Examen Master 2 UM 2023/2024
Module **Contraintes**

15 janvier 2024 Durée : 3 heures

Tous documents manuscrits ou imprimés autorisés

Exercice 1

La contrainte globale $\texttt{Between}(X_1, \ldots, X_n, P, Q)$ est satisfaite si et seulement si le nombre de valeurs différentes prises par le vecteur $X_1, \ldots, X_n$ est au moins P et au plus Q. Par exemple le tuple $(3, 5, 1, 5, 1, 3, 3, 1, 4)$ satisfait la contrainte `Between` parce que le nombre de valeurs différentes prises par $(3, 5, 1, 5, 1, 3, 3)$ est bien compris entre 1 et 4.

Soit le réseau de contraintes $N = (X, D, C)$ avec $X = \{X_1, \ldots, X_4, P, Q\}$, $D(X_1) = \{1, 3, 4, 6\}$, $D(X_2) = \{2, 3, 4, 5\}$, $D(X_3) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $D(X_4) = \{3, 6\}$, $D(P) = D(Q) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{X_1 = X_2, X_3 = X_4, \texttt{Between}(X_1, X_2, X_3, X_4, P, Q)\}$.

Question 1 • Calculez la fermeture BC de N.

Question 2 • Calculez la fermeture AC de N.

Question 3 • La contrainte globale `Between` est-elle AC-décomposable ? Justifiez.

La contrainte globale $\texttt{Valley}(X_1, \ldots, X_n)$ est définie uniquement sur les entiers positifs (on ne se souciera donc pas du cas où des X_i ne seraient pas positifs). $\texttt{Valley}(X_1, \ldots, X_n)$ est satisfaite si et seulement s'il existe $i \in \{1..n\}$ tel que pour tout $k \in \{2..i\}$, $X_k < X_{k-1}$ et pour tout $k \in \{i+1..n\}$, $X_k > X_{k-1}$. Par exemple le tuple $(8, 4, 3, 4, 9, 12)$ satisfait la contrainte `Valley`.

Question 4 • La contrainte globale `Valley` est-elle AC-décomposable ? Justifiez.

Exercice 2

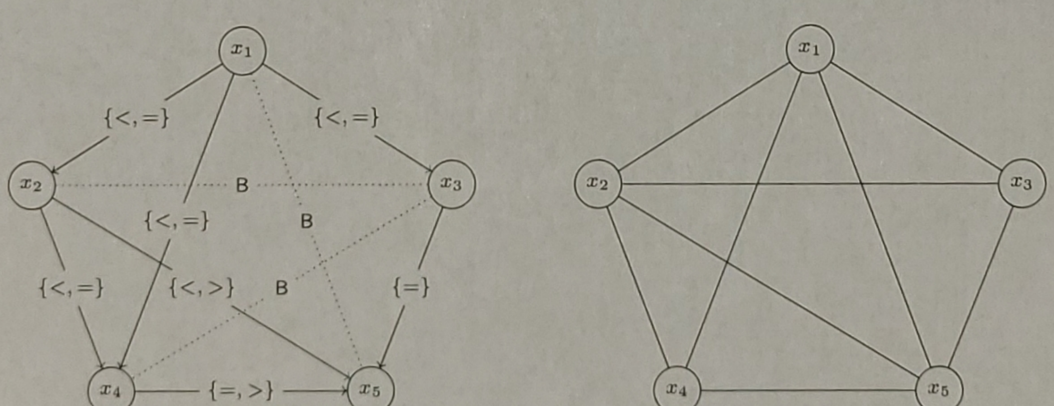

FIGURE 1 – Un QCN $\mathcal{N} = (V, C)$ de Point Algebra et un graphe G sur V.

