Ceci n'est pas un poly [1]

HLIN201

Sèverine Bérard
2019-20

L'absentéisme nuit gravement à la compréhension
Comprendre pour changer le monde [2] (en mieux svp)

1. Ce document ne constitue pas le cours du module *HLIN201 De la combinatoire aux graphes*. Vous devez avoir vos propres notes de cours pour compléter ce document.
2. « L'éducation est l'arme la plus puissante qu'on puisse utiliser pour changer le monde », Nelson Mandela

Sommaire de ce livret

Ce livret regroupe différents documents utilisés en cours et en TD. Vous y trouverez :

Les diapositives passées en cours sont mises à disposition au fur et à mesure sur l'espace pédagogique.

HLIN201 : De la combinatoire aux graphes

1 Organisation

Responsable du module : Sèverine Bérard - maîtresse de conférences - département informatique de la Fac De Sciences (FDS) - ISEM (bât. 22)
Contact : Severine.Berard@umontpellier.fr (*pensez à indiquer HLIN201 et votre nom dans vos mails*)
Espace pédagogique : Le site du module est sur la plate-forme Moodle de l'UM (accessible via l'ENT)

Modalités de contrôle des connaissances (MCC)

— Écrit (100 %) : 2h organisé par la FDS avec session de rattrapage

— ATTENTION pas de contrôle continu cette année suite aux réductions d'heures

$$\boxed{\text{Note finale} = \text{Écrit}}$$

Document autorisé pour les évaluations : une feuille A4 manuscrite recto-verso

Emploi du temps 16,5 heures de cours (11 séances). 25,5 heures de TD (17 séances).
Chargée cours : Sèverine Bérard ; *amphi commun* : lundi 15h
Chargé·e·s de TD : Anne-Élisabeth Baert (C), Sèverine Bérard (D), Sylvain Daudé (B) et Mountaz Hascoët (A)

Nouveauté cette année 2019-20

— Suite à la 2^{e} diminuaton des heures d'enseignenement de tous les modules de la Fac des Sciences, 2 séances de cours et 3 séances de TD ont été supprimées par rapport à 2017-18.

Assiduité et convenances

— La présence en cours et en TD est **très fortement** recommandée

— Si vous arrivez en retard, merci de rentrer par le haut de l'amphi

— N'hésitez pas à poser des questions pendant le cours

— Vos téléphones portables devront être éteints (pas juste sur silencieux) et rangés lors des cours et des TD

— Bien sûr, on ne lit pas le journal pendant les cours et TD, *etc.*

2 Pédagogie

"Règles d'or"

1. Travail
2. Assiduité
3. Confiance en soi

Proposition de méthode de travail

— Relire le cours et revoir les exercices avant d'aller en cours et TD (en pratique, 30 min. 1 à 2 fois par semaine)

— Écouter et participer lors des cours et TD, **prendre des notes** (ce qui n'est pas écrit sur les documents fournis mais aussi les principaux résultats). Il vous faut des notes de cours "autonomes".

— Utiliser toutes les ressources disponibles (cours&TD, Moodle, livres et sites internet adéquats)

— Travailler en groupe peut également aider

Contenu du cours Le cours se compose de deux parties, la première axée sur la combinatoire, la seconde sur les graphes.

1. Dans la première partie, nous reverrons les notions d'ensemble, de relation binaire, de fonction et d'application, vues au 1^{er} semestre dans le module Calculus. Nous aborderons la cardinalité des ensembles et différentes techniques de dénombrement. Nous reverrons les concepts de raisonnement par récurrence, vus en Calculus. Nous verrons une nouvelle manière de définir les ensembles, par induction, ainsi que les preuves par induction structurelle associées à ce type d'ensemble. Enfin, nous verrons différentes caractéristiques des relations binaires, en particulier les relations d'équivalence et d'ordre.
2. Dans le seconde partie, nous introduirons un nouveau concept, les graphes, nous aborderons leur différentes propriétés et mettrons en œuvre les principes de preuves vus en première partie pour raisonner sur ces graphes.

Les buts de ce module, au delà d'introduire le concept fondamental en informatique qu'est l'objet graphe, sont de vous familiariser avec l'abstraction mathématique nécessaire à toute branche de l'informatique, de vous apprendre à raisonner – *essentiel*, même dans la vie de tous les jours – et à écrire des preuves valides de propriétés.

Planning *cf.* Moodle

Bibliographie Mathématiques pour l'informatique : avec 309 exercices corrigés. André Arnold et Irène Guessarian. 4e édition - Paris : ÉdiScience, impr. 2005. Chapitres 1 - 2 - 3 - (10)
∼ 20 exemplaires disponibles à la BU

Tous les documents distribués en cours sont aussi sur l'espace pédagogique Moodle. Le surplus sera déposé au département informatique (bât. 16), dans le casier prévu à cet effet, *i.e.* avec l'étiquette HLIN201.

3 Moodle

— Toutes les ressources utilisées en cours et TD seront mises à disposition, en plus d'annales et d'annales corrigées.

— Mise en place d'espace dédiés pour les FAQ et les suggestions/corrections

— L'espace pédagogique du cours sous Moodle contient des tests et QCM qui apparaîtront au fur et à mesure. Pour débloquer les tests/ressources suivantes, il faut obtenir une note seuil ou effectuer un certain nombre de tentatives. Toutes les notes des tests comptent pour la "Note Moodle" que vous pourrez suivre dans votre *carnet de note*.

