

I. Définitions et Exemples.

Lundi 16 mars 2020

Ce diaporama visite quelques propriétés des développements limités. Le point de départ est la formule de Taylor-Young.

Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle) continue en $a \in I$.

- Rappel : la fonction f est continue en a si et seulement si :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;
dit autrement : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Nous avons donc : pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$ pour une certaine fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$. La fonction ε est uniquement définie : $\varepsilon = f - f(a)$.
- Ces formules s'interprètent aisément : la fonction constante $y = f(a)$ est une "bonne" approximation de f , quand $x \rightarrow a$.

Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle) dérivable en $a \in I$.

- Rappel : la fonction f est dérivable en $x = a$ si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$, tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. Ce nombre ℓ , "la dérivée de f en a ", est noté $f'(a)$.
- Donc, pour $x \in I$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a)$, où $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une certaine fonction, $\alpha(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow a$; la fonction α est unique et pourrait s'expliciter. Nous avons aussi $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \beta(x - a)(x - a)$, avec β définie au voisinage de 0 et telle que $\beta(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.
- La fonction affine $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ a pour graphe la droite tangente au graphe de f en $x = a$; pour x voisin de a , elle offre une excellente approximation de f , bien meilleure en tout cas que la fonction constante $y = f(a)$.

Formule de Taylor-Young

Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et pour $a \in I$, les approximations en $x = a$ précédentes sont des exemples de développements limités :

- par une fonction constante : on dit "à l'ordre 0" (cela existe si f est continue en $x = a$) ;
- par une fonction affine : on dit "à l'ordre 1" (cela existe si f est dérivable en $x = a$).

Théorème

Si f est n -fois-dérivable en a , il existe un unique polynôme $T_{a,n} : d^{\circ}(T_{a,n}) \leq n$ et $f(x) = T_{a,n}(x - a) + \varepsilon(x - a).(x - a)^n$ ($x \in I$), où ε est telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. On a : $T_{a,n} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} X^k$.

$f^{(k)}$ est la dérivée k -ième de f : $f^{(0)}(a) = f(a)$, $f^{(1)}(a) = f'(a)$,...

Premiers Exemples

La formule $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \varepsilon(x-a).(x-a)^n$ de

Taylor-Young est le **développement limité** de f , avec 2 parties :

- la partie polynomiale $T_{a,n}(X-a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$, qui est une approximation de f au voisinage de a (uniquement).
- "le reste" $\varepsilon(x-a).(x-a)^n$, ou "l'erreur", qui donne la qualité de l'approximation de f par $T_{a,n}$: plus n est grand, meilleure est l'approximation ; il convient de bien préciser $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- **Exemple 1.** L'exponentielle : $T_{0,n}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.
- **Exemple 2.** Un polynôme est son propre développement limité en 0 : $5 - 3x^2 + x^3 - x^4 + 2x^5 = (5 - 3x^2 + x^3) + x^3\varepsilon_1(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$; il suffit de poser $\varepsilon_1(x) = -x + 2x^2$.

Quelques Applications

- **Lois fondamentales de la Physique.** Les plus utiles sont des approximations par développement limité de lois complexes, parfois inexploitable : loi d'Ohm $U = RI$ (électrocinétique), loi de Mariotte $PV = nRT$ (gaz parfaits),...
- **Newton vs. Einstein.** Quantité de mouvement en mécanique classique d'une masse ponctuelle : $p_N = m.v$ (masse $m(t)$ et vitesse $v(t)$) ; la formulation relativiste $p_E = \frac{m.v}{\sqrt{1 - v^2 c^{-2}}}$ admet le développement limité $p_E = p_N + mv\varepsilon(v)$, $\lim_{v \rightarrow 0} \varepsilon(v) = 0$.

- **Calculs de limites.** Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{x}}$?

$$\frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{x}} = \frac{1 + x + x\varepsilon_1(x) - 1 - x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\varepsilon_1(x)}{\sqrt{x}} = \varepsilon_1(x) \rightarrow 0.$$

Nous y avons utilisé le développement limité de l'exponentielle (en 0, à l'ordre 1) : $e^x = 1 + x + x\varepsilon_1(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n -fois-dérivable en $a \in I$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}$). Pour tout $m \leq n$, nous avons une formule :
 $f(x) = T_{a,m}(x - a) + \varepsilon_m(x - a).(x - a)^m$ ($x \in I$), où
 $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_m(x) = 0$ et $T_{a,m}$ est un polynôme ($d^\circ T_{a,m} \leq m$) ; il existe des polynômes S_m et R_m , uniques tels que $T_{a,n} = S_m + X^{m+1}R_m$ et $d^\circ S_m \leq m$ (division euclidienne). Formules de troncature :

Théorème

$S_m = T_{a,m}$ et, pour tout $x \in I$, $\varepsilon_m(x) = xR_m(x) + x^{n-m}\varepsilon_n(x)$.

Dans l'exemple précédent (développements limités en $a = 0$ de l'exponentielle), nous obtenons $T_{a,2} = 1 + X + \frac{X^2}{2}$ en supprimant le monôme $\frac{X^3}{6}$ de $T_{a,3} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$.

Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n -fois-dérivable en $a \in I$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}$). Introduisons la fonction $g : g(x) = f(x + a)$ (translation horizontale) ; elle est n -fois-dérivable en 0 et y mérite donc un développement limité à l'ordre n :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \varepsilon(x).x^n, \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème

La formule de Taylor-Young de f en a s'écrit :

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \varepsilon(x - a).(x - a)^n.$$

Pour le développement limité d'une fonction f en a (quelconque), nous pouvons toujours nous ramener au cas $a = 0$, en utilisant la fonction $g(x) = f(x + a)$.

