

# Курсовая работа по вычислительной математике

## № 9

### Стационарная задача теплопроводности в балке

Выполнил Елесин Л. О., Б02-927

17 мая 2022 г.

#### Аннотация

Получено численное решение стационарной задачи теплопроводности в балке квадратного сечения при помощи итерационных методов Зейделя, Якоби и верхней релаксации. Получено, что скорость сходимости максимальна при использовании схемы верхней релаксации с параметром  $\tau_{opt} = 1.9$ . Также решена нестационарная задача и получена анимация решения.

## 1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о нагревании балки квадратного сечения, бесконечной по одной оси координат ( $O_z$ ). Пусть температура грани AB, BC, CD, DA поддерживается постоянной: 1 на AB, 2 на BC, 3 на CD и 4 на DA (температура приведена в относительных единицах,  $T_* = 100^\circ$ ). Размер грани  $AB = BC = CD = AD = 0.1$  м. Требуется найти установившееся распределение температуры внутри балки.

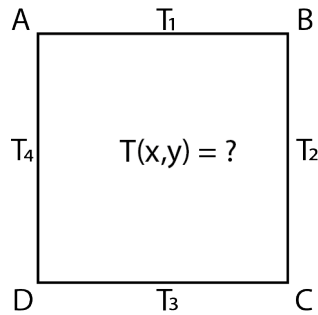


Рис. 1: Постановка задачи

## 2 Численные методы и граничные условия

Стационарное уравнение теплопроводности в 2D имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

После дискретизации уравнения, вводя пространственную сетку, используем схему с центральной разностью и получаем:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

Поскольку задача симметрична примем  $\Delta x = \Delta y$ , и выразим  $T_{i,j}$ :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4}$$

Будем использовать три метода для решения задачи:

1. **Метод Якоби.** Для вычисления температуры используются только значения из прошлой итерации:

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i-1,j}^k + T_{i+1,j}^k + T_{i,j-1}^k + T_{i,j+1}^k}{4}$$

2. **Метод Зейделя.** Используется как значения из текущей так и из прошлой итерации:

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^k + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k}{4}$$

3. **Метод верхней релаксации.** К методу Зейделя добавляется коэффициент масштабирования, благодаря которому уменьшается количество итераций:

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^k + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k}{4/\tau} + (1 - \tau)T_{i,j}^k$$

Размер сетки выберем из физических соображений, таких что температуру легко измерять с точностью до сотых на масштабе 1 мм. Так как длина ребра поперечного сечения у нас 10 см, то получится сетка размером 100x100. Для критерия останова будем пользоваться **C** нормой матрицы распределения температуры

$$\frac{\|abs(T^{k-1} - T^k)\|_C}{100} \leq \epsilon$$

где 100 коэффициент порядка характерной температуры,  $\epsilon = 10^{-4}$  выбрана из соображения значения относительной погрешности измерения температуры в реальной жизни.

### 3 Скорость сходимости и сходимость по сетке

Сравним три метода по скорости сходимости на различных сетках. Для этого просто посчитаем количество итераций, после выполнения которых выполняется критерий останова.

Length, $N_{cells}$	10	25	50	75	100	125	150	175	200
Jacobi, $N_{it}$	47	250	766	1383	2013	2599	3096	3470	3706
Seidel, $N_{it}$	26	140	448	840	1274	1721	2157	2565	2928
Relax, $N_{it}$	18	53	182	357	565	795	1040	1294	1551

Таблица 1. Количество итераций

Теоретические расчеты дают:

1. Якоби :  $I \approx 2 \frac{N_c^2}{\pi^2} \ln \epsilon^{-1}$ ,  $I(100) \approx 9000$
2. Зейдель:  $I \approx \frac{N_c^2}{\pi^2} \ln \epsilon^{-1}$ ,  $I(100) \approx 4000$
3. Релаксация:  $I \approx 2 \frac{N_e}{\pi} \ln \epsilon^{-1}$ ,  $I(100) \approx 300$

Что по порядку величины совпадает с численными расчетами, и отражает тот факт, что метод Якоби самый медленный, а верхней релаксации самый быстрый.