Fiches de cours

1 Rédaction des preuves

Les raisonnements par récurrence/induction sont similaires, on adopte la structure suivante pour la rédaction des preuves :

— Écrire la propriété à prouver : Soit $P(\mathbf{n})$="*bla bla bla* **n** *bla bla*"

— puis 3 étapes "étiquetées", ici pour les récurrences :

1. **Base** : Montrer que $P(\mathbf{n_0})$ est vraie pour un certain $\mathbf{n_0} \in \mathbb{N}$ que vous aurez déterminé
2. **Récurrence** : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant n_0$
   Hypothèse de **R**écurrence (**HR**) : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant n_0$
   bla bla bla **HR** *bla bla* donc $P(n+1)$ est vraie
3. **Conclusion** : on a montré que $P(n_0)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant n_0$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq n_0}$

— Pour les raisonnements par induction, peu de changements : Soit $P(\mathbf{n})$="*bla bla bla* **n** *bla bla*"

1. **Base** : Montrer que $P(\mathbf{n_0})$ est vraie pour un certain $\mathbf{n_0} \in \mathbb{N}$ que vous aurez déterminé
2. **Induction** : Montrons que $(\forall k \in [n_0..n] P(k)) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant n_0$.
   Hypothèse d'**I**nduction (**HI**) : On suppose que $P(k)$ est vraie $\forall k \in [n_0..n]$ pour un $n \geqslant n_0$
   bla bla bla **HI** *bla bla* donc $P(n+1)$ est vraie
3. **Conclusion** : on a montré que $P(n_0)$ est vraie et que $(\forall k \in [n_0..n] P(k)) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geq n_0$, donc par le principe d'induction on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geqslant n_0}$

2 Raisonnements par récurrence/induction sur $\mathbb{N}$

Les phrases suivantes sont des morceaux de 2 raisonnements tirés de wikipédia, l'un par induction et l'autre par récurrence, il vous faut les séparer, les remettre dans le bon ordre et y ajouter les mots clés : **Base** *2, **Récurrence**, **Induction**, **HR**, **HI**, **Conclusion***2. Effectuez cet exercice dans le test sur les raisonnement de MOODLE (question 6).
Rmq : Les entiers impairs sont les entiers de la forme $2n-1$ *(le premier, obtenu pour* $n=1$*, est* 1*).*

A On suppose que $P(k)$ est vraie $\forall k \in [2..n]$ pour un $n \geqslant 2$

B Considérons la somme $1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1)$ constituée de $n+1$ entiers impairs. D'après **HR** $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$, on a donc $1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$, ce qui démontre que $P(n+1)$ est vraie.

C Soit $P(n)$: "la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n : $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$."

D On a montré que P(2) est vraie et que $(\forall k \in [2..n] P(k)) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geq 2$, donc par le principe d'induction on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geqslant 2}$

E On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$, c.-à-d. que $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$.

F Soit $P(n)$: "n possède un diviseur premier"

G Prenons $n_0=1$, $2\times 1-1=1^2$, donc $P(1)$ vraie

H Prenons $n_0=2$, 2 possède un diviseur premier qui est lui-même, donc $P(2)$ est vraie.

I Montrons que $(\forall k \in [2..n] P(k)) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 2$.

J On a montré que $P(1)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geqslant 1}$.

K Considérons $n+1$:

— ou bien $n+1$ est premier alors il possède un diviseur premier qui est lui-même

— ou bien $n+1$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur p avec $p \neq 1$ et $p \neq n+1$ et on peut écrire $n+1=p\times q$ avec $p,q \in [2..n]$. D'après **HI** p possède un diviseur premier, celui-ci est aussi diviseur de $n+1$, donc $P(n+1)$ est vraie.

L Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$.

Propriété 1 Soient $\ $, B deux ensembles finis : $|\ | \leqslant |B|$ si et seulement si il existe une application injective $f\ :\ \ \longrightarrow B$.

Preuve : Dans tout ce qui suit $\ $ et B sont deux ensembles finis.
L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ équivaut à la conjonction des deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
Pour prouver une équivalence on peut donc prouver les deux implications.

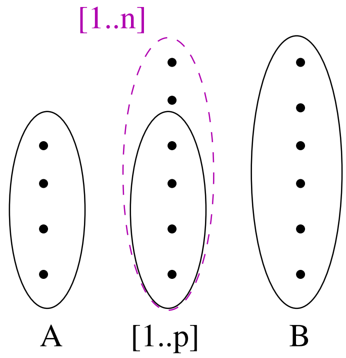
1. Montrons que $|\ | \leqslant |B| \Rightarrow$ il existe une application injective $f\ :\ \ \longrightarrow B$
   (pour prouver qu'il en existe une il va donc falloir essayer d'en construire une)

   — Soient $|\ | =$ $\ $ et $|B| =$ $\ $, on a

   — Soient deux bijections :

   — Comme $p \leqslant n$,

   — Alors $g = f_B \circ f$, c.-à-d.

   Schéma

   est bien injective

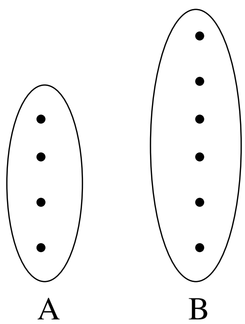
2. Montrons que l'existence d'une application injective $f\ :\ \ \longrightarrow B \Rightarrow |\ | \leqslant |B|$

   — Soit $f\ :\ \ \longrightarrow B$ une application injective

   — Alors , est une partie de B à , c.-à-d. que

   — Appelons

   — On utilise le principe d'additivité pour compter :

   Schéma

3. Conclusion : on a montré que <u>si</u> $|\ | \leqslant |B|$ <u>alors</u> il existe une application injective $f\ :\ \ \longrightarrow B$ et que <u>s'</u>il existe une application injective $f\ :\ \ \longrightarrow B$ <u>alors</u> $|\ | \leqslant |B|$, donc $|\ | \leqslant |B|$ <u>si et seulement si</u> il existe une application injective $f\ :\ \ \longrightarrow B$

□

Propriété 2 $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini. Il est stable par addition, multiplication et exponentiation. Il est *bien ordonné* : toute partie non vide admet un plus petit élément.

