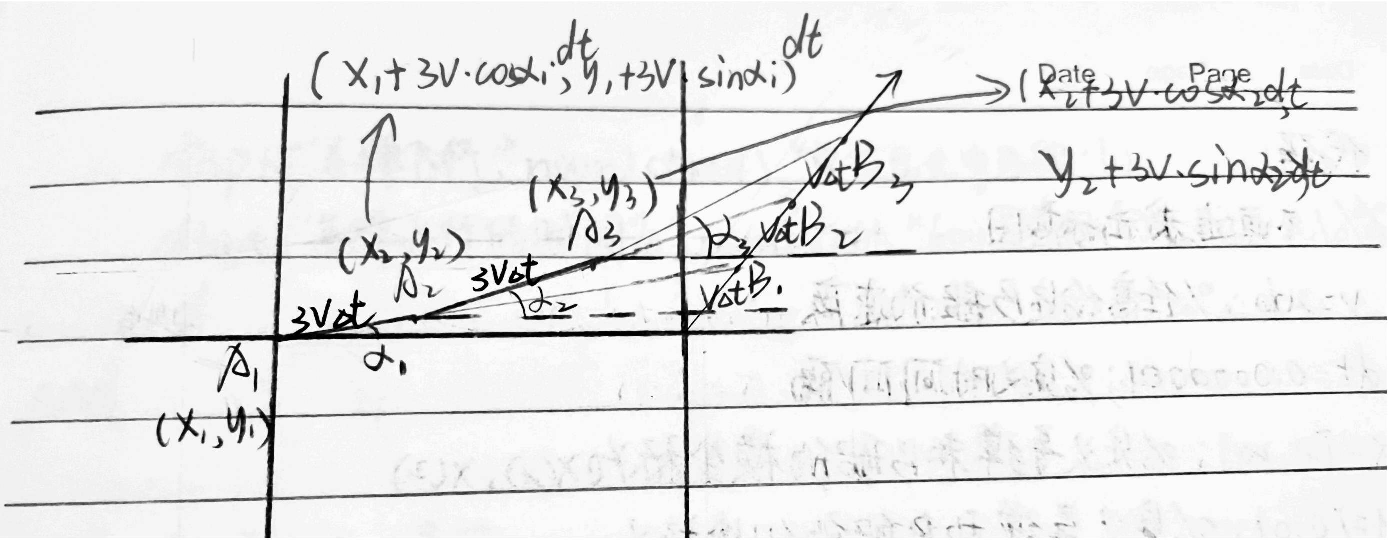
问题：

位于坐标原点的 A 船向位于其正东方 20 个单位的 B 船发射导弹，B 船以时速 v 单位（常数）沿东北方向逃逸。若导弹的速度为 $3v$，导弹的射程是 50 个单位，画出导弹运行的路线，并且判断导弹能否在射程内击中 B 船。（本题用微分方程可以直接求出精确解）

首先我们要对图像进行分析，如下图：



设导弹飞行的总时间为 T，我们可以将 T 分为 n 个时间间隔 Δt，Δt 越小越好，不妨取 $\Delta t = 0.0000001$，则原图可近似分解为：



如上图，假设 B 船先走 Δt 个时间到达 B_1，导弹才开始从 A_1 发射（如果同时进行代码难以实现），那么在下一个 Δt 内，导弹的方向一定是沿着 A_1B_1，斜率为 $\tan\alpha_1$，α_1 为夹角，以此类推，且 $|A_i, A_{i+1}| = 3v\Delta t$

记 dd 表示导弹和 B 的距离，当 $|dd| = 0$ 时，表示相撞，但是用此方法使用浮点数计算几乎不可能达到 0，所以我们规定当 dd 小于一定值时表示相撞。

代码：

```
v = 200;
dt = 0.0000001;
x = [0,20]; %定义导弹和B船的横坐标x(1),x(2)
y = [0,0]; %定义导弹和B船的纵坐标y(1),y(2)
t = 0; %初始化导弹击落B船的时间
d = 0; %初始化导弹飞行的距离
m = sqrt(2)/2; %使运算简洁
dd = sqrt((x(2) - x(1))^2 + (y(2) - y(1))^2); %导弹与B船的距离

for i = 1:2
    plot(x(i),y(i),'k','Markersize',1); %画出导弹和B船的示意图
    grid on                             %k表示黑色，Markersize表示小点
    hold on
end
axis([0 30 0 10]) %固定x轴范围[0,30]，y轴范围[0,10]
k = 0; %控制Matlab画图的速度

while(dd >= 0.001) %只要距离足够大，就可以一直循环
    t = t+dt; %更新时间
    d = d+3*v*dt; %更新飞行距离
    x(2) = 20+t*v*m; %更新B船横坐标
    y(2) = t*v*m; %更新B船纵坐标
    dd = sqrt((x(2) - x(1))^2 + (y(2) - y(1))^2);
    tan_alpha = (y(2)-y(1))/(x(2)-x(1));
    cos_alpha = sqrt(1/(1+tan_alpha^2)); %三角代换
    sin_alpha = sqrt(1-cos_alpha^2);
    x(1) = x(1) + 3*v*dt*cos_alpha; %更新导弹横坐标
    y(1) = y(1) + 3*v*dt*sin_alpha; %更新导弹纵坐标
    k = k+1;
```

```
    if mod(k,500) == 0 %每刷新500次画出下一个导弹和B的坐标
        for i = 1:2
            plot(x(i),y(i),'k','Markersize',1);
            hold on
        end
        pause(0.001) %0.001秒后再进行下一操作
        end
        if d <= 50 & dd < 0.001
            disp(['导弹飞行',num2str(d),'个单位击中B船'])
            disp(['导弹飞行的时间为',num2str(t*60),'分钟'])
        end
        if d > 50
            disp('导弹没有击中B船')
            break
        end
    end
end
```

