群论笔记

Leoeon

2016.07.02

Contents

Chapter 1

群

1.1 定义

1.1.1 群、等价、分拆

群(集合G,运算*) $\overset{def}{=}$

- 封闭：$\forall g_1, g_2 \in G, g_1 * g_2 \in G$
- 结合律：$\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
- 单位元：$\exists$唯一$\mathbb{I} \in G, \forall g \in G, \mathbb{I} * g = g * \mathbb{I} = G$
- 逆：$\forall g \in G, \exists$唯一$g^{-1} \in G, g * g^{-1} = g^{-1} * g = \mathbb{I}$

集合A上的等价关系$\overset{def}{=}$

- 自反：$\forall a \in A, a \sim a$
- 对称：$a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- 传递：$a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

集合A的子集X_1,...,X_n构成A的一个分拆$\overset{def}{=}$

- $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = A$
- $X_i \bigcap X_j = \emptyset, \forall i \neq j$

1.1.2 阶、秩

群G的阶$|G| \overset{def}{=}$群的元素数目

元素g的阶$\overset{def}{=}$满足$g^k = \mathbb{I}$的最小自然数k。元素阶必为群阶因子。

群的秩rank $\overset{def}{=}$群的最小生成元数目

1.2 子群与共轭类

1.2.1 子群

子群$H \leq G \overset{def}{=}$H中所有元素$h \in G$，(H,*)也是群

$l, r \in G$，左陪集lH，右陪集Hr。

各陪集lH均匀分拆群G。

（陪集数目[G:H]，则$|G| = [G:H]|H|$（Lagruange定理））

子群H可为：①循环群，则元素阶必为群阶因子。

固定左陪集代表元系$L = \{l_1, ..., l_{[G:H]}\}$，则对$\forall g \in G, \exists$唯一$l_g \in L, h_g \in H,$使得$g = l_g h_g$

1.2.2 共轭类

两元素共轭$\overset{def}{=} a, b \in G, \exists g \in G, a = gbg^{-1}$

元素a的共轭类$K_a \overset{def}{=} \{gag^{-1} | \forall g \in G\} \leq G$

$gK_ag^{-1} = K_a$

$|K_a| = [G : C_G(a)]$

同一共轭类的元素阶皆相同。

任一大共轭类必为若干最小共轭类之并。

（大共轭类可为：①任意共轭类直积；②不变子群；$\cdots$）

1.2.3 不变子群

1.2.3.1 不变子群

$N \triangleleft G \overset{def}{=} N \leq G, \forall g \in G, gNg^{-1} = N$

N既是子群，又是共轭类。

1.2.3.2 商群

G/N $\overset{def}{=}$每个陪集gN作为一个元素组成

$|G/N| = [G : H] = |G|/|N|$

$G \neq G/H \otimes H$

1.2.4 中心

元素a的中心化子$C_G(a) \stackrel{def}{=} \{g|gag^{-1}=a, g\in G\} \leq G$
子集M的正规化子$N_G(M) \stackrel{def}{=} \{g|gMg^{-1}=M, g\in G\} \leq G$
子集M的中心化子$C_G(M) \stackrel{def}{=} \{g|\forall m\in M, gmg^{-1}=m, g\in G\} \leq G$
群的中心$C(G) \stackrel{def}{=} C_G(G) = \{g|\forall g'\in G, gg'g^{-1}=g', g\in G\} \leq G$

1.3 同态与同构

1.3.1 定义

同态$\stackrel{def}{=}$群$(G,*)$ 和$(H,\circ)$，映射$f: G\to H$保持群的乘法结构：$f(a*b)=f(a)\circ f(b)$
同构$\stackrel{def}{=}$双射同态

1.3.2 ker

ker[f] $\stackrel{def}{=}$被映射为$f(g_k f)=\mathbb{I}_H$ 的所有$g_k f$ 集合
f(G) 是H 的子群
ker[f] 是G 的不变子群
G/ker[f] 同构于f(G)，即$g*ker[f]\leftrightarrow f(g)$