L'argument diagonal : L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Preuve : Nous ne prouverons que le fait qu'il n'y a pas d'énumération de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1. Comment se représenter $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$?
   Par leur : une partie P de $\mathbb{N}$ peut être représentée par

   $$\chi_P :$$

   Exemple : $\chi_{\{0,2,3\}} =$ *. Cette fonction peut être vue comme une suite de 0 et de 1 :*
   Dans ce formalisme la suite $1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,\ldots$ *représente*
   Exercices :
   - — quelle partie de $\mathbb{N}$ est représentée par $0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots$?
   - — quelle partie de $\mathbb{N}$ est représentée par $1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,\ldots$?
   - — quelle partie de $\mathbb{N}$ est représentée par $1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,\ldots$?
2. Soit $E = \{\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}\}$ l'ensemble des définissant les parties de $\mathbb{N}$. On a donc
3. Nous allons **raisonner par l'absurde** : supposons que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est dénombrable, donc que E est dénombrable. Alors il existe une de E, c.-à-d. une
4. Soit la fonction diagonale $d : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ construite comme suit :

   Remarquez que
5. Comme E est supposé et comme , d est comme une fonction/partie de $\mathbb{N}$ de rang $k \in \mathbb{N}$, c.-à-d. que
6. Intéressons nous à la valeur :
   - — d'après le point précédent
   - — **MAIS** d'après la définition de d,

   Cette **contradiction** permet d'affirmer que
   c.-à-d. que

□

1 Ensemble défini par induction

Nous définissons par induction un ensemble $\mathcal{D}$ de dessins constitués de *pixels*, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}$ l'ensemble des dessins 2D. Un pixel est un carré, composé donc de 4 *côtés*, représentés en noir sur la figure ci-contre et d'un *intérieur*, représenté en grisé. $\square$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble défini par le schéma inductif suivant :

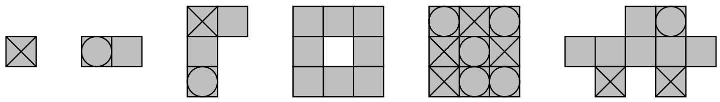
Base : $\square \in \mathcal{D}$

Règles :

R1. si on juxtapose deux éléments de $\mathcal{D}$, sans chevauchement, par un côté de pixel, le nouvel élément obtenu est dans $\mathcal{D}$

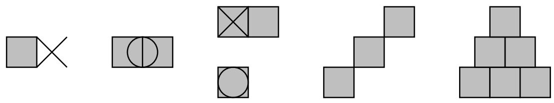
R2. si on dessine un symbole $\bigcirc$ ou $\times$ dans un pixel vide d'un élément de $\mathcal{D}$, le nouvel élément obtenu est dans $\mathcal{D}$

Quelques exemples d'éléments qui sont dans $\mathcal{D}$:



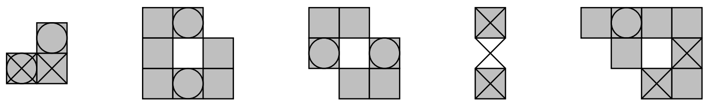
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

et quelques exemples d'éléments qui ne sont pas dans $\mathcal{D}$:



(g) (h) (i) (j) (k)

Que pensez-vous des éléments suivants, sont-ils dans $\mathcal{D}$?



(1) (2) (3) (4) (5)

Plus formellement $\mathcal{D}$ se défini de la manière suivante, où $K=\{\bigcirc,\times\}$:

Base : $\square \in \mathcal{D}$

Règles :

1. $R1: \begin{array}{rcl} \mathcal{D} \times \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & \text{la juxtaposition sans chevauchement de } d_1 \text{ et } d_2 \text{ par un côté de pixel} \end{array}$
2. $R2: \begin{array}{rcl} K \times \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (k, d) & \longmapsto & \text{le dessin obtenu en ajoutant le symbole } k \text{ à l'intérieur d'un pixel vide de } d \end{array}$

D'après les définitions vues en cours, $R1$ est une règle dite <u>interne</u> et $R2$ est une règle dite <u>externe</u>.

2 Fonction définie par induction

Voici un exemple d'une application définie par induction sur l'ensemble $\mathcal{D}$:

$$nbRond: \begin{array}{rcl} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ d & \longmapsto & \text{le nombre de ronds dans } d \end{array}$$

En considérant a, b, c, d, e et f les éléments de $\mathcal{D}$ de la section précédente, on a : $nbRond(a) = nbRond(d) = 0$, $nbRond(b) = nbRond(c) = nbRond(f) = 1$ et $nbRond(e) = 5$.

nbRond doit être définie précisément pour chaque élément de la base et pour chaque règle de construction de $\mathcal{D}$:

Base : $nbRond(\square) = 0$

Règles :

R1. $nbRond(R1(d_1, d_2)) = nbRond(d_1) + nbRond(d_2)$

R2. $nbRond(R2(k, d)) = \begin{cases} 1 + nbRond(d) & \text{si } k = \bigcirc \\ nbRond(d) & \text{sinon} \end{cases}$

3 Preuve par induction structurelle

Prouvons maintenant que tous les dessins de $\mathcal{D}$ ont un nombre de ronds inférieur ou égal à leur nombre de pixels.

Soit $P(d)$: “Le dessin d a un nombre de ronds inférieur ou égal à son nombre de pixels”.

Nous devons montrer que $P(d)$ est vraie $\forall d \in \mathcal{D}$. Pour cela, il suffit de montrer que $P(d)$ est vraie pour tous les éléments d de la base de $\mathcal{D}$ et que toutes les règles de construction R_i de $\mathcal{D}$ respectent la propriété.

