C.21. Autre exemple, en français cette fois

C.22. Sémantique compositionnelle : principes

Le sens d'une expression composée est fonction du sens de ses parties (Frege) et de leur assemblage syntaxique (Montague)

(Catégorie syntaxique)*	=	Type sémantique	
S^*	$=$	t	une phrase est une proposition
np^*	$=$	e	un groupe nominal est une entité/individu
n^*	$=$	$e \to t$	un nom commun est une propriété des entités
$(A \backslash B)^* = (B/A)^*$	$=$	$A \to B$	propage la traduction

C.23. Des constantes pour les opérations logiques

Constant	Type
$\exists$	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$
$\forall$	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$
$\wedge$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$
$\vee$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$
$\supset$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$

C.24. Des constantes pour les prédicats du langage

La dénotation des mots requiert des prédicats :

aime	$\lambda x \lambda y\ (\mathrm{aime}\ y)\ x$	$x : e,\ y : e, \mathrm{aime} : e \rightarrow (e \rightarrow t)$
« aime » est un prédicat binaire		

Garance	$\lambda P\ (P\ \mathrm{Garance})$	$P : e \rightarrow t,\ \mathrm{Garance} : e$
« Garance » est décrite comme les propriétés de « Garance »		

C.25. Sémantique à la Montague : algorithme

1. analyse syntaxique preuve de S
2. conversion en lambda terme de type t sur e et t
3. insertion des lambda terme lexicaux (même type)
4. réduction

   $\rightarrow$ terme de type t

   = formule logique

   = sens de la phrase analysée

C.26. Exemple de calcul sémantique : les enfants prendront une pizza

mot	***catégorie syntaxique*** u ***type sémantique*** u^* ***sémantique :*** λ***-term of type*** u^* x^v ***signifie*** x ***(variable, constante) de type*** v
les	$(S/(np\backslash S))/n$ (subject) $((S/np)\backslash S)/n$ (object) $(e \to t) \to ((e \to t) \to t)$ $\lambda P^{e\to t}\ \lambda Q^{e\to t}\ (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^{e}(\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (P\ x)(Q\ x))))$
une	$((S/np)\backslash S)/n$ (object) $(S/(np\backslash S))/n$ (subject) $(e \to t) \to ((e \to t) \to t)$ $\lambda P^{e\to t}\ \lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^{e}(\wedge^{t\to(t\to t)}(P\ x)(Q\ x))))$
enfant(s)	n $e \to t$ $\lambda x^{e}(\mathtt{enfant}^{e\to t}\ x)$
pizza	n $e \to t$ $\lambda x^{e}(\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)$
prendront	$(np\backslash S)/np$ $e \to (e \to t)$ $\lambda y^{e}\ \lambda x^{e}\ ((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ x)y)$

C.27. Analyse syntaxique ∃∀

Il y a deux analyse syntaxique possibles. Une :

∃∀

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(S/(np\backslash S))/n \quad n}{(S/(np\backslash S))}\,/_e \qquad \dfrac{(np\backslash S)/np \quad [np]^1}{(np\backslash S)}\,/_e}{S}\,/_e}{S/np}\,/_i(1) \qquad \dfrac{((S/np)\backslash S)/n \quad n}{(S/np)\backslash S}\,\backslash_e}{S}\,\backslash_e$$

C.28. Syntaxe $\rightarrow$ λ-terme sémantique de la phrase

$\exists\forall$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textit{les}}{(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})\rightarrow(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})\rightarrow\mathbf{t}} \qquad \overset{\textit{enfants}}{(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})}}{(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})\rightarrow\mathbf{t}}\rightarrow_e \qquad \dfrac{\overset{\textit{prendront}}{\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t}} \qquad \overset{\textit{o}}{[\mathbf{e}]^1}}{\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t}}\rightarrow_e}{\mathbf{t}}\rightarrow_e}{\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t}}\rightarrow_i(1)} \qquad \dfrac{\overset{\textit{une}}{(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})\rightarrow(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})\rightarrow\mathbf{t}} \qquad \overset{\textit{pizza}}{(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})}}{(\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{t})\rightarrow\mathbf{t}}\rightarrow_e}{\mathbf{t}}\rightarrow_e
$$

Le λ-terme correspondant est :

$\exists\forall = (\textit{une pizza})(\lambda o^{\mathbf{e}}(\textit{les enfants})(\textit{prendront } o))$

Il faut encore :

1. insérer les lambda terme lexicaux et
2. réduire/calculer

C.29. Calculs, par étapes 1/2

$(\textit{une pizza})$
$= (\lambda P^{e\to t}\ \lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e (\wedge^{t\to(t\to t)} (P\ x)(Q\ x)))))(\lambda z^e(\mathtt{pizza}^{e\to t}\ z))$
$= (\lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e (\wedge^{t\to(t\to t)} ((\lambda z^e(\mathtt{pizza}^{e\to t}\ z))\ x)(Q\ x)))))$
$= (\lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e (\wedge^{t\to(t\to t)} ((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))(Q\ x))))$

$(\textit{les enfants})$
$= (\lambda P^{e\to t}\ \lambda Q^{e\to t}\ (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e (\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (P\ x)(Q\ x)))))(\lambda u^e(\mathtt{enfant}^{e\to t}\ u))$
$= (\lambda Q^{e\to t}\ (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e (\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ ((\lambda u^e(\mathtt{enfant}^{e\to t}\ u))\ x)(Q\ x)))))$
$= (\lambda Q^{e\to t}\ (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e (\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ x)(Q\ x)))))$

