Université de Montpellier - Master 2
Module **Contraintes**

Feuille TD 1 - 18/09/2023

Exercice 1

On considère les réseaux de contraintes suivants :

- $N_1 = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, $D(X_1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D(X_2) = \{1, 3, 5\}$, $D(X_3) = \{1, 3, 4, 7\}$, et
$$C = \begin{cases} X_1 + X_2 = X_3 \\ X_1 < X_2 \end{cases}$$
- $N_2 = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, \ldots, X_4\}$, $\forall i\ D(X_i) = \{1, \ldots, 8\}$, et
$$C = \begin{cases} 2 \cdot X_1 = X3 \\ X_1 < X_2 \\ X_3 + X_4 = 10 \\ X_3 < X_2 \end{cases}$$
- $N_3 = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, \ldots, X_5\}$, $D(X_1) = D(X_2) = \{1, 2, 7, 8\}$, $D(X_3) = D(X_4) = \{1, 2, 3, 4\}$, $D(X_5) = \{0, 1\}$ et
$$C = \begin{cases} X_1 + X_4 = 10 - 5 \cdot X_5 \\ |X_1 - X_2| = |X_3 - X_4| \\ X_3 = 2 \cdot X_2 \end{cases}$$

Question 1. Appliquez AC sur N_1.

Correction. On examine les contraintes une par une, en supprimant des valeurs non viables jusqu'à ce que toutes le soient. Attention, il est parfois nécessaire de revenir sur une contrainte déjà examinée car une valeur qui était viable ne l'est plus !

Notation pour cet exercice: "$c_i : (X_j, v)$" signifie "on supprime la valeur $v \in D(X_j)$ car elle n'a pas de support dans la contrainte c_i".

$$c_2 : (X_1, 5), (X_2, 1)$$
$$c_1 : (X_1, 3), (X_3, 1), (X_3, 3)$$

Toutes les valeurs restantes sont viables. La fermeture AC de D est donc :

$$D(X_1) = \{1, 2, 4\}$$
$$D(X_2) = \{3, 5\}$$
$$D(X_3) = \{4, 7\}$$

Question 2. Appliquez AC sur N_2.

Correction.

$$
\begin{aligned}
&c_1 : (X_1, 5), (X_1, 6), (X_1, 7), (X_1, 8), (X_3, 1), (X_3, 3), (X_3, 5), (X_3, 7)\\
&c_4 : (X_2, 1), (X_2, 2), (X_3, 8)\\
&c_3 : (X_4, 1), (X_4, 2), (X_4, 3), (X_4, 5), (X_4, 7)\\
&c_1 : (X_1, 4)
\end{aligned}
$$

Toutes les valeurs restantes sont viables. La fermeture AC de D est donc :

$$
\begin{aligned}
D(X_1) &= \{1, 2, 3\}\\
D(X_2) &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}\\
D(X_3) &= \{2, 4, 6\}\\
D(X_4) &= \{4, 6, 8\}
\end{aligned}
$$

Question 3. Appliquez AC sur N_3.

Correction.

$$
\begin{aligned}
&c_3 : (X_2, 7), (X_2, 8), (X_3, 1), (X_3, 3)\\
&c_2 : (X_1, 7), (X_1, 8)\\
&c_1 : (X_5, 0), (X_4, 1), (X_4, 2)
\end{aligned}
$$

Toutes les valeurs restantes sont viables. La fermeture AC de D est donc :

$$
\begin{aligned}
D(X_1) &= \{1, 2\}\\
D(X_2) &= \{1, 2\}\\
D(X_3) &= \{2, 4\}\\
D(X_4) &= \{3, 4\}\\
D(X_5) &= \{1\}
\end{aligned}
$$

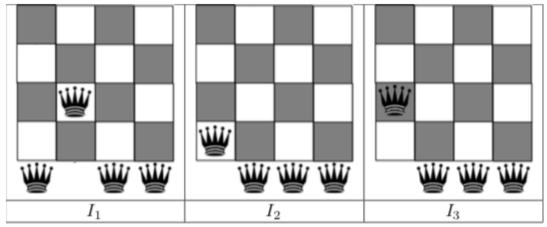
Exercice 2

Le problème des n-reines est de placer n reines de jeu d'échecs sur un échiquier de dimension $n \times n$ sans que les reines ne puissent se menacer mutuellement, conformément aux règles du jeu d'échecs. Par conséquent, deux reines ne peuvent pas se trouver sur la même ligne, colonne, ou diagonale.

