Uma abordagem algorítmica para teoria algébrica de grafos

Nome do Aluno: Leonardo Bertucci dos Santos

RA do aluno: 11028714

E-mail do aluno: leonardo.bertucci@aluno.ufabc.edu.br

Nome do orientador: Cristiane Maria Sato

E-mail do orientador: c.sato@ufabc.edu.br

Palavras-chave do projeto: grafos, teoria algébrica dos grafos, core, homomorfismos

Área de conhecimento do projeto: Ciência da Computação

1. Grafos

1.1. Grafos

Um **grafo** X consiste de um conjunto de **vértices** $V(X)$ e um conjunto de **arestas** $E(X)$ tal que uma aresta é um par não ordenado de elementos distintos de $V(X)$. Denotamos uma aresta (u,v) simplesmente por uv. Se $e = uv$ é uma aresta de X dizemos que u e v são **adjacentes** ou **vizinhos**, e escrevemos $u \sim v$; dizemos também que e **liga** os vértices u e v, e que **incide** sobre cada um deles. O **grau** de um vértice v, $d(v)$, é o número de arestas incidentes a ele, e a **vizinhança** de v o conjunto contendo seus vértices vizinhos, denotada $N(v)$. Um vértice que possui grau zero é dito **isolado**. A **ordem** ou **tamanho** de um grafo X é o seu número de vértices. Um grafo é dito **completo** se todos os seus vértices são adjacentes, sendo denotado K_n o grafo completo de ordem n, e dito **vazio** se não possui nenhuma aresta (mas pelo menos um vértice). O grafo sem vértices nem arestas é chamado **grafo nulo**.

Grafos da forma que definimos aqui são chamados de **grafos simples**, pois existem algumas definições mais gerais que permitem por exemplo arestas paralelas ou loops (aresta de um vértice a si mesmo). Uma generalização importante ocorre se considerarmos pares ordenados de $V(X)$, denominados **arcos** ou **arestas dirigidas**, no lugar das arestas. Definimos desta forma um **grafo dirigido**, ou **digrafo**, como $V(X)$ junto com um conjunto de arcos $A(X)$. Podemos ver nesse contexto um grafo simples como um grafo dirigido onde (v,u) é um arco sempre que (u,v) for um arco. Mencionaremos neste texto sempre que formos trabalhar com digrafos ou qualquer outra variação de grafo, e caso contrário usaremos a palavra “grafo” sempre para identificar um grafo simples com conjunto de vértices finito.

O **complemento** de um grafo X, denotado $\overline{X}$, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de X, com $u \sim v$ em $\overline{X}$ se e somente se $u \nsim v$ em X. Um **clique** em um grafo X é um conjunto de vértices mutualmente adjacentes, enquanto um **conjunto independente/estável** é um conjunto de vértices mutualmente não-adjacentes. Pela definição de complemento pode-se ver que um clique de X é um conjunto independente em $\overline{X}$, e vice-versa.

1.2. Subgrafos

Um **subgrafo** de um grafo X é um grafo Y tal que

$$V(Y) \subseteq V(X), \quad E(Y) \subseteq E(X).$$

Se $V(Y) = V(X)$, dizemos que Y é **subgrafo gerador** de X; se $V(Y) \neq V(X)$ então Y é um **subgrafo próprio**. Y é um **subgrafo induzido** se dois vértices em $V(Y)$ são adjacentes se e somente se eles são adjacentes em $V(X)$. Um subgrafo gerador pode ser obtido deletando-se algumas arestas de X, enquanto um subgrafo induzido pode ser obtido ao se deletar alguns vértices de X (junto com as arestas que se ligavam a eles).

Dado um subconjunto $S \subseteq V(X)$, o **subgrafo induzido por** S, denotado $X[S]$, é o subgrafo induzido de X que possui como vértices o conjunto S. Se $F \subseteq E(X)$, $X[F]$ é o **subgrafo induzido por** F, com conjunto de vértices dado por $V(X[F]) = \{u \in V(X) : uv \in F\}$ e conjunto de arestas $E(X[F]) = F$.

Um **passeio** é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, \ldots, , v_k)$ tal que $v_i \sim v_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq k$; seu **comprimento** é o número de arestas que possui, e dizemos que é **fechado** quando $v_0 = v_k$. Poderemos tratar um passeio w como o subgrafo induzido por suas arestas quando conveniente. Uma **trilha** é um passeio que não repete arestas, enquanto um **caminho** é um passeio que não repete vértices. P_k denota o caminho de comprimento k. Um **ciclo** é um passeio fechado que não repete vértices, com excessão dos extremos, sendo C_n o ciclo de tamanho n.

Um grafo X é **bipartido** se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjunto A e B de modo que toda aresta de X liga somente vértices entre A e B.

