Ejercicio 4

Equipo

2024-03-26

4. Problema Anova. Equivalencia con la estimación considerando dos poblaciones normales.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a de la distribución $N\left(\mu_x, \sigma^2\right)$ y $Y_1, \ldots, Y_m$ una m.a de la distribución $N\left(\mu_y, \sigma^2\right)$ independientes entre si, sea $Z = 1$ si la observacion es de la poblacion con distribucion $N\left(\mu_x, \sigma^2\right)$ y $Z = -1$ si la poblacion es de la poblacion con distribucion $N\left(\mu_y, \sigma^2\right)$

I. Consideramos el modelo de regresion lineal simple:

$$w_j = \beta_0 + \beta_1 z_j + \varepsilon_j$$

con $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+m}$ variables independientes talque $\varepsilon_j \sim N\left(0, \sigma^2\right) \quad \forall j = 1, \ldots, n+m$

Entonces:

$$\mathbb{E}(w; z=1) = \mathbb{E}(x; z=1) = \beta_0 + \beta_1$$

observamos que $\mathbb{E}(x; z=1) = \mathbb{E}(x) = \mu_x$

Por otro lado tenemos:

$$\mathbb{E}(w; z=-1) = \mathbb{E}(y; z=-1) = \beta_0 - \beta_1$$

observamos que $\mathbb{E}(Y; z=-1) = \mathbb{E}(y) = \mu_y$

Es decir, $\mu_x = \beta_0 + \beta_1$ y $\mu_y = \beta_0 - \beta_1$,

II. Conocemos los estimadores:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{w} - \hat{\beta}_1 \bar{z} \text{ y } \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n+m}\left(z_i - \bar{z}\right)\left(w_i - \bar{w}\right)}{\sum_{i=1}^{n+m}\left(z_i - \bar{z}\right)^2}$$

Con esto podemos obtener: a) $\hat{E}(w; z=1)$ como $Z = 1$ entonces $w = x$ y $\bar{z} = 1$, asi:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \bar{z}\right)\left(x_i - \bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \bar{z}\right)^2} \rightarrow \hat{\beta}_1 = 0$$

$$\text{y } \hat{\beta}_0 = \bar{x} - \hat{\beta}_1 \bar{z} = \bar{x} - \hat{\beta}_1 = \bar{x}$$
$$\therefore \hat{\mathbb{E}}(W; z=1) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 = \bar{x}$$

b) Como $Z = -1$ entonces $w = y$ y $\bar{z} = -1$, asi:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(z_i - \bar{z}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{m}\left(z_i - \bar{z}\right)^2} \longrightarrow \hat{\beta}_1 = 0$$
$$y, \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 = \bar{y} \quad \therefore \hat{\mathbb{E}}(W; z=-1) = \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 = \bar{y}$$