1.4 群代数

1.4.1 群代数

对群G定义数乘和加法可得线性空间$V_G=\{x|x=\sum_{i=1}^{|G|}x(g_i)g_i=\int_{g\in G}x(g)gdg, x(g_i)\in\mathbb{C}\}$
V_G上定义内积$\langle g_i|g_j\rangle \stackrel{def}{=} \delta_{i,j}$，可得内积空间。
V_G上定义乘法可得结合代数R_G（含幺环）。$xy \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1}^{|G|}(x(g_i)y(g_j))(g_ig_j)$

1.4.2 群函数

群函数：$G\to\mathbb{C}$

1.4.2.1 群函数空间

群函数空间$\stackrel{def}{=}$群函数上定义加法和数乘，张成线性空间
群函数空间自然基$\varepsilon_h(g)=\begin{cases}1 & , \quad g=h\\ 0 & , \quad g\neq h\end{cases}$。正交，完备，不归一

l^2 或L^2 空间

1.4.2.2 群函数内积

离散：$(\xi|\eta) \stackrel{def}{=} \frac{\langle \sum_{g_i \in G} \xi(g_i) g_i | \sum_{g_j \in G} \eta(g_j) g_j \rangle}{\langle \sum_{g_i \in G} g_i | \sum_{g_j \in G} g_j \rangle} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi^*(g) \eta(g)$
连续：$(\xi|\eta) \stackrel{def}{=} \frac{\langle \int_{g_i \in G} \xi(g_i) dg_i | \int_{g_j \in G} \eta(g_j) dg_j \rangle}{\langle \int_{g_i \in G} dg_i | \int_{g_j \in G} dg_j \rangle} = \int_g dg \xi^*(g) \eta(g)$

1.4.2.3 不变积分

$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \to \int_{g \in G} dg(\alpha) = \int_{g \in G} \rho(\alpha) d\alpha$
要求：$dg = d(h^{-1}g)$。
紧致群性质：

- $dg = d(hg) = d(gh) = dg^{-1}$
- $\int_{g \in G} dg = \int \rho(\alpha) d\alpha = 1$
- $\rho(\alpha)$单值、恒正、不为0、不发散
- 积分运算满足线性性质

若右不变测度$dg = dgh$，则$\rho(\beta) = \left. \frac{1}{|\frac{\partial \gamma(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}|} \right|_{\alpha=0}$ （未归一）
若左不变测度$dg = dhg$，则$\rho(\alpha) = \left. \frac{1}{|\frac{\partial \gamma(\alpha,\beta)}{\partial \beta}|} \right|_{\beta=0}$ （未归一）

1.5 群作用空间（表示空间）

1.5.1 轨道

群G作用空间为X，其中一点$x \in X$的轨道$\stackrel{def}{=} [x] \stackrel{def}{=} Gx$

1.5.2 不变子空间

群的不变子空间W $\stackrel{def}{=} \forall g \in G, gW \subseteq W$
?不变子空间必为轨道之并。
?对有限群，$T(G)W \subseteq W \iff T(G)W = W$
不变子空间W的补空间W'满足GW' = W'

1.5.3 迷向子群

保持点x不动的元素构成x的迷向子群：$G_x \stackrel{def}{=} \{g | gx = x, g \in G\}$
G被子群G_x分拆为各个陪集$g_i G_x$，则$g_i G_x x = g_i x$，即$|[x]| = [G : G_x]$，即$|G| = |G_x||[x]|$

1.6 群与置换群的对应关系

1.6.1 重排定理

$\forall g \in G, gG = G, Gg = G$

1.6.2 对应关系

群代数R_G作为群作用空间。

1.6.2.1 正则表示

任何一个群G都同构于G的置换群S(G)的一个子群。

左正则表示$\stackrel{def}{=} L: G \to S(G), L(h) \stackrel{def}{=} \binom{g}{hg}$。
即对$\forall g \in G, L(h)g = hg$。
即对$\forall x, L(h)x = \sum_{i=1}^{|G|} x(g_i)hg_i = \sum_{j=1}^{|G|} x(h^{-1}g_j)g_j$。
（矩阵元$L(h)_{i,j} = \delta_{i,hj}$）