Base : il y a un seul élément dans la base, $\square$, qui a un pixel et aucun rond, donc $P(\square)$ est vraie

Règles :

R1. Supposons que d_1 et d_2 sont deux éléments de $\mathcal{D}$ tels que $P(d_1) = P(d_2) = Vrai$, soit $d = R_1(d_1, d_2)$, il faut montrer que $P(d)$ est vraie.
Soient p_1, p_2 et p le nombre de pixels de d_1, d_2 et d, et r_1, r_2 et r le nombre de ronds de d_1, d_2 et d.

— $P(d_1)$ vraie $\Rightarrow p_1 \geqslant r_1$

— $P(d_2)$ vraie $\Rightarrow p_2 \geqslant r_2$

Comme d_1 et d_2 ne se chevauchent pas dans d, $p = p1 + p2$ et $r = r1 + r2$. En combinant les deux inéquations précédentes on a $p_1 + p_2 \geqslant r_1 + r_2$ d'où $p \geqslant r$ et donc $P(d)$ est vraie.
R_1 respecte bien la propriété P.

R2. Supposons que d est un élément de $\mathcal{D}$ tel que $P(d) = Vrai$, il faut montrer que $P(R_2(k, d))$ est vraie.
$P(d)$ vraie implique que le nombre de pixel de d, p_d, est supérieur ou égal au nombre de ronds de d, r_d.
Soit p le nombre de pixels de $R_2(k, d)$ et r son nombre de rond. L'élément $R_2(k, d)$ a le même nombre de pixel que d, $p = p_d$.

— Si k est une croix, $R_2(k, d)$ a le même nombre de rond que d, $r = r_d$, donc $P(R_2(k, d))$ est vraie dans ce cas.

— Dans le cas où k est un rond, il s'ajoute dans un pixel ne contenant pas de rond, ce qui signifie que $r_d < p_d$ et que $r = r_d + 1$, d'où $r_d = r - 1$ et $r - 1 < p_d$, donc $r - 1 < p$, autrement dit $r \leqslant p$ et $P(R_2(k, d))$ est vraie.

R_2 respecte bien la propriété P.

On a montré que P est vraie pour l'unique élément de la base de $\mathcal{D}$ et qu'elle est respectée par les 2 règles de construction, donc $P(e)$ est vraie $\forall e \in \mathcal{D}$.

Feuilles d'exercices

1 Ensembles

Notations et rappels : Un ensemble est une collection d'objets distincts où l'ordre n'a pas d'importance.

- L'ensemble vide, noté $\{\}$ ou $\emptyset$, n'a aucun élément
- Exemples : $A = \{1, 2, 3\}$ est un ensemble non vide défini en extension, $1 \in A$ et $a \notin A$;
  $Pair = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \texttt{pair}(n)\}$ est l'ensemble des entiers pairs défini en compréhension, $2 \in Pair$ et $3 \notin Pair$
- Comparaison d'ensembles (dans la suite E est l'ensemble de référence et A et B des parties de E)
  - A est inclus dans B, se note $A \subseteq B$, si $\forall x \in A, x \in B$
  - $A \nsubseteq B$ si la phrase précédente est fausse, ce qui s'écrit $\exists x \in A \,|\, x \notin B$
  - $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$
  - $A \neq B$ s'il y a un élt de A qui n'est pas élt de B ou s'il y a un élt de B qui n'est pas élt de A
  - A est strictement inclus dans B si $A \subseteq B$ et $A \neq B$, se note $A \subsetneq B$ (attention différent de $A \nsubseteq B$)
- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On a par définition : $A \subseteq E$ ssi $A \in \mathcal{P}(E)$
  Exemple : $C = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(C) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- Opérations sur les ensembles
  - Union : $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
  - Intersection : $A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$
  - Différence : $B \setminus A = \{x \,|\, x \in B \text{ et } x \notin A\}$
  - Complémentaire : $\overline{A}^E = E \setminus A$ pour $A \subseteq E$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E on note $\overline{A}$
  - Produit cartésien : $A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A \text{ et } y \in B\}$
- L'union et l'intersection sont des opérations
  - associatives : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
  - commutatives : $A \cap B = B \cap A$
  - distributives l'une par rapport à l'autre : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Le produit cartésien se généralise à une famille finie d'ensembles :
  $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \,|\, e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_n \in E_n\}$
  $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est appelé un *n-uplet*. Autre notation souvent utilisée : E^m pour $E \times E \times \ldots \times E$ m fois
- Une *partition* P d'un ensemble E est :
  1. un ensemble non vide P de parties non vides de E
  2. les parties sont toutes disjointes : si $A_i \neq A_j$ sont deux parties éléments de P, alors $A_i \cap A_j = \{\}$
  3. les parties élément de P recouvrent E : si $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ alors $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$

1. Soient les ensembles A, B, C, D, E définis comme suit, dans l'ensemble $\mathbb{N}$:
   $A = \mathbb{N}$ $\quad D = \overline{C}$
   $B = \emptyset$ $\quad E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ avec } n = 2m\}$
   $C = \{0, 2, 4, 6\}$.
   Pour chacune des expressions suivantes, retrouvez à quel ensemble elle correspond parmi A, B, C, D ou E :
   $\overline{C} \cup \overline{D}$ $\quad A \backslash C$ $\quad E \cap C$
   $A \backslash \overline{E}$ $\quad B \cap \overline{D}$ $\quad C \cup E$
2. Dessinez un ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et deux ensembles A et B, tels que $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 5$ et $|A| < |B|$ (cardinal de A strictement plus petit que cardinal de B).
   - Écrivez en extension $\mathcal{P}(A)$.
   - Donnez C_1, C_2 et C_3, tels que $\{C_1, C_2, C_3\}$ soit une partition de E.

