

Calculabilité et complexité

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Examen

9 janvier 2017

Durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé

Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec soin !

Exercice 1 échauffement

1. Montrez que \mathbb{K} est énumérable.
2. Montrez que si A et B sont énumérables, si $\mathbb{K} \prec A$ et $\mathbb{K} \prec B$, alors $C = \{2^x 3^y, x \in A \text{ et } y \in B\}$ est énumérable et vérifie $\mathbb{K} \prec C$.

Exercice 2 archi-classique

Soit $A_{p,q} = \{x, [x \mid p] = 0 \text{ et } [x \mid q] \text{ diverge}\}$, où $p \neq q$.

1. $A_{p,q} \prec \mathbb{K}$, $A_{p,q} \prec \overline{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K} \prec A_{p,q}$, $\overline{\mathbb{K}} \prec A_{p,q}$?
2. Si p, q, r sont distincts, est-ce que $A_{p,q}$ et $A_{p,q}$ sont récursivement séparables ?

Exercice 3 toujours facile

1. Montrez qu'il existe une fonction calculable *totale* f telle que
 $[f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + [2^n \mid \cdot] + 2n + 1$
2. Quelles fonctions sont calculées par les points fixes de f ?

Exercice 4 un zeste d'oracle

1. Existe-t-il un oracle A tel que $PSPACE^A \neq EXP^A$?
2. Existe-t-il un oracle A tel que $PSPACE^A = EXP^A$?

Exercice 5 beaucoup d'effondrements

1. Montrez que si $NP = coNP$, alors

$$\Sigma_2^p = NP \text{ .}$$

2. Montrez que si $NP = coNP$, alors pour tout $n \geq 1$

$$\Sigma_n^p = \Pi_n^p = NP \text{ .}$$

3. Montrez que si le problème SAT est dans $coNP$, alors toutes les classes Σ_n^p et Π_n^p coïncident avec NP .

Exercice 6 une goutte de preuves interactives

Montrez que le langage suivant est dans IP

$$NQR = \{(k, p) \mid p \text{ est premier, et il n'existe pas } m \text{ vérifiant } m^3 = k \bmod p\} \text{ .}$$