Université de Montpellier - Master 2
Module **Contraintes**

Feuille TD 3 - 13/11/2023

Exercice 1

Soit $\Delta = \{c_0, c_1, c_2, c_3, \mu_0, \mu_1\}$ un langage de contraintes sur le domaine $D = \{0, 1\}$ dont les fonctions sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
&c_0(x,y,z) = x \vee y \vee z = D^3 \backslash \{(0,0,0)\}\\
&c_1(x,y,z) = \overline{x} \vee y \vee z = D^3 \backslash \{(1,0,0)\}\\
&c_2(x,y,z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = D^3 \backslash \{(1,1,0)\}\\
&c_3(x,y,z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = D^3 \backslash \{(1,1,1)\}\\
&\mu_0(x) = \{(0)\}\\
&\mu_1(x) = \{(1)\}
\end{aligned}$$

Question 1. Démontrez que CSP(Δ) est NP-complet.

On suppose que P $\neq$ NP. On dit qu'un langage $\Gamma_1 \subseteq \Delta$ est Δ-*maximal* si CSP(Γ_1) est polynomial mais que CSP(Γ_2) est NP-complet pour tout Γ_2 tel que $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subseteq \Delta$.

Question 2. Justifiez qu'il existe au plus six langages Δ-maximaux.

Question 3. Déterminez tous les langages Δ-maximaux.

Exercice 2

Pour tout entier naturel $n > 0$ on définit $X_n = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $Y_n = \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\mathcal{Y}_n^{+1} = \{Y_n \cup \{x\} \mid x \in X_n\}$ et $\mathcal{X}_n^{+1} = \{X_n \cup \{y\} \mid y \in Y_n\}$. On considère la famille $\mathcal{H}$ des hypergraphes dont l'ensemble des sommets est de la forme $X_n \cup Y_n$ (pour un n qui peut varier d'un hypergraphe à un autre) et dont les arêtes sont des éléments de $\mathcal{Y}_n^{+1} \cup \mathcal{X}_n^{+1}$.

Question 1. La treewidth des hypergraphes de $\mathcal{H}$ est-elle bornée par une constante ? Justifiez.

Question 2. Démontrez que tout $H \in \mathcal{H}$ a une hypertreewidth d'au plus 2.

Question 3. Soient $n > 0$ et H_n l'hypergraphe dont les sommets sont $X_n \cup Y_n$ et les arêtes sont $\mathcal{Y}_n^{+1} \cup \mathcal{X}_n^{+1}$. Montrer que l'hypertreewidth fractionnaire de H_n est strictement inférieure à 2.

Question 4. La famille $\mathcal{H}$ a la propriété d'être *hypertreewidth-monotone*, c'est-à-dire que retirer une arête d'un hypergraphe de H ne peut pas augmenter son hypertreewidth. Est-ce vrai en général, pour tous les hypergraphes ? Est-ce vrai en général pour la treewidth ?

Question 5. Dans l'autre sens, il est évidemment possible qu'ajouter une arête à un hypergraphe augmente son hypertreewidth. Montrez que dans ce cas, son hypertreewidth augmente de 1 au maximum.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $k > 0$ et tout ensemble $S \subseteq \{0, \ldots, k\}$, on définit la fonction booléenne $c_S^k = \{\tau \in \{0,1\}^k \mid \sum_{i=1}^{k} \tau[i] \in S\}$. Par exemple, on a

$$c^3_{\{1,3\}}(x,y,z) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \scriptstyle x & \scriptstyle y & \scriptstyle z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad c^3_{\{0,1\}}(x,y,z) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \scriptstyle x & \scriptstyle y & \scriptstyle z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad c^2_{\{1\}}(x,y) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \scriptstyle x & \scriptstyle y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Question 1. Soient $k > 0$ et $S \subseteq \{0, \ldots, k\}$ tel que $S \neq \emptyset$ et $0 \notin S$. Démontrez que l'opération $\vee$ ("ou" logique) est un polymorphisme de c_S^k si et seulement si il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $S = \{j, \ldots, k\}$.

