# - Fiche de TD5 : Coloration -

**- Exercice 1 - Bouillabaisse -**

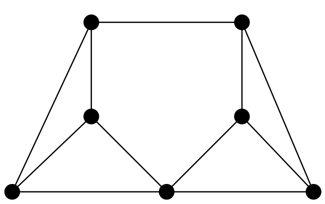
Je possède huit espèces de poissons. Dans, le tableau ci-dessous, une croix indique que deux poissons des espèces correspondantes ne peuvent cohabiter.

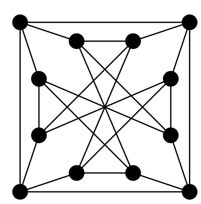
| | Merlu | Sardine | Anchois | Dorade | Rouget | Limande | Baudroie | Calmar |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Merlu | | X | X | X | | | X | X |
| Sardine | X | | | | X | X | X | |
| Anchois | X | | | X | | X | X | X |
| Dorade | X | | X | | X | | | X |
| Rouget | | X | | X | | X | X | |
| Limande | | X | X | | X | | | |
| Baudroie | X | X | X | | X | | | |
| Calmar | X | | X | X | | | | |

Combien faut-il au minimum que j'achète d'aquarium ?

**- Exercice 2 - Crayonnage -**

Déterminer le nombre chromatique des deux graphes suivants :





**- Exercice 3 - Coloration en blocs -**

Montrer que $\chi(G) = \max\{\chi(B) \ : \ B \text{ est un bloc de } G\}$.

**- Exercice 4 - First Fit au top -**

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Montrer qu'il existe un ordre des sommets de $G$ sur lequel l'algorithme First Fit donne une coloration avec $\chi(G)$ couleurs.

**- Exercice 5 - Pas bipartis mais pas loin -**

Soit $G = (V, E)$ un graphe dans lequel tous cycles de longueur impaire s'intersectent.

a. Montrer que $\chi(G) \leq 5$.

b. Montrer de plus que si $\chi(G) = 5$ alors $G$ contient un $K_5$ (on pourra montrer d'abord que $G$ contient un $K_3$, puis un $K_4$).

**- Exercice 6 - Borne chromatique -**

Soit $G = (V, E)$ un graphe de nombre chromatique $k$.

a. Montrer que pour toute $k$-coloration $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ de $G$ et pour toute couleur $i \in \{1, \ldots, k\}$ il existe un sommet de $G$ coloré $i$ par $c$ et qui possède un voisin de chaque couleur différente de $i$.

b. En déduire que $G$ possède au moins $k$ sommets qui ont degré au moins $k-1$.

c. En déduire ensuite que $m \geq k(k-1)/2$.

d. En déduire que $\chi(G) \leq \lceil \sqrt{2m} \rceil$. dont la

e. On note $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ la séquence de degré de $G$ avec $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. En utilisant l'algorithme First Fit, montrer que $\chi(G) \leq \max\{\min\{d_i + 1, i\} \ : \ 1 \leq i \leq n\}$.

f. Retrouver le résultat de la question d.

**- Exercice 7 - Re-borne chromatique -**

Soit $G = (V, E)$ un graphe à $n$ sommets.

a. Montrer que $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

b. En utilisant l'inégalité géométrico-géométrique ($\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pour tout $a, b \geq 0$), en déduire que $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

**- Exercice 8 - Graphe Shift -**

Le *graphe Shift* $SG_n$ est le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles de taille 2 de $\{1, \ldots, n\}$ et où le sommet $\{i, j\}$ avec $i < j$ est relié au sommet $\{k, l\}$ avec $k < l$ si $j = k$.
Montrer que $SG_n$ est sans triangle et vérifie $\chi(SG_n) = \lceil \log_2 n \rceil$.

**- Exercice 9 - Colorier Julius -**

Calculer $\chi'(P)$, où $P$ désigne le graphe de Petersen

**- Exercice 10 - Colorier William -**

Montrer que tout graphe cubique ayant un cycle hamiltonien est 3-arête-colorable. En déduire que le graphe de Petersen ne possède pas de cycle hamiltonien (en utilisant l'exercice précédent).

**- Exercice 11 - Arête-coloration des graphes bipartis -**

En utilisant l'exercice 5 de la fiche de TD 2, montrer que tout graphe biparti $G$ vérifie $\chi'(G) = \Delta(G)$.

**- Exercice 12 - Carrés latins -**

Une matrice $n \times n$ dont les entrées appartiennent à $\{1, \ldots, n\}$ est appelée un *carré latin* si chaque élément de $\{1, \ldots, n\}$ apparaît une et exactement une fois par ligne et par colonne. Modéliser le problème de construction d'un carré latin comme un problème de coloration d'arêtes d'un graphe bien choisi.
Un groupe de 7 étudiantes et de 7 étudiants décident de réviser leur cours de Graphes chaque soir de la semaine. Ils veulent réviser en binômes constitués d'un étudiant et d'une étudiante et ne veulent pas qu'un même binôme se forme deux fois dans la semaine. Résoudre le problème.

**- Exercice 13 - Coloration équilibrée -**

Soit $G = (V, E)$ possédant une arête-coloration avec $k$ couleurs. Montrer alors que $G$ possède une $k$-arête-coloration $c : E \to \{1, \ldots, k\}$ vérifiant pour tout $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$ on a $\left| |c^{-1}(i)| - |c^{-1}(j)| \right| \leq 1$.

**- Exercice 14 -** 3-COLORATION **en temps polynomial ?** P = NP **? -**

Soit $G = (V, E)$ un graphe possédant un vertex-cover $X$ de taille $c$.

a. Montrer que le graphe $G[X]$ possède au plus $3^c$ 3-coloration.

b. Si une coloration de $G[X]$ est fixée, indiquer comment l'étendre en une coloration de $G$ si c'est possible.

c. En déduire un algorithme en $O(n)$ pour décider si $G$ est 3-colorable ou non.

d. On a vu en cours que le problème de 3-COLORATION est NP-complet. A-t-on montré que P = NP ? Notamment, dans la question précédente, spécifier la constante du $O$ dépendant de $c$.