Règles existentielles (HAI933I)

1 Modèles

Exercice 1

On considère la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \{R\})$ avec :
$F = person(a)$
$R = person(x) \rightarrow \exists y \; hasParent(x, y) \wedge person(y)$

Question 1 Définir la base de faits saturée F^* et son modèle isomorphe (ou canonique) M^*. Ce modèle est-il fini ?
Remarque : les différentes variantes du chase se comportent toutes de la même façon sur cet exemple.

Question 2 Montrer que $\mathcal{K}$ admet un modèle fini (essayer d'en donner un qui soit minimal au sens du nombre d'atomes dans la base de faits associée) ? Ce modèle est-il universel ? Justifier.

Exercice 2

On considère des bases de connaissances composées de faits (conjonctions d'atomes fermées existentiellement) et de règles existentielles positives (ne contenant pas $\perp$).

Question 1 De telles bases de connaissances sont-elles toujours *satisfiables* ?

Question 2 De telles bases de connaissances admettent-elles toujours au moins un modèle *fini* ?

Question 3 De telles bases de connaissances admettent-elles toujours au moins un modèle *universel* ?

Question 4 De telles bases de connaissances admettent-elles toujours au moins un modèle *universel fini* ?

Justifier chaque réponse (donner un contre-exemple simple ou les arguments qui prouvent la propriété).

Exercice 3

Soit la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R})$ où F est une base de faits sans variables et $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ est un ensemble de règles positives (datalog) :

$F = \{p(a,b), p(b,c)\}$
$R_1 : p(x,y) \rightarrow q(y)$
$R_2 : q(x) \wedge p(x,y) \rightarrow r(y)$

Question 1. Pour chacune des trois interprétations $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_3$ ci-dessous, dire quelle affirmation est vraie (et justifier votre réponse bien sûr) :

1. Ce n'est pas un modèle de $\mathcal{K}$
2. C'est un modèle de $\mathcal{K}$ mais pas un modèle universel de $\mathcal{K}$
3. C'est un modèle universel de $\mathcal{K}$.

$\mathcal{I}_1 = (D, .^{I_1})$ avec $D = \{a,b,c\}$, $p^{I_1} = \{(a,b),(b,c)\}$, $q^{I_1} = \{b,c\}$, $r^{I_1} = \{b,c\}$
$\mathcal{I}_2 = (D, .^{I_2})$ avec $D = \{a,b,c\}$, $p^{I_2} = \{(a,b),(b,c)\}$, $q^{I_2} = \{b,c\}$, $r^{I_2} = \{c\}$
$\mathcal{I}_3 = (D, .^{I_3})$ avec $D = \{a,b,c\}$, $p^{I_3} = \{(a,b),(b,c)\}$, $q^{I_3} = \{b\}$, $r^{I_3} = \{c\}$

Question 2. On rappelle qu'un modèle universel M de $\mathcal{K}$ assure la propriété suivante (P) : pour toute requête conjonctive booléenne Q, si M est un modèle de Q alors $\mathcal{K} \models Q$. Montrez que cette propriété n'est pas vraie si on considère un modèle de $\mathcal{K}$ qui n'est pas universel. Pour cela, vous prendrez la base de connaissances $\mathcal{K}$ de cet exercice, vous choisirez un modèle M de $\mathcal{K}$ non universel (éventuellement pris dans la question précédente si cela convient) et vous construirez un contre-exemple à (P) pour $\mathcal{K}$ et M.

Exercice 4. Règles existentielles et contraintes négatives

Définition préalable. On ajoute un prédicat (0-aire) particulier, noté $\perp$, dont la valeur est *faux* dans toute interprétation. Une *contrainte négative* est une règle dont le corps est une conjonction d'atomes et dont la tête est réduite au prédicat $\perp$.

Exemples typiques parmi d'autres :
$\forall x\ (grand(x) \wedge petit(x) \rightarrow \perp)$; *concept disjoints*
$\forall x \forall y\ (supStrict(x,y) \wedge supStrict(y,x) \rightarrow \perp)$; *antisymétrie et antiréflexivité*

On considère maintenant des bases de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ où F est une base de faits, $\mathcal{R}$ un ensemble de règles existentielles (positives) et $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes négatives.

Question 1 Soit une base sans règles existentielles, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{K} = (F, \emptyset, \mathcal{C})$. Cette base est-elle forcément satisfiable ? Donner un contre-exemple ou justifier votre affirmation.

Question 2 Donner une requête permettant de tester si une base de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ est insatisfiable (c'est-à-dire telle que la réponse à la requête est oui sur $\mathcal{K}$ si et seulement si $\mathcal{K}$ est insatisfiable).

Question 3 Sachant que le problème de réponse à une requête conjonctive booléenne sur une base de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \emptyset)$ n'est pas décidable, montrer que le problème de test de l'insatisfiabilité d'une base de connaissances de la forme $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ ne l'est pas non plus.

2 Chase

Exercice 5

On considère un mécanisme de chaînage avant simple (connu sous le nom de *oblivious chase*), qui procède *en largeur*. On désignera par F_i la base de faits obtenue après une étape de largeur (donc i ne correspond pas à la longueur de la dérivation courante mais bien au nombre d'étapes de largeur effectuées). Une **étape de largeur** sur F_{i-1} consiste à (1) calculer tous les homomorphismes des corps de règles dans F_{i-1}, puis (2) appliquer les règles selon chaque homomorphisme si le critère d'applicabilité du chase considéré est satisfait ; la satisfaction d'un critère d'applicabilité est faite sur la base de faits courante (donc pas sur F_{i-1}, sauf pour la première application de l'étape de largeur).