右正则表示$\stackrel{def}{=} R: G \to S(G), R(h) \stackrel{def}{=} \binom{g}{gh^{-1}}$。
即对$\forall g \in G, R(h)g = gh^{-1}$。
即对$\forall x, R(h)x = \sum_{i=1}^{|G|} x(g_i)g_ih^{-1} = \sum_{j=1}^{|G|} x(g_jh)g_j$。
（矩阵元$R(h)_{i,j} = \delta_{i,jh^{-1}}$）

正则表示是酉表示：对$\forall h \in G$，$\forall \xi, \eta \in \mathcal{F}[G]$，$\langle L(h)\xi | L(h)\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$

1.6.2.2 诱导表示

取子群$H \leq G$，左陪集$\Sigma = \{aH | a \in G\}$，右陪集$\Upsilon = \{Ha | a \in G\}$

任何一个有限群G都同态于置换群$S(\Sigma)$或$S(\Upsilon)$的一个子群

左诱导表示$\stackrel{def}{=} L_H: G \to S(\Sigma), L_H(g) \stackrel{def}{=} \binom{aH}{gaH}$
$\ker[L_H] = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$

右诱导表示$\stackrel{def}{=} R_H: G \to S(\Upsilon), R_H(g) \stackrel{def}{=} \binom{aH}{Hag^{-1}}$
$\ker[R_H] = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$

1.6.2.3 共轭表示

取子集$B \subseteq G$，$\Omega = \{aBa^{-1} | a \in G\}$ 任何一个有限群G都同态于置换群$S(\Omega)$的一个子群

共轭表示$\stackrel{def}{=} \pi_B: G \to S(\Omega), \pi_B(g) \stackrel{def}{=} \binom{aBa^{-1}}{(ga)B(ga)^{-1}}$
$ker[\pi_B] = \bigcup_{a \in G} aN_G(a)a^{-1}$

Chapter 2

群的线性表示理论

线性表示$T^{(p)}(g) \overset{def}{=}$群G到$GL(n,\mathbb{C})$的同态
（忠实表示$\overset{def}{=}$群表示和原群同构）
线性表示$T^{(p)}(\sum_a x_a g_a) \overset{def}{=} \sum_a x_a T^{(p)}(g_a)$，群空间$V_G$到$GL(n,\mathbb{C})$的同态
特征标$\chi^{(p)}(K_g) \overset{def}{=} tr(T^{(p)}(g))$

2.1 不等价不可约酉表示

2.1.1 等价

T(G)与T'(G)等价$\overset{def}{=}$存在一矩阵S，对$\forall g \in G, ST(g)S^{-1} = T'(g)$
对T(G)，取$S = (\sum_{g\in G} T^{+}(g)T(g))^{\frac{1}{2}}$，则$ST(G)S^{-1}$ 为酉表示。

2.1.2 可约

可约表示$\overset{def}{=}$群作用空间中存在群的非平庸不变子空间W（m维）：$\forall g \in G, T(g)W \subseteq W$
$\exists S, \forall g \in G, ST(g)S^{-1} = \begin{bmatrix} *_{\{m*m\}} & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$；$\forall w \in W, w = \begin{pmatrix} *_{\{m\}} \\ 0 \end{pmatrix}$

完全可约表示$\overset{def}{=}$群作用空间中存在群的非平庸不变子空间W（m维），且其正交补空间$W^{\perp}$也是不变子空间。

$\exists S, \forall g \in G, ST(g)S^{-1} = \begin{bmatrix} *_{\{m*m\}} & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$；$\forall w \in W, w = \begin{pmatrix} *_{\{m\}} \\ 0 \end{pmatrix}$；$\forall z \perp W, z = \begin{pmatrix} 0_{\{m\}} \\ * \end{pmatrix}$

酉变换可约 $\iff$ 完全可约。（特殊地，有限群可约 $\iff$ 完全可约）
对$T(g) = \begin{bmatrix} T_1(g) & D(g) \\ 0 & T_2(g) \end{bmatrix}$，取$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} D(h)T_2(h^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则$ST(g)S^{-1} = \begin{bmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{bmatrix}$

