Ejercicio 1

Equipo

2024-03-26

1. Regresión a través del origen.

$$y_i = \beta x_i + \xi_i \quad i = 1 \dots n$$

donde $\xi_1, \dots, \xi_n$ son v.a.i. talque $\xi_i \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{w_i}\right)$

$$\forall i = 1 \dots n$$

Suponiendo σ^2 conocida y $\omega_i = \frac{1}{x_i^2} \quad i = 1, \dots, n$

I) Obtendremos el estimador de β por el método de máxima verosimilitud.

Como las ξ_i son normales, entonces $y_i \sim N\left(\beta x_i, x_i^2 \sigma^2\right)$ independientes con σ^2 constante (conocida), entonces la funcion de verosimilitud nos queda:

$$L(\beta; y_1, ..., y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(x_i \sigma)} e^{-\frac{(y_i - \beta x_i)^2}{2x_i^2 \sigma^2}}$$

es decir:

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{-(y_i - \beta x_i)^2}{2x_i^2 \sigma^2}}$$

Aplicando logaritmo:

$$ln(L) = \ln(1) + ln(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\sigma) + \sum_{i=1}^{n} \frac{-(y_i - \beta x_i)^2}{2x_i^2 \sigma^2}$$

derivando e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{d}{d\beta} \ln(L) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)}{x_i^2 \sigma^2} (-x_i) = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)}{x_i \sigma^2} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i \sigma^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\sigma^2} = 0$$

Así:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i \sigma^2} = \frac{n\beta}{\sigma^2} \rightarrow \hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}$$

II) Ahora emcontraremos la expresión para la varianza de $\hat{\beta}$.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \\
&= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{x_i}^2} \operatorname{Var}(y_i) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1^2}{x_i^2} \left(x_i^2 \sigma^2\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \\
&\therefore \operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

III) Mostraremos que $\hat{\beta}$ es el UMBUE de β, i.e., que es el mejor estimador insesgado de β.

Tenemos la funcion de verosimilitud

$$
L = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} x_i} e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{-(y_i - \beta x_i)^2}{2 x_i^2 \sigma^2}}
$$

de donde:

$$
\begin{aligned}
e^{\sum \frac{-(x_i - \beta x_i)^2}{2 x_i^2 \sigma^2}} &= e^{\frac{1}{2\sigma^2} \sum - \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{x_i^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2\sigma^2} \sum \frac{-y_i^2 + 2\beta x_i y_i - \beta^2 x_i^2}{x_i^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2\sigma^2} (\sum \frac{-y_i^2}{x_i^2} + \sum \frac{2\beta y_i}{x_i} - \sum \beta^2)} \\
&= e^{\frac{-\sum \beta^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{1}{2\sigma^2} (\sum \frac{-y_i^2}{x_i^2} + 2\beta \sum \frac{y_i}{x_i})}
\end{aligned}
$$

Así:

$$
\begin{array}{ll}
a(\gamma) = e^{\frac{-\sum \beta^2}{2\sigma^2}} & b(x) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2} \prod x_i} \\
c_1(\gamma) = -1/2\sigma^2 & d_1(x) = \sum (y_i/x_i)^2 \\
c_2(\gamma) = \beta/\sigma^2 & d_2(x) = \sum y_i/x_i
\end{array}
$$

Por lo que forma parte de la familia exponencial.

Por lo tanto, $(\sum \frac{y_i}{x_i}, \sum (\frac{y_i}{x_i})^2)$ es una estadistica suficiente, minimal y completa por un teorema que nos dice que si $f(Y;\gamma)$ es de la familia exponencial, i.e., $f(Y;\gamma) = \alpha(\gamma) b(Y) e^{\sum_{j=1}^{n} c_j(\gamma) d_j(Y)}$, entonces la estadística $T(y_1, ..., y_n) = (d_1(Y), ..., d_k(Y))$ es suficiente, minimal y completa.

Observemos que $\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{x_i}$ es funcion de $\sum y_i/x_i$.

Además veamos que $\hat{\beta}$, función de la estadística suficiente, minimal y completa $\sum y_i/x_i$, es también insesgado:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\beta}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \mathbb{E}(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \beta = \beta
\end{aligned}
$$

Por lo tanto por el teorema de Lehman-Scheffe $\hat{\beta}$ es el UMVUE de β, i.e, es el estimador insesgado de mínima varianza (tiene el menor ECM).