

# **Uma abordagem algorítmica para teoria algébrica de grafos**

**Nome do Aluno:** Leonardo Bertucci dos Santos

**RA do aluno:** 11028714

**E-mail do aluno:** leonardo.bertucci@aluno.ufabc.edu.br

**Nome do orientador:** Cristiane Maria Sato

**E-mail do orientador:** c.sato@ufabc.edu.br

**Palavras-chave do projeto:** grafos, teoria algébrica dos grafos, core, homomorfismos

**Área de conhecimento do projeto:** Ciência da Computação

# 1 Conceitos iniciais

Neste capítulo apresentamos as definições básicas a respeito de grafos e homomorfismos de grafos, mostrando alguns resultados iniciais e algoritmos dentro do tema.

## 1.1 Grafos

Um **grafo**  $G$  consiste de um conjunto de **vértices**  $V(G)$  e um conjunto de **arestas**  $E(G)$  tal que uma aresta é um par não ordenado de elementos distintos de  $V(G)$ . Denotamos uma aresta  $\{u, v\}$  simplesmente por  $uv$ . Se  $e = uv$  é uma aresta de  $G$  dizemos que  $u$  e  $v$  são **adjacentes** ou **vizinhos**, e escrevemos  $u \sim_G v$ ; dizemos também que  $e$  **liga** os vértices  $u$  e  $v$ , e que **incide** sobre cada um deles. O **grau** de um vértice  $v$ ,  $d_G(v)$ , é o número de arestas incidentes a ele, e a **vizinhança** de  $v$  o conjunto contendo seus vértices vizinhos, denotada  $N_G(v)$ . Ignoraremos o subíndice  $G$  nas definições anteriores quando o grafo  $G$  for claro no contexto. Um vértice que possui grau zero é dito **isolado**. A **ordem** ou **tamanho** de um grafo  $G$  é o seu número de vértices. Um grafo é dito **completo** se todos os seus vértices são adjacentes, sendo denotado  $K_n$  o grafo completo de ordem  $n$ , e dito **vazio** se não possui nenhuma aresta (mas pelo menos um vértice). O grafo sem vértices nem arestas é chamado **grafo nulo**.

Grafos da forma que definimos aqui são chamados de **grafos simples**, pois existem algumas definições mais gerais que permitem por exemplo arestas paralelas ou laços (aresta de um vértice a si mesmo). Uma generalização importante ocorre se considerarmos pares ordenados de  $V(G)$ , denominados **arcos** ou **arestas dirigidas**, no lugar das arestas. Definimos desta forma um **grafo dirigido**, ou **digrafo**, como  $V(G)$  junto com um conjunto de arcos  $A(G)$ . Podemos ver nesse contexto um grafo simples como um grafo dirigido onde  $(v, u)$  é um arco sempre que  $(u, v)$  for um arco. Mencionaremos neste texto sempre que formos trabalhar com digrafos ou qualquer outra variação de grafo, e caso contrário usaremos a palavra “grafo” sempre para identificar um grafo simples com conjunto de vértices finito.

O **complemento** de um grafo  $G$ , denotado  $\overline{G}$ , é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de  $G$ , com  $u \sim v$  em  $\overline{G}$  se e somente se  $u \not\sim v$  em  $G$ . Um **clique** em um grafo  $G$  é um conjunto de vértices mutualmente adjacentes, enquanto um **conjunto independente/estável** é um conjunto de vértices mutualmente não-adjacentes. Pela definição de complemento pode-se ver que um clique de  $G$  é um conjunto independente em  $\overline{G}$ , e vice-versa. Denotamos o tamanho de um clique máximo em  $G$  por  $\omega(G)$ , chamado **número de clique** de  $G$ , e um conjunto independente máximo por  $\alpha(G)$ , o **número de independência/estabilidade** de  $G$ .

## 1.2 Subgrafos

Um **subgrafo** de um grafo  $G$  é um grafo  $H$  tal que

$$V(H) \subseteq V(G), \quad E(H) \subseteq E(G).$$

Se  $V(H) = V(G)$ , dizemos que  $H$  é **subgrafo gerador** de  $G$ ; se  $H \neq G$  então  $H$  é um **subgrafo próprio**.  $H$  é um **subgrafo induzido** se dois vértices em  $V(H)$  são adjacentes se e somente se eles são adjacentes em  $V(G)$ . Um subgrafo gerador pode ser obtido deletando-se algumas arestas de  $G$ , enquanto um subgrafo induzido pode ser obtido ao se deletar alguns vértices de  $G$  (junto com as arestas que se ligavam a eles).

Dado um subconjunto  $S \subseteq V(G)$ , o **subgrafo induzido por  $S$** , denotado  $G[S]$ , é o subgrafo induzido de  $G$  que possui como vértices o conjunto  $S$ . Se  $F \subseteq E(G)$ ,  $G[F]$  é o **subgrafo induzido por  $F$** , com conjunto de vértices dado por  $V(G[F]) = \{u \in V(G) : uv \in F\}$  e conjunto de arestas  $E(G[F]) = F$ .

Um **passeio** é uma sequência de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  tal que  $v_i \sim v_{i+1}$  para todo  $0 \leq i \leq k$ ; seu **comprimento** é o número de arestas que possui, e dizemos que é **fechado** quando  $v_0 = v_k$ . Poderemos tratar um passeio  $w$  como o subgrafo induzido por suas arestas quando conveniente. Uma **trilha** é um passeio que não repete arestas, enquanto um **caminho** é um passeio que não repete vértices.  $P_k$  denota o caminho de comprimento  $k$ , que possui  $k + 1$  vértices. Um **ciclo** é um passeio fechado que não repete vértices, com exceção dos extremos, sendo  $C_n$  o ciclo de tamanho  $n$ .

A **distância** entre dois vértices  $u$  e  $v$  é o comprimento do menor caminho entre  $u$  e  $v$ , sendo  $\infty$  caso não exista tal caminho.  $G$  é **conexo** se para todo  $u, v \in V(G)$  existe caminho de  $u$  a  $v$ , e **desconexo** caso contrário. Uma **componente conexa** de  $G$  é um subgrafo induzido conexo e maximal de  $G$ . O **diâmetro** de  $G$ ,  $\text{diam}(G)$ , é a maior distância entre todos os seus pares de vértices.

Um grafo que não contém ciclos é dito **acíclico**. Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico. A **cintura**  $g(G)$  de um grafo  $G$  é o tamanho de seu menor ciclo ou  $\infty$  se este for acíclico. Podemos nos referir também à **cintura ímpar** de  $G$ , o tamanho de seu menor ciclo ímpar. Já a **circunferência** é o tamanho do maior ciclo de  $G$ .

Um grafo  $G$  é **bipartido** se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjunto  $A$  e  $B$  de modo que toda aresta de  $G$  liga somente vértices entre  $A$  e  $B$ . Um grafo bipartido é **completo** se possui todas as arestas possíveis, preservando a bipartição, e é denotado por  $K_{n,m}$  o grafo bipartido completo com partições de tamanho  $n$  e  $m$ , respectivamente. Um fato bem conhecido sobre grafos bipartidos é a sua relação com a ausência de ciclos ímpares, que exibimos no Teorema a seguir:

**Teorema 1.** *Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclos ímpares.*

*Demonstração.* Para a ida, observe que se  $G$  é bipartido então todos os seus subgrafos são bipartidos. Assim, basta mostrarmos que os ciclos ímpares não são bipartidos, e  $G$  não poderá conter um ciclo ímpar. Considere um ciclo ímpar  $C_n = (1, 2, \dots, n, 1)$ , onde  $n$  é um inteiro ímpar positivo. Suponha que exista bipartição  $A, B$  de  $C_n$ , e que o vértice 1 pertença a  $A$ . Como  $i \sim i + 1$  para todo vértice  $i$  de  $C_n$ , temos que todos os

vértices pares estarão em  $B$  e os ímpares estarão em  $A$ . Logo  $n \in A$ . Mas  $n$  é adjacente a 1, chegando a uma contradição.

Para a volta, vamos contruir uma bipartição  $A, B$  de um grafo  $G$  conexo que não possua ciclos ímpares do seguinte modo: Tome  $v \in V(G)$  e o adicione em  $A$ . Adicione então todos os vizinhos de  $v$  ao conjunto  $B$ . Repita o processo de adicionar os vizinhos à outra partição (que já não estejam lá) até acabarem os vértices. Afirmamos que  $A, B$  é uma bipartição de  $G$ , pois durante o processo, caso seja inserido um vértice  $y$ , por exemplo em  $A$ , que seja adjacente a um vértice  $x$  que já está em  $A$ , então haveria um ciclo ímpar em  $G$ , formado pelo caminho de  $x$  até  $y$  que levou à inserção de  $y$  em  $A$  junto com a aresta  $xy$ , contradição. No caso em que  $G$  é desconexo, basta aplicar o resultado para cada componente conexa de  $G$ .  $\square$

## 1.3 Homomorfismos

**Definição 1.** Sejam  $G, H$  grafos. Uma função  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  é um **homomorfismo** de  $G$  em  $H$  se  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes sempre que  $u$  é adjacente a  $v$ .