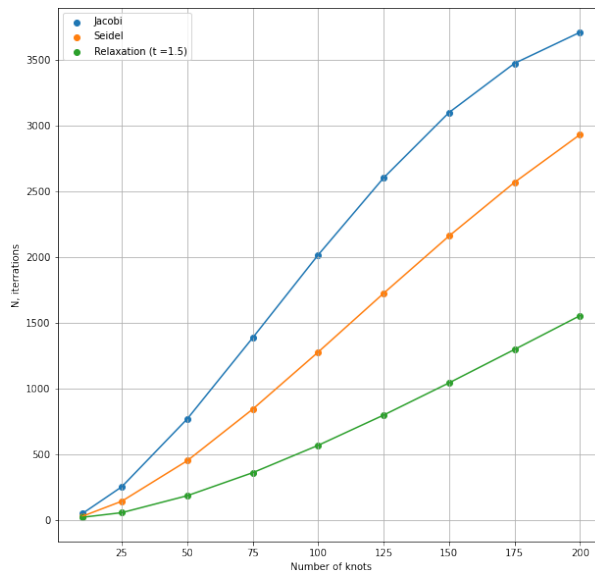


Рис. 2: Скорость сходимости в зависимости от количества узлов

Убедимся, что методы сходятся по сетке, для этого будем вычислять среднюю температуру на разных линиях, измельчая сетку. Посчитаем средние значения на высоте 2, 4, 6 и 8 см, и убедимся, что при измельчении сетки среднее значение выходит на плато.

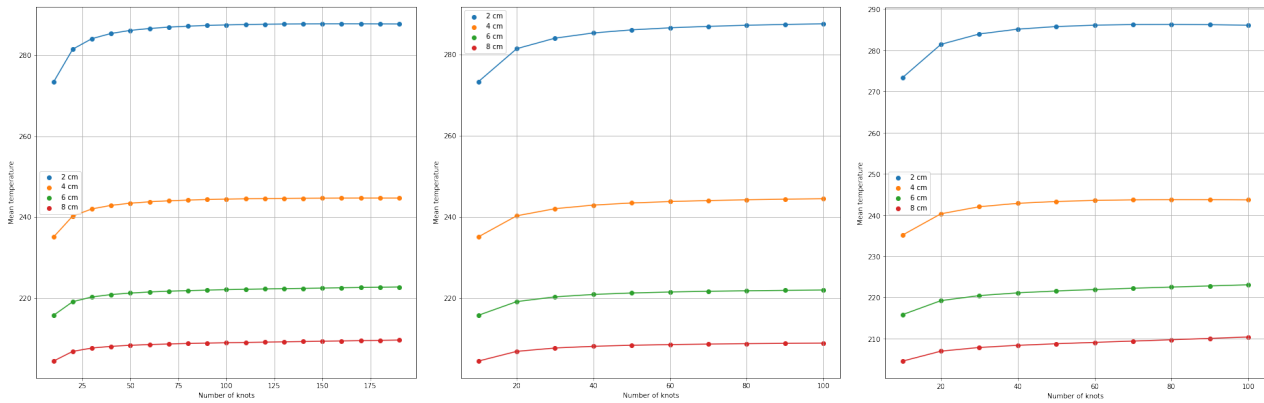


Рис. 3: Сходимость по сетке (Релаксация, Якоби, Зейдель)

#### 4 Зависимость скорости сходимости метода верхней релаксации от параметра $\tau$

На сетке 100x100 исследуем скорость сходимости метода верхней релаксации в зависимости от параметра  $\tau$ . Видно, что скорость сходимости максимальна при  $\tau \approx 1.9$ .

