Université de Montpellier - Master 2
Module **Contraintes**

Feuille TD 2 - 23/10/2023

Exercice 1

Soit la contrainte globale `ValueCount`$([X_1,\dots,X_n],[Y_1,\dots,Y_q])$ qui est satisfaite si et seulement si pour chaque valeur $v \in \{1,\dots,q\}$ on a $Y_v = |\{i \in \{1,\dots,n\} \mid X_i = v\}|$. Par exemple, $([2,1,5,1,2,3,1],[3,2,1])$ satisfait la contrainte `ValueCount` alors que $([1,1,1,2,3,2],[2,3,1])$ ne la satisfait pas.

Question 1. Soit une contrainte globale `AllDifferent`$(X_1,\dots,X_n)$ telle que l'union des domaines forme un intervalle $[1,\dots,m]$. Montrez que l'on peut exprimer cette contrainte à l'aide d'une contrainte `ValueCount` portant sur un nombre de variables polynomial en $n+m$.

Question 2. Justifiez brièvement que si la contrainte globale `AllDifferent` admet une AC-décomposition lorsque l'union des domaines des variables forme un intervalle $[1,\dots,m]$, alors `AllDifferent` admet une AC-decomposition dans le cas général.

Question 3. Calculer l'arc cohérence sur la contrainte globale `ValueCount` est NP-difficile. Il n'existe donc pas de AC-décomposition pour `ValueCount` si P $\neq$ NP. S'il l'on suppose au contraire que P = NP, peut-on espérer que `ValueCount` admette une AC-décomposition ? Justifiez votre réponse.

Question 4. On a vu en cours que calculer l'arc cohérence sur la contrainte globale `NValue`$(X_1,\dots,X_n,N)$ (qui est satisfaite si et seulement si $N = |\{X_1,\dots,X_n\}|$) est NP-difficile. Supposons à nouveau que P = NP. Peut-on espérer que `NValue` admette une AC-décomposition ? Justifiez votre réponse.

Question 5. Soit la contrainte globale `MultisetEqual`$([X_1,\dots,X_n],[Y_1,\dots,Y_n])$ qui est satisfaite si et seulement si les multisets $\{\{X_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\}\}$ et $\{\{Y_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\}\}$ sont égaux. (Un multiset diffère d'un ensemble par le fait qu'il tient compte du nombre d'occurences de chaque élément.) Par exemple $([1,1,1,2,3],[2,1,3,1,1])$ satisfait la contrainte `MultisetEqual` alors que $([1,1,1,2,3],[2,2,3,1,1])$ ne la satisfait pas. Contrairement à `ValueCount` et `NValue`, on sait que calculer l'arc cohérence est polynomial sur `MultisetEqual`. `MultisetEqual` admet-elle une AC-décomposition ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2

Soit le réseau de contraintes $N = (X,D,C)$, où $X = \{X_1,\dots,X_5\}$, $D(X_1) = D(X_2) = \{0,2,4,6\}$, $D(X_3) = \{2,5,6,7\}$, $D(X_4) = \{0,2,6,8,12\}$, $D(X_5) = \{0,1,6\}$, $c_1 \equiv X_1 + X_2 + X_3 = X_4$, $c_2 \equiv |X_1 - X_3| = X_5$, $c_3 \equiv |X_1 - X_2| = 4$ et $C = \{c_1,c_2,c_3\}$.

Question 1. Appliquez BC sur N.

Question 2. Appliquez AC sur N.

Question 3. Appliquez SAC sur N.

Soit N^* le réseau de contraintes obtenu à partir de N en fixant les domaines à $D(X_1) = D(X_2) = \{0, \ldots, 6\}$, $D(X_3) = \{2, \ldots, 7\}$, $D(X_4) = \{0, \ldots, 12\}$, $D(X_5) = \{0, \ldots, 6\}$.

Question 4. Appliquez AC et BC sur N^*. Comparez AC et BC sur les réseaux de contraintes dont les domaines sont des intervalles de $\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Pour $q \geq k \geq 1$, on considère la contrainte globale `(k,q)-ConsecutiveOnes`$([X_1, \ldots, X_n])$ qui porte sur n variables booléennes $X_1, \ldots, X_n$. Cette contrainte est satisfaite si et seulement si chaque séquence maximale (non vide) de 1 consécutifs dans le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est de longueur au moins k et au plus q. Par exemple, $([0, 1, 1, 0, 1, 1, 1])$ satisfait `(2,3)-ConsecutiveOnes` mais $([0, 1, 0, 0, 1, 1, 1])$ ne la satisfait pas.