On considère un modèle avec n variables $X_1, \ldots, X_n$ dont les domaines sont $\{1, \ldots, n\}$, où l'affectation $X_i \leftarrow j$ signifie "La reine placée dans la $i$ème colonne se trouve à la $j$ème ligne". Les contraintes sont alors:

$$
\begin{array}{lll}
\forall i, j \text{ tels que i} \neq \text{j}, & X_i \neq X_j & \text{(Pas deux reines sur la même ligne)}\\
\forall i, j \text{ tels que i} \neq \text{j}, & |X_i - X_j| \neq |i - j| & \text{(Pas deux reines sur la même diagonale)}
\end{array}
$$

Pour les questions suivantes, on fixe $n = 4$ et on considère les trois affectations partielles suivantes :



Question 1. Appliquez AC sur le modèle pour chacune des 3 affectations partielles.

Correction.

$\mathbf{I_1}$. Cette affectation partielle impose $D(X_2) = \{3\}$. En réutilisant les notations du premier exercice :

- Contraintes de lignes : $(X_1, 3), (X_3, 3), (X_4, 3)$
- Contraintes de diagonales : $(X_1, 2), (X_1, 4), (X_3, 2), (X_3, 4), (X_4, 1)$
- Contrainte de lignes $X_1 \neq X_3$: $(X_1, 1), (X_3, 1)$

Les domaines de X_1 et X_3 sont désormais vides. AC va ensuite vider tous les autres domaines car les contraintes impliquant l'une ou l'autre de ces variables n'ont plus de support pour aucune valeur. **Après AC :** $\forall i, D(X_i) = \emptyset$

$\mathbf{I_2}$. Cette affectation partielle impose $D(X_1) = \{4\}$.

- Contraintes de lignes : $(X_2, 4), (X_3, 4), (X_4, 4)$
- Contraintes de diagonales : $(X_2, 3), (X_3, 2), (X_4, 1)$
- Contrainte de diagonales $|X_2 - X_3| \neq 1$: $(X_2, 2)$
- Contrainte de diagonales $|X_4 - X_3| \neq 1$: $(X_4, 2)$
- Contraintes de lignes $X_2 \neq X_3$ et $X_3 \neq X_4$: $(X_3, 1), (X_3, 3)$

Le domaine de X_3 est désormais vide. **Après AC :** $\forall i, D(X_i) = \emptyset$

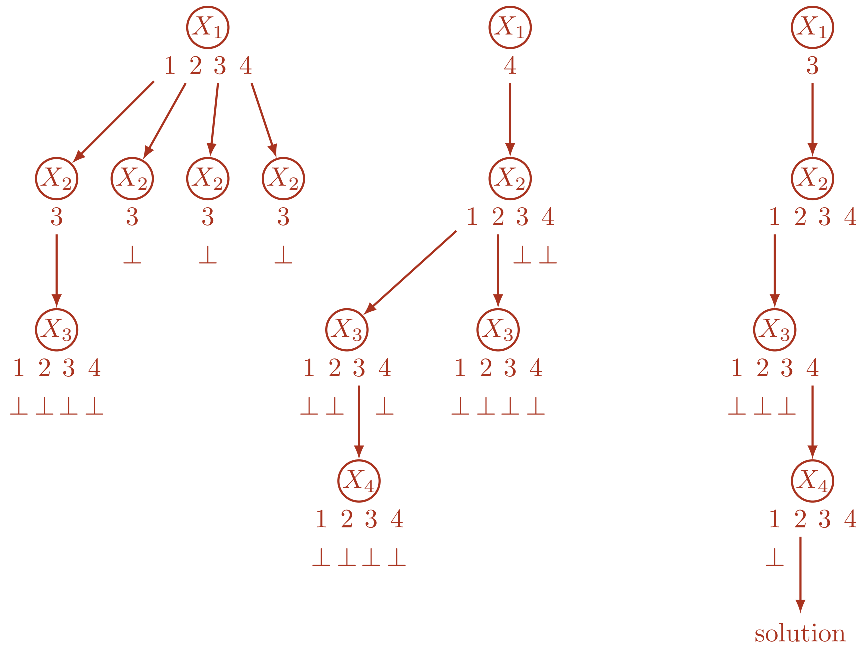
$\mathbf{I_3}$. Cette affectation partielle impose $D(X_1) = \{3\}$.