有限维表示可等价于不可约表示直和$T(g) \sim \oplus_{p=1}^{q} m_p T^{(p)}(g)$

2.2 不等价不可约表示的正交完备性

记$\{T^{(p)}(G)|p=1,\cdots,q\}$是群G的所有不等价不可约酉表示，第p个表示维数为$s_p$

2.2.1 Schur引理

对不等价不可约表示$R^{(p)}(G)$、$R^{(p')}(G)$，
若对$\forall g \in G, R^{(p)}(g)Q = QR^{(p')}(g)$，
则$Q = \delta_{p,p'}\lambda\mathbb{I}(\lambda \in \mathbb{C})$

2.2.2 正交定理

$(T^{(p)}_{\mu\nu}|T^{(p')}_{\mu'\nu'}) = \frac{1}{s_p}\delta_{p,p'}\delta_{\mu,\mu'}\delta_{\nu,\nu'}$
$\frac{1}{|G|}\sum_a |K_a|\chi^{(p)*}(K_a)\chi^{(p')}(K_a) = \delta_{pp'}$
$\frac{|K_a|}{|G|}\sum_p \chi^{(p)*}(K_a)\chi^{(p)}(K_{a'}) = \delta_{aa'}$

2.2.3 完备定理

$\frac{1}{\sqrt{s_p}}T^{(p)}_{\mu\nu}$ 组成了群函数空间$\mathcal{F}[G]$的一组正交归一完备基（$\forall\phi(g_a) = \sum_{p\mu\nu} c^{(p)}_{\mu\nu}T^{(p)}_{\mu\nu}(g_a)$）
$v^{(p)}_{\mu\nu} = \sum_{g\in G} T^{(p)}_{\mu\nu}(g)g$ 组成了群空间V_G 的一组完备基。
$\chi^{(p)}_{\mu\nu}$ 组成了类函数空间的一组完备基（$\forall\phi(K_a) = \sum_p d^{(p)}\chi^{(p)}(K_a) = \sum_p(\sum_\mu c^{(p)}_{\mu\mu})\chi^{(p)}(K_a)$）

2.2.3.1 Burnside定理

$$\begin{aligned} dim(\text{群代数空间}V_G) &= dim(\text{群函数空间}\mathcal{F}[G]) \\ |G| &= \textstyle\sum_{p=1}^{\text{共轭类数目}} s_p^2 \end{aligned}$$

2.3

找所有群表示可转化为找所有不等价不可约酉表示。
任意表示$T(g) \sim \oplus_{p=1}^{q} m_p T^{(p)}(g)$ （$L(g) \sim R(g) \sim \oplus_{p=1}^{q} s_p T^{(p)}(g)$）
任意表示$\chi(K_g) = \sum_{p=1}^{q} m_p\chi^{(p)}(K_g)$，重复度$m_p = (\chi|\chi^{(p)})$
一个群的不等价不可约表示的数目等于群的共轭类的数目。
一个群的不可约表示的维数必是群阶因子。
$(\chi|\chi) = \sum_p m_p^2 \geq 1$且为整数（当$\chi$是不可约表示时取等号）

$$令\bar{K_j}=\sum_{g\in K_j} g \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} T^{(p)}(\bar{K_j})=\frac{|K_j|}{s_p}\chi^{(p)}(K_j)\mathbb{I} \\ \bar{K_j}\bar{K_k}=\sum_l f_{jkl}\bar{K_l} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{s_p}|K_j|\chi^{(p)}(K_j)|K_k|\chi^{(p)}(K_k)=\sum_l f_{jkl}|K_l|\chi^{(p)}(K_l)$$

2.4 投影算符

$P_i^2=P_i$
$V=\oplus_i W_i$（线性空间直和）$\leftrightarrows$ 线性空间V上存在投影算符P_i满足如下性质：

- $P_i^2=P_i$
- $P_iP_j=0(i\neq j)$
- $\sum_i P_i=\mathbb{I}$
- $R_{P_i}=P_iV=W_i$（P的值域$R_P=PV=\{z\in V|z=Px,x\in V\}$）
- （$N_{P_i}=\sum_{k\neq i}W_k$ （P的核$N_P=\{x\in V|Px=\vec{0}\}$））