Dérivées des fonctions sinus et cosinus : $\sin^{(k)}(x) = \sin(x - k\frac{\pi}{2})$ et $\cos^{(k)}(x) = \cos(x - k\frac{\pi}{2})$ (récurrence sur $k \in \mathbb{N}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Théorème

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \varepsilon_1(x)x^{2n+1}, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \varepsilon_2(x)x^{2n}, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

- Bien noter les epsilons différents $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$;
- l'ordre de chacun : $2n+1$ pour sin, $2n$ pour cos ;
- la parité : polynôme impair pour sin, polynôme pair pour cos ;

Fonctions Hyperboliques

Pour tout entier pair k , nous avons : $sh^{(k)} = sh$ et $ch^{(k)} = ch$;
pour tout k impair, $sh^{(k)} = ch$ et $ch^{(k)} = sh$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Théorème

$$sh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \varepsilon_3(x)x^{2n+1}, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

$$ch(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \varepsilon_4(x)x^{2n}, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

- Bien noter les propriétés de parité...
- Il ne s'agit pas de développements limités à l'ordre n .
- Nous avons : $sh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \varepsilon_5(x)x^{2n+2}$ (ordre $2n+2$), pour $\varepsilon_3(x) = x\varepsilon_5(x)$.

Fonction Inverse

De classe C^∞ , la fonction inverse $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$, admet partout (excepté en 0) des développements limités de tout ordre n .

On peut utiliser la formule : $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ ($k \leq n$); on peut aussi utiliser la somme des termes d'une série géométrique :

Théorème

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \varepsilon_1(x)x^n, \text{ où } \varepsilon_1(x) = \frac{x}{1+x} \text{ (suite de raison } x);$$
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \varepsilon_2(x)x^n, \text{ où } \varepsilon_2(x) = \frac{(-1)^n x}{1+x} \text{ (raison } -x).$$

Autre exemple : $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \varepsilon(x)x^{2n}, \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

Binôme Généralisé

- La formule du binôme $(1+x)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k$ (pour tout entier N), se laisse tronquer à tout ordre $n \leq N$:

$$(1+x)^N = \sum_{k=0}^m \binom{N}{k} x^k + x^m \varepsilon_1(x), \text{ où } \varepsilon_1(x) = \sum_{k=m+1}^N \binom{N}{k} x^{k-m}.$$

- Posons $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$).

Théorème

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^m \binom{\alpha}{k} x^k + x^m \varepsilon_2(x), \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

- Cas particuliers : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + x^2 \varepsilon_3(x)$ ($\alpha = 1/2$) ;
 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2 \varepsilon_4(x)$ ($\alpha = -1/2$) .

Notation "o"

Pour tout $a \in \mathbb{R}$: un **voisinage** de a est une partie de \mathbb{R} contenant un intervalle $]a - \alpha, a + \alpha[$, pour un certain $\alpha > 0$.

- Soient des fonctions f et g définies au voisinage de a :
 f est **négligeable** par rapport à g si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ce qui requiert un voisinage V de a , tel que g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$; on dit aussi : " g **prépondérante** par rapport à f ".
- **Notation de Landau**, pour f négligeable par rapport à g :
 $f(x) = o(g(x))$, quand $x \rightarrow a$.
- **Exemples.** Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, alors $f(x) = o(1)$ quand $x \rightarrow a$.
Pour tous entiers naturels $n > m$: $x^n = o(x^m)$ quand $x \rightarrow 0$.

La notation de Landau se généralise à d'autres usages. Exemple :
pour tout réel r , $x^r = o(e^x)$ quand $x \rightarrow +\infty$; soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$.

Taylor-Young avec "o"

Soit une fonction f , définie sur un voisinage du réel a .

Théorème

Si, pour un entier n , f est n fois dérivable en a , nous avons :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), \text{ quand } x \rightarrow a.$$

La notation "o" est plus intuitive et moins lourde : elle permet de masquer les fonctions "epsilon" sous-jacentes. Exemple ($x \rightarrow 0$) : $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.

Quelques règles de calcul élémentaires :

- $h = o(g) \implies f.h = o(f.g)$, soit : $f.o(g) = o(f.g)$;
- $f = o(h), g = o(h) \implies f + g = o(h)$: $o(h) + o(h) = o(h)$;
- $h = o(f), k = o(g) \implies hk = o(f.g)$: $o(f).o(g) = o(f.g)$;
- $f = o(g)$ et $g = o(h) \implies f = o(h)$: transitivité.

Notation "O"

Soit des fonctions f et g , définies sur une partie I et soit $a \in I$. La notation " $f(x) = O(g(x))$ quand x tend vers a " signifie qu'il existe un réel $M \geq 0$ et un voisinage V de a , tels que : $\forall x \in V$, $|f(x)| \leq M|g(x)|$. Exemple : $f(x) = O(1)$ quand $x \rightarrow a$, signifie que f est bornée sur un voisinage de a .

Comparaison "o" vs "O" : $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$. Comme la notation "o", celle "O" bénéficie de quelques règles de calcul, telle : $h = O(g) \Rightarrow f.h = O(f.g)$, soit : $f.O(g) = O(f.g)$; aussi : $h = o(f)$ et $k = O(g) \Rightarrow hk = o(f.g)$, soit : $o(f).O(g) = o(f.g)$;

Théorème

Si, pour un entier n , f est de classe C^{n+1} en a , nous avons :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + O((x-a)^{n+1}), \text{ quand } x \rightarrow a.$$

Exemples : $\exp(x) = 1 + x + O(x^2)$ et $\sin(x) = x + O(x^3)$ ($x \rightarrow 0$).