- Contraintes de lignes : $(X_2, 3), (X_3, 3), (X_4, 3)$
- Contraintes de diagonales : $(X_2, 2), (X_2, 4), (X_3, 1)$
- Contrainte de diagonales $|X_2 - X_3| \neq 1$: $(X_3, 2)$
- Contrainte de lignes $X_2 \neq X_4$: $(X_4, 1)$
- Contrainte de lignes $X_3 \neq X_4$: $(X_4, 4)$

Les domaines sont alors arc cohérents. **Après AC :** $D(X_1) = \{3\}$**,** $D(X_2) = \{1\}$**,** $D(X_3) = \{4\}$**,** $D(X_4) = \{2\}$

Question 2. Appliquez BT sur le modèle pour chacune des 3 affectations partielles, en utilisant pour ordre de branchement de variables (X_1, X_2, X_3, X_4) et ordre de branchement de valeurs $(1, 2, 3, 4)$.

Correction. Voici les arbres explorés par BT sur les 3 affectations partielles (de gauche à droite I_1, I_2 et I_3) :



Question 3. Existe-t-il une affectation partielle qui ne s'étend à aucune solution, mais telle qu'appliquer AC sur le modèle ne vide aucun domaine ? Justifiez votre réponse.

Correction. Supposons par l'absurde qu'une telle affectation partielle existe. Au moins une variable est affectée car sinon l'affectation s'étendrait à une solution. Soit X_i une variable affectée et j sa valeur.

- Premier cas : $i \in \{1, 4\}$. Si $i = 1$, alors d'après la question 2 sur I_2 et I_3, j ne peut pas valoir 3 ou 4 car sinon AC viderait les domaines ou les réduirait à un singleton. Comme le modèle est symétrique par inversion des lignes, c'est également vrai pour $j \in \{1, 2\}$. De même, comme le modèle est symétrique par inversion des colonnes, c'est également vrai pour $i = 4$. Ce premier cas est donc impossible.
- Deuxième cas : $i \in \{2, 3\}$ et $j \in \{2, 3\}$. D'après la question 2 sur I_1 et par symétrie de lignes/colonnes, dans ce cas AC vide les domaines. Ce cas est donc également impossible.
- Dernier cas : $i \in \{2, 3\}$ et $j \in \{1, 4\}$. Ce cas ne peut pas être déduit directement de la réponse à la question 2. Cependant, on peut aisément vérifier que dans ce cas AC réduit tous les domaines à un singleton lorsque X_i est affecté à j (par symétrie, il suffit de le vérifier pour une seule paire i, j). Ce dernier cas est donc impossible : une telle affectation partielle n'existe donc pas.

Exercice 3

Le graphe primal d'un réseau de contraintes N est le graphe G_N dont les sommets sont les variables de N et les arêtes sont les paires de variables qui apparaissent ensemble dans la portée d'au moins une contrainte. Un réseau de contraintes N est arborescent si et seulement si il est normalisé (toutes les contraintes ont des portées distinctes deux-à-deux) et G_N est un graphe acyclique.

Question 1. Démontrez que tout réseau de contraintes arborescent arc cohérent admet une solution.

Correction. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un réseau de contraintes arborescent qui est arc cohérent mais n'admet pas de solution. Soit $N = (X, D, C)$ un tel réseau avec $|X|$ de taille minimum.

