



## TD complétude ChR : validité et réversibilité des règles du calcul des séquents

Un séquent est une expression

$$H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p$$

où les  $H_i$  sont appelées hypothèses du séquent et les  $C_j$  les conclusions du séquent. Un séquent est vrai pour une interprétation  $I$  et une assignation  $\rho$  si et seulement si la formule

$$(H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \dots \vee C_p)$$

est vraie pour l'interprétation  $I$  et l'assignation  $\rho$ . On rappelle qu'une assignation associe à chaque variable libre un élément du domaine d'interprétation.

$$\begin{aligned} \llbracket H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p \rrbracket_{I\rho} &= \llbracket (H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \dots \vee C_p) \rrbracket_{I\rho} \\ &= \llbracket \neg H_1 \vee \dots \vee \neg H_n \vee C_1 \vee \dots \vee C_p \rrbracket_{I\rho} \\ &= \llbracket \neg H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket \neg H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \\ &= \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \end{aligned}$$

Un séquent est vrai pour  $I$  et l'assignation  $\rho$  si et seulement si pour  $I$  et  $\rho$  l'une des formules  $H_i$  est fausse et l'une des formules  $C_j$  est vraie. Attention : lorsqu'un séquent est vrai pour toute assignation  $\rho$  le  $H_i$  (faux) ou le  $C_j$  (vrai) qui le rend vrai peut varier en fonction de  $\rho$ .

Une règle du calcul des séquents est dite valide (ou correcte, "*sound*") si étant donnée une interprétation  $I$  lorsque le ou les séquents prémisses (ceux qui sont au dessus de la règle) sont vrais pour  $I$  et pour toute assignation, alors le séquent conclusion (celui qui est au dessous de la règle) est vrai pour  $I$  et pour toute assignation.

Par exemple  $P(x) \vdash P(x)$  (c'est-à-dire la formule  $P(x) \Rightarrow P(x)$ ) est vrai pour toute interprétation  $I$  et pour toute assignation de  $x$  dans  $D$  le domaine de  $I$ . Considérons l'interprétation  $D_I = \{a, b\}$   $i(P) = \{a\}$ . Pour l'assignation  $\rho[a/x]$  c'est parce que  $i(P)(a)$  (conclusion, à droite de " $\vdash$ ") est vraie que le séquent  $P(x) \vdash P(x)$  est vrai, et pour l'assignation  $\rho[b/x]$  c'est parce que  $i(P)(b)$  (hypothèse, à gauche de " $\vdash$ ") est faux que le séquent est vrai.

L'objectif de ce TD est de vous aider à comprendre la signification des règles du calcul des séquents, qui ne sont pas ainsi "par hasard", et qui possèdent beaucoup de propriétés (symétrie, élimination des coupures,...).

## Exercice A Correction des règles du calcul des séquents

---

**Question A(a)** Vérifier que chaque axiome est vrai pour toute interprétation et toute assignation.

Réponse : Soit  $I$  une interprétation de domaine  $D$  et une assignation  $\rho$  des variables libres du séquents dans le domaine  $D$ . Un axiome contient une même formule à gauche et à droite, disons  $A$  :

$$A, H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p, A$$

comme toutes les variables libres du séquent et donc de  $A$  ont une assignation dans  $D$ ,  $\llbracket A \rrbracket_{I\rho}$  a une valeur et en développant la valeur de vérité du séquent pour  $I$  et  $\rho$  nous obtenons une expression booléenne de la forme  $\neg_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots$  qui vaut **1** :

$$\begin{aligned} & \llbracket A, H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p, A \rrbracket_{I\rho} \\ = & \llbracket (A, H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \dots \vee C_p, A) \rrbracket_{I\rho} \\ = & \neg_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \vee_B \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \\ = & \mathbf{1} \end{aligned}$$

**Question A(b)** Vérifiez que les règles de contraction droite et gauche, sont correctes ainsi que les règles gauches et droites des connecteurs  $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$ . Cela fait 10 règles à vérifier, mais il n'est pas nécessaire de toutes les traiter, s'arrêter lorsque vous y arrivez facilement, traiter trois cas est bien. [Certains cas sont traités (sans les assignations) dans les transparents sur la complétude du calcul des séquents propositionnel, vous pouvez regarder.]

