Aluno: Leonardo Bertucci dos Santos
Orientador: Cristiane Maria Sato

1 Grafos

1.1 Grafos

Um **grafo** X consiste de um conjunto de **vértices** $V(X)$ e um conjunto de **arestas** $E(X)$ tal que uma aresta é um par não ordenado de elementos de $V(X)$. Denotamos uma aresta (u,v) simplesmente por uv. Se $e = uv$ é uma aresta de X dizemos que u e v são **adjacentes** ou **vizinhos**, e escrevemos $u \sim v$; dizemos também que e **liga** os vértices u e v, e que **incide** sobre cada um deles. Um grafo é dito **completo** se todos os seus vértices são adjacentes, sendo denotado K_n o grafo completo com n vértices, e **vazio** se não possui nenhuma aresta (mas pelo menos um vértice). O grafo sem vértices nem arestas é chamado **grafo nulo**.

Grafos da forma que definimos aqui são chamados as vezes de **grafos simples**, pois existem algumas definições mais gerais que permitem por exemplo arestas paralelas ou loops (aresta de um vértice a si mesmo). Uma generalização importante ocorre se considerarmos pares ordenados de $V(X)$, denominados **arcos** ou **arestas dirigidas**, no lugar das arestas. Definimos desta forma um **grafo dirigido**, ou **digrafo**, como $V(X)$ junto com um conjunto de arcos $A(X)$. Podemos ver nesse contexto um grafo simples como um grafo dirigido onde (v,u) é um arco sempre que (u,v) for um arco. Mencionaremos neste texto sempre que formos trabalhar com digrafos ou qualquer outra variação de grafo, e caso contrário usaremos a palavra "grafo" sempre para identificar um grafo simples com conjunto de vértices finito.

1.2 Subgrafos

Um **subgrafo** de um grafo X é um grafo Y tal que

$$V(Y) \subseteq V(X), \quad E(Y) \subseteq E(X).$$

Se $V(Y) = V(X)$, dizemos que Y é **subgrafo gerador** de X; se $V(Y) \neq V(X)$ então Y é um **subgrafo próprio**. Y é um **subgrafo induzido** se dois vértices em $V(Y)$ são adjacentes se e somente se eles são adjacentes em $V(X)$. Um subgrafo gerador pode ser obtido deletando-se algumas arestas de X, enquanto um subgrafo induzido pode ser obtido ao se deletar alguns vértices de X (junto com as arestas que se ligavam a eles).

1.3 Homomorfismos

Definition 1. Sejam X, Y grafos. Uma função $f : V(X) \to V(Y)$ é um **homomorfismo** se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes sempre que u é adjacente a v.

Um homomorfismo de X em si mesmo é um **endomorfismo**. Uma propriedade interessante que pode ser caracterizada por meio de homomorfismos é o número cromático de um grafo: uma k-**coloração própria** de uma grafo X é uma função de $V(X)$ em um conjunto de k cores tal que vértices adjacentes são levados em cores diferentes. O menor número k para o qual X pode ser própriamente k-colorido é chamado **número cromático** de X, e é denotado por $\chi(X)$. O conjunto de vértices com uma determinada cor forma um conjunto independente.

Lemma 1. *O número cromático de um grafo X, $\chi(X)$, é igual ao menor inteiro r tal que existe um homomorfismo de X para K_r.*

Definition 2. Uma **retração** é um homomorfismo de um grafo X em um subgrafo Y de si mesmo tal que a restrição $f \restriction_Y$ de f para $V(Y)$ é a identidade. Se existe uma retração de X para um subgrafo Y, dizemos também que Y é uma retração de X.

De fato, se existe f tal que $f \restriction_Y$ seja uma bijeção, então Y será uma retração de X.

Definition 3. Um **isomorfismo** ϕ de X em Y é um homomorfismo bijetivo cuja inversa é também um homomorfismo. Se X e Y são isomorfos, escrevemos $X \cong Y$.

Em outras palavras, ϕ é um isomorfismo quando $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes se e somente se u e v são adjacentes. Dois grafos isomorfos possuem exatamente a mesma estrutura e em geral podemos tratá-los como se fossem iguais.

Um isomorfismo de X em si mesmo é chamado um **automorfismo**. O conjunto de todos os automorfismos em um grafo X forma um grupo, denominado **grupo de automorfismos** de X e denotado como $Aut(X)$. O grupo de automorfismos de um grafo X é um subgrupo do grupo simétrico $Sym(V(X))$, o grupo de todas as permutações dos vértices de X. Se X possui n vértices, escreveremos $Sym(n)$ ao invés de $Sym(V(X))$. Em particular, $Aut(K_n) \cong Sym(n)$, já que toda permutação de vértices no grafo completo é um automorfismo.

Bibliography

[1] Godsil, C. Royle, G. *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.