2 Relation binaire, fonction, application

Notations et rappels : Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ d'un ensemble X vers un ensemble Y est définie par un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$, appelé le *graphe* de la relation.

— Pour $(x, y) \in \mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$ et on dit que x et y sont en *relation*

— La relation *réciproque* d'une relation $\mathcal{R}$ de A vers B est notée $\mathcal{R}^{-1}$. $\mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$

— Une relation binaire de X vers Y est *fonctionnelle* si pour tout $x \in X$, il existe *au plus un* élément $y \in Y$ en relation avec x

  — X est l'ensemble de *départ* et Y l'ensemble *d'arrivée*

  — $Dom(f) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ avec } y = f(x)\}$ est le *domaine* ou *ensemble de définition* de f, $Dom(f) \subseteq X$

  — $Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ avec } y = f(x)\}$ est l'*image* de f, $Im(f) \subseteq Y$

  — **L**'*image* de $x \in X$ par f est l'élément y de Y tel que $y = f(x)$

  — **Un** *antécédent* par f d'un élément y de Y est un élément x tel que $y = f(x)$

— On se donne une fonction $f : X \longrightarrow Y$. Soit A une partie de X et B une partie de Y

  — *l'image directe* de A par f : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ avec } y = f(x)\}$ ($f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A). Ex : $f(X) = Im(f)$

  — *l'image réciproque* de B par f : $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ($f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B). Ex : $f^{-1}(Y) = Dom(f)$

— Une fonction f de X vers Y est une *application* si son domaine est l'ensemble X tout entier : $Dom(f) = X$.
Attention : une application est une fonction mais une fonction n'est pas toujours une application.

— Une application f est *injective* si chaque élément $y \in Y$ a <u>au plus un</u> antécédent. Elle est *surjective* si chaque élément $y \in Y$ a <u>au moins un</u> antécédent. Elle est *bijective* si c'est une application injective et surjective, c.-à-d. si chaque élément $y \in Y$ a <u>exactement un</u> antécédent
On a donc :

  — f est injective ssi $\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, qui peut aussi s'énoncer par sa contraposée : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, autrement dit, chaque paire d'éléments distincts ont des images distinctes

  — f est surjective ssi $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tel que $y = f(x)$

  — f est bijective ssi $\forall y \in Y, \exists! x \in X$ tel que $y = f(x)$, c.-à-d. f est injective et surjective

3. Dans cet exercice, on considère deux ensembles E et F, tels que $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$.

   (a) Dessinez une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F qui ne soit pas fonctionnelle, écrivez $\mathcal{R}$ en extension.

   (b) Dessinez une relation binaire fonctionnelle g de E vers F qui ne soit pas une application.

   (c) Dessinez une application f de E vers F qui ne soit ni injective, ni surjective. Expliquez votre résultat.

   (d) Soit l'application $m : E \longrightarrow F$, avec $m = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c), (5, d)\}$.

   — m est-elle injective (justifiez) ?

   — m est-elle surjective (justifiez) ?

   — m est-elle bijective (justifiez) ?

   — Soit $A \subseteq E$ avec $A = \{1, 2, 3\}$, que vaut $m(A)$?

   — Soit $B \subseteq F$ avec $B = \{a\}$, que vaut $m^{-1}(B)$?

3 Pour s'entraîner

3.1 Ensembles

4. Soient A, B, C trois ensembles dans l'univers $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$. Pour chacune des paires d'expressions suivantes, donnez si possible une valeur pour C de sorte que :
   (a) Les deux expressions soient égales ;
   (b) Les deux expressions soient différents.
      i. $A \cup C$ et $A \cap C$
      ii. $A \cap \overline{B}$ et $A \cap \overline{C}$
      iii. $\overline{(A \cup B)}$ et $\overline{A} \cup \overline{C}$
      iv. $A \cap B \cap C$ et $A \cap C$
5. Soient A, B, C, D des ensembles. Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse (un dessin peut suffire).
   (a) Si $A \subseteq B$ et $A \cap C \neq \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.
   (b) Si $A \subseteq B$ et $B \cap C = \emptyset$, alors $A \cap C = \emptyset$.
   (c) Si $A \subseteq B$ et $\overline{B} \cap C \neq \emptyset$, alors $\overline{A} \cap C \neq \emptyset$.
   (d) Si $B \subseteq A$, $C \subseteq D$ et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.
   (e) Si $A \subseteq B$, $D \subseteq C$ et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.
   (f) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B$.

3.2 Relation binaire, fonction, application

6. Dans cet exercice $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$. On définit les applications

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ 1 & \longmapsto & a \\ 2 & \longmapsto & a \\ 3 & \longmapsto & c \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & 1 \\ b & \longmapsto & 1 \\ c & \longmapsto & 2 \\ d & \longmapsto & 3 \end{array}$$

   — Représentez sur deux diagrammes sagittaux différents les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
   — Pour chaque application $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ vous indiquerez si elle est, ou pas, injective, surjective ou bijective.
   — On rappelle que $(E \longrightarrow F)$ ou F^E est l'ensemble des applications de E vers F. Peut–il exister une application de $(F \longrightarrow E)$ qui soit injective ? surjective ? Si oui donnez un exemple, si non expliquez pourquoi.
   — Peut–il exister une application de $(E \longrightarrow F)$ qui soit injective ? surjective ? Si oui donnez un exemple, si non expliquez pourquoi.
   — On suppose $s \in (E \longrightarrow F)$ et $t \in (F \longrightarrow E)$ telle que s soit non injective. Prouvez qu'alors $t \circ s$ est non injective.
   — On suppose $s \in (E \longrightarrow F)$ et $t \in (F \longrightarrow E)$ telle que t soit non injective et s soit injective. Est–il possible d'avoir $t \circ s$ bijective ?

