

1. Monte Carlo y Bootstrap no paramétrico

Sea una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n de una población con distribución $Poisson(\theta)$. Se puede mostrar que la estimación de la función parametral de $\tau(\theta) = e^{-\theta} = P(X = 0)$ es $\hat{\tau}(\theta) = (\frac{n-1}{n}) \sum_{i=1}^n X_i$ y que es su UMVUE, sin embargo no es fácil encontrar la distribución de $\hat{\tau}(\theta)$ o la expresión de su varianza $V(\hat{\tau}(\theta))$.

a. Método Monte Carlo

Para estimar $E(\hat{\tau}(\theta))$, $V(\hat{\tau}(\theta))$ y el histograma de $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_B$ como datos de la distribución de $\hat{\tau}(\theta)$, se generan diez mil muestras, cada muestra tiene 20 observaciones, de la variable aleatoria $\hat{\tau} \sim Poisson(\theta = 1)$.

De este modo, al estimar $E(\hat{\tau})$, $V(\hat{\tau})$ y la distribución de $\hat{\tau}$ se obtienen los siguientes resultados (los códigos se pueden consultar en el archivo RMarkdown en los chunks *estimationT* y *histogram1* en las líneas 50 y 83 respectivamente).

$$\mathbb{E}[\hat{\tau}] \approx \frac{\sum_{i=1}^{10000} \hat{\tau}_i}{10000} \approx 0.3681426 \quad y \quad \mathbb{V}[\hat{\tau}] = \mathbb{E}[\hat{\tau}^2] - \mathbb{E}[\hat{\tau}]^2 \approx 0.0069788$$