Chapter 3

例子

3.1 置换群

置换s将$|$物体$a_1, ...,$ 物体$a_n\rangle$ 置换为$|$物体$b_1, ...,$ 物体$b_n\rangle$，则记为$s = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_n \\ b_1 & ... & b_n \end{pmatrix}$

n元置换群$|S_n| = n!$

$s^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & ... & b_n \\ a_1 & ... & a_n \end{pmatrix}$

$rst = \begin{pmatrix} t^{-1}a_1 & ... & t^{-1}a_n \\ rb_1 & ... & rb_n \end{pmatrix}$

轮换$(a_1, a_2, ..., a_n) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \end{pmatrix}$

（两数字轮换称为对换）

任意置换可写为轮换乘积，可写为对换乘积，可写为相邻数字对换乘积

字称$\delta(s) \overset{def}{=} \begin{cases} +1 & ,\text{偶置换，即偶数次轮换，即长度为奇数的轮换} \\ -1 & ,\text{奇置换，即奇数次轮换，即长度为偶数的轮换} \end{cases}$

3.1.0.2 共轭类

共轭类具有相同的轮换结构。$g(a_1, ..., a_{na})(b_1, ..., b_{nb})...g^{-1} = (ga_1, ..., ga_{na})(gb_1, ..., gb_{nb})...$

轮换结构$(\nu) = (\cdots i^{\nu_i} \cdots)$，共轭类中有$\nu_i$个i阶轮换。

分割描述$[\lambda] = [\cdots \lambda_i \cdots]$，$\lambda_i = \sum_{j=i}^{n} \nu_j$

元素数目为$\frac{n!}{\nu_1!...\nu_n!} \frac{1}{1^{\nu_1}...n^{\nu_n}}$

$n = \sum_i i\nu_i = \sum_i \lambda_i$

3.2 转动群

$$SU(2)/\{1,-1\} \cong SO(3)$$

3.2.1 SO(3)

三维实正交群$O(3)=\{R|RR^T=1, R\in M_{\{3*3\}}(\mathbb{R})\}$。可推出$det(R)=\pm 1$
三维特殊实正交群$SO(3)=\{R|RR^T=1, R\in M_{\{3*3\}}(\mathbb{R}), det(R)=1\}$

$$\begin{aligned}
R(\vec{\Psi})=R_{\vec{n}}(\Psi) &= exp(\vec{X}\cdot\vec{\Psi})=exp(X_n\Psi) \\
&\quad ([X_j]_{kl}=-\varepsilon_{jkl})(X_n=\vec{X}\cdot\vec{n}=\begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}) \\
&= exp(-i\vec{J}\cdot\vec{\Psi})=exp(-iJ_n\Psi) \\
&\quad (\vec{J}=i\vec{X}(\text{厄米})) \\
&\quad (\vec{\Psi}\text{为半径为}\pi\text{的球体，且对拓点等价}) \\
= \quad R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_{z''}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \\
&\quad (R_{2D}(\alpha)=\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}) \\
&\quad (\alpha\in[0,2\pi),\beta\in[0,\pi],\gamma\in[0,2\pi))
\end{aligned}$$

不变积分

$$\begin{aligned}
du &= \tfrac{1}{8\pi^2}\sin\beta d\alpha d\beta d\gamma \\
&= \tfrac{1}{2\pi^2}\tfrac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{\psi^2}d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3
\end{aligned}$$

3.2.1.1 共轭

共轭 $\Longleftrightarrow$ 有相同转动角Ψ的所有方向$\vec{n}$。$QR_{\vec{n}}(\Psi)Q^{-1}=R_{Q\vec{n}}(\Psi)$
类函数不变积分

$$\frac{1}{\pi}(1-\cos\psi)d\psi$$

3.2.1.2 本征态

完备算符组$\{\vec{J}^2, J_z\}$

$$\begin{cases}
\vec{J}^2\psi^j_{m_1m_2}=\psi^j_{m_1m_2}\vec{J}^2=j(j+1)\psi^j_{m_1m_2} \\
J_z\psi^j_{m_1m_2}=m_1\psi^j_{m_1m_2} \\
\psi^j_{m_1m_2}J_z=m_2\psi^j_{m_1m_2}
\end{cases}$$