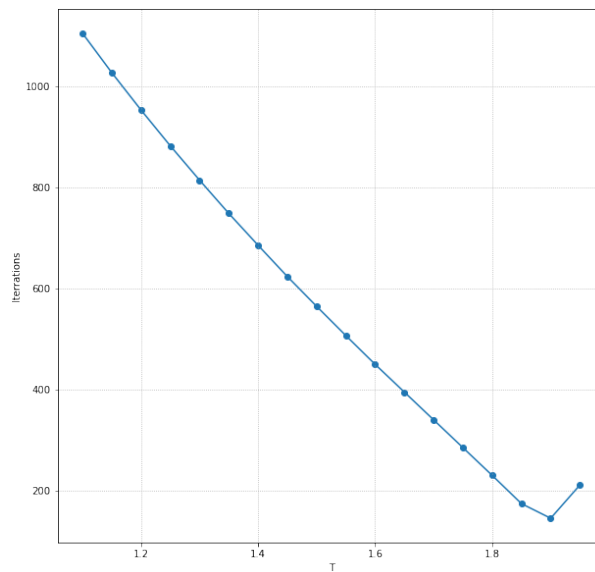


Рис. 4: Скорость сходимости в зависимости от параметра  $\tau$

#### 5 Результаты численного моделирования

Приведем основные результаты полученные численными методами, на основной сетке (100x100), а именно графики зависимости  $T(x,y)$ , графики  $T(x)$  при фиксированном  $y$  и  $T(y)$  при фиксированном  $x$ .

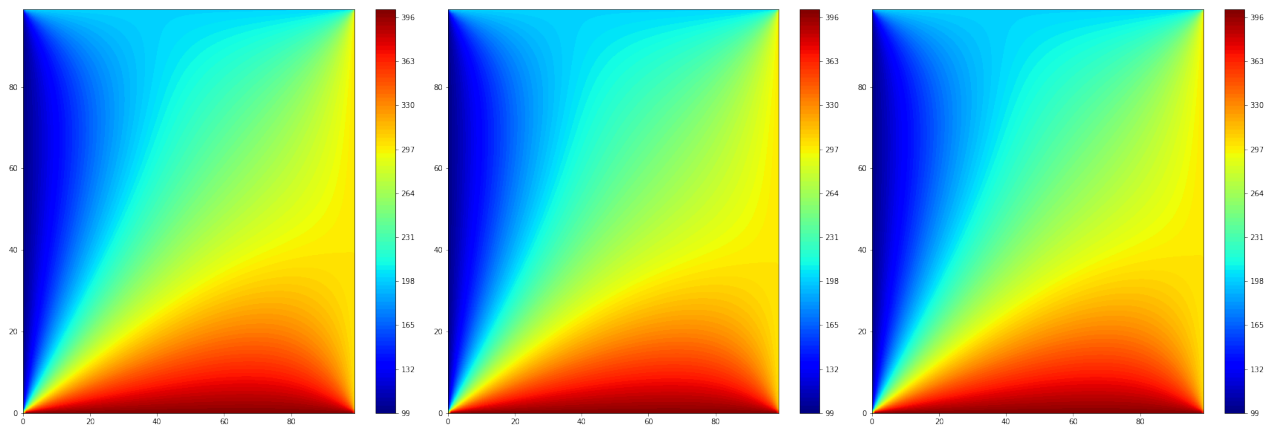


Рис. 5: Изолинии (Якоби, Зейдель, Релаксация)