Um homomorfismo de  $G$  em si mesmo é um **endomorfismo**. O conjunto de todos os endomorfismos em um grafo  $G$  munido da operação de composição de funções forma um monóide (estrutura algébrica com operação binária associativa e que possui elemento neutro). Se  $f$  é um homomorfismo de  $G$  em  $H$ , o grafo formado pelos vértices  $\{f(u) : u \in V(G)\}$  e arestas  $\{f(u)f(v) : uv \in E(G)\}$  é chamado **imagem homomórfica** de  $G$  por  $f$ , denotado  $f(G)$ . O grafo  $f(G)$  é um subgrafo de  $H$ .

Definimos um homomorfismo de  $G$  em  $H$  como uma aplicação  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , mas por preservar adjacências é também natural definirmos a partir deste uma aplicação  $f^\#$  de  $E(G)$  em  $E(H)$  fazendo:

$$f^\#(uv) = f(u)f(v).$$

Dizemos então que um homomorfismo  $f$  é **vértice-injetivo** se  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  é injetivo (análogo para **vértice-sobrejetivo**, **vértice-bijetivo**);  $f$  é **aresta-injetivo** se  $f^\#$  é injetivo (análogo para **aresta-sobrejetivo**, **aresta-bijetivo**); e que  $f$  é **injetivo** se é ambos vértice-injetivo e aresta-injetivo (análogo para **sobrejetivo** e **bijetivo**). Observe que um homomorfismo vértice-injetivo é sempre aresta-injetivo, e, se  $H$  não possuir vértices isolados, um homomorfismo aresta-sobrejetivo é sempre vértice-sobrejetivo. Escreveremos simplesmente  $f : G \rightarrow H$  para denotar um homomorfismo de  $G$  em  $H$  a partir de agora.

Um parâmetro interessante que pode ser caracterizado por meio de homomorfismos é o número cromático de um grafo: uma  **$k$ -coloração própria** de um grafo  $G$  é uma função de  $V(G)$  em um conjunto de  $k$  cores tal que vértices adjacentes são levados em cores diferentes. O menor número  $k$  para o qual  $G$  pode ser propriamente  $k$ -colorido é chamado **número cromático** de  $G$ , e é denotado por  $\chi(G)$ . O conjunto de vértices com uma determinada cor forma um conjunto independente. O seguinte Lema nos mostra essa caracterização do número cromático por meio de homomorfismos:

**Lema 1.** O número cromático de um grafo  $G$ ,  $\chi(G)$ , é igual ao menor inteiro  $r$  tal que existe um homomorfismo de  $G$  para  $K_r$ .

*Demonstração.* Suponha que exista um homomorfismo  $f$  de  $G$  em  $K_r$ . Identifique cada vértice de  $K_r$  com uma cor e atribua a cada vértice  $u$  a cor  $f(u)$ . Tal atribuição é claramente uma  $r$ -coloração própria de  $G$ , dado que um homomorfismo não pode levar dois vértices adjacentes em um mesmo vértice na imagem (a menos que este possua um laço). Logo,  $\chi(G) \leq r$ . Por outro lado, se  $G$  pode ser colorido com  $r$  cores  $\{1, \dots, r\}$ , então ao considerarmos o grafo completo  $K_r$  com vértices  $\{1, \dots, r\}$ , a função  $f : G \rightarrow K_r$  que leva cada vértice em sua cor é um homomorfismo. Portanto  $r \leq \chi(G)$ .  $\square$

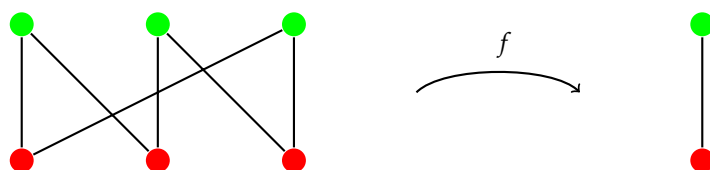


Figura 1.1: Homomorfismo de um grafo bipartido em  $K_2$ , ilustrando uma 2-coloração própria.

**Definição 2.** Uma **retração** é um homomorfismo de um grafo  $G$  em um subgrafo  $H$  de si mesmo tal que a restrição  $f \upharpoonright_H$  de  $f$  para  $V(H)$  é a identidade. Se existe uma retração de  $G$  para um subgrafo  $H$ , dizemos também que  $H$  é uma **retração de  $G$** .

De fato, se existe  $f : G \rightarrow H$  tal que  $f \upharpoonright_H$  seja uma bijeção, então  $H$  será uma retração de  $G$  via a função  $g = (f \upharpoonright_H)^{-1} \circ f$ .

**Exemplo 1.** Exemplo de uma retração:

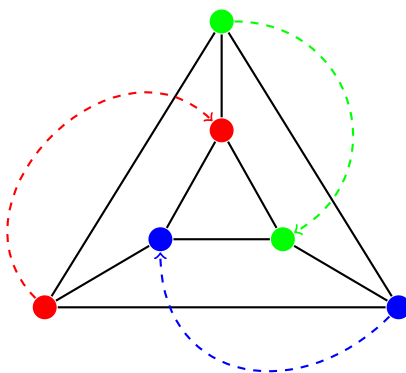


Figura 1.2: Os vértices do triângulo interior são levados em si mesmos, enquanto os do triângulo exterior são levados no vértice da mesma cor no triângulo de dentro, como indicado pelas setas.

**Exemplo 2.** Subgrafo que é imagem homomórfica de  $G$  mas não é retração: Na imagem a seguir,  $H$  é subgrafo de  $G$  e as cores identificam um homomorfismo de  $G$  em  $H$ . Entretanto, não existe homomorfismo de  $G$  em  $H$  mantendo  $H$  fixo.

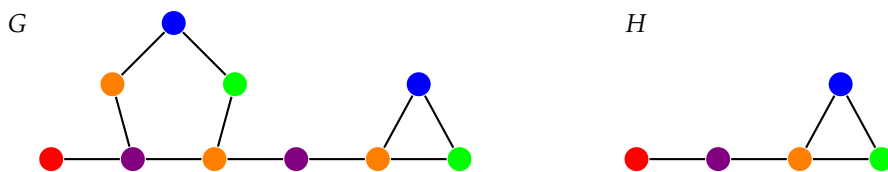


Figura 1.3: Não existe retração de  $G$  em  $H$ .

**Definição 3.** Um **isomorfismo**  $\phi$  de  $G$  em  $H$  é um homomorfismo bijetivo (aresta-bijetivo e vértice-bijetivo). Se  $G$  e  $H$  são isomorfos, escrevemos  $G \cong H$ .

Em outras palavras,  $\phi$  é um isomorfismo quando  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes se e somente se  $u$  e  $v$  são adjacentes. Dois grafos isomorfos possuem exatamente a mesma estrutura e em geral podemos tratá-los como se fossem iguais. Observe que se  $G$  e  $H$  são grafos, a mera existência de homomorfismos  $f : G \rightarrow H$  e  $g : H \rightarrow G$  não implica que  $G$  e  $H$  são isomorfos, como fica claro ao observarmos por exemplo um grafo bipartido e  $K_2$ , como na Figura 1.1.

Um isomorfismo de  $G$  em si mesmo é chamado um **automorfismo**. O conjunto de todos os automorfismos em um grafo  $G$  munido da operação de composição de funções forma um grupo, denominado **grupo de automorfismos** de  $G$  e denotado como  $\text{Aut}(G)$ . Lembramos aqui que um **grupo** é uma estrutura algébrica que consiste de um conjunto associado a uma operação binária definida neste conjunto que satisfaz as condições de: associatividade, existência de identidade e existência de elemento neutro. O grupo de automorfismos de um grafo  $G$  é um subgrupo do grupo simétrico  $\text{Sym}(V(G))$ , o grupo de todas as permutações dos vértices de  $G$ . Se  $G$  possui  $n$  vértices, escreveremos  $\text{Sym}(n)$  ao invés de  $\text{Sym}(V(G))$ . Em particular,  $\text{Aut}(K_n) \cong \text{Sym}(n)$ , já que toda permutação de vértices no grafo completo é um automorfismo.

**Proposição 1.** *Seja  $G$  um grafo. Então  $G$  e  $\overline{G}$  possuem o mesmo grupo de automorfismos.*

*Demonstração.* Considere  $\phi \in \text{Aut}(G)$ . Se  $uv$  é aresta de  $\overline{G}$ , então  $uv \notin E(G)$ . Como  $\phi$  é isomorfismo,  $\phi(u)\phi(v) \notin E(G)$ , e portanto  $\phi(u)\phi(v)$  é aresta de  $\overline{G}$ . Em todos os passos utilizados vale a volta, logo  $\phi$  é automorfismo de  $\overline{G}$ .  $\square$

Definimos uma relação  $\rightarrow$  na classe de todos os grafos por  $G \rightarrow H$  se existe homomorfismo de  $G$  em  $H$ . Como a composição de homomorfismos é um homomorfismo,  $\rightarrow$  é transitiva;  $\rightarrow$  é também reflexiva já que a identidade é um homomorfismo. Não é difícil ver que nossa nova relação não é simétrica nem anti-simétrica, e  $\rightarrow$  é assim uma pré-ordem na classe de todos os grafos. Chamaremos  $\rightarrow$  de **pré-ordem de homomorfismos**. Dois grafos que não admitem homomorfismo de um no outro são ditos **incomparáveis**, e caso contrário, são **comparáveis**. Dois grafos  $G$  e  $H$  tais que  $G \rightarrow H$  e  $H \rightarrow G$  são ditos **homomorficamente equivalentes**.