本征态$|j,m_1\rangle=\psi^j_{m_1m_2}=\int D^j_{m_1m_2}(\alpha,\beta,\gamma)e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}\frac{\sin\beta}{8\pi^2}d\alpha d\beta d\gamma$

3.2.1.3 群表示

转动群j维不可约表示的矩阵元为Euler对称陀螺的波函数

$$\begin{aligned} D^j_{m_1m_2}(u) &= \textstyle\sum_{k\in\mathcal{Z}} \frac{(-1)^k\sqrt{(j+m_1)!(j-m_1)!(j+m_2)!(j-m_2)!}}{(j+m_1-k)!(j-m_2-k)!k!(k-m_1+m_2)!} a^{j+m_1-k}a^{*j-m_2-k}b^kb^{*k-m_1+m_2} \\ & (j=0,1,\cdots)(-j\le m_1\le j)(-j\le m_2\le j)(k\ge 0,k\ge m_1-m_2,k\le j-m_2,k\le j+m_1) \end{aligned}$$

矩阵特征值

$$e^{im\psi}(m=-j,-j+1,\cdots,j-1,j)$$

特征标

$$\sum_{m=-j}^{j} e^{im\psi}$$

3.2.2 SU(2)

二维特殊复正交群$SU(2)=\{u|uu^+=1,u\in M_{\{2*2\}}(\mathbb{C}),det(u)=1\}$

$$\begin{aligned} & u &=& \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \\ & & & (aa^*+bb^*=1 \quad a,b\in\mathbb{C}) \\ & &=& \alpha_0\mathbb{I}-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha} \\ & & & (\alpha_0^2+\vec{\alpha}^2=1) \\ =& u(\vec{\Psi}) &=& exp(-\tfrac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\Psi}) \\ & & & (\vec{\Psi}\text{为半径为}2\pi\text{的球体，且球表面所有点等价}) \\ =& u(\alpha,\beta,\gamma) &=& \begin{bmatrix} cos\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} & -sin\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \\ sin\frac{\beta}{2}e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} & cos\frac{\beta}{2}e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \end{bmatrix} \\ & & & (\alpha\in[0,2\pi),\beta\in[0,\pi],\gamma\in[0,4\pi)) \end{aligned}$$

不变积分

$$\begin{aligned} du &= \tfrac{1}{2\pi^2}\tfrac{1}{|\alpha_0|}d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \\ &= \tfrac{1}{16\pi^2}\sin\beta d\alpha d\beta d\gamma \\ &= \tfrac{1}{4\pi^2}\tfrac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{\psi^2}d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3 \end{aligned}$$

3.2.2.1 共轭

共轭 $\Longleftrightarrow$ 有相同转动角Ψ。$u\sim\begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Psi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\Psi} \end{bmatrix}$

类函数不变积分

$$\frac{1}{2\pi}(1-\cos\psi)d\psi$$

3.2.2.2 本征态

完备算符组$\{\vec{J}^2, J_z\}$

$\begin{cases} \vec{J}^2\psi^j_{m_1m_2} = \psi^j_{m_1m_2}\vec{J}^2 = j(j+1)\psi^j_{m_1m_2} \\ J_z\psi^j_{m_1m_2} = m_1\psi^j_{m_1m_2} \\ \psi^j_{m_1m_2}J_z = m_2\psi^j_{m_1m_2} \end{cases}$

本征态$|j,m_1\rangle = \psi^j_{m_1m_2} = \int D^j_{m_1m_2}(\alpha,\beta,\gamma)e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}\frac{\sin\beta}{16\pi^2}d\alpha d\beta d\gamma$

3.2.2.3 群表示

转动群2j+1维不可约表示的矩阵元为Euler对称陀螺的波函数

$$\begin{aligned} D^j_{m_1m_2}(u) &= \sum_{k\in\mathcal{Z}} \frac{(-1)^k\sqrt{(j+m_1)!(j-m_1)!(j+m_2)!(j-m_2)!}}{(j+m_1-k)!(j-m_2-k)!k!(k-m_1+m_2)!} a^{j+m_1-k}a^{*j-m_2-k}b^k b^{*k-m_1+m_2} \\ & (j=0,\tfrac{1}{2},1,\cdots)(-j\le m_1\le j)(-j\le m_2\le j)(k\ge 0, k\ge m_1-m_2, k\le j-m_2, k\le j+m_1) \end{aligned}$$