**Question A(c)** Vérifier que les règles des quantificateurs  $\exists, \forall$  droite et gauche sont correctes et vous remarquerez que la restriction sur  $\forall_d$  et  $\exists_g$  est absolument nécessaire pour établir la correction : sans cette restriction la règle pourrait ne pas être correcte et conduire d'un séquent vrai à un séquent faux (comme vous l'avez vu dans le CC).

Réponse : A titre d'exemple je traite le  $\exists_g$  :

$$\frac{A(x), H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p}{(\exists u. A(u)), H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p} \exists_g \text{ aucun } x \text{ libre dans les } H_i \text{ ni les } C_j$$

Supposons que le séquent  $A(x), H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p$  soit valide pour  $I$  et pour toute assignation  $\rho$  et que  $x$  ne soit libre dans aucune des formules  $H_i$  ni  $C_j$  (\*) et montrons que le séquent  $\exists u. A(u), H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p$  est valide pour la même interprétation et pour toute assignation  $\rho$ .

Etant donnée une assignation du séquent conclusion  $\rho$  — dans lequel il n'y a pas de variable libre  $x$ , cette variable n'intervient pas dans l'assignation — montrons que le séquent conclusion est vrai pour cette assignation en supposant que pour chaque assignation du séquent prémisses, le séquent prémisses est vrai. Une assignation  $\rho'$  du séquent prémisses est une assignation du séquent conclusion complétée par n'importe l'assignation de  $d_x \in D$  à  $x$ . Dire que le séquent prémisses est vrai pour une assignation complétée  $\rho'$ , c'est dire que l'une des formules  $H_i$  ou  $A(x)$  est fausse ou l'une des formules  $C_j$  est vraie pour cette assignation.

- Si, avec cette assignation  $\rho'$  complétée pour  $x$  par  $d_x$ , l'un des  $H_i$  est faux ou l'un des  $C_j$  est vrai alors le séquent conclusion est vrai.
- Si, pour  $\rho'$ , aucun des  $H_i$  n'est faux et aucun des  $C_j$  n'est vrai alors c'est que  $A(x)$  est faux, et alors  $A(x)$  est faux pour n'importe quelle assignation d'un élément de  $D$  à  $x$ . C'est là où il y a "quelque chose à comprendre" et que nous utilisons la restriction (\*). En effet, il se pourrait, en l'absence de (\*), qu'en remplaçant l'assignation  $d_x$  de  $x$  par une autre, disons  $\rho''$  qui assignerait à  $x$  la valeur  $e_x$  de  $D$ , que le séquent prémisses soit vrai pour  $\rho''$  parce que l'une des formules  $H_i$  est fausse pour  $\rho''$  ou parce que l'une des formules  $C_j$  est vraie pour  $\rho''$ , et nous ne pourrions plus affirmer que  $A(x)$  avec l'assignation  $e_x$  pour  $x$  est fausse. Mais comme il n'y a pas de  $x$  libre dans les  $H_i$  ni dans les  $C_j$  leur valeur est inchangée, c'est comme pour l'assignation de  $x$  à  $d_x$ , les  $H_i$  sont vraies pour  $\rho''$  et les  $C_j$  faux pour  $\rho''$  donc  $A(x)$  est faux pour  $\rho''$ . Ainsi pour toute assignation  $\rho'$  qui étend  $\rho$  à  $x$ ,  $A(x)$  est faux, et donc  $\exists u. A(u)$  est faux pour  $\rho$  (il n'y a pas besoin d'une assignation pour  $x$  pour connaître la valeur de  $\exists u. A(u)$  qui ne contient plus de  $x$  libre). La formule  $\exists u. A(u)$  à gauche du signe " $\vdash$ " dans le séquent conclusion étant fausse pour  $\rho$ , le séquent conclusion est donc faux pour toute assignation  $\rho$ .

**Question A(d)** Montrer que la règle de coupure est valide.

Réponse :

$$\frac{H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p, A \quad A, H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p}{H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p} \text{ cut}$$

Etant donnée une interprétation  $I$  et une assignation  $\rho$  des variables libres des sé-  
quents premisses, montrons que si

(1)  $\llbracket H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p, A \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$  et

(2)  $\llbracket A, H_1, \vdash, H_n C_1, \dots, C_p \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$

alors

$$\llbracket H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$$

Il n'est pas possible d'avoir que les séquents (1) et (2) soient vrais pour  $I, \rho$  à cause  
de  $A$  uniquement dans les deux cas. En effet, si le premier est valide à cause de  $A$ ,  
c'est que  $\llbracket A \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$  et si le second est vrai à cause de  $A$  qui apparaît à gauche du  
signe " $\vdash$ " c'est que  $\llbracket A \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{0}$ . Comme  $\llbracket A \rrbracket_{I\rho}$  ne peut pas être à la fois égal à  $\mathbf{1}$  et à  
 $\mathbf{0}$  il y a une formule vraie parmi  $\neg H_1, \dots, \neg H_n, C_1, \dots, C_p$  pour l'interprétation  $I$  et la  
valuation  $\rho$  et donc le séquent conclusion est vrai.

