

# 数值分析大作业

要求:

- (1) 不限于下面的选题, 鼓励大家利用数值分析方法解决问题, 可以和自己的科研或其它课程结合, 自己命题。
- (2) 也可以选做下面题目, 每人选做一题, 单独完成。
- (3) 提交文件包括代码和报告, 报告内容包括问题描述、数值求解方法、结果与分析 (不需要卷报告页数☺, 简单清晰就行)。

## 一、函数的多项式插值

- (1) 请写一个程序, 可以分别求出经过  $n$  个点的 Lagrange 插值多项式与牛顿插值多项式。
- (2) 已知  $f(x) = e^x$ , 求经过 -1, -0.5, 0.5, 1 的 Lagrange 插值多项式与牛顿插值多项式, 通过实验证明是同一个多项式。
- (3) 请写一个程序实现逐次线性插值。
- (4) 在第二问基础上通过实验验证两个 2 阶的 Lagrange 插值组合等于 3 阶 Lagrange 插值。

## 二、函数逼近

- (1) 请写一个程序, 可以分别实现离散数据的 3 次和 4 次多项式拟合。
  - (2) 对于已知的如下 6 对离散数据, 请给出 3 次和 4 次拟合结果, 并估计最小均方误差。  
 $\{0.00, 1.00\}, \{0.10, 0.41\}, \{0.20, 0.50\}, \{0.30, 0.61\}, \{0.50, 0.91\}, \{0.80, 2.02\}$
- 请根据数据曲线形状, 求出更合适的拟合曲线, 画图比较三种拟合曲线。

## 三、数值积分

- (1) 请写一个程序, 可以利用龙贝格求积法计算 15 次。
- (2) 利用上述程序计算定积分

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cos(x) dx = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = 2.038197427067$$

的近似值。(给出计算 15 次的值, 比较每次结果和准确值的误差)

## 四、非线性方程的数值解法:

- (1) 请写一个程序, 可用牛顿法求解非线性方程的根

- (2) 给定初值  $x_0=1$ ，用牛顿法计算函数  $f(x)=\sin x+x^2\cos x-x^2-x$  的根  $x=0$ ，请迭代 20 次，给出计算结果与误差。
- (3)  $x=0$  是否是重根，若是请问是几重根？请改进牛顿法对其加速，请迭代 10 次，给出计算结果与误差。

五、矩阵特征值问题的数值解法：

- (1) 请写一个程序，可用 QR 法求解非奇异矩阵特征值
- (2) 用该程序分别计算下面问题的近似特征值

$$(1)=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 13 & 13 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

六、常微分方程的数值解法：

- (1) 请简单推导出 2 级龙格-库塔方法中的 Heun 公式
- (2) 请写一个程序，可用 Heun 公式求解常微分方程
- (3) 用该程序计算下面问题的解，令  $h=0.1$ ，程序执行 20 步，并和准确值比较

$$y'=x^2-y, y(0)=1$$

$$\text{准确解: } y(x)=-e^{-x}+x^2-2x+2$$