Pour rappel, pour la Point Algebra nous avons l'ensemble des relations de base $\mathsf{B} = \{<, =, >\}$, et les opérations de composition $\{=\} \diamond \{=\} = \{=\}$, $\{<\} \diamond \{=\} = \{<\} \diamond \{<\} = \{=\} \diamond \{<\} = \{<\}$, $\{>\} \diamond \{=\} = \{>\} \diamond \{>\} = \{=\} \diamond \{>\} = \{>\}$, et $\{<\} \diamond \{>\} = \{>\} \diamond \{<\} = \{<, =, >\}$ $(= \mathsf{B})$

Question 5 • Calculez la fermeture du QCN $\mathcal{N}$ dans la figure 1 sous $\diamond_G$-cohérence, c'est-à-dire, le QCN $\diamond_G(\mathcal{N})$ où G est le graphe G dans la figure 1.

Question 6 • Soit G' le graphe où l'arête $\{x_1, x_5\}$ a été supprimée du graphe G dans la figure 1. La $\diamond_{G'}$-cohérence peut-elle nous informer sur la satisfiabilité du QCN $\mathcal{N}$ dans la figure 1 ? Justifiez.

Question 7 • La contrainte $C(x_1, x_4) = (<, =)$ est-elle minimale dans le QCN $\mathcal{N}$ dans la figure 1, c'est-à-dire, ne contient-elle que des relations de base réalisables ? Justifiez.

Pour rappel, étant donné un QCN $\mathcal{N} = (V, C)$ et une contrainte $C(u, v)$ avec $u, v \in V$, le *problème de redondance* est de décider si $C(u, v)$ est impliqué par le reste des contraintes de $\mathcal{N}$, c'est-à-dire, si $C(u, v)$ est *redondant* dans $\mathcal{N}$. Formellement, soit $\mathcal{N}_{[u,v]/\mathsf{B}}$ le QCN où la contrainte $C(u, v)$ (et $C(v, u)$) est substituée par la relation universelle B dans $\mathcal{N}$ (c'est-à-dire, nous supprimons cette contrainte $C(u, v)$ du QCN $\mathcal{N}$) ; ensuite, si pour *chaque* solution σ de $\mathcal{N}_{[u,v]/\mathsf{B}}$ nous avons que $(\sigma(u), \sigma(v))$ satisfait $C(u, v)$, alors la contrainte $C(u, v)$ est *redondante* dans $\mathcal{N}$.

Question 8 • Prouvez que le problème de vérification de satisfiabilité et le problème de redondance d'un QCN sont équivalents sous réductions de Turing en temps polynomial.

Question 9 • La contrainte $C(x_2, x_5) = \{<, >\}$ est-elle redondante dans le QCN $\mathcal{N}$ dans la figure 1 ? Justifiez.

Exercice 3

On suppose P $\neq$ NP. Pour tous entiers naturels $r > k > 0$, on définit la fonction booléenne

$$c_k^r = \{(v_1, \ldots, v_r) \in \{0,1\}^r \mid \sum_{i=1}^{k} v_i > \sum_{j=k+1}^{r} v_j\}$$

Par exemple, on a

$$c_1^4(w,x,y,z) = \begin{array}{c} \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad c_2^4(w,x,y,z) = \begin{array}{c} \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Question 10 • Démontrez que CSP($\{c_1^4, c_2^4, c_3^4\}$) est NP-complet.

Question 11 • Déterminez tous les langages $\Gamma \subseteq \{c_1^4, c_2^4, c_3^4\}$ tels que CSP(Γ) $\in$ P. Justifiez.

Question 12 • Soient $r \geq 4$ et $k \geq 2$. Démontrez que l'opération de minorité n'est pas polymorphisme de $\{c_k^r\}$.

Pour la question suivante, on rappelle que CSP(Γ) est *résolu* par SAC si la fermeture SAC de tout réseau insatisfiable de CSP(Γ) contient un domaine vide.

Question 13 • Est-il vrai que si $r \geq 4$ et CSP($\{c_k^r\}$) $\in$ P, alors CSP($\{c_k^r\}$) est résolu par SAC ? Justifiez.

Question 14 • Pour tout $r \geq 4$, déterminez l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles CSP($\{c_k^r\}$) est NP-complet. Justifiez.