Voir la fiche de cours n° 1, page 6, pour la rédaction des preuves.

Notations et rappels

— On rappelle les principes – équivalents – permettant de démontrer un prédicat $P\ :\mathbb{N}\longrightarrow$ *Booléen*

Base	Récurrence	Conclusion
$P(n_0)$	$\forall n \geqslant n_0 : (P(n) \Rightarrow P(n+1))$	$\forall n \geqslant n_0 : P(n)$
Base	Induction	Conclusion
$P(n_0)$	$\forall n \geqslant n_0 : ((\forall k : n_0 \leqslant k \leqslant n, P(k)) \Rightarrow P(n+1))$	$\forall n \geqslant n_0 : P(n)$

1 Récurrences

1. Montrez que la propriété suivante est vraie sur une partie de $\mathbb{N}$ que vous déterminerez :

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

2. On suppose que n est entier non nul. Soit un échiquier ayant 2^n cases par coté. On enlève une case de coin à cet échiquier. Un trimino est un morceau d'échiquier de la forme :  .
   (a) Faites un dessin pour $n = 1$ et $n = 2$, et montrez comment recouvrir cet échiquier auquel on a enlevé une case de coin par des triminos.

   (b) Faites un dessin pour $n = 3$, et servez vous du résultat précédent pour montrer comment recouvrir cet échiquier auquel on a enlevé une case de coin par des triminos pour tout $n \geqslant 1$.
   (c) Prouvez que l'on peut recouvrir par des triminos, un échiquier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.
   (d) Prouvez que le recouvrement est possible quel que soit l'emplacement de la case que l'on enlève à l'échiquier.

   (e) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N} : (2^{(2n)} - 1$ est divisible par 3).

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On rappelle que la somme des mesures en radians des angles d'un triangle est π.
   Montrez que la somme des mesures en radians des angles d'un polygone convexe à n cotés est $(n - 2)\,\pi$.

2 Induction

4. Montrez que tout entier supérieur ou égal à 2 est décomposable en un produit de nombres premiers. (*Exemple* : $28 = 2 * 2 * 7$)

3 Pour s'entraîner

5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + n + 2$ est pair.
6. On écrira $p \mid n$ pour noter que p divise n, pour p et n deux entiers. On considère les propriétés $P(n)$: "$9 \mid (10^n - 1)$" et $Q(n)$: "$9 \mid (10^n + 1)$".
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \Rightarrow Q(n + 1)$
   (b) Trouver les valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ est vraie
   (c) Trouver les valeurs de n pour lesquelles $Q(n)$ est vraie

7. On rappelle l'algorithme de l'exponentiation rapide :

```
Algorithme : expo
Données : a, b ∈ ℕ, a ≠ 0, b ≠ 0
Résultat : a^b
c : Entier;
début
    si b=1 alors
        retourner a
    sinon si b est pair alors
        c := expo(a , b / 2) ;
        retourner  c * c
    sinon
        retourner a * expo(a , b - 1)
    fin si
fin algorithme
```

(a) Soit le prédicat P défini par $P(x, y)$ est ■ L'exécution de `expo(x,y)` termine pour les entiers non nuls x, y ■. Démontrez, par induction sur y que l'exécution de cet algorithme se termine pour tout couple d'entiers non nuls.

(b) Soit le prédicat Q défini par $Q(x, y)$ est ■ L'exécution de `expo(x,y)` renvoie x^y pour les entiers non nuls x, y ■. Démontrez, par induction sur y que cet algorithme calcule bien x^y pour tout couple d'entiers non nuls x et y.

Notations et rappels : Les ensembles que nous considérons sont *discrets*

— ou bien finis, comportant n éléments. On dit alors que leur *cardinal* est n. On note $card(E) = |E| = n$. Dans ce cas particulier, E est *équipotent* à $[1, n]_{\mathbb{N}} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Une telle équipotence ou sa réciproque $f\ : [1, n]_{\mathbb{N}} \longrightarrow E$ définit une énumération des éléments de E (le premier $f(1)$, $\ldots$, le n^e $f(n)$). Les principes suivants sont admis :

1. *Égalité* Si A, B sont des ensembles finis : $|A| = |B|$ ssi A et B sont équipotents.
2. *Additivité* Si A, B sont des ensembles finis disjoints : $|A \cup B| = |A| + |B|$
3. *Multiplication* Si A, B sont des ensembles finis : $|A \times B| = |A|.|B|$

— ou bien infinis, mais restant équipotents à $\mathbb{N}$. On dit alors que E est infini dénombrable. L'existence de la bijection $f\ : \mathbb{N} \longrightarrow E$ définit encore une énumération des éléments de E.

Propriété : Soient A, B deux ensembles finis, $|A| \leqslant |B|$ ssi il existe une application injective $f\ : A \longrightarrow B$.
Propriété : $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini. Il est stable par addition, multiplication et exponentiation. Il est *bien ordonné* : toute partie non vide admet un plus petit élément. L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