Premièrement, observons que $|X| > 1$ (sinon N admettrait une solution) et G_N est connexe (sinon N ne serait pas minimal). Il existe donc deux variables $x, y \in X$ telles que x est une feuille de G_N et y est son unique voisin dans G_N. On note $c(x, y)$ l'unique contrainte de N dont la portée contient x et y. Le réseau $N^* = (X\backslash\{x\}, D\backslash\{D(x)\}, C\backslash\{c(x, y)\})$ est arborescent, arc cohérent et contient strictement moins de variables que N ; il admet donc une solution ϕ. La valeur $\phi(y)$ est viable dans N, donc il existe un support $(v, \phi(y)) \in c(x, y)$ avec $v \in D(x)$. Finalement, l'affectation $\phi \cup \{X \leftarrow v\}$ satisfait toutes les contraintes de N, ce qui contredit notre hypothèse initiale.

Question 2. La même propriété est-elle vraie si G_N est un arbre mais N n'est pas normalisé ? Justifiez votre réponse.

Correction. Non. Par exemple, le réseau

$$X_1 = X_2$$
$$X_1 \neq X_2$$

avec domaines $D(X_1) = D(X_2) = \{1, 2\}$ est arc cohérent et son graphe primal est acyclique, mais il n'admet pas de solution.

Question 3. Tout réseau de contraintes arborescent arc cohérent est-il globalement cohérent ? Justifiez votre réponse.

Correction. Non. Par exemple, le réseau

$$X_1 = X_2$$
$$X_2 = X_3$$

avec domaines $D(X_1) = D(X_2) = D(X_3) = \{1, 2\}$ est arc cohérent et arborescent, mais l'affectation localement cohérente $X_1 \leftarrow 1$, $X_3 \leftarrow 2$ ne s'étend à aucune solution.

Question 4. L'algorithme BT appliqué à un réseau de contraintes arborescent arc cohérent atteint-il toujours une solution après exploration d'un nombre polynomial d'appels récursifs, indépendamment des choix de branchement ? Justifiez votre réponse.

Correction. Non. Soit n un entier naturel pair et $N = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $D(X_i) = \{0, 1\}$ pour tout $i \leq n$ et $C = \{X_1 \neq X_2, X_2 \neq X_3, \ldots, X_{n-1} \neq X_n\}$. Considérons un ordre sur les variables qui sélectionne en premier X_1, puis X_n, puis les variables X_i avec $1 < i < n - 1$ impair dans l'ordre croissant, et enfin les variables restantes. Pour les valeurs, on sélectionne 1 en priorité.

Par construction, l'affectation des $n/2$ premières variables X_1, X_n, X_3, X_5, …, X_{n-3} est localement cohérente. Cependant, l'affectation initiale des deux premières variables $X_1 \leftarrow 1$, $X_n \leftarrow 1$ ne s'étend à aucune solution. L'algorithme BT utilisant ces choix de branchements sur N explorera donc au moins $2^{n/2-2}$ noeuds de l'arbre de recherche avant de trouver une solution.

Exercice 4

Soit le réseau de contraintes $N = (X, D, C)$, où $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, $D(X_1) = \{0, 4, 8, 10\}$, $D(X_2) = D(X_3) = \{0, 1, 2, 5, 8\}$, $D(X_4) = \{0, 3\}$, $c_1 \equiv X_1 = X_2 + X_3$, $c_2 \equiv |X_2 - X_4| \geq 3$, $c_3 \equiv |X_3 - X_4| \leq 2$, et $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.

Étant donné un ordre total o sur C, l'algorithme `onepassAC`(o) sélectionne les contraintes de C l'une après l'autre, de la première à la dernière, dans l'ordre o. Une fois une contrainte c sélectionnée, `onepassAC`(o)

supprime toutes les valeurs qui n'ont pas de support sur c puis passe à la contrainte suivante. L'algorithme s'arrête une fois la dernière contrainte traitée.