Se  $f$  é um homomorfismo de  $G$  para  $H$ , as pré imagens  $f^{-1}(y)$  de cada vértice  $y \in H$  determinam uma partição  $\pi$  de  $V(G)$  chamada **kernel de  $f$**  e denotada por  $\ker f$ . O kernel de  $f$  é uma partição em conjuntos independentes. Dado um grafo  $G$  e uma partição  $\pi$  de  $V(G)$ , definimos um grafo  $G/\pi$  tomando as classes de  $\pi$  como vértices e uma aresta entre duas classes se existe uma aresta em  $G$  conectando estas classes. Existe um homomorfismo natural de  $G$  em  $G/\pi$  com kernel  $\pi$ . Note que  $G/\pi$  será um grafo simples se e somente se  $\pi$  for uma partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes.

**Teorema 2.** *Seja  $f : G \rightarrow H$  homomorfismo. Então  $G/\ker f \cong f(G)$ .*

*Demonstração.* Defina

$$\begin{aligned}\phi : G/\ker f &\longrightarrow f(G) \\ f^{-1}(y) &\longmapsto y.\end{aligned}$$

A função  $\phi$  é um isomorfismo, pois se  $y_1, y_2$  são vértices de  $f(G)$ , então  $f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2) \iff \exists x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2) : x_1 \sim x_2 \iff y_1 \sim y_2$ .  $\square$

**Corolário 1.** *Cada quociente de  $G$  é uma imagem homomórfica de  $G$ , e por outro lado, cada imagem homomórfica de  $G$  é isomorfa a um quociente de  $G$ .*

*Demonstração.* Dada uma partição  $\pi$  de  $G$ , o homomorfismo natural  $f_\pi$  que leva um elemento  $x$  de  $G$  em  $[x]$  sua classe de equivalência satisfaz  $f_\pi(G) = G/\pi$ . Por outro lado, se  $f$  é um homomorfismo de  $G$ , temos pelo teorema anterior que  $G/\ker f \cong f(G)$ .  $\square$

**Definição 4.** Um grafo  $G$  é um **core** (ou **núcleo**) se todo homomorfismo de  $G$  em si mesmo é uma bijeção. Um subgrafo  $H$  de  $G$  é um **core** (ou **núcleo**) de  $G$  se  $H$  é um core e existe um homomorfismo de  $G$  para  $H$  ( $G \rightarrow H$ ). Denotamos o core de  $G$  por  $G^\bullet$ .

Podemos caracterizar núcleos como os grafos que possuem o monóide de endomorfismos igual ao seu grupo de automorfismos. O núcleo de  $G$  é uma retração minimal de  $G$ , com respeito a inclusão. O exemplo mais imediato de família de núcleos são os grafos completos  $K_n$ . Outro exemplo é dado pelos ciclos ímpares, que não podem possuir um homomorfismo para um subgrafo induzido como fica claro pela proposição a seguir:

**Proposição 2.** *A imagem homomórfica um ciclo ímpar de tamanho  $n$  deve conter um ciclo ímpar de tamanho menor ou igual a  $n$ .*

*Demonstração.* Seja  $C_n = (1, \dots, n, 1)$  um ciclo ímpar e  $f : C_n \rightarrow H$  um homomorfismo. A sequência  $(f(1), \dots, f(n), f(1))$  será um passeio fechado de tamanho  $n$  em  $f(C_n)$ . Note no entanto que em um grafo bipartido todo passeio fechado deve ter tamanho par. Logo, a imagem de  $f$  contém um ciclo ímpar. Claramente  $f(C_n)$  possui ordem menor ou igual a  $n$ .  $\square$

Os núcleos formam uma classe de grafos a menos de isomorfismo em que a relação  $\rightarrow$  é uma ordem parcial. O lema a seguir demonstra a antissimetria de  $\rightarrow$  neste conjunto:

**Lema 2.** *Sejam  $G$  e  $H$  núcleos. Então  $G$  e  $H$  são homomorficamente equivalentes se e somente se são isomorfos.*

*Demonstração.* Sejam  $f : G \rightarrow H$  e  $g : H \rightarrow G$  homomorfismos. Tanto  $f \circ g$  quanto  $g \circ f$  devem ser bijetivas já que  $G$  e  $H$  são cores. Portanto  $f$  e  $g$  também são bijetivas, e  $G$  e  $H$  são isomorfos.  $\square$

**Teorema 3.** *Todo grafo possui um núcleo, que é um subgrafo induzido e único a menos de isomorfismo.*

*Demonstração.* Sendo  $G$  um grafo finito e a identidade um homomorfismo, temos que o conjunto de subgrafos de  $G$  que são a imagem de um homomorfismo de  $G$  é finito, e portanto possui um elemento minimal. Sejam então  $H_1$  e  $H_2$  cores de  $G$ , imagens dos homomorfismos  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente. Então  $f_1 \upharpoonright_{H_2}$  é homomorfismo de  $H_2$  para  $H_1$ , assim como  $f_2 \upharpoonright_{H_1}$  é homomorfismo de  $H_1$  a  $H_2$ . Logo, pelo lema anterior,  $H_1 \cong H_2$ . Sendo um elemento minimal do conjunto descrito acima, o core de  $G$  é uma retração, e portanto um subgrafo induzido.  $\square$

**Lema 3.**  $G \rightarrow H$  se e somente se  $G^\bullet \rightarrow H^\bullet$ .

*Demonstração.* Se  $f : G \rightarrow H$  é homomorfismo, então temos a sequência de homomorfismos

$$G^\bullet \rightarrow G \xrightarrow{f} H \rightarrow H^\bullet,$$

cujas composições mostram que  $G^\bullet$  e  $H^\bullet$  são comparáveis. Por outro lado, se  $f : G^\bullet \rightarrow H^\bullet$  é homomorfismo, a sequência

$$G \rightarrow G^\bullet \xrightarrow{f} H^\bullet \rightarrow H$$

nos dá o homomorfismo entre  $G$  e  $H$ .  $\square$

**Corolário 2.** *Dois grafos  $G$  e  $H$  são homomorficamente equivalentes se e somente se seus núcleos são isomorfos.*

*Demonstração.* Segue diretamente dos lemas 3 e 2.  $\square$

## 1.4 Algoritmos

Nesta seção exibiremos os algoritmos que foram desenvolvidos ao longo do trabalho acompanhando o estudo dos temas do primeiro capítulo e poderemos discutir sobre a complexidade assintótica de alguns desses problemas, trazendo resultados que sejam relevantes. Os códigos foram feitos utilizando a linguagem python e utilizamos a representação matricial para representar grafos no computador.



São apresentados algoritmos para: o problema de se encontrar um homomorfismo de um grafo  $G$  para  $H$ , o problema de se dizer se dois grafos são isomorfos e o de se verificar se um grafo  $G$  é um core. Os dois primeiros são problemas em NP: dados  $G, H$  e uma função  $f : G \rightarrow H$ , certificar que  $f$  é um homomorfismo (ou isomorfismo) leva tempo polinomial no número de arestas de  $G$  (ou de  $G$  e  $H$ ). Já o último é um problema em co-NP, pois certificamos que  $G$  não é um núcleo por meio um homomorfismo para um subgrafo induzido.

Começamos verificando a existência de um homomorfismo de um grafo  $G$  em um grafo  $H$  e também se são isomorfos, por força bruta, isto é, olhando para todas as funções dos vértices de  $G$  nos vértices de  $H$ :

---

```

1 def verify_homo(G, H):
2     for f in gen_func(len(G), len(H)):
3         homo = True
4         # vejamos se f é homomorfismo:
5         for (i, j) in edges(G):
6             if H[f[i]][f[j]] == 0:
7                 homo = False
8                 break
9         if homo: return f
10    return False

```

---

```

1 def verify_iso(G, H):
2     if len(G) != len(H): return False
3     for f in list(itertools.permutations(list(range(len(G))))):
4         iso = True
5         # vejamos se f é homomorfismo:
6         for (i, j) in edges(G):
7             if H[f[i]][f[j]] == 0:
8                 iso = False
9                 break
10        if iso: # vejamos se f-1 é homomorfismo:
11            g = invert(f)
12            for (i, j) in edges(H):
13                if G[g[i]][g[j]] == 0:
14                    return False
15        if iso: return f
16    return False

```

---

Aqui a função *gen\_func* gera todas as funções dos vértices de  $G$  nos vértices de  $H$ , possuindo complexidade  $O(|V(H)|^{|V(G)|})$  e dando caráter exponencial ao algoritmo *verify\_homo*. De fato, o caso geral do problema de se dizer se existe um homomorfismo de um grafo  $G$  em um grafo  $H$  é NP-completo (citar fonte?).