$(\textit{les enfants})(\textit{prendront}\ o) =$
$(\lambda Q^{e\to t}\ (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda w^e (\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ w)(Q\ w)))))((\lambda y^e\ \lambda x^e\ ((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ x)$
$= (\lambda Q^{e\to t}\ (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda w^e (\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ w)(Q\ w)))))(\lambda x^e\ ((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ x)\ o))$
$= \forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda w^e (\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ w)((\lambda x^e\ ((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ x)\ o))\ w)))$
$= \forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda w^e (\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ w)(((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ w)\ o))))$

C.30. Calculs, par étapes 2/2

$$
\begin{array}{l}
(\mathit{une\ pizza})(\lambda o\ (\mathit{les\ enfants})(\mathit{prendront}\ o))\\
= (\lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^{e}(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))(Q\ x))))\\
\qquad (\lambda o \forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda w^{e}(\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ w)(((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ w)\ o)))))\\
= (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^{e}(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))\\
\qquad ((\lambda o \forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda w^{e}(\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ w)(((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ w)\ o)))))\ x)))\\
= (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^{e}(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))\\
\qquad (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda w^{e}(\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfant}^{e\to t}\ w)((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ w)\ x))))))
\end{array}
$$

ce qui s'écrit communément :

$$\exists x.\ \mathit{pizza}(x) \wedge \forall w.\ (\mathit{enfant}(w) \Rightarrow \mathit{prendront}(w,x))$$

C.31. Avec l’autre analyse syntaxique...

∀∃

$$
\dfrac{\dfrac{(S/(np\backslash S))/n \quad n}{(S/(np\backslash S))}/_e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[np]^1 \qquad \dfrac{(np\backslash S)/np \quad [np]^2}{(np\backslash S)}/_e}{S}\backslash_e}{S/np}/_i(2) \qquad \dfrac{((S/np)\backslash S)/n \quad n}{(S/np)\backslash S}\backslash_e}{S}\backslash_e}{np\backslash S}\backslash_i(1)}{S}/_e
$$

Qui correspond à l’analyse :

∀∃

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{les}
\noLine
\UnaryInfC{$(\mathbf{e}\to\mathbf{t})\to(\mathbf{e}\to\mathbf{t})\to\mathbf{t}$}
\AxiomC{$\mathit{enfants}$}
\noLine
\UnaryInfC{$(\mathbf{e}\to\mathbf{t})$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$(\mathbf{e}\to\mathbf{t})\to\mathbf{t}$}
\AxiomC{s}
\noLine
\UnaryInfC{$[\ \mathbf{e}]^1$}
\AxiomC{$\mathit{prendront}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\mathbf{e}\to\mathbf{e}\to\mathbf{t}$}
\AxiomC{o}
\noLine
\UnaryInfC{$[\mathbf{e}]^2$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\mathbf{e}\to\mathbf{t}$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\mathbf{t}$}
\RightLabel{$\to_i(2)$}
\UnaryInfC{$\mathbf{e}\to\mathbf{t}$}
\AxiomC{une}
\noLine
\UnaryInfC{$(\mathbf{e}\to\mathbf{t})\to(\mathbf{e}\to\mathbf{t})\to\mathbf{t}$}
\AxiomC{pizza}
\noLine
\UnaryInfC{$(\mathbf{e}\to\mathbf{t})$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$(\mathbf{e}\to\mathbf{t})\to\mathbf{t}$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\mathbf{t}$}
\RightLabel{$\to_i(1)$}
\UnaryInfC{$\mathbf{e}\to\mathbf{t}$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\mathbf{t}$}
\end{prooftree}
$$

λ-terme de la phrase :

$$\forall\exists = (\mathit{les\ enfants})(\lambda s.\ (\mathit{une\ pizza})(\lambda o\ ((\mathit{prendront}\ o)\ s)))$$

on insère les λ-termes lexicaux et on calcule

(($\mathit{une\ pizza}$) et ($\mathit{les\ enfants}$) déjà faits)

C.32. Calculs (bis repetita placent)

$$
\begin{aligned}
&(\mathit{une\ pizza})(\lambda o\ ((\mathit{prendront}\ o)\ s))\\
&= (\lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))(Q\ x))))\\
&(\lambda o\ (((\lambda y^e\ \lambda x^e\ ((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ x)\ y))\ o)\ s)))\\
&= (\lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))(Q\ x))))\\
&(\lambda o\ ((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ s)\ o))\\
&= (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))((\lambda o\ ((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ s)\ o))\ x)))\\
&= (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ s)\ x)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall\exists = (\mathit{les\ enfants})(\lambda s.\ (\mathit{une\ pizza})(\lambda o\ ((\mathit{prendront}\ o)\ s)))\\
&= (\lambda Q^{e\to t}\ (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda u^e(\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfants}^{e\to t}\ u)(Q\ u)))))\\
&(\lambda s.\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ s)\ x))))\\
&= (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda u^e(\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfants}^{e\to t}\ u)\\
&((\lambda s.\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ s)\ x))))\ u)))))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\forall^{(e\to t)\to t}\ (\lambda u^e(\Rightarrow^{t\to(t\to t)}\ (\mathtt{enfants}^{e\to t}\ u)\\
&(\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e.\ (\wedge^{t\to(t\to t)}((\mathtt{pizza}^{e\to t}\ x)))((\mathtt{prendront}^{e\to(e\to t)}\ u)\ x))))))
\end{aligned}
$$

ce qui s'écrit communément :

$$\forall u.\ \mathit{enfants}(u) \Rightarrow \exists .x\ \mathit{pizza}(x) \wedge \mathit{prendront}(u,x)$$