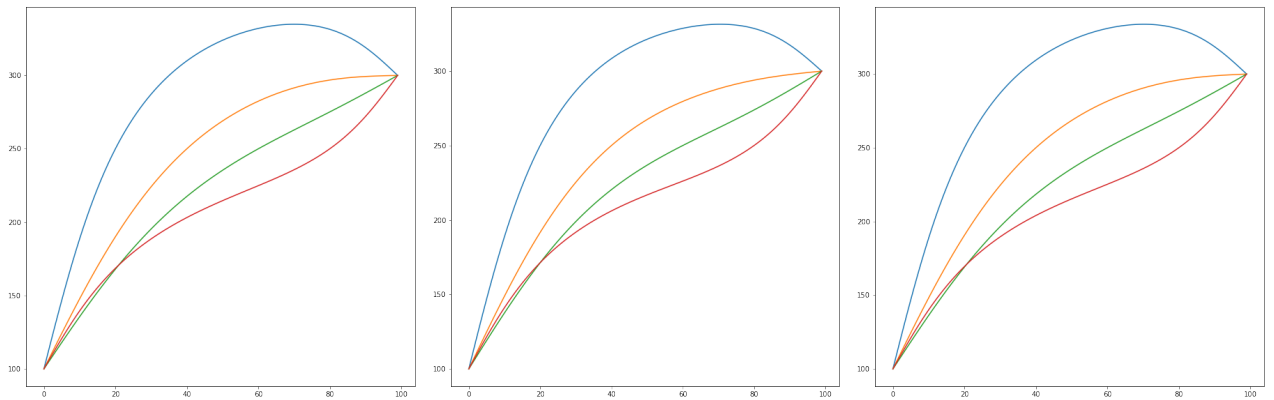


Рис. 6: Зависимость температуры при фиксированном X (Якоби, Зейдель, Релаксация)

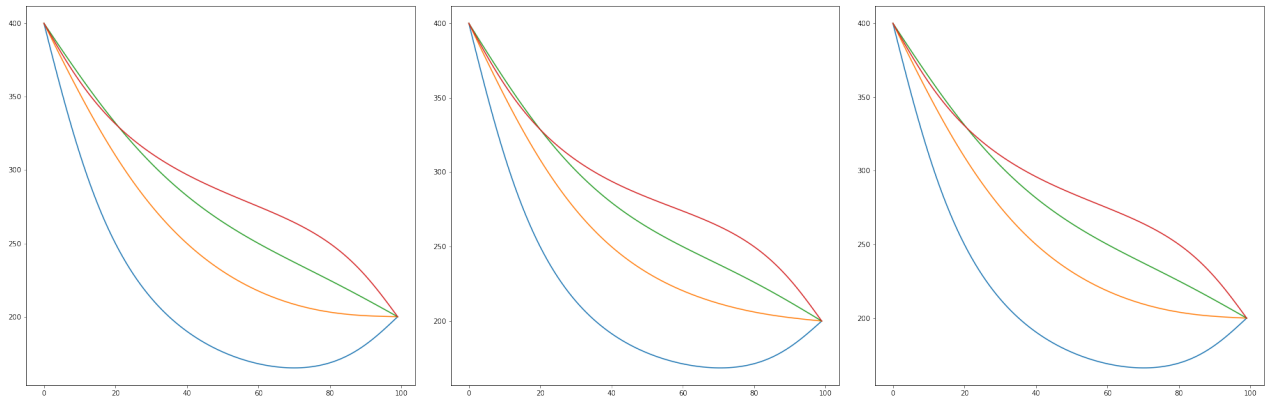


Рис. 7: Зависимость температуры при фиксированном Y (Якоби, Зейдель, Релаксация)

## 6 Вывод

Получено численное решение стационарной задачи теплопроводности в балке квадратного сечения при помощи итерационных методов Зейделя, Якоби и верхней релаксации. Методы показали аналогичные результаты, но самым быстрым по сходимости и по времени работы оказался метод верхней релаксации, также по порядку скорости сходимости совпала с теорией. Получено, что скорость сходимости в схеме верхней релаксации максимальна при использовании параметра  $\tau_{opt} = 1.9$

## 7 Приложение

### 7.1 Решение нестационарной задачи

Нестационарная задача теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}$$

Где  $\alpha$  - коэффициент температуропроводности. Например для некоторых композитов углерода  $\alpha \approx 0.00025 \text{ m}^2/\text{s}$ . Дискретизируя уравнение и выражая температуру получим (используя явный метод):

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta h^2} (T_{i-1,j}^k + T_{i+1,j}^k + T_{i,j-1}^k + T_{i,j+1}^k - 4T_{i,j}^k)$$

За временную единицу выберем  $\Delta t = 1 \text{ мс}$ , за пространственную  $\Delta x = \Delta y = \Delta h = 0.001 \text{ м}$ . Решая численно получим GIF файл (evolution main), где отображается изменение температуры в образце в зависимости от времени. Также имеются анимации с другими начальными распределениями температуры.