Para  $f : G \rightarrow H$  ser um isomorfismo,  $f$  deve ser uma bijeção. Assim, olhamos agora apenas para as permutações em  $n$  elementos para gerar as funções candidatas em *verify\_iso*. O problema se mantém com tempo de execução exponencial para o pior caso. Entretanto, ainda não se foi possível mostrar que o problema é NP-completo, sendo um grande candidato a membro da classe de problemas NP que não se encontram em P nem em NP-completo [1]. Uma implementação otimizada para esse problema, assim como para encontrar o grupo de automorfismos de um grafo, é o programa *nauty*, de Brendan McKay, que consegue resolvê-lo para grafos com grande número de vértices [6].

---

```

1 # Listando homomorfismos de G em H
2 def list_homo(G, H):
3     lista_homo = []
4     for f in gen_func(len(G), len(H)):
5         homo = True e modo exaustivo
6         # vejamos se f é homomorfismo:
7         for (i, j) in edges(G):
8             if H[f[i]][f[j]] == 0:
9                 homo = False
10                break
11        if homo: lista_homo.append(f)
12    return lista_homo

```

---

```

1 # Listando todos os automorfismos de G
2 def list_aut(G):
3     lista_auts = []
4     for f in list(itertools.permutations(list(range(len(G)))))
5         :
6         iso = True
7         for (i, j) in edges(G):
8             if G[f[i]][f[j]] == 0:
9                 iso = False
10                break
11        if iso:
12            g = invert(f)
13            for (i, j) in edges(G):
14                if G[g[i]][g[j]] == 0:
15                    iso = False
16                    break
17            if iso: lista_auts.append(f)
18    return lista_auts

```

---

A partir da listagem do monóide de endomorfismos e do grupo de automorfismos de

um grafo utilizando o método de força bruta citado acima, podemos agora verificar de modo exaustivo se um grafo é um core, e encontrar seu core caso não o seja:

---

```
1 # verifica se G é um núcleo comparando grupo de automorfismos
   com monoide de endomorfismos
2 def is_core(G):
3     if list_aut(G)==list_homo(G,G) :return True
4     return False
```

---

```
1 # encontra core de G
2 def find_core(G):
3     if is_core(G): return G
4     for i in range(len(G)):
5         H=np.delete(np.delete(G,i,0),i,1)
6         if verify_homo(G,H): return find_core(H)
```

---

No próximo capítulo veremos que o problema de se decidir se um grafo é um núcleo está em co-NP-completo, e verificaremos casos particulares onde seja possível fazer essa verificação em tempo polinomial.

## 2 Núcleos

Neste capítulo apresentamos alguns resultados de [3] sobre núcleos, em particular um algoritmo que mostra como verificar se um grafo com número de independência igual a 2 é um núcleo em tempo polinomial.

### 2.1 Emparelhamentos

Um **emparelhamento**  $M$  em um grafo  $G$  é um conjunto de arestas de  $G$  tal que duas arestas em  $M$  não são incidentes a um mesmo vértice. Dizemos que  $M$  **cobre** ou **satura** um conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$  se cada vértice de  $X$  é extremo de uma aresta de  $M$ . Se  $v \in V(G)$  não é coberto por  $M$ , dizemos que  $v$  é **livre** (em  $M$ ). O tamanho de um emparelhamento máximo em  $G$  é denotado  $\nu(G)$ , e um emparelhamento é dito **perfeito** se cobre  $V(G)$ . Todo emparelhamento perfeito é máximo.

Note que uma aresta cobre sempre exatamente dois vértices em um emparelhamento. Logo um grafo ímpar, isto é, com número ímpar de vértices, não pode possuir um emparelhamento perfeito. Do mesmo modo, um emparelhamento  $M$  em um grafo de tamanho  $n$  é perfeito se e somente se  $|M| = \frac{n}{2}$ . Os teoremas abaixo exibem algumas caracterizações clássicas sobre emparelhamentos.

**Definição 5.** Dado  $G$  e um emparelhamento  $M$  em  $G$ , um **caminho  $M$ -alternante** em  $G$  é um caminho cujas arestas alternam entre arestas de  $M$  e de  $E(G) \setminus M$ . Um caminho alternante que possui os extremos livres em  $M$  é dito um **caminho  $M$ -aumentador**.

**Teorema 4.** (Berge, 1957) *Seja  $G$  um grafo e  $M$  um emparelhamento em  $G$ .  $M$  é máximo se e somente se  $G$  não possui um caminho  $M$ -aumentador.*

*Demonstração.* Seja  $M$  emparelhamento em  $G$  e  $P = (1, 2, \dots, k)$  um caminho  $M$ -aumentador. Podemos então construir um emparelhamento  $M'$  em  $G$  por meio da diferença simétrica entre  $P$  e  $M$ . Deste modo, passamos a cobrir todo  $P$  em  $M'$ , tendo um emparelhamento de tamanho  $|M'| = |M| + 1$ .

Por outro lado, seja  $M$  é um emparelhamento não máximo em  $G$  e  $M^*$  emparelhamento máximo. Considere o subgrafo  $S = G[M \Delta M^*]$ . Cada vértice em  $G$  é incidente a no máximo uma aresta em  $M$  e uma aresta em  $M^*$ , e logo possui grau máximo 2 em  $S$ . Portanto  $S$  é formado apenas por caminhos e ciclos (pares), com arestas alternantes entre  $M$  e  $M^*$ . Como  $|M^*| > |M|$ , deve existir um caminho  $P$  em  $S$  com uma aresta a mais de  $M^*$  do que de  $M$ . Este caminho deve começar e terminar com uma aresta de  $M^*$ , e portanto começa e termina com um vértice livre em  $M$ . Logo,  $P$  é um caminho  $M$ -aumentador.  $\square$

**Teorema 5.** (Hall, 1935) *Seja  $G$  um grafo  $(A, B)$ -bipartido.  $G$  possui um emparelhamento que cobre  $A$  se e somente se  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq A$ .*

*Demonstração.* Se existe um emparelhamento que cobre  $A$ , para cada  $S \subseteq A$  existem  $|S|$  vértices emparelhados aos vértices de  $S$ , e eles estão em  $N(S)$ . Então  $|N(S)| \geq |S|$ .

Por outro lado, suponha que não exista um emparelhamento que cubra todos os vértices de  $A$ . Seja  $M^*$  um emparelhamento máximo em  $G$  e  $u \in A$  um vértice livre em  $M^*$ . Considere  $Z$  o conjunto de vértices alcançáveis de  $u$  por meio de caminhos  $M^*$ -alternantes. Como  $M^*$  é máximo, temos pelo Teorema de Berge que  $u$  é o único vértice de  $Z$  que não é coberto por  $M^*$ . Defina  $S = A \cap Z$  e  $R = B \cap Z$ . Note que os caminhos alternantes maximais que levam  $u$  para um vértice em  $Z$  possuem o outro extremo apenas em  $S$ . Portanto  $|R| = |S| - 1$  e  $R \subseteq N(S)$ . No entanto, temos de fato que  $R = N(S)$ , pois todo vértice em  $N(S)$  possui um caminho  $M^*$ -alternante até  $u$ . Assim, concluímos que  $|N(S)| = |R| = |S| - 1$ , e a condição do Teorema de Hall falha.  $\square$

**Corolário 3.** *Um grafo  $(A, B)$ -bipartido possui um emparelhamento perfeito se e somente se  $|A| = |B|$  e  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq A$ .*

O estudo de emparelhamentos e propriedades associadas, assim como o de algoritmos para encontrar emparelhamentos máximos, é uma área vasta dentro de teoria dos grafos, sendo conhecidos bons algoritmos que encontram emparelhamento máximo em tempo polinomial para grafos quaisquer. Informações detalhadas sobre o tema podem ser encontradas em Lovász e Plummer [5]. A seguir exibimos um algoritmo que encontra um emparelhamento máximo em um grafo bipartido  $G$  com bipartição  $A, B$  em tempo polinomial:

- 1 Oriente as arestas de  $G$  de  $A$  para  $B$ , adicione uma fonte  $f$  ligada a todos os vértices de  $A$  e um sorvedouro  $s$  ligado a todos os vértices de  $B$ ;
- 2  $M = \text{vazio}$ ;
- 3 Enquanto houver caminho  $P$  de  $f$  até  $s$  faça:
- 4     Atualize  $M$  por meio da diferença simétrica com  $P$ , ignorando as direções das arestas e as arestas ligadas a  $f$  e  $s$ ;
- 5     Inverta o sentido do caminho  $P$  em  $G$ ;
- 6 Retorne  $M$ .