Teorema 1. *Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclos ímpares.*

Demonstração. Considere um ciclo ímpar $C_n = (1, 2, \ldots, n, 1)$, onde n é um inteiro ímpar positivo. Suponha que exista bipartição A, B de C_n, e que o vértice 1 pertenca a A. Como $i \sim i + 1$ para todo vértice i de C_n, temos que todos os vértices pares estarão em B e os ímpares estarão em A. Logo $n \in A$. Mas n é adjacente a 1, chegando a uma contradição.

Para a volta, vamos contruir uma bipartição A, B de um grafo X que não possua ciclos ímpares do seguinte modo: Tome $v \in V(X)$ e o adicione em A. Adicione então todos os vizinhos de v ao conjunto B. Repita o processo de adicionar os vizinhos à outra partição (que já não estejam lá) até acabarem os vértices. Afirmamos que A, B é uma bipartição de X, pois durante o processo, caso seja inserido um vértice y, por exemplo em A, que seja adjacente a um vértice x que já está em A, então haveria um ciclo ímpar em X, formado pelo caminho de x até y que levou à inserção de y em A junto com a aresta xy. □

1.3. Homomorfismos

Definição 1. Sejam X, Y grafos. Uma função $f : V(X) \to V(Y)$ é um **homomorfismo** se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes sempre que u é adjacente a v.

Um homomorfismo de X em si mesmo é um **endomorfismo**. O conjunto de todos os endomorfismos em um grafo X forma um monoide (estrutura algébrica com operação binária associativa e que possui elemento neutro). Se f é um homomorfismo de X em

Y, o grafo formado pelos vértices $\{f(u) : u \in V(X)\}$ e arestas $\{f(u)f(v) : uv \in E(X)\}$ é chamado **imagem homomórfica** de X por f, e denotado $f(X)$. $f(X)$ é um subgrafo de Y.

Uma propriedade interessante que pode ser caracterizada por meio de homomorfismos é o número cromático de um grafo: uma k-**coloração própria** de uma grafo X é uma função de $V(X)$ em um conjunto de k cores tal que vértices adjacentes são levados em cores diferentes. O menor número k para o qual X pode ser própriamente k-colorido é chamado **número cromático** de X, e é denotado por $\chi(X)$. O conjunto de vértices com uma determinada cor forma um conjunto independente.

Lema 1. *O número cromático de um grafo X, $\chi(X)$, é igual ao menor inteiro r tal que existe um homomorfismo de X para K_r.*

Definição 2. Uma **retração** é um homomorfismo de um grafo X em um subgrafo Y de si mesmo tal que a restrição $f \restriction_Y$ de f para $V(Y)$ é a identidade. Se existe uma retração de X para um subgrafo Y, dizemos também que Y **é uma retração de** X.

De fato, se existe $f : X \to Y$ tal que $f \restriction_Y$ seja uma bijeção, então Y será uma retração de X via a função $g = (f \restriction_Y)^{-1} \circ f$. Logo, uma retração de X é um subgrafo Y que é a imagem de um homomorfismo de X.

Definição 3. Um **isomorfismo** ϕ de X em Y é um homomorfismo bijetivo cuja inversa é também um homomorfismo. Se X e Y são isomorfos, escrevemos $X \cong Y$.

Em outras palavras, ϕ é um isomorfismo quando $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes se e somente se u e v são adjacentes. Dois grafos isomorfos possuem exatamente a mesma estrutura e em geral podemos tratá-los como se fossem iguais.

Um isomorfismo de X em si mesmo é chamado um **automorfismo**. O conjunto de todos os automorfismos em um grafo X forma um grupo, denominado **grupo de automorfismos** de X e denotado como $\mathrm{Aut}(X)$. O grupo de automorfismos de um grafo X é um subgrupo do grupo simétrico $\mathrm{Sym}(V(X))$, o grupo de todas as permutações dos vértices de X. Se X possui n vértices, escreveremos $\mathrm{Sym}(n)$ ao invés de $\mathrm{Sym}(V(X))$. Em particular, $\mathrm{Aut}(K_n) \cong \mathrm{Sym}(n)$, já que toda permutação de vértices no grafo completo é um automorfismo.