## Exercice B Réversibilité des règles du calcul des séquents propositionnel

Une règle du calcul des séquents est dite réversible si lorsque le séquent conclusion est valide pour une interprétation et une assignation alors il en est de même de tous les séquents prémisses.

**Question B(a)** Vérifiez que les règles propositionnelles du calcul des séquents des connecteurs  $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$  gauches et droites sont réversibles — attention les règles  $\Leftrightarrow$  ne le sont pas, et les règles des quantificateurs non plus. Comme il ya beaucoup de règles, il n'est pas nécessaire de toutes les traiter : après avoir réussi à en faire deux ou trois il est possible de passer à autre chose.

Réponse : Certains cas sont traités dans les transparents sur la complétude du calcul des séquents propositionnel. A titre d'exemple je traiterai la règle  $\Rightarrow_g$  :

Supposons que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \llbracket A \Rightarrow B, H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p \rrbracket_{I\rho} \\ &= \neg_B \llbracket A \Rightarrow B \rrbracket_{I\rho} \vee_B \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \end{aligned}$$

L'un au moins des éléments de cette disjonction est vrai, puisqu'elle vaut  $\mathbf{1}$ .

- Si  $\llbracket C_{i_0} \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$  pour un certain  $i_0$  alors les deux séquents prémisses sont vrais.

– Pour le premier :

$$\begin{aligned} &\llbracket H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_{i_0}, \dots, C_p, A \rrbracket_{I\rho} \\ &= \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_{i_0} \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \\ &\geq \llbracket C_{i_0} \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

– pour le second :

$$\begin{aligned} &\llbracket B, H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_{i_0}, \dots, C_p \rrbracket_{I\rho} \\ &= \neg_B \llbracket B \rrbracket_{I\rho} \vee_B \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_{i_0} \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \\ &\geq \llbracket C_{i_0} \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

- $\neg_B \llbracket H_{j_0} \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$  pour un certain  $j_0$  alors les deux séquents prémisses sont vrais.
- Pour le premier :

$$\begin{aligned}
& \llbracket H_1, \dots, H_{j_0}, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p, A \rrbracket_{I\rho} \\
&= \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket H_{j_0} \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \\
&\geq \llbracket H_{j_0} \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

- pour le second :

$$\begin{aligned}
& \llbracket B, H_1, \dots, H_{j_0}, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p \rrbracket_{I\rho} \\
&= \neg_B \llbracket B \rrbracket_{I\rho} \vee \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket H_{j_0} \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \\
&\geq \llbracket H_{j_0} \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

- Si  $\neg_B \llbracket A \Rightarrow B \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$ , c'est-à-dire si  $\llbracket A \Rightarrow B \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{0}$  alors  $\llbracket A \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$  et  $\llbracket B \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{0}$ .
- Le premier séquent prémisses est vrai parce que  $\llbracket A \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}$

$$\begin{aligned}
& \llbracket H_1, \dots, H_{j_0}, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p, A \rrbracket_{I\rho} \\
&= \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \\
&\geq \llbracket A \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

- et le second séquent prémisses est vrai parce que  $\llbracket B \rrbracket_{I\rho} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
& \llbracket H_1, \dots, H_{j_0}, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p, A \rrbracket_{I\rho} \\
&= \neg_B \llbracket H_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B \llbracket H_n \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket C_1 \rrbracket_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \llbracket C_p \rrbracket_{I\rho} \vee_B \llbracket A \rrbracket_{I\rho} \\
&\geq \neg_B \llbracket B \rrbracket_{I\rho} = \neg_B \mathbf{0} = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Quand le séquent conclusion est vrai, nous sommes dans l'un (au moins) des trois cas ci-dessus, et donc chacun des deux séquents prémisses est vrai.