**Algorithm 1:** EMP\_BIPARTIDO

Note que, ao final de cada iteração do laço principal do algoritmo, qualquer caminho  $M$ -aumentador em  $G$  induz um caminho  $P$  de  $f$  até  $s$ . Portanto, ao final do algoritmo não existem caminhos  $M$ -aumentadores em  $G$ , e pelo Teorema de Berge  $M$  é máximo.

Definimos agora um conceito que pode ser visto como um relaxamento do conceito de emparelhamento: um **2-emparelhamento**  $W$  em  $G$  é uma atribuição de

pesos 0, 1 ou 2 às arestas de  $G$  tal que a soma de pesos de todas as arestas incidentes em um vértice é no máximo 2. Dizemos que as arestas de peso 1 e 2 “estão” no 2-emparelhamento  $W$ , enquanto as de peso 0 não. O **tamanho** de um 2-emparelhamento  $W$  é a soma de todos os pesos das arestas e denotado  $|W|$ . O tamanho de um 2-emparelhamento máximo em  $G$  é denotado  $\nu_2(G)$ . Note que qualquer emparelhamento pode ser visto como um 2-emparelhamento se atribuirmos valor 2 às suas arestas. No entanto, o conceito de 2-emparelhamento é mais geral, já que podemos cobrir por exemplo um ciclo ímpar com ele. Um 2-emparelhamento em um grafo  $G$  é dito **básico** se as suas arestas de peso 1 formam apenas ciclos ímpares.

Dizemos que um 2-emparelhamento é **perfeito** se a soma de pesos das arestas em cada vértice é exatamente 2. Um 2-emparelhamento é perfeito se e somente se possui tamanho igual  $|V(G)|$ .

**Lema 4.** *Todo grafo possui um 2-emparelhamento máximo que é básico.*

*Demonstração.* Seja  $W$  um 2-emparelhamento em  $G$ . Se  $P_k = (1, 2, \dots, k)$  é um caminho de tamanho  $k$  em  $W$  tal que suas arestas possuem todas peso 1, podemos construir um novo 2-emparelhamento de tamanho maior ou igual  $W$  dobrando o peso das arestas  $1, 2, 3, 4, \dots$  e reduzindo o peso das arestas restantes em  $P_k$  pra zero. Do mesmo modo, se possuímos um ciclo par com pesos 1 em  $W$ , obtemos um 2-emparelhamento de mesmo peso dobrando e zerando as arestas do ciclo alternadamente.  $\square$

Podemos computar um 2-emparelhamento máximo em um grafo  $G$  qualquer tão eficientemente quanto computamos um emparelhamento máximo em um grafo bipartido. Para isso, primeiro vamos construir um grafo bipartido  $G^b$  a partir de  $G$  da seguinte forma: Para cada vértice  $v$  de  $G$ , defina vértices  $v'$  e  $v''$  em  $G^b$ , e para cada aresta  $uv$  de  $G$  construímos as arestas  $u'v''$  e  $v'u''$  em  $G^b$ . O teorema a seguir nos mostra uma correspondência entre 2-emparelhamentos máximos em  $G$  e emparelhamentos máximos em  $G^b$ :

**Lema 5.** *Seja  $G$  um grafo e  $G^b$  construído como acima. Então  $\nu_2(G) = \nu(G^b)$ .*

*Demonstração.* Seja  $M$  é um emparelhamento máximo em  $G^b$ . Defina o peso de  $uv$  em  $G$  como o valor  $|M \cap \{u'v'', v'u''\}|$ . A soma dos pesos em um vértice  $u$  será no máximo 2, pois  $u'$  e  $u''$  são cobertos por no máximo uma aresta em  $M$ . Temos então um 2-emparelhamento em  $G$  de mesmo tamanho que  $M$ . Logo,  $\nu_2(G) \geq \nu(G^b)$ .

Por outro lado, seja  $W$  um 2-emparelhamento máximo em  $G$ . Pelo 4 podemos assumir que  $W$  é básico. Vamos construir um emparelhamento  $M$  em  $G^b$ . Se  $W(uv) = 2$ , adicione as arestas  $u'v''$  e  $v'u''$  a  $M$ . Se  $C_n = (1, 2, \dots, n, 1)$  é um ciclo ímpar de pesos 1 em  $W$ , adicione as arestas  $1'2'', 2'3'', \dots, n'1''$  a  $M$ .  $M$  construído desta forma é um emparelhamento de  $G^b$  com mesmo tamanho de  $W$ , e portanto  $\nu(G^b) \geq \nu_2(G)$ .  $\square$

**Definição 6.** Um grafo  $G$  é **2-bicrítico** se  $|V(G)| \geq 2$  e para qualquer  $v \in V(G)$  o grafo  $G - v$  contém um 2-emparelhamento perfeito.

O teorema a seguir nos dá um análogo do corolário 3 do Teorema de Hall para 2-emparelhamentos, e consequentemente uma caracterização também para grafos 2-bicríticos:

**Teorema 6.** [5] Um grafo  $G$  possui um 2-emparelhamento perfeito se e somente se  $|N(A)| \geq |A|$  para todo conjunto independente  $A$  em  $G$ .

**Corolário 4.** Um grafo  $G$  é 2-bicrítico se e somente se  $|N(A)| > |A|$  para todo conjunto independente não vazio  $A$  em  $G$ .

*Demonstração.* Segue diretamente da definição de 2-bicrítico e do teorema anterior.  $\square$

## 2.2 Complexidade

Núcleos são importantes pois descrevem o comportamento de grafos com relação a homomorfismos. Parâmetros que podem ser caracterizados pela existência de homomorfismos de ou para um núcleo, por exemplo, serão compartilhados entre  $G$  e seu núcleo. O próximo teorema, devido a Hell e Nešetřil [3], mostra que verificar se um grafo é um núcleo não é uma tarefa simples. Não exibiremos aqui sua demonstração completa por ser um tanto longa, apenas um esboço da ideia. Para um grafo arbitrário  $H$  fixo, definimos o problema:

**Problema.**  $CORE_H$ : Dado um grafo  $G$  e um homomorfismo  $G \rightarrow H$ , decidir se existe um homomorfismo não sobrejetivo  $G \mapsto G$ .

Esta formulação tem a vantagem de nos dar um problema em NP, dado que é fácil verificar se um homomorfismo  $G \mapsto G$  é não sobrejetivo. Além disso, núcleos são os grafos para os quais a resposta para o problema é NÃO. Note que esta formulação nos dá na realidade uma família de problemas de decisão, pois depende da escolha de um grafo  $H$  a princípio.

**Teorema 7.** Se  $H$  é bipartido, o problema  $CORE_H$  está em P. Caso contrário, está em NP-completo.

*Demonstração.* (Esboço) Se  $H$  é bipartido, então  $G \rightarrow H \rightarrow K_2$  é homomorfismo, e logo  $G$  também é bipartido. Mas para um grafo bipartido, ser um núcleo é o mesmo que ser isomorfo a  $K_2$ , logo facilmente verificável.

Se  $H$  não é bipartido, considere  $g$  a cintura ímpar de  $H$ . Sejam  $C_g$  e  $C_{g+2}$  os ciclos de tamanho  $g$  e  $g + 2$  respectivamente. É conhecido que reconhecer grafos que possuem um homomorfismo para  $C_{g+2}$  (e para qualquer grafo não bipartido) é NP-completo [4]. A prova segue então em dois passos:

1. Mostre que reconhecer se um grafo possui um homomorfismo para  $C_{g+2}$  ainda é NP-completo dentre os grafos que possuam cintura pelo menos  $g + 6$  e que admitam homomorfismo para  $C_g$ .
2. Considere  $G$  um grafo com cintura maior ou igual  $g + 6$  que admite homomorfismo para  $C_g$ . Construa um grafo  $G^*$  que admite homomorfismo para  $H$ , e que não é um core se e somente se  $G$  admite um homomorfismo para  $C_{g+2}$ .

O modo como  $G^*$  é construído garante que essa é uma redução polinomial.  $\square$

Note que um grafo  $G$  pode ser entrada para  $CORE_H$  somente se existe homomorfismo  $G \rightarrow H$ , ou seja,  $G$  é  $H$ -colorível. Assim, o teorema acima nos mostra a dicotomia do problema de se verificar se  $H$  é um núcleo com relação a  $H$ -colorabilidade: se  $G$  é  $H$ -colorível para  $H$  bipartido (equivalente a ser  $K_2$  colorível), o problema está em P; caso contrário, está em co-NP-completo.

Quando  $G$  possui número de independência igual a dois, no entanto, também é possível fazer essa verificação em tempo polinomial:

**Teorema 8.** *Seja  $G$  um grafo não trivial com  $\alpha(G) = 2$ . Então são equivalentes:*

1.  $G$  é um core;
2. para cada clique  $K$  de  $G$ , existem mais do que  $|K|$  vértices em  $G$  que não são adjacentes a todos os elementos de  $K$ ;
3. o complemento de  $G$  é 2-bicrítico.