Question 1. Montrez que pour tout $q \geq k \geq 1$, la contrainte globale `(k,q)-ConsecutiveOnes` admet une AC-décomposition.

La contrainte globale `(k,q)-ConsecutiveValues`$([X_1, \ldots, X_n])$ porte sur n variables entières et est satisfaite si et seulement si chaque séquence maximale (non vide) de valeurs identiques consécutives est de longueur au moins k et au plus q.

Question 2. La contrainte globale `(k,q)-ConsecutiveValues` admet-elle une AC-décomposition ? Justifiez votre réponse.

La contrainte globale `DifferentConsecutiveLengths`$([X_1, \ldots, X_n])$ porte sur n variables entières et est satisfaite si et seulement si pour toute valeur v, il n'existe pas deux séquences maximales (non vides) de v consécutifs qui ont la même longueur.

Question 3. La contrainte globale `DifferentConsecutiveLengths` admet-elle une AC-décomposition ? Justifiez votre réponse.

Question 4. Les réponses aux questions 2 et 3 vous permettent-elles de déterminer si l'arc cohérence sur ces deux contraintes est calculable en temps polynomial ?

Exercice 4

Dans un réseau de contraintes $N = (X, D, C)$, on dit qu'une valeur $v \in D(X_i)$ est *singleton viable* si le réseau de contraintes obtenu à partir de N' en fixant $D(X_i) = \{v\}$ a une fermeture arc cohérente non vide. Un réseau est *singleton arc cohérent* (SAC) si toutes les valeurs sont singleton viables ; "appliquer SAC" désigne le processus d'enlever des valeurs qui ne sont pas singleton viables jusqu'à ce que toutes le soient.

Soit le réseau de contraintes $N^* = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, \ldots, X_4\}$, $D(X_1) = D(X_2) = \{1, 2, 7, 8\}$, $D(X_3) = D(X_4) = \{1, 2, 3, 4\}$, $c_1 \equiv |X_1 - X_2| = |X_3 - X_4|$, $c_2 \equiv X_3 = 2X_2$, $c_3 \equiv X_1 + X_4 = 5$ et $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.

Question 1. Appliquez BC sur N^*.

Question 2. Appliquez SAC sur N^*.

Question 3. Combien comporte de variables le plus petit réseau de contraintes binaires normalisé (c-à-d tel que deux contraintes ne peuvent pas avoir la même portée) qui est SAC mais n'a pas de solution ? Justifiez.

Question 4. On peut définir la propriété SBC de façon analogue à SAC, en remplaçant AC par BC dans la définition. Comparez les propriétés AC, SAC, BC et SBC.

Un réseau de contraintes binaires $N = (X, D, C)$ est k-quasi-arborescent s'il est normalisé et qu'il existe k variables dont la suppression (ainsi que la suppression des contraintes incidentes) produit un réseau arborescent. On rappelle qu'un réseau arborescent AC admet toujours une solution.

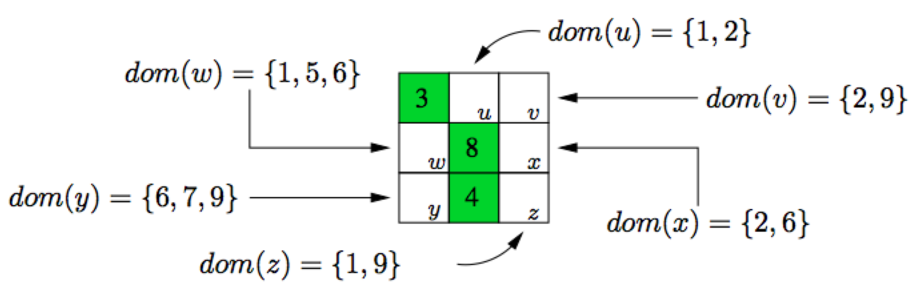
Question 5. Un réseau 1-quasi-arborescent qui est SAC admet-il toujours une solution ? Justifiez.

Question 6. Soit $k \geq 1$. Peut-on résoudre en temps polynomial les réseaux de contraintes k-quasi-arborescents ? Justifiez.

Exercice 5

Soit le réseau de contraintes $N = (X, D, C)$, où $X = \{u, v, w, x, y, z\}$, $C = \{\texttt{AllDifferent}(u, v, w, x, y, z)\}$ et les domaines sont définis comme ci-dessous.

Question 1. Donner l'état des domaines après fermeture GAC pour les domaines suivants :



Question 2. Donner l'état des domaines après fermeture GAC pour les domaines suivants :