Proposição 1. *X e $\overline{X}$ possuem o mesmo grupo de automorfismos.*

Demonstração. Considere $\phi \in \mathrm{Aut}(X)$. Se uv é aresta de $\overline{X}$, então $uv \notin E(X)$. Como ϕ é isomorfismo, $\phi(u)\phi(v) \notin E(X)$, e portanto $\phi(u)\phi(v)$ é aresta de $\overline{X}$. Em todos os passos utilizados vale a volta, logo ϕ é automorfismo de $\overline{X}$. □

Definimos uma relação $\to$ na classe de todos os grafos por $X \to Y$ se existe homomorfismo de X em Y. Como a composição de homomorfismos é um homomorfismo, $\to$ é transitiva; $\to$ é também reflexiva já que a identidade é um homomorfismo. Não é difícil ver que nossa nova relação não é simétrica nem anti-simétrica, e $\to$ é assim uma pré-ordem na classe de todos os grafos. Chamaremos $\to$ de **pré-ordem de homomorfismos**. Dois grafos que não admitem homomorfismo de um no outro são ditos

incomparáveis, e caso contrário, são **comparáveis**. Dois grafos X e Y tais que $X \to Y$ e $Y \to X$ são ditos **homomorficamente equivalentes**.

Se f é um homomorfismo de X para Y, as pré imagens $f^{-1}(y)$ de cada vértice $y \in Y$ determinam uma partição π de $V(X)$ chamada **kernel de** f e denotada por $\ker f$. O kernel de f é uma partição em conjuntos independentes. Dado um grafo X e uma partição π de $V(X)$, definimos um grafo X/π tomando as classes de π como vértices e uma aresta entre duas classes se existe uma aresta em X conectando estas classes. Existe um homomorfismo natural de X em X/π com kernel π. Note que X/π será um grafo simples se e somente se π for uma partição de $V(X)$ em conjuntos independentes.

Teorema 2. *Seja $f : X \to Y$ homomorfismo. Então $X\big/\ker f \cong f(X)$.*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \phi : X\big/\ker f &\longrightarrow f(X) \\ f^{-1}(y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

A função ϕ é um isomorfismo, pois $f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2) \iff \exists x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2) : x_1 \sim x_2 \iff y_1 \sim y_2$. □

Definição 4. Um grafo X é um **core** (ou **núcleo**) se todo homomorfismo de X em si mesmo é uma bijeção. Um subgrafo Y de X é um **core de** X se Y é um core e existe um homomorfismo de X para Y ($X \to Y$). Denotamos o core de X por $X^\bullet$.

Podemos caracterizar cores como os grafos que possuem o monóide de endomorfismos igual ao seu grupo de automorfismos. Um core de X é uma retração minimal de X, com respeito a inclusão. O exemplo mais imediato de família de cores são os grafos completos K_n. Outro exemplo é dado pelos ciclos ímpares, que não podem possuir um homomorfismo para um subgrafo induzido como fica claro pela proposição a seguir:

Proposição 2. *A imagem homomórfica um ciclo ímpar de tamanho n deve conter um ciclo ímpar de tamanho menor ou igual a n.*

Demonstração. Seja $C_n = (1, \cdots, n, 1)$ um ciclo ímpar e $f : C_n \to Y$ um homomorfismo. A sequência $(f(1), \cdots, f(n), f(1))$ será um passeio fechado de tamanho n em $f(C_n)$. Note no entanto que em um grafo bipartido todo passeio fechado deve ter tamanho par. Logo, a imagem de f contém um ciclo ímpar. Claramente $f(C_n)$ possui ordem menor ou igual a n. □

Os cores formam uma classe de grafos em que a relação $\to$ é uma ordem parcial, a menos de isomorfismo. O lema a seguir demonstra a antissimetria de $\to$ neste conjunto:

Lema 2. *Sejam X e Y cores. Então X e Y são homomorficamente equivalentes se e somente se são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ homomorfismos. Tanto $f \circ g$ quanto $g \circ f$ devem ser bijetivas já que X e Y são cores. Portanto f e g também são bijetivas, e X e Y são isomorfos. □

Teorema 3. *Todo grafo possui um core, que é um subgrafo induzido e único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sendo X um grafo finito e a identidade um homomorfismo, temos que o conjunto de subgrafos de X que são a imagem de um homomorfismo de X é finito, e portanto possui um elemento minimal. □

Lema 3. *Dois grafos X e Y são comparáveis se e somente se seus cores são comparáveis.*

Demonstração. Se $f : X \to Y$ é homomorfismo, então temos a sequência de homomorfismos

$$X^\bullet \to X \xrightarrow{f} Y \to Y^\bullet,$$

cuja composição mostra que $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ são comparáveis. Por outro lado, se $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ é homomorfismo, a sequência

$$X \to X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \to Y$$

nos dá o homomorfismo entre X e Y. □

Corolário 1. *Dois grafos X e Y são homomorficamente equivalentes se e somente se seus cores são isomorfos.*

Demonstração. Segue diretamente do lemma 3 e lemma 2. □

1.4. Algoritmos

Nesta seção exibiremos algoritmos que foram desenvolvidos ao longo do trabalho acompanhando o estudo dos temas e poderemos discutir sobre a complexidade assintótica de alguns desses problemas, trazendo resultados que sejam relevantes. Os códigos foram feitos utilizando a linguagem python e utilizamos a representação matricial para representar grafos no computador.