Question 1. Appliquez `onepassAC`(o) sur N, où $o = (c_1, c_2, c_3)$.

Correction. On utilise les mêmes notations que pour l'exercice 1.

$$c_1 : (X_2, 1), (X_3, 1)$$
$$c_2 : (X_2, 2)$$
$$c_3 : (X_3, 8)$$

Après application de `onepassAC`(o), les domaines sont donc

$$D(X_1) = \{0, 4, 8, 10\}$$
$$D(X_2) = \{0, 5, 8\}$$
$$D(X_3) = \{0, 2, 5\}$$
$$D(X_4) = \{0, 3\}$$

Question 2. Appliquez AC sur N. `onepassAC`(o) est-il en général un algorithme d'arc cohérence ? Justifiez votre réponse.

Correction. On applique maintenant AC. Il est suffisant de partir des domaines obtenus après application de `onepassAC`(o) car les valeurs supprimées ne sont pas viables.

$$c_1 : (X_1, 4)$$

Toutes les valeurs restantes sont viables. La fermeture AC de D est donc :

$$D(X_1) = \{0, 8, 10\}$$
$$D(X_2) = \{0, 5, 8\}$$
$$D(X_3) = \{0, 2, 5\}$$
$$D(X_4) = \{0, 3\}$$

`onepassAC`(o) n'est donc pas un algorithme d'arc cohérence car il existe un réseau (en l'occurence, N) pour lequel les domaines en fin d'exécution ne correspondent pas à la fermeture AC.

Question 3. Étant donné un ordre total o sur C, l'algorithme `doubleAC`(o) exécute d'abord `onepassAC`(o) puis `onepassAC`(o^{-1}), où o^{-1} est l'ordre inverse de o. `doubleAC`(o) est-il en général un algorithme d'arc cohérence ? Justifiez votre réponse.

Correction. Non. Un exemple très simple est le réseau avec deux variables X_1, X_2, deux contraintes $c_1 \equiv X_1 > X_2$, $c_2 \equiv X_2 > X_1$ et des domaines $D(X_1) = D(X_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En appliquant `doubleAC`$(o)$ pour l'ordre $o = (c_1, c_2)$ on obtient

$$c_1 : (X_1, 1), (X_2, 6)$$
$$c_2 : (X_2, 1), (X_2, 2), (X_1, 5), (X_1, 6)$$
$$c_2 : \emptyset$$
$$c_1 : (X_1, 2), (X_1, 3), (X_2, 4), (X_2, 5)$$

ce qui donne pour domaine

$$D(X_1) = \{4\}$$
$$D(X_2) = \{3\}$$

qui n'est clairement pas arc cohérent car aucune de ces valeurs n'a de support pour la contrainte c_2.

Exercice 5

On considère un ensemble de variables $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ dont le domaine D est donné par $D(X_1) = \{1,2,3,4,5,6\}$, $D(X_2) = \{1,2,4,5,6,7\}$, $D(X_3) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ et $D(X_4) = \{1,2,3,5,6,7\}$. Soient les réseaux de contraintes $N_1 = (X, D, C_1)$ et $N_2 = (X, D, C_2)$, où

$$C_1 = \begin{cases} X_1 \leq X_2 \\ X_2 \leq X_3 \\ X_3 \leq X_4 \\ X_4 \leq X_1 \\ X_2 \cdot X_4 \mod 4 = 0 \end{cases} \qquad C_2 = \begin{cases} X_1 = X_2 \\ X_2 = X_3 \\ X_3 = X_4 \\ X_4 = X_1 \\ X_2 \cdot X_4 \mod 4 = 0 \end{cases}$$

Question 1. Comparez les ensembles de solutions de N_1 et N_2. Sont-ils égaux, strictement inclus l'un dans l'autre, disjoints ?

Correction. Les ensembles de solutions de N_1 et N_2 sont égaux car les 4 premières contraintes de C_1 impliquent l'égalité entre les variables $X_1, \ldots, X_4$.

Question 2. Appliquez AC sur N_1 puis N_2.