Antes de demonstrá-lo, precisamos exibir uma versão de natureza combinatória do Teorema de Hall, formulada para coleções de conjunto finitos. Essa versão é na realidade a primeira forma em que Hall apresentou seu teorema, e é equivalente à versão para grafos que apresentamos no teorema 5.

Seja  $A$  um conjunto finito e  $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$  uma família finita de subconjuntos de  $A$ , não necessariamente distintos. Um **sistema de representantes distintos (SDR)** para a família  $\mathcal{A}$  é um conjunto  $\{a_i : i \in I\}$  de elementos distintos de  $A$  tal que  $a_i \in A_i$  para todo  $i \in I$ . Em outras palavras, um SDR seleciona um representante distinto para cada  $A_i$  em  $\mathcal{A}$ . O Teorema de Hall se enuncia então da seguinte forma:

**Teorema 9.** (Hall, 1935) *Seja  $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$  uma família de subconjuntos de  $A$  como descrita acima.  $\mathcal{A}$  possui um sistema de representantes distintos se e somente se para cada subconjunto  $J \subseteq I$  vale:*

$$\left| \bigcup_{i \in J} A_i \right| \geq |J|.$$

*Demonstração.* Para ver que esta formulação é equivalente ao Teorema 5, defina um grafo  $G$  com bipartição  $X, Y$  onde  $X := I$ ,  $Y := A$  e para cada vértice  $i$  em  $X$  definimos  $N(i) := A_i$ . Um SDR de  $\mathcal{A}$  é deste modo um emparelhamento que cobre  $X$  em  $G$ .  $\square$

A condição enunciada no Teorema de Hall para a família  $\mathcal{A}$  é chamada **condição de casamento**.

*Demonstração.* (Teorema 8)  $2 \implies 1$ : Assuma que  $G$  não é um core, e seja  $f : G \rightarrow G'$  uma retração de  $G$  em um subgrafo próprio. Para cada  $x \in G'$ ,  $f^{-1}(x)$  é um conjunto independente, e portanto possui no máximo 2 elementos. Defina  $K$  como o conjunto de vértices  $x \in G'$  tais que  $f^{-1}(x)$  possui exatamente 2 elementos; isto é,  $x$  é a imagem de mais um elemento além de si próprio por  $f$ .  $K$  é um clique, pois se  $x, y \in K$  e  $x \neq y$ ,



então  $f^{-1}(x) \cup f^{-1}(y)$  possuiria 4 elementos. Pelo mesmo argumento, cada vértice de  $G'$  está ligado a todo  $K$ , caso contrário existiria conjunto independente com pelo menos 3 elementos em  $G$ . Portanto, os únicos vértices de  $G$  que não estão ligados a todo  $K$  estão em  $G - G'$ , que possui exatamente  $|K|$  elementos.

$1 \implies 2$ : Suponha que 2 é falso, i.e., existe clique  $K$  tal que o número de vértices que não é adjacente a todo  $K$  é  $\leq |K|$ . Podemos assumir  $K$  minimal: cada subconjunto próprio  $K'$  de  $K$  possui mais do que  $|K'|$  vértices não adjacentes a todo  $K'$ . Então  $K$  possui exatamente  $|K|$  vértices não adjacentes a todo  $K$ .

Para cada  $x \in K$ , considere o conjunto  $S_x = \{y \in V(G) : y \text{ não é adjacente a } x\}$ . Note que o conjunto  $\bigcup_{x \in K'} S_x$  simboliza o conjunto de vértices não adjacentes a todo  $K'$ . Pelo que construímos no parágrafo anterior, a família  $S = \{S_x : x \in K\}$  satisfaz a condição de casamento do Teorema de Hall, pois para todo  $K' \subseteq K$  vale:

$$\left| \bigcup_{x \in K'} S_x \right| \geq |K'|.$$

Portanto, pelo teorema de Hall, podemos tomar representantes distintos para cada  $S_x$ , digamos  $y_x$ .

Vejamus que a aplicação  $f$  que leva cada  $y_x$  em  $x$  e mantém todos os outros vértices fixos é uma retração: precisamos verificar apenas que as adjacências relacionadas aos vértices  $y_x$  são mantidas. Seja  $z \sim y_x$ . Se  $z = y_w$  para algum  $w$ , então  $x$  e  $w$  estão em  $K$  e  $x \sim w$ . Caso contrário,  $z$  está ligado a todo  $K$ , e  $f(z) = z \sim x$ . Portanto  $f$  é uma retração e  $G$  não é um core.

$2 \iff 3$ : A equivalência entre os itens 2 e 3 é dada no corolário 4, apenas enunciado aqui para o grafo complementar.  $\square$

Concluimos então que para  $\alpha(G) = 2$  verificar se  $G$  é um core possui a mesma complexidade de se verificar se um grafo é 2-bicrítico, o que como consequência do Lema 5 sabemos que está em P.

## 2.3 Algoritmos

---

```

1 # Adaptação algoritmo de fluxo máximo para encontrar
  emparelhamento máximo em um grafo bipartido.
2 def matching_bip(G):
3     n=len(G)
4     # primeiro encontrar bipartição:
5     try:
6         A,B = is_bipartite(G)
7     except:
8         print("G não é bipartido")
9         return
10    # orienta arestas de A para B:
```

```

11     for u in B:
12         G[u]*=(-1)
13     # adiciona fonte e sorvedouro:
14     fonte=np.array([0]*n)
15     for u in A:
16         fonte[u]=1
17     G=np.concatenate((G, [fonte]))
18     G=np.concatenate((G, np.transpose([( -1) * np.concatenate([
19         fonte , [0]])])),1)
20     sorv = np.array([0]*(n+1))
21     for u in B:
22         sorv[u] = -1
23     G = np.concatenate((G, [sorv]))
24     G = np.concatenate((G, np.transpose([( -1) * np.concatenate
25         ([sorv , [0]])])),1)
26     # encontra caminho p da fonte para sorvedouro, atualiza M
27     # por meio de diferença simétrica com p e altera direção
28     # do caminho p em G:
29     M=[]
30     p = path(G, n, n + 1)
31     while p:
32         for i in range(1,len(p)):      #altera sentido de p em G
33             G[p[i - 1]][p[i]] *= -1
34             G[p[i]][p[i - 1]] *= -1
35         p.pop(0)
36         p.pop(len(p)-1)
37         arestas_p=[]
38         for i in range(1,len(p)):
39             arestas_p.append({p[i-1],p[i]})
40         for e in arestas_p:      #dif simétrica M e arestas_p
41             if e in M: M.remove(e)
42             else: M.append(e)
43         p = path(G, n, n + 1)
44     return M

```

---

```

1 #tamanho emparelhamento máximo de G bipartido.
2 def ni(G):
3     return len(matching_bip(G))
4
5 #tamanho 2-emparelhamento máximo de G.
6 def ni2(G):
7     n=len(G)
8     Y=np.zeros((2*n, 2*n), dtype=int)

```

```

9     for (i,j) in edges(G):
10         Y[2*i][2*j+1]=1
11         Y[2*j+1][2*i]=1
12         Y[2*i+1][2*j]=1
13         Y[2*j][2*i+1]=1
14     return ni(Y)

```

---

```

1 #verifica se G é 2-bicrítico
2 def is_2bicritic(G):
3     n = len(G)
4     for i in range(n):
5         Y=np.delete(np.delete(G, i, 0), i, 1)
6         if ni2(Y) != n-1: # 2-emparelhamento máximo é
            perfeito?
7             return False
8     return True

```

---

## 3 Contando Homomorfismos

### 3.1 Contando Homomorfismos

Seja  $\text{Hom}(G, H)$  o conjunto de todos os homomorfismos de  $G$  em  $H$  e defina  $\text{hom}(G, H) = |\text{Hom}(G, H)|$ . Defina do mesmo modo  $\text{Inj}(G, H)$ ,  $\text{inj}(G, H)$ ,  $\text{Surj}(G, H)$  e  $\text{surj}(G, H)$  para os homomorfismos injetivos e sobrejetivos, respectivamente, de  $G$  em  $H$ . Um resultado de Lovász [8], que exibiremos a seguir, mostra que a função  $\text{hom}(\cdot, G)$  determina unicamente um grafo  $G$  a menos de isomorfismo, e o mesmo vale para  $\text{hom}(G, \cdot)$ . Dvořák [7] mostra ainda que  $\text{hom}(\cdot, G)$  restrita a algumas classes menores de grafos também pode reconhecer qualquer  $G$ , e que algumas propriedades de grafos podem ser reconhecidas por outras classes.

