Escribimos $\mathscr{E}_l = \bigcap_{m=1}^{l} E_m$. Queremos acotar la probabilidad del evento E_j, condicionado a $\mathscr{E}_{j-1}$, cuando $j < \tau_{\sqrt{M}}$. Sea $V = \{1, 2, ..., A\}$ el conjunto de todas comunidades vistas hasta el paso j-1 y supongamos que en el paso $j-1$ se alcanzaron exactamente μ nuevas comunidades. Como $j < \tau_{\sqrt{M}}$, tenemos $\mu \leq A < \sqrt{M}$.

Ahora bien, condicionalmente en $\mathscr{E}_{j-1}$, se cumple que $3^{j-1} \leq \mu \leq \delta^{j-1}$. Además, $E_j^C = \{0 \leq |C_j| < 3\mu\}$ ocurre cuando todos los nodos en el paso $j-1$ escogieron una comunidad secundaria o bien en V o bien en un conjunto K de comunidades no vistas, $K = \{k_1, k_2, ..., k_{3\mu-1}\} \subset V^C$. Es decir, cuando hay $3\mu - 1$ comunidades nuevas, como mucho.

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} &E_j^c \big| \big(\{|C_{j-1}| = \mu\} \cap \mathscr{E}_{j-2} \cap \{j < \tau_{\sqrt{M}}\}\big) \Longleftrightarrow \\ &\qquad \exists K = \{k_1, k_2, ..., k_{3\mu-1}\} \subset V^C : \, X_i \in V \cup K, \, \forall i = 1, 2, ..., \delta\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\big(E_j^c \big| \{|C_{j-1}| = \mu\} \cap \mathscr{E}_{j-2} \cap \{j < \tau_{\sqrt{M}}\}\big) &\leq \sum_{k_1, k_2, ..., k_{3\mu-1} \in V^C} P(\forall X_i, \, X_i \in V \cup K) \\ &= \sum_{k_1, k_2, ..., k_{3\mu-1} \in V^C} P(X_i \in V \cup K)^{\delta\mu} = \binom{M-A}{3\mu-1} \Big(\frac{A + 3\mu - 1}{M}\Big)^{\delta\mu} \\ &\leq \frac{(M-A)^{3\mu-1}}{(3\mu-1)!} \Big(\frac{\sqrt{M}}{M}\Big)^{\delta\mu} \leq \frac{1}{M^{\mu(\delta/2-3)+1}} \\ &\leq \frac{1}{M^{3^{j-1}(\delta/2-3)+1}}. \end{aligned}$$

Por último, observamos que $\mathscr{E}_{j-1} = \mathscr{E}_{j-2} \cap \bigcup_{\mu=3^{j-1}}^{\delta^{j-1}} \{|C_{j-1}| = \mu\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} P\big(E_j^c \big| \mathscr{E}_{j-1} \cap \{j < \tau_{\sqrt{M}}\}\big) &= \sum_{\mu=3^{j-1}}^{\delta^{j-1}} P\big(E_j^c \big| \{|C_{j-1}| = \mu\} \cap \mathscr{E}_{j-2} \cap \{j < \tau_{\sqrt{M}}\}\big) \frac{P(\{|C_{j-1}| = \mu\} \cap \mathscr{E}_{j-2} \cap \{j < \tau}{P(\mathscr{E}_{j-1} \cap \{j < \tau_{\sqrt{M}}\})} \\ &\leq \sum_{\mu=3^{j-1}}^{\delta^{j-1}} P\big(E_j^c \big| \{|C_{j-1}| = \mu\} \cap \mathscr{E}_{j-2} \cap \{j < \tau_{\sqrt{M}}\}\big) \\ &\leq \frac{\delta^{j-1} - 3^{j-1}}{M^{3^{j-1}(\delta/2-3)+1}} \\ &\leq \frac{M^{j-1}}{M^{3^{j-1}(\delta/2-3)+1}} \\ &\leq \frac{1}{M^3}. \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se cumple a partir de $j = 3$ para $\delta \geq 7$, y desde $j = 2$ si $\delta \geq 8$.