Correction. On note les contraintes $c_1, \ldots, c_5$ (de haut en bas). Pour N_1, avec les notations du premier exercice :

$$\begin{aligned} &c_5 : (X_2, 1), (X_2, 5), (X_2, 7) \\ &c_2 : (X_3, 1) \\ &c_3 : (X_4, 1) \\ &c_4 : (X_1, 1), (X_4, 7) \\ &c_3 : (X_3, 7) \end{aligned}$$

Les valeurs restantes sont viables. Après AC sur N_1, les domaines sont donc

$$\begin{aligned} D(X_1) &= \{2,3,4,5,6\} \\ D(X_2) &= \{2,4,6\} \\ D(X_3) &= \{2,3,4,5,6\} \\ D(X_4) &= \{2,3,5,6\} \end{aligned}$$

On applique maintenant AC sur N_2 :

$$\begin{aligned} &c_5 : (X_2, 1), (X_2, 5), (X_2, 7) \\ &c_4 : (X_1, 4), (X_4, 7) \\ &c_1 : (X_1, 1), (X_1, 3), (X_1, 5), (X_2, 4) \\ &c_2 : (X_3, 1), (X_3, 3), (X_3, 4), (X_3, 5), (X_3, 7) \\ &c_3 : (X_4, 1), (X_4, 3), (X_4, 5) \end{aligned}$$

Les valeurs restantes sont viables. Après AC sur N_2, les domaines sont donc

$$\begin{aligned} D(X_1) &= \{2,6\} \\ D(X_2) &= \{2,6\} \\ D(X_3) &= \{2,6\} \\ D(X_4) &= \{2,6\} \end{aligned}$$

Soient $N = (X, D, C)$ et $N^* = (X, D, C^*)$ deux réseaux de contraintes et D_N^{AC} et $D_{N^*}^{AC}$ leurs fermetures arc cohérentes respectives.

Question 3. Supposons que toute solution de N^* est solution de N. Est-il forcément vrai que pour tout $X_i \in X$, on a $D_{N^*}^{AC}(X_i) \subseteq D_N^{AC}(X_i)$? Justifiez.

Correction. Non. Par exemple, toute solution de N_1 est solution de N_2 (Question 1) mais $D_{N_1}^{AC}(X_1) \not\subseteq D_{N_2}^{AC}(X_1)$ (Question 2).

Question 4. Supposons maintenant que toute affectation de X localement cohérente dans N^* est localement cohérente dans N. Est-il forcément vrai que pour tout $X_i \in X$, on a $D_{N^*}^{AC}(X_i) \subseteq D_N^{AC}(X_i)$? Justifiez votre réponse.

Correction. Non. Prenons par exemple X_1, X_2, X_3 avec domaines $\{0, 1\}$ et les réseaux N^*, N obtenus respectivement avec $C^* = \{X_1 \neq X_2, X_2 \neq X_3, X_3 \neq X_1\}$ et $C = \{\text{AllDifferent}(X_1, X_2, X_3)\}$. Pour le réseau N, toutes les affectations de 2 variables ou moins sont localement cohérentes et aucune affectation des 3 variables ne l'est. Comme aucune affectation des 3 variables n'est localement cohérente dans N^*, ces deux réseaux satisfont l'hypothèse de la question. Cependant, appliquer AC sur N va vider tous les domaines alors que N^* est déjà arc cohérent.

Question 5. Revenons aux réseaux N_1 et N_2 des deux premières questions. Est-il possible que BT(N_2,$\emptyset$) effectue plus d'appels récursifs que BT(N_1,$\emptyset$) en utilisant les mêmes heuristiques de choix de variables et de valeurs ? Justifiez votre réponse.

Correction. Non. Supposons par l'absurde qu'il existe une affectation partielle ϕ de X telle que

- BT(N_2,$\emptyset$) appelle BT(N_2,ϕ) à un point de son exécution, et
- BT(N_1,$\emptyset$) n'appelle jamais BT(N_1,ϕ) durant son exécution.