3.蒙特卡洛求解简单TSP问题

问题：

一个售货员必须访问10个城市，这十个城市是一个完全图，售货员需要恰好访问所有城市一次，并且回到最初的城市，求路径最短的路线

数据如下：

城市	X	Y
1	0.6683	0.2536
2	0.6683	0.2634
3	0.4000	0.4439
4	0.2429	0.1463
5	0.1707	0.2293
6	0.2293	0.7610
7	0.5171	0.9414
8	0.8732	0.6536
9	0.6878	0.5219
10	0.8488	0.3609
代码：		

```
%对数据进行处理
```

```
coord = [0.6683 0.6683 0.4000 0.2429 0.1707 0.2293 0.5171 0.8732 0.6878 0.8488,
        0.2536 0.2634 0.4439 0.1463 0.2293 0.7610 0.9414 0.6536 0.5219 0.3609]
        %构建城市坐标矩阵
n = size(coord,1) %城市的个数
figure(1)
plot(coord(i,1),coord(i,2),'o');
for i = 1:n
    text(coord(i,1) + 0.001,coord(i,2) + 0.001,num2str(i))
end
hold on
d = zeros(n); %初始化两个城市的距离矩阵为0
for i = 2:n
    for j = 1:i
        coord_i = coord(i,:);
        x_i=coord_i(1);
        y_i=coord_i(2);
        %以上为城市i的坐标
        coord_j = coord(j,:);
        x_j=coord_j(1);
        y_j=coord_j(2);
        %以上为城市j的坐标
        d(i,j) = sqrt((x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2); %距离
    end
end
d = d+d'; %d加d的转置，生成矩阵，沿主对角线对称

%主代码
min_result = +inf; %初始化最短路径为0
min_path = [1:n]; %初始化最短路径为1-2...-10
N = 1000000;
for i = 1:N
    result = 0; %初始化走过的路程为0
    path = randperm(n); %生成1-n的随机数列
    for i = 1:(n-1)
        result = d(path(i),path(i+1))+result;
    end
    result = d(path(1),path(n))+result; %加上最后一个城市到起点的距离
    if result < min_result
        min_path = path;
        min_result = result;
    end
end
min_path %输出
min_path = [min_path,min_path(1)] %在最短路径的最后加一个元素，即为第一个点

%上一个图为画点，这个图为画线
n = n+1;
for i = 1:(n-1)
    j = i+1;
```

```
    coord_i = coord(min_path(i),:);
    x_i = coord_i(1);
    y_i = coord_i(2);
    coord_j = coord(min_path(j),:);
    x_j = coord_j(1);
    y_j = coord_j(2);
    plot([x_i,x_j],[y_i,y_j],'-') %每两个点就作一条线段，直到走完所有城市
    pause(0.5) %暂停0.5s
    hold on
end
```

注：以上均为简单的TSP问题，若城市过多则必须使用智能算法，不建议用蒙特卡洛求解TSP，事实情况远比理想模型复杂得多（可以参考2022年电工杯B题）

4.蒙特卡洛求解0-1规划问题

问题：

某同学要从六家线上商城选购B1、B2、B3、B4、B5五本书，请为他选择花费最少的方案

数据如下：

	B1	B2	B3	B4	B5	运费
A	18	39	29	48	59	10
B	24	45	23	54	44	15
C	22	45	23	53	53	15
D	28	47	17	57	47	10
E	24	42	24	47	59	10
F	27	48	20	55	53	15

思路：

目标函数即为总花费，包括五本书的总价格以及总运费
可以引入0-1变量，1表示该同学在第i家店买第j本书，0表示没有买到

代码：

```
min_money = +inf;
min_result = randi([1,6],1,5); %取出5个整数，意为五本书在取出的5个店铺里购买
n = 1000000;
M = [18 39 29 48 59
     24 45 23 54 44
     22 45 23 53 53
     28 47 17 57 47
     24 42 24 47 59
     27 48 20 55 53];
```

```
freight = [10 15 15 10 10 15];
for k = 1:n
    result = randi([1,6],1,5);
    index = unique(reasult); %unique函数可以剔除矩阵里面的重复值
                             %在这里可以表示在哪些商店购买了商品
    money = sum(freight(index)); %计算花费
    for i = 1:5
        money = money+M(result(i),i);
    end
    if money < min_money;
       min_money = money;
       min_result = result;
    end
end
min_money
min_result
```

不是最优算法，有概率找错最优解，需要多次尝试

五、总结

> 蒙特卡洛模拟是一种非常简单粗暴的算法，在许多规划问题里面广泛使用，以及多元回归分析里面探究内生性对结果的影响以及基于熵权法对Topsis模型的修正里面也内涵蒙特卡洛的思想，在TSP问题以及导弹追击模型里面也可使用，但是不建议。
> 蒙特卡洛模拟没有具体的模型，主要就是靠：随机取值-循环-最优值替代这个逻辑运行，个人认为是必须要掌握的算法，但是相比于其他算法，如果想让评委老师眼睛一亮，还是建议倾向于选择效率更高、准确度更高、逻辑性更强的智能算法，不过前提是得会使用。