Ejercicio 1

Considere el modelo de regresión

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_p x_p + \epsilon$$

y los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados en forma matricial $\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t y$

Usando la matriz proyección H y sus propiedades indique:

I) A que es igual: $e^t X$

$$\begin{aligned} e^t X &= (y - \hat{y})^t X \\ &= (y - Hy)^t X \\ &= (y^t - y^t H^t) X \\ &= y^t X - y^t H X \\ &= y^t X - y^t (X(X^t X)^{-1} X^t) X \\ &= y^t X - y^t X[(X^t X)^{-1} X^t X] \\ &= y^t X - y^t X = 0 \end{aligned}$$

$\therefore e^t X = 0$

II) A que es igual: $Cov(e, \hat{y})$

Primero notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} e &= (y - \hat{y}) \\ &= (y - Hy) \\ &= (I - H) y \end{aligned}$$

Donde I es la matriz identidad, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} Cov(e, \hat{y}) &= Cov((I - H)y, \hat{y}) \\ &= Cov((I - H)y, Hy) \\ &= (I - H) Cov(y, y) H^t \\ &= (I - H) Var(y) H \\ &= (I - H) \sigma^2 H \\ &= \sigma^2 (H - HH) \\ &= \sigma^2 (H - H) \\ &= \sigma^2 (0) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore Cov(e, \hat{y}) = 0$