Soit ϕ' l'affectation partielle telle que BT(N_2,ϕ') appelle récursivement BT(N_2,ϕ). On a alors $\phi = \phi' \cup \{X_i, v_i\}$ et par minimalité BT(N_1,$\emptyset$) appelle BT(N_1,ϕ') à un point de son exécution. Cependant, comme N_1 et N_2 ont le même ensemble de solutions et que toute affectation localement cohérente dans N_2 l'est aussi dans N_1, BT(N_1,$\phi' \cup \{X_i, v\}$) renverra `false` pour toute valeur v qui précède v_i dans l'heuristique de choix de valeurs. BT(N_1,$\emptyset$) appellera donc nécessairement BT(N_1,ϕ) à un point de son exécution, ce qui contredit notre hypothèse initiale.

Exercice 6

Un bloc de la ville de New York a été représenté dans une grille. Chaque case contient un immeuble de 10, 20, 30 ou 40 étages. Les immeubles d'une même rangée, ligne ou colonne, sont tous de tailles différentes. Les nombres donnés sur les bords indiquent le nombre d'immeubles visibles sur la rangée correspondante par un observateur situé à cet endroit. Par exemple, si une ligne contient la disposition 20-40-30-10, deux immeubles sont visibles à partir de la gauche et trois à partir de la droite.

Le jeu consiste à recouper les différentes observations pour retrouver la hauteur de chaque immeuble. La Figure 1 donne un exemple.

Question 1. Exprimez ce jeu sous forme d'un réseau de contraintes. Vous pourrez utiliser des contraintes "de table", c'est-à-dire définies en extension par un ensemble de tuples qu'il faudra lister.

	4	1	3	2	
2					2
3					1
2					2
1					3
	1	2	2	2	

	4	1	3	2	
2	10	40	20	30	2
3	20	10	30	40	1
2	30	20	40	10	2
1	40	30	10	20	3
	1	2	2	2	

Figure 1: A gauche, un exemple du problème ; à droite, une solution.

Correction. Pour cette question, un modèle simple est de placer une variable par immeuble, dont le domaine est l'ensemble des hauteurs possibles $\{10, 20, 30, 40\}$, et une variable par observation dont le domaine contient uniquement la valeur de l'observation en question. Pour chaque ligne/colonne, on ajoute ensuite une contrainte qui force les hauteurs des immeubles à être cohérentes avec les observations.

Formellement, on a 16 variables d'observation $O_1^G, \ldots, O_4^G$, $O_1^D, \ldots, O_4^D$, $O_1^H, \ldots, O_4^H$, $O_1^B, \ldots, O_4^B$, 16 variables $X_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, et 8 contraintes

$$\forall i \in \{1, \ldots, 4\},\ c(O_i^G, X_{i,1}, \ldots, X_{i,4}, O_i^D)$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, 4\},\ c(O_j^H, X_{1,j}, \ldots, X_{4,j}, O_j^B)$$

où c est la fonction booléenne qui lie les 24 permutations possibles de $(10, 20, 30, 40)$ aux observations associées, dont les tuples sont :

4	10	20	30	40	1	2	30	20	10	40	1
3	10	20	40	30	2	2	30	20	40	10	2
3	10	30	20	40	1	2	30	10	20	40	1
3	10	30	40	20	2	2	30	10	40	20	2
2	10	40	20	30	2	2	30	40	20	10	3
2	10	40	30	20	3	2	30	40	10	20	2
3	20	10	30	40	1	1	40	10	30	20	3
2	20	10	40	30	2	1	40	10	20	30	2
3	20	30	10	40	1	1	40	30	10	20	3
3	20	30	40	10	2	1	40	30	20	10	4
2	20	40	10	30	2	1	40	20	10	30	2
2	20	40	30	10	3	1	40	20	30	10	3

Question 2. (Plus difficile) On considère maintenant le même jeu, mais avec une taille de bloc n arbitraire. Exprimez ce jeu sous la forme d'un réseau de contraintes dont la taille est polynomiale en n et où toutes les contraintes sont d'arité au plus 3.

