Université de Montpellier - Master 2
Module **Contraintes**

Feuille TD 1 - 18/09/2023

# Exercice 1

On considère les réseaux de contraintes suivants :

- $N_1 = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, $D(X_1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D(X_2) = \{1, 3, 5\}$, $D(X_3) = \{1, 3, 4, 7\}$, et
$$C = \begin{cases} X_1 + X_2 = X_3 \\ X_1 < X_2 \end{cases}$$
- $N_2 = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, \ldots, X_4\}$, $\forall i\ D(X_i) = \{1, \ldots, 8\}$, et
$$C = \begin{cases} 2 \cdot X_1 = X3 \\ X_1 < X_2 \\ X_3 + X_4 = 10 \\ X_3 < X_2 \end{cases}$$
- $N_3 = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, \ldots, X_5\}$, $D(X_1) = D(X_2) = \{1, 2, 7, 8\}$, $D(X_3) = D(X_4) = \{1, 2, 3, 4\}$, $D(X_5) = \{0, 1\}$ et
$$C = \begin{cases} X_1 + X_4 = 10 - 5 \cdot X_5 \\ |X_1 - X_2| = |X_3 - X_4| \\ X_3 = 2 \cdot X_2 \end{cases}$$

**Question 1.** Appliquez AC sur $N_1$.

**Question 2.** Appliquez AC sur $N_2$.

**Question 3.** Appliquez AC sur $N_3$.

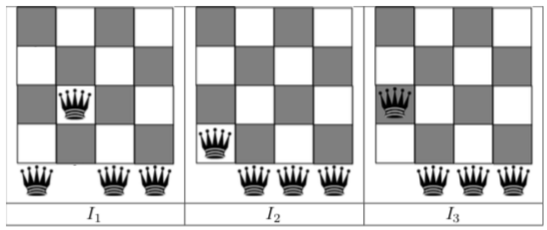
# Exercice 2

Le problème des $n$-reines est de placer $n$ reines de jeu d'échecs sur un échiquier de dimension $n \times n$ sans que les reines ne puissent se menacer mutuellement, conformément aux règles du jeu d'échecs. Par conséquent, deux reines ne peuvent pas se trouver sur la même ligne, colonne, ou diagonale.

On considère un modèle avec $n$ variables $X_1, \dots, X_n$ dont les domaines sont $\{1, \dots, n\}$, où l'affectation $X_i \leftarrow j$ signifie "La reine placée dans la $i$ème colonne se trouve à la $j$ème ligne". Les contraintes sont alors:

$$\begin{array}{lll} \forall i,j \text{ tels que i} \neq \text{j}, & X_i \neq X_j & \text{(Pas deux reines sur la même ligne)} \\ \forall i,j \text{ tels que i} \neq \text{j}, & |X_i - X_j| \neq |i-j| & \text{(Pas deux reines sur la même diagonale)} \end{array}$$

Pour les questions suivantes, on fixe $n = 4$ et on considère les trois affectations partielles suivantes :




**Question 1.** Appliquez AC sur le modèle pour chacune des 3 affectations partielles.

**Question 2.** Appliquez BT sur le modèle pour chacune des 3 affectations partielles, en utilisant pour ordre de branchement de variables $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ et ordre de branchement de valeurs $(1, 2, 3, 4)$.

**Question 3.** Existe-t-il une affectation partielle qui ne s'étend à aucune solution, mais telle qu'appliquer AC sur le modèle ne vide aucun domaine ? Justifiez votre réponse.

# Exercice 3

Le graphe primal d'un réseau de contraintes $N$ est le graphe $G_N$ dont les sommets sont les variables de $N$ et les arêtes sont les paires de variables qui apparaissent ensemble dans la portée d'au moins une contrainte. Un réseau de contraintes $N$ est arborescent si et seulement si il est normalisé (toutes les contraintes ont des portées distinctes deux-à-deux) et $G_N$ est un graphe acyclique.

**Question 1.** Démontrez que tout réseau de contraintes arborescent arc cohérent admet une solution.

**Question 2.** La même propriété est-elle vraie si $G_N$ est un arbre mais $N$ n'est pas normalisé ? Justifiez votre réponse.

**Question 3.** Tout réseau de contraintes arborescent arc cohérent est-il globalement cohérent ? Justifiez votre réponse.

**Question 4.** L'algorithme BT appliqué à un réseau de contraintes arborescent arc cohérent atteint-il toujours une solution après exploration d'un nombre polynomial d'appels récursifs, indépendamment des choix de branchement ? Justifiez votre réponse.

# Exercice 4

Soit le réseau de contraintes $N = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, $D(X_1) = \{0, 4, 8, 10\}$, $D(X_2) = D(X_3) = \{0, 1, 2, 5, 8\}$, $D(X_4) = \{0, 3\}$, $c_1 \equiv X_1 = X_2 + X_3$, $c_2 \equiv |X_2 - X_4| \geq 3$, $c_3 \equiv |X_3 - X_4| \leq 2$, et

$C = \{c_1, c_2, c_3\}$.