Question 1 Soit la base de connaissances $K = (F, \mathcal{R})$, avec $F = \{q(a)\}$ où a est une constante, et $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3\}$, où :
$R_1 = q(x) \rightarrow \exists z\ p(x, z)$
$R_2 = p(x, y) \rightarrow q(y)$
$R_3 = q(x) \wedge q(y) \rightarrow p(x, y)$

1. Définir F_1, F_2 et F_3 obtenues par le chaînage avant simple en indiquant quelles applications de règles sont effectuées.
2. Le mécanisme de chaînage avant simple s'arrête-t-il ici ?

Question 2 On se pose maintenant les mêmes questions avec un mécanisme de chaînage avant qui diffère du chaînage avant simple en n'effectuant que des applications de règles "localement non redondantes" : l'application d'une règle $B \rightarrow H$ sur une base de faits courante F' selon un homomorphisme h n'est effectuée que si h ne peut pas s'étendre à un homomorphisme de H dans F' (autrement dit il n'existe pas d'homomorphisme h' de H dans F' tel que pour toute variable frontière x, $h('x) = h(x)$). Ce mécanisme est connu sous le nom de chaînage restreint ("restricted chase"). Vous remarquerez que l'arrêt du restricted chase dépend de l'ordre d'application des règles (R_1 avant R_3, ou inversement).

Exercice 6

On considère la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R} = \{R_1, R_2\})$ ci-dessous :
$\mathcal{F} = \{p(a, b)\}$
$R_1 : p(x, y) \rightarrow \exists z\ p(x, z) \wedge q(z, y)$
$R_2 : q(x, y) \rightarrow q(y, x)$

On suppose que les algorithmes de chase procèdent en largeur (à chaque étape, tous les homomorphismes des corps de règles dans la base de fait courante sont considérées, puis les applications de règles correspondant à ces homomorphismes sont effectuées séquentiellement si elles sont acceptables, sur la base de faits courante, selon le critère du chase considéré).

Rappels. On rappelle qu'étant donnés une règle $R : B \rightarrow H$ et un homomorphisme h de B dans F, l'application correspondante est effectuée si : R n'a pas déjà été appliquée avec h (*oblivious chase*) ; R n'a pas déjà été appliquée avec un homomorphisme qui envoie la frontière de R de la même façon que h (*semi-oblivious chase*) ; h ne peut pas être étendu à un homomorphisme de $B \cup H$ dans F (*restricted chase*). Quant au *core chase*, il applique la règle comme le ferait le restricted chase, puis calcule le core de la base de faits obtenue.

Question 1. L'oblivious chase s'arrête-t-il ? Quelle base de faits (éventuellement infinie) est (ou serait) construite par ce chase ?

Question 2. Mêmes questions pour le semi-oblivious chase.

Question 3. On suppose qu'à chaque étape de largeur, le restricted chase considère R_1 avant R_2. S'arrête-t-il ? Quelle base de faits (éventuellement infinie) est (ou serait) construite par ce chase ?

Question 4. Mêmes questions en considérant R_2 avant R_1.

Question 5. Que produit le core chase ?

3 Conditions suffisantes d'arrêt du chase

Exercice 7

Le problème consistant à déterminer si une requête conjonctive est conséquence d'une base de connaissances avec des règles existentielles n'est pas décidable. Cependant, différentes conditions sur les ensembles de règles assurent l'arrêt du chase (ou d'une certaine variante de chase) sur n'importe quelle base de faits, et donc la décidabilité du problème. Nous étudions ici deux conditions classiques : la *weak-acyclicity*, qui repose sur le graphe de positions des prédicats, et l'acyclicité du graphe de dépendance des règles, propriété notée *aGRD* (pour : acyclic Graph of Rule Dependencies).

Question 1. L'ensemble de règles ci-dessous est-il weakly-acyclique / aGRD :
$R_1 : p(x) \rightarrow \exists y\ r(x,y) \wedge q(y)$
$R_2 : r(x,y) \rightarrow p(x)$

Question 2. Même question avec :
$R_1 : p(x) \rightarrow \exists y \exists z\ r(x,y) \wedge r(y,z) \wedge r(z,x)$
$R_2 : r(x,y) \wedge r(y,x) \rightarrow p(x)$

Question 3. Un ensemble de règles Datalog est-il nécessairement weakly-acyclique ? aGRD ? Et si on étend aGDR à une condition plus fine : les seuls circuits autorisés sont ceux passant par des règles Datalog ?

Question 3. On admettra que la condition de weak-acyclicity assure l'arrêt du semi-oblivious chase. Montrer qu'elle n'assure pas l'arrêt de l'oblivious chase.

Question 4. Montrer que la weak-acyclicity n'est pas une condition nécessaire d'arrêt du semi-oblivious chase (mais seulement une condition suffisante).

Question 5. Qu'en est-il d'aGRD : pour quel type de chase a-t-on l'arrêt sur toute base de faits ? Est-ce une condition nécessaire et suffisante d'arrêt ?