Pour cette dernière question il n'est pas nécessaire de lister tous les tuples de chaque contrainte ; une description claire et précise est suffisante (par exemple sous la forme d'une formule logique et/ou arithmétique).

Correction. L'approche utilisée pour la question 1 ne fonctionne plus ici car une généralisation naïve du modèle contiendrait des contraintes d'arité $n+2$. On va tout de même réutiliser les variables du premier modèle, avec les mêmes interprétations. Pour exprimer la relation "la valeur de l'observation est le nombre d'immeubles visibles depuis ce point de vue" avec des contraintes de faible arité, il va être utile d'introduire de nouvelles variables.

Commençons par introduire, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ et $L \in \{G, D, H, B\}$, une variable booléenne $V_{i,j}^L$ qui signifie "l'immeuble $X_{i,j}$ est visible depuis le côté L", une variable $M_{i,j}^L$ de domaine $\{10, \ldots, 10n\}$ qui représente la taille maximum d'un immeuble du côté L de $X_{i,j}$ (inclus), et une variable $K_{i,j}^L$ de domaine $\{1, \ldots, n\}$ qui représente le nombre d'immeubles visibles depuis le côté L jusqu'à $X_{i,j}$. On pose alors les contraintes :

$$\begin{array}{lll}
\forall i \in \{1, \ldots, n\}, & M_{i,1}^G = X_{i,1} & K_{i,1}^G = 1 \\
\forall i \in \{1, \ldots, n\}, & M_{i,n}^D = X_{i,n} & K_{i,n}^D = 1 \\
\forall j \in \{1, \ldots, n\}, & M_{1,j}^H = X_{1,j} & K_{1,j}^H = 1 \\
\forall j \in \{1, \ldots, n\}, & M_{n,j}^B = X_{n,j} & K_{n,j}^G = 1 \\
\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \times \{2, \ldots, n\}, & M_{i,j}^G = \max(M_{i,j-1}^G, X_{i,j}) & K_{i,j}^G = K_{i,j-1}^G + V_{i,j}^G \\
\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n-1\}, & M_{i,j}^D = \max(M_{i,j+1}^D, X_{i,j}) & K_{i,j}^D = K_{i,j+1}^D + V_{i,j}^D \\
\forall i, j \in \{2, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}, & M_{i,j}^H = \max(M_{i-1,j}^H, X_{i,j}) & K_{i,j}^H = K_{i-1,j}^H + V_{i,j}^H \\
\forall i, j \in \{1, \ldots, n-1\} \times \{1, \ldots, n\}, & M_{i,j}^B = \max(M_{i+1,j}^B, X_{i,j}) & K_{i,j}^B = K_{i+1,j}^B + V_{i,j}^B
\end{array}$$

Il reste alors à exprimer le fait que tous les immeubles sont de hauteurs différentes sur une même rangée, et de s'assurer que V_{ij}^L vaut 1 si et seulement si X_{ij} est visible depuis le côté L. Pour cela, on pose les contraintes :

$$\begin{array}{lr}
\forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\}^3 \text{ tels que } j \neq k, & X_{i,j} \neq X_{i,k} \\
\forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\}^3 \text{ tels que } i \neq k, & X_{i,j} \neq X_{k,j} \\
\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}^2, & V_{i,j}^G \iff (X_{i,j} = M_{i,j}^G) \\
\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}^2, & V_{i,j}^D \iff (X_{i,j} = M_{i,j}^D) \\
\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}^2, & V_{i,j}^H \iff (X_{i,j} = M_{i,j}^H) \\
\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}^2, & V_{i,j}^B \iff (X_{i,j} = M_{i,j}^B)
\end{array}$$

et finalement, on s'assure que les observations correspondent aux nombres d'immeubles visibles sur chaque rangée :

$$\begin{array}{lll}
\forall i \in \{1, \ldots, n\}, & K_{i,n}^G = O_i^G & K_{i,1}^D = O_i^D \\
\forall j \in \{1, \ldots, n\}, & K_{n,j}^H = O_j^H & K_{1,j}^B = O_j^B
\end{array}$$