Question 2. Soient $k > 0$ et $S \subseteq \{0, \ldots, k\}$. Montrez que l'opération $\vee$ est un polymorphisme de c_S^k si et seulement si c'est un polymorphisme de $c^k_{S \setminus \{0\}}$. Déduisez-en une caractérisation précise des fonctions c_S^k qui admettent le polymorphisme $\vee$, en fonction de l'ensemble S.

Question 3. Soit $k > 0$. Pour tout ensemble $S \subseteq \{0, \ldots, k\}$, on définit $S^\perp = \{k - i \mid i \in S\}$. Montrez que $\vee$ est un polymorphisme de c_S^k si et seulement si $\wedge$ est un polymorphisme de $c^k_{S^\perp}$.

On rappelle que CSP(Γ) est *résolu* par AC si la fermeture arc cohérente de toute instance insatisfiable de CSP(Γ) contient un domaine vide.

Question 4. Soit Γ un langage booléen. Démontrez que CSP(Γ) est résolu par AC si et seulement si Γ admet un polymorphisme parmi $\{0, 1, \wedge, \vee\}$.

Question 5. Déduisez-en une caractérisation des langages finis $\Gamma \subset \{c_S^k \mid k > 0, S \subseteq \{0, \ldots, k\}\}$ résolus par AC.

Exercice 4

On dit qu'une fonction booléenne $c : D^2 \to \{0,1\}$ est ZOA (*Zero-One-All*) s'il existe $D_1, D_2 \subseteq D$ tels que

$$\begin{aligned} &(1) : \forall (d_1, d_2) \in c, \text{ on a } d_1 \in D_1 \text{ et } d_2 \in D_2 \\ &(2) : \forall \alpha \in D_1, |\{d \in D_2 \mid (\alpha, d) \in c\}| \in \{1, |D_2|\} \\ &(3) : \forall \beta \in D_2, |\{d \in D_1 \mid (d, \beta) \in c\}| \in \{1, |D_1|\} \end{aligned}$$

Par exemple, considérons les fonctions

$$c_1(x,y) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \scriptstyle x & \scriptstyle y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad c_2(x,y) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \scriptstyle x & \scriptstyle y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

définies sur $D = \{1,2,3\}$. Informellement, la propriété ZOA signifie que chaque valeur qui apparaît dans une colonne est compatible avec soit *toutes* les valeurs apparaissant dans l'autre colonne, soit *une seule*. Ainsi, la fonction c_1 est ZOA avec $D_1 = \{1,2\}$ et $D_2 = \{1,2,3\}$, mais la fonction c_2 ne l'est pas car on a $(1,3),(3,3) \in c_2$ mais $(2,3) \notin c_2$.

Question 1. Soit D un domaine fini et l'opération $f_{dd} : D^3 \to D$ définie par

$$f_{dd}(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{si } y \neq z \\ z & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrez que si une fonction booléenne $c : D^2 \to \{0,1\}$ est ZOA, alors f_{dd} est un polymorphisme de c.

Question 2. Soit Γ un langage dont toutes les fonctions sont ZOA. En vous appuyant sur la réponse à la question précédente, démontrez que Γ a la propriété de *bounded width*. Quel algorithme utiliseriez-vous pour résoudre CSP(Γ) ?

Exercice 5

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on définit l'hypergraphe H_n dont l'ensemble des sommets est $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ et l'ensemble des arêtes est $\{\{x_i, x_{i+1}, y_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{x_i, y_i, y_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$.

Question 1. Démontrez que pour tout $n \geq 2$, l'hypertreewidth de H_n est égale à 1.

Question 2. Existe-t-il un entier $n \geq 2$ et un réseau de contraintes N dont l'hypergraphe est H_n, tels que N n'a pas de solution mais appliquer la 3-cohérence forte sur N ne vide aucun domaine ? Justifiez votre réponse.