Começamos verificando a existência de um homomorfismo de um grafo X em um grafo Y e também se são isomorfos por força bruta, isto é, olhando para todas as funções dos vértices de X nos vértices de Y:

```
def verify_homo(X, Y):
    for f in gen_func(len(X), len(Y)):
        homo = True
        # vejamos se f é homomorfismo:
        for (i, j) in edges(X):
```

```
            if Y[f[i]][f[j]] == 0:
                homo = False
                break
        if homo: return f
    return False
```

```
def verify_iso(X, Y):
    if len(X) != len(Y): return False
    for f in list(itertools.permutations(list(range(len(X))))):
        iso = True
        # vejamos se f é homomorfismo:
        for (i, j) in edges(X):
            if Y[f[i]][f[j]] == 0:
                iso = False
                break
        if iso:  # vejamos se f^-1 é homomorfismo:
            g = invert(f)
            for (i, j) in edges(Y):
                if X[g[i]][g[j]] == 0:
                    return False
        if iso: return f
    return False
```

Aqui a função *gen_func* gera todas as funções dos vértices de X nos vértices de Y, possuindo complexidade $O(|V(Y)|^{|V(X)|}$ e dando caráter exponencial ao algoritmo *verify_homo*. De fato, o caso geral do problema de se dizer se existe um homomorfismo de um grafo X em um grafo Y é NP-completo (citar fonte?).

Para $f : X \to Y$ ser um isomorfismo, f deve ser uma bijeção. Assim, olhamos agora apenas para as permutações em n elementos para gerar as funções canditatas em *verify_iso*. O problema se mantém com tempo de execução exponencial para o pior caso. Entretanto, ainda não se foi possível mostrar que o problema é NP-completo, sendo um grande canditato a membro da classe de problemas NP que não se encontram em P nem em NP-completo [1]. Uma implementação otimizada para esse problema, assim como para encontrar o grupo de automorfismos de um grafo, é o progrma *nauty*, de Brendan McKay, que consegue resolvê-lo para grafos com grande número de vértices [5].

```
# Listando homomorfismos de X em Y
def list_homo(X, Y):
    lista_homo = []
    for f in gen_func(len(X), len(Y)):
        homo = Truee modo exaustivo
        # vejamos se f é homomorfismo:
```

```
        for (i, j) in edges(X):
            if Y[f[i]][f[j]] == 0:
                homo = False
                break
        if homo: lista_homo.append(f)
    return lista_homo
```

```
# Listando todos os automorfismos de X
def list_aut(X):
    lista_auts = []
    for f in list(itertools.permutations(list(range(len(X))))):
        iso = True
        for (i, j) in edges(X):
            if X[f[i]][f[j]] == 0:
                iso = False
                break
        if iso:
            g = invert(f)
            for (i, j) in edges(X):
                if X[g[i]][g[j]] == 0:
                    iso = False
                    break
        if iso: lista_auts.append(f)
    return lista_auts
```

A partir da listagem do monóide de endomorfismos e do grupo de automorfimos de um grafo utilizando o método de força bruta citado acima, podemos agora verificar de modo exaustivo se um grafo é um core, e encontrar seu core caso não o seja:

```
# verifica se X é um core comparando grupo de automorfismos
# com monoide de endomorfismos
def is_core(X):
    if list_aut(X)==list_homo(X,X) :return True
    return False

# encontra core de X
def find_core(X):
    if is_core(X): return X
    for i in range(len(X)):
        Y=np.delete(np.delete(X,i,0),i,1)
        if verify_homo(X,Y): return find_core(Y)
```

```
# encontra core de X
```

```
def find_core(X):
    if is_core(X): return X
    for i in range(len(X)):
        Y=np.delete(np.delete(X,i,0),i,1)
        if verify_homo(X,Y): return find_core(Y)
```

No próximo capítulo veremos que o problema de se decidir se um grafo é um core está em NP-completo, e verificaremos casos particulares onde seja possível fazer essa verificação em tempo polinomial.

2. Cores

A. Classes de Complexidade

Referências Bibliográficas

[1] Godsil, C. Royle, G. *"Algebraic Graph Theory"*, Springer, 2001.

[2] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. *"Graph theory"*, Graduate Texts in Mathematics 244, Springer, 2001.

[3] Hell, P. Nešetřil, J. *"The core of a graph"*, Discrete Mathematics 109, 117-126, North-Holland, 1992.

[4] Lovász, Matching Theory

[5] McKay, B. D. *"nauty User's Guide (Version 2.2)"*, Computer Science Department Australian National University.