**Proposição 3.** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos. Cada homomorfismo  $f : G \rightarrow H$  pode ser escrito como uma composição  $f = i \circ s$ , onde  $s$  é um homomorfismo sobrejetivo e  $i$  um homomorfismo injetivo.*

*Demonstração.* Sabemos que  $f(G)$  é um subgrafo de  $H$  e, pelo Teorema 2, é também o quociente de  $G$  pelo kernel de  $f$ . Tome  $s$  como o homomorfismo canônico de  $G$  em  $G/\ker f$ , que é sobrejetivo, e  $i$  como a inclusão de  $f(G)$  em  $H$ , que é claramente injetiva. Então  $f = i \circ s$ .  $\square$

**Lema 6.** *Para quaisquer grafos  $G$  e  $H$ , vale que*

$$\text{hom}(G, H) = \sum_{\pi} \text{inj}(G/\pi, H) = \sum_{H' \subseteq H} \text{surj}(G, H'),$$

onde  $\pi$  varia entre todas as partições dos vértices de  $G$  e  $H'$  varia entre todos os subgrafos de  $H$ .

*Demonstração.* Para a primeira igualdade, temos pela proposição anterior que cada  $f \in \text{Hom}(G, H)$  se escreve unicamente como  $f = i \circ s$ , onde  $s$  é a aplicação canônica  $G \rightarrow G/\ker f$  e  $i$  uma função injetiva. Assim, agrupando os homomorfismos distintos que possuem o mesmo kernel  $\pi$  chegamos ao resultado.

No segundo caso, note que um homomorfismo é sempre sobrejetivo sobre a sua imagem. Logo, basta agrupar os homomorfismos que possuem a mesma imagem homomórfica e temos a equação.  $\square$

**Teorema 10.** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos fixos. Se para todo grafo  $F$  vale que*

$$\text{hom}(F, G) = \text{hom}(F, H),$$

*então  $G$  e  $H$  são isomorfos.*

### 3 Contando Homomorfismos

*Demonstração.* Vamos mostrar que para todo  $F$  vale que  $\text{inj}(F, G) = \text{inj}(F, H)$ . Assim, tomando  $F = G$  e depois  $F = H$ , temos que existe pelo menos um homomorfismo injetivo de  $G$  em  $H$  e um de  $H$  em  $G$ , e concluímos então que  $G \cong H$ .

Faremos por indução nos vértices de  $F$ . Se  $F$  possui apenas um vértice é trivial, pois todo homomorfismo saindo de um único vértice é injetivo.

Quando  $F$  possui mais de um vértice, pelo lema anterior podemos particionar os homomorfismos de  $F$  em qualquer grafo  $W$  de acordo com o kernel, obtendo

$$\text{hom}(F, W) = \sum_{\pi} \text{inj}(F/\pi, W),$$

onde  $\pi$  varia entre todas as partições de  $G$ . Note que um homomorfismo é injetivo se e somente se seu kernel é a partição discreta, que denotaremos por  $\delta$ . Logo:

$$\text{inj}(F, W) = \text{hom}(F, W) - \sum_{\pi \neq \delta} \text{inj}(F/\pi, W).$$

Observe que se  $\pi \neq \delta$ ,  $F/\pi$  possui menos vértices do que  $F$ . Logo, pela hipótese de indução,  $\text{inj}(F/\pi, G) = \text{inj}(F/\pi, H)$ , e tomando  $W = G$  e  $W = H$  na última equação concluímos que  $\text{inj}(F, G) = \text{inj}(F, H)$ .  $\square$

O teorema acima nos mostra que a função  $\text{hom}(\cdot, G)$  determina unicamente  $G$  a menos de isomorfismos. Vejamos que a função  $\text{hom}(G, \cdot)$  também caracteriza qualquer  $G$ :

**Teorema 11.** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos fixos. Se para todo grafo  $F$  vale que*

$$\text{hom}(G, F) = \text{hom}(H, F),$$

*então  $G$  e  $H$  são isomorfos.*

*Demonstração.* Com um argumento similar ao usado no teorema anterior, vamos mostrar agora por indução no número  $|V(F)| + |E(F)|$  de vértices mais arestas de  $F$  que  $\text{surj}(G, F) = \text{surj}(H, F)$ , donde segue que  $G \cong H$ . Para  $F$  com apenas um vértice é trivial, já que todo homomorfismo em apenas um vértice é sobrejetivo.

Vamos particionar agora os homomorfismos de qualquer grafo  $W$  em  $F$  de acordo com a imagem, novamente utilizando o Lema 6:

$$\text{hom}(W, F) = \sum_{F' \subseteq F} \text{surj}(W, F').$$

Isolando os homomorfismos sobrejetivos sobre  $F$  obtemos:

$$\text{surj}(W, F) = \text{hom}(W, F) - \sum_{F' \subsetneq F} \text{surj}(W, F').$$

Note neste passo que se  $F' \subsetneq F$ ,  $F'$  é subgrafo próprio de  $F$ , e portanto possui pelo menos um vértice ou aresta a menos que  $F$ . Logo, pela hipótese de indução, vale que  $\text{surj}(G, F') = \text{surj}(H, F')$ , e tomando  $W = G$  e  $W = H$  na última equação concluímos que  $\text{surj}(G, F) = \text{surj}(H, F)$ , finalizando a nossa prova.  $\square$

Sejam  $G$  e  $H$  grafos não isomorfos. Dizemos que uma classe de grafos  $\mathcal{G}$  **distingue com relação ao domínio**  $G$  e  $H$  se existe um grafo  $F \in \mathcal{G}$  tal que  $\text{hom}(F, G) \neq \text{hom}(F, H)$ . Do mesmo modo, dizemos que  $\mathcal{G}$  **distingue com relação à imagem**  $G$  e  $H$  se existe  $F \in \mathcal{G}$  tal que  $\text{hom}(G, F) \neq \text{hom}(H, F)$ . Os dois teoremas acima nos dizem então, nesse contexto, que a classe  $\mathcal{A}$  de todos os grafos distingue todos os pares de grafos não isomorfos, tanto com relação ao domínio quanto à imagem. O Teorema a seguir mostra que uma família finita de grafos não pode distinguir todos os pares grafos a menos de isomorfismo:

**Teorema 12.** *Uma família finita de grafos  $\mathcal{G} = \{F_i\}_{i \in I}$  não pode distinguir todos os grafos a menos de isomorfismo, tanto em relação ao domínio quanto à imagem.*

*Demonstração.* Começando pelo caso da imagem, seja  $n = \max_{i \in I} |V(F_i)|$ . Então todo  $K_m$  com  $m > n$  possui  $\text{hom}(K_m, F_i) = 0$ , para todo  $i \in I$ , mas obviamente  $K_m \not\cong K_l$  para  $m \neq l$ .

Para o caso do domínio, vamos construir dois grafos que não são distinguíveis por  $\mathcal{G}$ . Seja  $n = \max_{i \in I} \text{diam}(F_i)$ . Defina  $Q$  como o grafo formado pelo caminho  $P_{2n} = (v_0, v_1, \dots, v_{2n})$  unido a um novo vértice  $z$  pela aresta  $z \sim v_n$ ; e defina  $Q'$  como o grafo formado pelo caminho  $P_{2n} = (u_0, u_1, \dots, u_{2n})$  unido a um novo vértice  $z'$  pela aresta  $z' \sim u_{n-1}$ , como na imagem:



Figura 3.1:  $Q$  e  $Q'$  como descritos para  $n = 3$ .

Claramente  $Q \not\cong Q'$ . Vamos provar então que  $\text{hom}(F_i, Q) = \text{hom}(F_i, Q')$ , para todo  $i \in I$ . Se  $F_i$  possui um ciclo ímpar não temos nada a provar, pois o número de homomorfismos em  $Q$  e  $Q'$  será zero. Caso contrário, observe inicialmente que  $Q \setminus v_0$  é isomorfo a  $Q' \setminus u_{2n}$ . Logo

$$\text{hom}(F_i, Q \setminus v_0) = \text{hom}(F_i, Q' \setminus u_{2n}).$$

Vamos mostrar então que número de homomorfismos  $F_i \rightarrow Q$  com imagem contendo  $v_0$  é o mesmo que o número de homomorfismos  $F_i \rightarrow Q'$  com imagem contendo  $u_{2n}$ . Note que as imagens homomórficas de  $F_i$  em  $Q$  contendo  $v_0$  serão subgrafos do caminho  $(v_0, v_1, \dots, v_{\text{diam} F_i})$ , dado que homomorfismos não aumentam distâncias. Do mesmo modo, as imagens homomórficas de  $F_i$  em  $Q'$  contendo  $u_{2n}$  serão subgrafos do caminho  $(u_{2n} - \text{diam} F_i, \dots, u_{2n})$ . Como esses dois caminhos são isomorfos, o número de homomorfismos de  $F_i$  em cada um deles é o mesmo, concluindo a demonstração.  $\square$

### 3 Contando Homomorfismos

Em [7] Dvořák mostra que algumas classes de grafos são suficientes para distinguir com relação ao domínio todos os grafos a menos de isomorfismo, como a classe dos grafos 2-degenerados e a classe dos grafos não-bipartidos com número cromático limitado. Esse tema possui relação com um importante problema de complexidade computacional que é o de se identificar se o problema de isomorfismo de grafos está em co-NP: dado que a família  $\mathcal{A}$  que contém todos os grafos distingue todos os grafos não isomorfos, se dois grafos  $G$  e  $H$  são não isomorfos então existe um grafo  $F \in \mathcal{A}$  com  $\text{hom}(F, G) \neq \text{hom}(F, H)$  que prova este fato. Entretanto, fazer a verificação  $\text{hom}(F, G) \neq \text{hom}(F, H)$  para qualquer grafo  $F$  é um problema em NP-completo. Existem, porém, famílias  $\mathcal{G}$  para as quais é possível determinar  $\text{hom}(F, G)$  em tempo polinomial, e a questão é saber se alguma delas pode distinguir todos os grafos.