1. *(Exercice déjà vu en Calculus)* Soient E, F deux ensembles $\boxed{\text{finis non vides}}$, et A une partie de E, B une partie de F.
   (a) Faites un diagramme sagittal, pour une application f quelconque, des ensembles E, F, A, B de tailles respectives 5, 6, 3, 2. Déterminez, avec votre exemple $f(A)$, $f^{-1}(B)$.
   (b) En général quelle est la relation entre $|A|$ et $|f(A)|$? $(<, =, \leqslant)$. Et entre $|B|$ et $|f^{-1}(B)|$?
   (c) Que deviennent vos relations quand f est injective ? surjective ?
   (d) Y a-t-il une réciproque, c.-à-d. une relation entre les cardinaux qui impliquerait le caractère injectif, ou surjectif de f ?
   (e) Les propriétés précédentes sont elles encore vraies en cas d'ensembles infinis dénombrables ?
2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des listes de 0 et de 1 de longueur 8.
   (a) Donnez 3 éléments de $\mathcal{L}$
   (b) $\mathcal{L}$ est-il un ensemble fini ou infini ? Si il est fini, pouvez-vous l'écrire en extension ?
   (c) Déterminez le cardinal n de $\mathcal{L}$ et construisez une énumération de $\mathcal{L}$
3. Soit $\mathcal{H} = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\} \cup \{A, B, C, D, E, F\}$. Montrez $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ sont équipotents.
4. Montrez que l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
5. *Variante de la preuve du 2^e sens de la propriété 1 p.7 (contraposée)*
   Montrez par récurrence que si $|A| > |B|$ alors il n'existe pas d'application injective $f\ : A \longrightarrow B$

Notations et rappels : On suppose $|A| = n$ et $|B| = p$

— $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A| \times |B|$, $|\{f : A \longrightarrow B\}| = |B^A| = |B|^{|A|} = p^n$,

— Nombre de permutations de A (fonction bijective de A vers A) : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$,

— Nombre d'applications injectives de B vers A, supposant $n \geqslant p$:
$\mathcal{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.

— Nombre de parties de A ayant pour cardinal p, supposant $0 \leqslant p \leqslant n$:
$\mathcal{C}_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$,

— $\mathcal{C}_n^p = \mathcal{C}_{n-1}^{p-1} + \mathcal{C}_{n-1}^p$, $\mathcal{C}_n^p = \mathcal{C}_n^{n-p}$, $\mathcal{C}_n^0 = 1$.

— **Principe des tiroirs :** Si n tiroirs sont occupés par $n+1$ objets alors il existe au moins un tiroir occupé par au moins deux objets.
Plus formellement, soit $f : A \longrightarrow B$, avec $|B| = p, |A| = n = p+1$, alors il existe $b \in B : |f^{-1}(\{b\})| \geqslant 2$.
Généralisation : $n = p.q + r, 0 \leqslant r < p$. Si p tiroirs sont occupés par n objets, alors il existe au moins un tiroir qui contient $\lceil n/p \rceil$ objets. (Attention quand $r \neq 0$, $\lceil n/p \rceil = q+1$).

1 Dénombrement

1. On suppose que chaque étudiant de l'ensemble E des 92 étudiants d'une mention de Licence suit exactement les mêmes modules. On souhaite les répartir en 3 groupes A, B, C.
   (a) Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Attention on accepte toutes les répartitions même celles où un ou deux groupes sont vides.
   (b) Étant donnée une répartition, pouvez-vous être certain qu'au moins un groupe comporte 32 étudiants ? 31 étudiants ? 30 étudiants ? Justifiez votre réponse. (*Oui/Non ne sera pas pris en compte.*)
   (c) On impose dans cette question que les groupes A et B comportent exactement 31 étudiants. On veut le nombre de répartitions avec cette contrainte.
2. On doit corriger 212 copies. Peu importe la méthode de correction, on doit attribuer une note, qui est un entier entre 0 et 20, à chacune des 212 copies. On appelle *notation* une telle association.
   (a) Combien dénombre-t-on de notations différentes ?
   (b) Existe-t-il des notations qui ne sont pas des applications surjectives de l'ensemble des copies vers l'ensemble des notes ? Justifiez votre réponse.
   (c) Existe-t-il des notations qui sont des applications injectives de l'ensemble des copies vers l'ensemble des notes ? Justifiez votre réponse.
   (d) Parmi les assertions suivantes, vous indiquerez celles qui sont vraies ou fausses :
      i. Dans chaque notation, au moins 10 copies ont la même note.
      ii. Dans chaque notation, au moins 11 copies ont la même note.
      iii. Dans chaque notation, au moins 12 copies ont la même note.
3. Soit $E = \{A, B, C, D\}$.
   (a) Combien de mots de trois lettres peuvent être formés à partir de l'alphabet E en autorisant les répétitions ?
   (b) sans autoriser les répétitions ?
   (c) commençant par un A, avec puis sans répétitions ?
   (d) ne contenant pas de A, avec puis sans répétitions ?
   (e) contenant exactement un A, avec puis sans répétitions ?
4. À l'aide des notions ensemblistes d'applications, d'injections, de surjections, d'ensemble des parties, formaliser et dénombrer les manières de
   (a) mettre n boules distinctes dans p pots numérotés. Formaliser c'est :

— Indiquer quel est l'ensemble des boules B, quel est son cardinal.

— Indiquer quel est l'ensemble des pots P, quel est son cardinal.

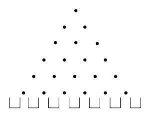
— Indiquer ce qu'est une ■ *manière de mettre les n boules dans les pots* ■ : est-ce une partie de B ? une partie de P ? un élément de $B \times P$? Une relation ? Une fonction ?

— Quand vous aurez répondu à la question qui précède, servez-vous des résultats du cours pour indiquer le nombre total de ■ *manière de mettre les n boules dans les pots* ■

(b) mettre n boules distinctes chacune dans un pot différent parmi p, avec les mêmes indications que ci-dessus.

(c) **(***)** n boules distinctes dans p pots, chacun recevant au moins une boule (dénombrement difficile), idem.

5. On fait tomber des billes le long d'une planche à six rangées de clous ; à chaque clou, la moitié des billes tombe à droite du clou, l'autre à gauche. En faisant tomber 2^6 billes du haut de la planche, combien tombent dans chaque godet ?



