Ahora, establecemos una cota inferior para $P(E_j|\mathscr{E}_{j-1})$, cuando $\tau_{\sqrt{M}} \leq j \leq \tau_{\frac{M}{2}}$. Para tal j, condicionalmente en $\mathscr{E}_{j-1}$, existe un número $0 \leq \beta < 1$ tal que $|N_j| \geq M^\beta$. En efecto, condicionalmente en $\mathscr{E}_{j-1}$, tenemos $|N_j| \geq e^j|N_0| \geq e^{\tau\sqrt{M}}\delta$. Como, para cada $T \geq 0$ se cumple $\sum\limits_{l \leq T}|C_l| \leq \sum\limits_{l=0}^{T}\delta^j \leq \delta^{T+1}$, tenemos

$$\tau_{\sqrt{M}} = \min\{T : \sum_{j=0}^{T}|C_j| \geq \sqrt{M}\} \geq T_m = \min\{T : \delta^{T+1} \geq \sqrt{M}\}.$$

En consecuencia, debe haber un $\beta > 0$ tal que $\tau_{\sqrt{M}} \geq \log(M^\beta)$, lo cual implica $|N_j| \geq e^{\tau\sqrt{M}}\delta \geq M^\beta\delta \geq M^\beta$.

Para obtener la cota, usamos la desigualdad de Bernstein.

Condicionalmente en $\mathscr{E}_{j-1}$, E_m ocurre si al menos $e|E_{j-1}|$ de las $|N_{j-1}| = \delta|E_{j-1}| \geq 6|E_{j-1}|$ variables independientes alcanzaron nuevas comunidades. Por la definición de $\tau_{\frac{M}{2}}$, si $j \leq \tau_{\frac{M}{2}}$, entonces la probabilidad de que las variables $(X_i)_{i \in N_{j-1}}$ (uniformemente distribuidas) encuentren una comunidad vista anteriormente es menor que $\frac{1}{2}$, y por lo tanto, la probabilidad de encontrar an sucesor nuevo es mayor que $P(Y_i = 1)$, donde $Y_i \sim Ber(\frac{1}{2})$. Fijamos $\epsilon \geq 0$ tal que $3 - \epsilon \geq e$.

Entonces,

$$P(E_j|\mathscr{E}_{j-1}) \geq 1 - P(|\sum_{i=0}^{|N_{j-1}|}(Y_i - \frac{1}{2})| \geq \epsilon|N_{j-1}|).$$

Acotaremos el término de la derecha usando de nuevo la desigualdad de Bernstein.

Aplicamos Bernstein a $(X_i - \frac{1}{2})_{i=1}^n$ con

$$\sigma = \frac{1}{2} \qquad L = 1 \qquad t = \frac{\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Lo que resulta en

$$\alpha = \sqrt{\epsilon}/\sigma \qquad \frac{t^2}{1 + \alpha/3} \geq \frac{\epsilon n}{2\sigma^2} \geq \epsilon n.$$

Tenemos

$$P(|\sum_{i=1}^{|N_{j-1}|}(X_i - \frac{1}{2})| \geq \epsilon|N_{j-1}|) \leq 2e^{-\epsilon|N_{j-1}|}.$$

Por lo visto anteriormente, condicionalmente en $\mathscr{E}_{j-1}$, tenemos $|N_{j-1}| \geq M^\beta$, con $\beta > 0$.

Entonces, por Bernstein, obtenemos

$$P(E_j|\mathscr{E}_{j-1}) \geq 1 - 2e^{-\epsilon M^\beta} \geq 1 - \frac{1}{M^3}.$$

Donde la última desigualdad cumple para $M \geq M_0$.