Calculabilité et complexité

Université de Montpellier
Examen
30 mars 2016

Durée 2 heures
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec soin !

Exercice 1 échauffement

1. Montrez que $\mathbb{K}$ est énumérable.
2. Montrez que si A et B sont énumérables, alors $A * B = \{x * y,\ x \in A$ et $y \in B\}$ l'est aussi.

Exercice 2 archi-classique

Soit $A = \{x,\ [x \mid \cdot]$ calcule un polynôme à coefficients premiers supérieurs à 2$\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
2. Sans utiliser le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
3. Montrez que $\bar{\mathbb{K}}$ se réduit à A.

Exercice 3 classique

Soit $B = \{x,$ si y est pair alors $[x \mid y] = 0$ sinon si y est non null et divisible par 3 alors $[x \mid y] \uparrow$ et dans les autres cas $[x \mid y] = 1\}$. Montrez que ni B ni son complémentaire ne sont énumérables.

Exercice 4 points fixes faciles

Proposez un ensemble énumérable infini de programmes qui calculent des fonctions dont les ensembles de points fixes sont disjoints deux à deux (il faut bien sûr le montrer).

Exercice 5 réductions

Soit $C = \{x,\ \forall y\ [x \mid y] = F(y)\}$ où F est une fonction calculable définie sur les nombres pairs.

1. Montrez que $\mathbb{K}$ se réduit à C.
2. Montrez que $\bar{\mathbb{K}}$ se réduit à C.
3. En déduire qu'il existe des ensembles de points fixes non énumérables.

Exercice 6 un peu de complexité

Au niveau des classes de complexité que vous connaissez, que se passe-t-il si P=NP ? On déterminera celles qui deviennent égales, celles qui restent distinctes et celles pour lesquelles la question de l'égalité reste ouverte.

Exercice 7 Sommes

Soit SubsetSum le problème où on donne en entrée un nombre fini d'entiers relatifs non nuls, et où on se demande si tous les sous-ensembles non vides de cette entrée ont une somme différente de zéro.

1. Montrez que SubsetSum est co-NP-complet.
2. Montrez que NP = co-NP si et seulement si Sat et SubsetSum peuvent mutuellement se réduire l'une à l'autre.