Dentro deste tema, nos questionamos se a família de todos os núcleos  $\mathcal{C}$  seria capaz de distinguir todos os grafos a menos de isomorfismo, tanto com relação ao domínio quanto à imagem. Identificamos inicialmente um contra-exemplo para o primeiro caso:

**Proposição 4.** *A família  $\mathcal{C}$  de todos os núcleos não pode distinguir com relação ao domínio todos os grafos a menos de isomorfismo.*

*Demonstração.* Considere os grafos  $G = K_{1,3}$  e  $H = P_4$ . Ambos possuem o mesmo número de vértices e arestas, logo  $\text{hom}(K_1, G) = \text{hom}(K_1, H) = 4$  e  $\text{hom}(K_2, G) = \text{hom}(K_2, H) = 6$ . Mas qualquer outro núcleo  $C$  além de  $K_1$  e  $K_2$  não pode ser bipartido, logo  $\text{hom}(C, G) = \text{hom}(C, H) = 0$ , e  $\mathcal{C}$  não distingue  $G$  de  $H$ .  $\square$



Figura 3.2: Para qualquer núcleo, o número de homomorfismos com imagem em um destes grafos é o mesmo.

## 4 Curvatura de Ricci

Tem sido uma grande tendência buscar aplicar as ferramentas de outras áreas da matemática, como probabilidade e otimização contínua, para problemas dentro da teoria dos grafos. O operador Laplaciano em grafos é um exemplo de sucesso dessa ideia, surgindo a partir do conhecido operador diferencial utilizado em geometria Riemanniana e sendo atualmente fortemente utilizado em teoria algébrica dos grafos (Referências). Uma noção que tem sido trazida das variedades Riemannianas recentemente é o de curvatura, que tem mostrado aplicações em diversos campos, como em redes biológicas [12, 13]. Estudaremos neste capítulo a curvatura de Ricci, que utiliza o operador Laplaciano em sua construção e é um caso particular da curvatura de Bakry-Émery. Utilizamos como base principalmente os trabalhos de Cushing [9] e Siconolfi [10].

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Para uma função real  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  definimos o **Laplaciano** de  $f$  em um vértice  $x$  como

$$\Delta f(x) = \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)).$$

Consideraremos nesse capítulo que grafos possam possuir um número infinito de vértices. Dizemos que um grafo é **localmente finito** se  $d(x) < \infty$  para todo  $x \in V(G)$ .

**Definição 7.** Seja  $G$  um grafo simples localmente finito. Para  $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos os operadores  $\Gamma$  e  $\Gamma_2$  por

$$\begin{aligned} 2\Gamma(f, g) &:= \Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f, \\ 2\Gamma_2(f, g) &:= \Delta\Gamma(f, g) - \Gamma(f, \Delta g) - \Gamma(\Delta f, g). \end{aligned}$$

Escreveremos  $\Gamma(f) := \Gamma(f, f)$  e  $\Gamma_2(f) := \Gamma_2(f, f)$ .

**Definição 8.** A **curvatura de Ricci** de um grafo  $G$ , denotada  $\text{Ric}(G)$ , é o valor máximo  $K \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tal que para qualquer função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  e qualquer vértice  $x \in V(G)$  vale a desigualdade

$$\Gamma_2(f)(x) \geq K\Gamma(f)(x).$$

A desigualdade acima é chamada **desigualdade de curvatura**.

A **curvatura local de Ricci** de um grafo  $G$  em um vértice  $x \in V(G)$  é o valor máximo  $K \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tal que para qualquer função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  vale a desigualdade de curvatura  $\Gamma_2(f)(x) \geq K\Gamma(f)(x)$ . Denotamos a curvatura local de Ricci de  $G$  em  $x$  por  $\text{Ric}_x(G)$ .



## 4 Curvatura de Ricci

**Lema 7.** *Podemos escrever*

$$\text{Ric}(G) = \inf_{x,f} \frac{\Gamma_2(f)(x)}{\Gamma(f)(x)},$$

onde  $x \in V(G)$  e  $f$  varia entre as funções reais tais que  $f(x) = 0$  e  $\Gamma(f)(x) > 0$ .

**Proposição 5.**  $\Gamma_2$  pode ser expresso pela seguinte fórmula quando  $f(x) = 0$ :

$$\begin{aligned} 2\Gamma_2(f)(x) = & \frac{1}{2} \sum_{u \in B_2(x)} \sum_{v \in B_1(u) \cap B_1(x)} (f(u) - 2f(v))^2 + \left( \sum_{v \in B_1(x)} f(v) \right)^2 + \\ & + \sum_{(v,v') \in E(G[B_1(x)])} \left( 2(f(v) - f(v'))^2 + \frac{1}{2}(f(v)^2 + f(v')^2) \right) + \sum_{v \in B_1(x)} \frac{4 - d(x) - d(v)}{2} f(v)^2. \end{aligned}$$

Podemos notar pelas fórmulas de  $\Gamma$  e  $\Gamma_2$  que  $\text{Ric}_x(G)$  depende apenas do subgrafo obtido pela união dos caminhos de comprimento 1 e 2 iniciando em  $x$ . Chamamos esse subgrafo de **subgrafo caminho de comprimento 2 de  $x$** .

**Proposição 6.** *Dois vértices com subgrafo caminho de comprimento 2 isomorfos possuem a mesma curvatura local de Ricci.*

**Teorema 13.** *Seja  $G$  localmente finito e  $t(u, v)$  a função que conta o número de triângulos contendo ambos  $u$  e  $v$ . Seja  $T = \sup_{\{u,v\} \subseteq V(G)} t(u, v)$ . Então*

$$\text{Ric}(G) \leq 2 + \frac{T}{2}.$$

**Corolário 5.** *Se  $G$  não possui triângulos, então  $\text{Ric}(G) \leq 2$ .*

Considere  $\Delta$  a matriz Laplaciana de um grafo  $G$ . O **spectral gap** de  $G$ , denotado  $\lambda_G$  ou simplesmente  $\lambda$  quando  $G$  for claro, é o menor autovalor não nulo de  $-\Delta$ .

**Teorema 14.** *Se  $\text{Ric}(G) > 0$ , então  $\lambda \geq \text{Ric}(G)$ . [14]*

**Teorema 15.** *Desigualdade isoperimétrica [14]*

**Definição 9.** Define uma matriz  $A$  associada a cada vértice  $x$  baseada em vértices adjacentes e triângulos da  $B_1(x)$

**Teorema 16.** *Seja  $G$  um grafo localmente finito e  $x$  um vértice de  $G$ . Então*

$$\text{Ric}_x(G) = \min \{ \lambda : \lambda \text{ é um autovalor de } A(x) \}.$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Godsil, C. Royle, G. “*Algebraic Graph Theory*”, Springer, 2001.
- [2] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. “*Graph theory*”, Graduate Texts in Mathematics 244, Springer, 2001.
- [3] Hell, P. Nešetřil, J. “*The core of a graph*”, Discrete Mathematics 109, 117-126, North-Holland, 1992.
- [4] Hell, P. Nešetřil, J. “*Graphs and homomorphisms*”, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 28, 2004.
- [5] Lovász, L. Plummer, M. D. “*Matching Theory*”, North-Holland Mathematics Studies 121, 1986.
- [6] McKay, B. D. “*nauty User’s Guide (Version 2.2)*”, Computer Science Department Australian National University.
- [7] Dvořák, Z. “*On Recognizing Graphs by Numbers of Homomorphisms*”, 2006.
- [8] Lovász, L. “*Operations with structures*”, Acta Math. Hung. 18, 321-328, 1967.
- [9] Cushing, D. Liu, S. e Peyerimhoff, N. “*Bakry–Émery Curvature Functions on Graphs*”, Canadian Journal of Mathematics, 2018.
- [10] Siconolfi, V. “*Ricci Curvature, graphs and eigenvalues*”, Linear Algebra and its Applications, 2021.
- [11] Cushing, D. et al. “*The Graph Curvature Calculator and the curvatures of cubic graphs*”, arXiv: 1712.03033v2, 2017.
- [12] Sandhu, R. et al. “*Graph Curvature for Differentiating Cancer Networks*”, Scientific Reports 5, Article number: 12323, 2015.
- [13] Farooq, H. et al. “*Network curvature as a hallmark of brain structural connectivity*”, Nature Communications 10, Article number: 4937, 2019.
- [14] Klartag, B. et al. “*Discrete Curvature and Abelian Groups*”, Canad. J. Math. Vol. 68 (3), 2016.