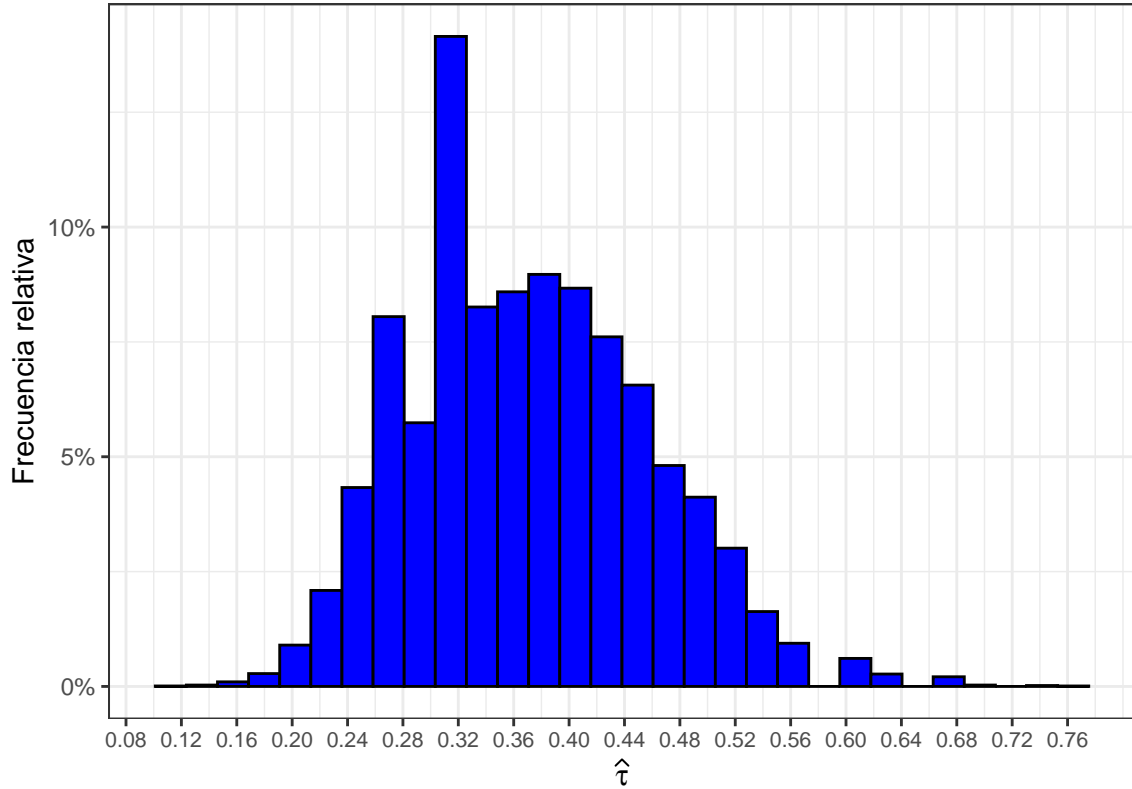


Figura 1: Histograma para las muestras generadas por Monte Carlo

b. *Bootstrap* no paramétrico

Para el método de *bootstrap* no paramétrico, se generan 20 números aleatorios de una distribución $Poisson(\theta = 1)$. Hacemos la estimación de $\tau(\theta) = e^{-\theta} = P(X = 0)$ usando $\hat{\tau}(\theta) = (\frac{n-1}{n}) \sum_{i=1}^n X_i$, estimamos la esperanza y varianza de $\hat{\tau}$ usando *bootstrap* no paramétrico con $B = 10,000$, y el histograma de $\hat{\tau}_{(1)}, \dots, \hat{\tau}_{(n)}^*$.

Se obtuvieron los siguientes resultados (el código se puede consultar en el chunk *Bootstrap* en la línea 103 y 139 del archivo RMarkdown).

$$\mathbb{E}[\hat{\tau}] \approx 0.3073569$$

$$\mathbb{V}[\hat{\tau}] \approx 0.0037737$$

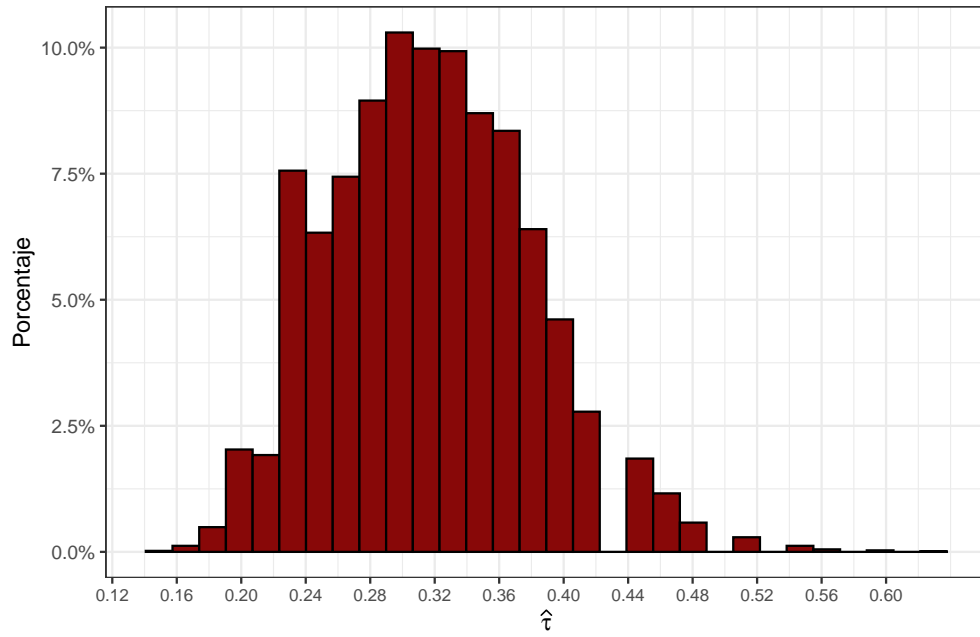


Figura 2: Histograma para las muestras generadas por *bootstrapping*

Los métodos difirieron en aproximadamente 0.060786 para la esperanza del estimador y 0.003205 para su varianza. Los histogramas representan distribuciones muy parecidas.