矩阵特征值

$$e^{im\psi}(m=-j,-j+1,\cdots,j-1,j)$$

特征标

$$\sum_{m=-j}^{j} e^{im\psi}$$

3.3 点群

点群：O(3)的有限子群
对称操作：

- 转动$C_n = R_{\vec{k}}(\frac{2\pi}{n})$
- 空间反射$I = diag(-1,-1,-1)$
- 转动反射IC_n

3.3.1 固有点群

只含转动操作
基本方程:

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{l}\frac{|G|}{|G_a|}(|G_a|-1) = |G|-1 \quad 即 \quad \sum_{a=1}^{l}(1-\frac{1}{|G_a|}) = 2-\frac{2}{|G_a|} \quad (2\le|G_a|\le|G|)$$

解为：

$l=2$	$\lvert G_1\rvert=\lvert G_2\rvert=\lvert G\rvert$	$\lvert G\rvert=2,3,4,\cdots$	C_n群
$l=3$	$\lvert G_1\rvert=2,\lvert G_2\rvert=2,\lvert G_3\rvert=\frac{\lvert G\rvert}{2}$	$\lvert G\rvert=2,4,6,\cdots$	D_n群
$l=3$	$\lvert G_1\rvert=2,\lvert G_2\rvert=3,\lvert G_3\rvert=3$	$\lvert G\rvert=12$	正四面体
$l=3$	$\lvert G_1\rvert=2,\lvert G_2\rvert=3,\lvert G_3\rvert=4$	$\lvert G\rvert=24$	正八面体
$l=3$	$\lvert G_1\rvert=2,\lvert G_2\rvert=3,\lvert G_3\rvert=5$	$\lvert G\rvert=60$	正二十面体

3.3.2 非固有点群

含转动反射操作

3.3.3 晶体点群

晶格$Lattice=\{\vec{r}=\vec{r_0}+\sum_{i=1}^{3}n_i\vec{a}_i|n_i\in\mathcal{Z}\}$
要求

$$\left.\begin{array}{rcl} g\vec{a}_i\in Lattice & \Rightarrow & g\vec{a}_i=\sum_{j=1}^{3}C_{ij}\vec{a}_j(C_{ij}\in\mathcal{Z}) \\ G\subseteq O(3) & \Rightarrow & Tr(C_{ij})=\pm(1+2\cos\psi) \end{array}\right\}\Rightarrow|1+2\cos\psi|\leq 3\Rightarrow\psi=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},0,\pi$$

则晶体中转动元素仅有E,C_2,C_3,C_4,C_6，转动反演元素仅有I,IC_2,IC_3,IC_4,IC_6

3.4 矩阵群

3.4.0.1 一般线性群

$GL(n,\mathbb{C})\overset{def}{=}\{A|det(A)\neq 0,A\in M_{\{n*n\}}(\mathbb{C})\}$
维数$2n^2$，非紧致，连通，连通度为∞（从$\mathcal{R}^{2n^2}$挖去一个$2n^2-2$维子空间$\{A|det(A)=0\}$）
$GL(n,\mathbb{R})\overset{def}{=}\{A|det(A)\neq 0,A\in M_{\{n*n\}}(\mathbb{R})\}$
维数n^2

3.4.0.2 特殊线性群

$SL(n,\mathbb{C})\overset{def}{=}\{A|det(A)=1,A\in M_{\{n*n\}}(\mathbb{C})\}$
维数$2n^2-2$，非紧致，连通，连通度为1

3.4.0.3 酉群

$U(n)\overset{def}{=}\{A|A^{+}A=\mathbb{I},A\in M_{\{n*n\}}(\mathbb{C})\}$
维数$2n^2-n^2=n^2$，紧致，连通，连通度为∞

3.4.0.4 特殊酉群

$SU(n) \overset{def}{=} \{A|A^+A=\mathbb{I}, det(A)=1, A\in M_{\{n*n\}}(\mathbb{C})\}$
维数n^2-1，紧致，连通，连通度为1