### 7.2 Результаты численного моделирования

Приведена финальная картинка распределения температуры решения стационарного уравнения для метода верхней релаксации. Для метода Зейделя и верхней релаксации получены GIF, отражающие изменение решения в зависимости от итерации.

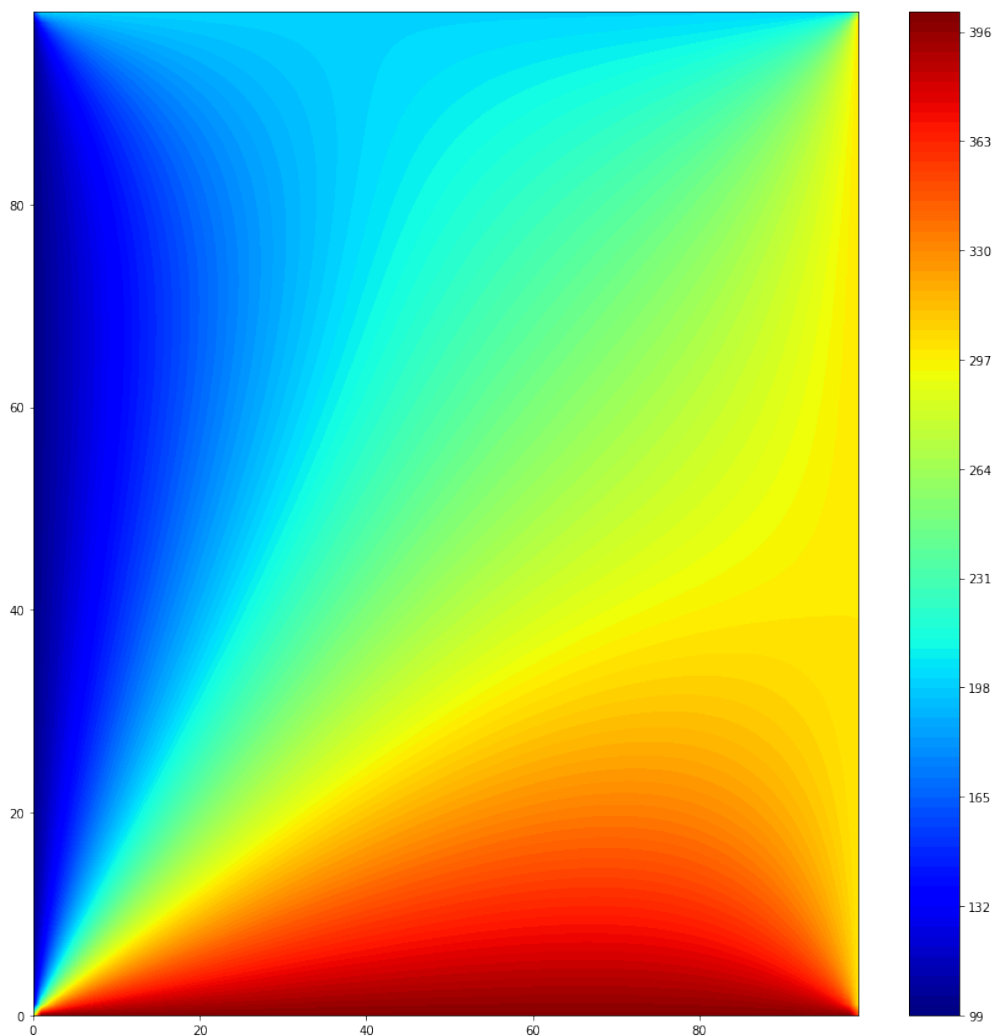


Рис. 8: Распределение температуры (Релаксация)

### 7.3 Ссылка на код и на саму работу

[https://github.com/LeoYe-st/Vychmat\\_project](https://github.com/LeoYe-st/Vychmat_project)