Étant donné un ordre total $o$ sur C, l'algorithme `onepassAC`($o$) sélectionne les contraintes de $C$ l'une après l'autre, de la première à la dernière, dans l'ordre $o$. Une fois une contrainte $c$ sélectionnée, `onepassAC`($o$) supprime toutes les valeurs qui n'ont pas de support sur $c$ puis passe à la contrainte suivante. L'algorithme s'arrête une fois la dernière contrainte traitée.

**Question 1.** Appliquez `onepassAC`($o$) sur $N$, où $o = (c_1, c_2, c_3)$.

**Question 2.** Appliquez AC sur $N$. `onepassAC`($o$) est-il en général un algorithme d'arc cohérence ? Justifiez votre réponse.

**Question 3.** Étant donné un ordre total $o$ sur $C$, l'algorithme `doubleAC`($o$) exécute d'abord `onepassAC`($o$) puis `onepassAC`($o^{-1}$), où $o^{-1}$ est l'ordre inverse de $o$. `doubleAC`($o$) est-il en général un algorithme d'arc cohérence ? Justifiez votre réponse.

# Exercice 5

On considère un ensemble de variables $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ dont le domaine $D$ est donné par $D(X_1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $D(X_2) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $D(X_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $D(X_4) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Soient les réseaux de contraintes $N_1 = (X, D, C_1)$ et $N_2 = (X, D, C_2)$, où

$$C_1 = \begin{cases} X_1 \leq X_2 \\ X_2 \leq X_3 \\ X_3 \leq X_4 \\ X_4 \leq X_1 \\ X_2 \cdot X_4 \mod 4 = 0 \end{cases} \qquad C_2 = \begin{cases} X_1 = X_2 \\ X_2 = X_3 \\ X_3 = X_4 \\ X_4 = X_1 \\ X_2 \cdot X_4 \mod 4 = 0 \end{cases}$$

**Question 1.** Comparez les ensembles de solutions de $N_1$ et $N_2$. Sont-ils égaux, strictement inclus l'un dans l'autre, disjoints ?

**Question 2.** Appliquez AC sur $N_1$ puis $N_2$.

Soient $N = (X, D, C)$ et $N^* = (X, D, C^*)$ deux réseaux de contraintes et $D_N^{AC}$ et $D_{N^*}^{AC}$ leurs fermetures arc cohérentes respectives.

**Question 3.** Supposons que toute solution de $N^*$ est solution de $N$. Est-il forcément vrai que pour tout $X_i \in X$, on a $D_{N^*}^{AC}(X_i) \subseteq D_N^{AC}(X_i)$ ? Justifiez.

**Question 4.** Supposons maintenant que toute affectation de $X$ localement cohérente dans $N^*$ est localement cohérente dans $N$. Est-il forcément vrai que pour tout $X_i \in X$, on a $D_{N^*}^{AC}(X_i) \subseteq D_N^{AC}(X_i)$ ? Justifiez votre réponse.

**Question 5.** Revenons aux réseaux $N_1$ et $N_2$ des deux premières questions. Est-il possible que BT($N_2$,$\emptyset$) effectue plus d'appels récursifs que BT($N_1$,$\emptyset$) en utilisant les mêmes heuristiques de choix de variables et de valeurs ? Justifiez votre réponse.

## Exercice 6

Un bloc de la ville de New York a été représenté dans une grille. Chaque case contient un immeuble de 10, 20, 30 ou 40 étages. Les immeubles d'une même rangée, ligne ou colonne, sont tous de tailles différentes. Les nombres donnés sur les bords indiquent le nombre d'immeubles visibles sur la rangée correspondante par un observateur situé à cet endroit. Par exemple, si une ligne contient la disposition 20-40-30-10, deux immeubles sont visibles à partir de la gauche et trois à partir de la droite.

Le jeu consiste à recouper les différentes observations pour retrouver la hauteur de chaque immeuble. La Figure 1 donne un exemple.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 1 | 3 | 2 | |
| 2 | | | | | 2 |
| 3 | | | | | 1 |
| 2 | | | | | 2 |
| 1 | | | | | 3 |
| | 1 | 2 | 2 | 2 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 1 | 3 | 2 | |
| 2 | 10 | 40 | 20 | 30 | 2 |
| 3 | 20 | 10 | 30 | 40 | 1 |
| 2 | 30 | 20 | 40 | 10 | 2 |
| 1 | 40 | 30 | 10 | 20 | 3 |
| | 1 | 2 | 2 | 2 | |

Figure 1: A gauche, un exemple du problème ; à droite, une solution.

**Question 1.** Exprimez ce jeu sous forme d'un réseau de contraintes. Vous pourrez utiliser des contraintes "de table", c'est-à-dire définies en extension par un ensemble de tuples qu'il faudra lister.

**Question 2.** (Plus difficile) On considère maintenant le même jeu, mais avec une taille de bloc $n$ arbitraire. Exprimez ce jeu sous la forme d'un réseau de contraintes dont la taille est polynomiale en $n$ et où toutes les contraintes sont d'arité au plus 3.

Pour cette dernière question il n'est pas nécessaire de lister tous les tuples de chaque contrainte ; une description claire et précise est suffisante (par exemple sous la forme d'une formule logique et/ou arithmétique).