3.4.0.5 实正交群

$O(n) \overset{def}{=} \{A|A^TA=\mathbb{I}, A\in M_{\{n*n\}}(\mathbb{R})\}$
维数$n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$，紧致，不连通，有两个连通分支，对应$det(A)=\pm1$，每个连通度为1

3.4.0.6 特殊正交群

$SO(n) \overset{def}{=} \{A|A^TA=\mathbb{I}, det(A)=1, A\in M_{\{n*n\}}(\mathbb{R})\}$
维数$\frac{n(n-1)}{2}$，紧致，连通，连通度为2

3.5 其他

3.5.0.7 仿射群

一维仿射群：
$\{g(\alpha,\beta)|\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\neq0\}$
$g(\alpha,\beta)x \overset{def}{=} \alpha x+\beta$
非Abel群，维数2，非紧致，不连通，有2个连通分支，各个分支连通度为1
二维Euclid群：
$SE(2)=\{g(\theta,a,b)|\theta\in[0,2\pi), ab\in\mathbb{R}\}$
$$g(\theta,a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

3.5.0.8 循环群

n阶循环群：
$C_n=\{\mathbb{I},g,g^2,...,g^{n-1}\}$

3.5.0.9 4阶反演群（Klein群）

$V_4=\{\mathbb{I},\text{空间反演}P,\text{时间反演}T,PT\}$

3.5.0.10 Lorentz群

$$L=\{\Lambda|\Lambda^T\begin{bmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{bmatrix}\Lambda=\begin{bmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{bmatrix},\Lambda^*=\Lambda\}$$

维数6，非紧致，不连通，按$\det(\Lambda)=\pm1$、${\Lambda^0}_0\geq1$和≤-1分为四个连通分支，每个连通度为2

对Lorentz变换$x\to x'^{\mu'}=\sum_\mu {\Lambda^{\mu'}}_\mu x^\mu$，保持$s^2=\sum_{\mu'}x'^{\mu'}x'_{\mu'}=\sum_\mu x^\mu x_\mu$

3.5.0.11 辛群

实辛群$Sp(2l,\mathcal{R})\overset{def}{=}\{A|A\begin{bmatrix}0_{\{l*l\}}&1_{\{l*l\}}\\-1_{\{l*l\}}&0_{\{l*l\}}\end{bmatrix}A^T=\begin{bmatrix}0_{\{l*l\}}&1_{\{l*l\}}\\-1_{\{l*l\}}&0_{\{l*l\}}\end{bmatrix},A\in M_{\{2l*2l\}}(\mathcal{R})\}$

维数$(2l)^2-\frac{2l(2l-1)}{2}=2l^2+l$，非紧致，连通，连通度为$\infty$

复辛群$Sp(2l,\mathcal{C})\overset{def}{=}\{A|A\begin{bmatrix}0_{\{l*l\}}&1_{\{l*l\}}\\-1_{\{l*l\}}&0_{\{l*l\}}\end{bmatrix}A^T=\begin{bmatrix}0_{\{l*l\}}&1_{\{l*l\}}\\-1_{\{l*l\}}&0_{\{l*l\}}\end{bmatrix},A\in M_{\{2l*2l\}}(\mathcal{C})\}$

维数$2*(2l)^2-2*\frac{2l(2l-1)}{2}=4l^2+2l$，非紧致，连通，连通度为1。

对$Q=\begin{bmatrix}q_{\{l\}}\\p_{\{l\}}\end{bmatrix}$，正则变换$Q\to Q'$若满足$A_{kj}=\frac{\partial Q'_k}{\partial Q_j}$为辛群元素，则正则方程$\begin{cases}\dot{q}&=&\frac{\partial H}{\partial p}\\\dot{p}&=&-\frac{\partial H}{\partial q}\end{cases}$ 保持形式不变$\begin{cases}\dot{q}'&=&\frac{\partial H'}{\partial p'}\\\dot{p}'&=&-\frac{\partial H'}{\partial q'}\end{cases}$

3.5.0.12 庞加莱变换

P、T、C:正/反粒子→反/正粒子、规范变换

3.5.0.13 薛定谔方程

$SO(3)\otimes S_N$