2 Pour s'entraîner

6. *Examen 2009* : Soit un ensemble de 6 couleurs $Coul = \{R, V, J, B, M, C\}$, et un ensemble de points $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, avec $n \geqslant 1$.

   Un *coloriage* associe à **chaque** point de E **une** couleur.

   (a) Montrez qu'un coloriage est une application. De quel ensemble vers quel ensemble ?

   (b) En fonction de n, indiquez le nombre de coloriages différents possibles.

   (c) Si $n = 5$ peut-on assurer que dans chaque coloriage on aura au moins 2 points de la même couleur ?

   (d) Et si $n = 6$? $n = 7$?

   (e) Toujours avec 6 couleurs, combien de points faut-il pour être certain que chaque coloriage ait au moins 3 points de la même couleur ?

   (f) Quand $n = 3$ on *tricolorie* les 3 points p_1, p_2, p_3 en leur associant 3 couleurs différentes. Combien existe-t-il de tricoloriages différents ?

Notations et rappels

- Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de X dans X :

$\mathcal{R}$ est *réflexive*	si	$\forall x \in X, x\mathcal{R}x$
$\mathcal{R}$ est *symétrique*	si	$\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
$\mathcal{R}$ est *antisymétrique*	si	$\forall x, y \in X, (x\,\mathcal{R}\,y)$ et $(y\,\mathcal{R}\,x) \Rightarrow x = y$
$\mathcal{R}$ est *transitive*	si	$\forall x, y, z \in X, (x\,\mathcal{R}\,y)$ et $(y\,\mathcal{R}\,z) \;\Rightarrow\; x\,\mathcal{R}\,z$

- La relation *inverse* ou *réciproque* d'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur X se note $\mathcal{R}^{-1}$ et est définie par $x_1\mathcal{R}^{-1}x_2$ ssi $x_2\mathcal{R}x_1$
- I_X est la relation *identité* sur X, c.-à-d. que $\forall x \in X, xI_Xx$. On a $\mathcal{R}^0 = I_X$ pour toute relation binaire sur X. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble X, on peut noter la relation identité I
- On définit $\mathcal{R}^+ = \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{R}^n$ et $\mathcal{R}^* = I_X \cup \mathcal{R}^+ = I_X \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \ldots$

1. Définition :
   - $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r\}$ et $Z = \{1, 2, 3\}$.
   - $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ est définie par : $b\mathcal{R}q$ et $\forall y \in Y : a\mathcal{R}y$
   - $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$ est définie par : $\forall n \in Z : p\mathcal{S}n$ et $\forall y \in Y : y\mathcal{S}3$

   (a) Explicitez, par un dessin ou en extension les relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, la relation composée $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

   (b) Explicitez la relation inverse de $\mathcal{T}$ et définissez là en fonction d'une composée des relations inverses : $\mathcal{R}^{-1}$ et $\mathcal{S}^{-1}$

2. Soient $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations binaires définies dans A par la matrice d'incidence $M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $\mathcal{R}' = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$. Expliciter les relations binaires union et intersection, ainsi que les carrées de celles-ci ($\mathcal{R}^2$, $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}')^2 \ldots$). Étudier leurs qualités (réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie, fonctionnalité, ordre, équivalence).
3. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations binaires définies dans le même ensemble. Montrer que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont transitives alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ est transitive. Que penser de $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$?
4. Prouver qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble A est transitive si et seulement si $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$.
5. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}$ par $x\mathcal{R}y$ si $y = x + 1$. La relation $\mathcal{R}$ est–elle fonctionnelle ? réflexive ? symétrique ? transitive ? Définissez $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$, $\mathcal{R}^+$ et $\mathcal{R}^*$.

Notations et rappels :

— Une relation d'équivalence $\sim$, définie dans un ensemble X, est *réflexive, transitive et symétrique*

— $\bar{x} = \{z \in X \mid x \sim z\}$ est la *classe d'équivalence* de $x \in X$, $z \in \bar{x}$ en est un *représentant*

— L'ensemble des classes $X/\sim = \{\bar{x} \mid x \in X\}$ est *l'ensemble quotient* de X par $\sim$

1. Dire si les relations binaires suivantes sur les êtres humains sont des équivalences.
   - À un humain on associe son père biologique,
   - À un humain on associe un humain qui fait partie de sa ■ fratrie ■. (Une *fratrie* est composée de personnes qui ont les mêmes deux parents biologiques.)
   - À un humain on associe un humain qui a la même date de naissance.
2. Reprenons l'application $Notation$ d'un ensemble E de 212 étudiants vers un ensemble N de notes entières comprises entre 0 et 20 (*cf. exercice 2, p. 18*). Nous définissons $\mathcal{R}$ de la manière suivante : $\forall e_1, e_2 \in E, e_1 \mathcal{R} e_2$ ssi $Notation(e_1) = Notation(e_2)$.
   - Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E
   - Exprimer en langue naturelle $\bar{e}$ la classe d'un étudiant $e \in E$
   - Que peut-on dire du cardinal de l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$?
   - Exhibez un cas où $|E/\mathcal{R}| = 1$
3. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $M \,\mathcal{R}\, N \Leftrightarrow M \cap Y = N \cap Y$.

   (a) Soient les parties $A = \{a, b, d\}, B = \{a, b, e\}, C = \{a, d, e\}$. Quelles sont celles qui sont en relation ?

   (b) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (c) Quelle est $\bar{A}$ la classe de A ?

   (d) Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble quotient ?
4. Soient $Pair = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mod 2 = 0\}$ et $Impair = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mod 2 = 1\}$ respectivement l'ensemble des entiers pairs et impairs. Trouver une relation d'équivalence $\mathcal{R}_p$ telle que l'ensemble quotient de $\mathbb{N}$ par $\mathcal{R}_p$ est $\{Pair, Impair\}$, ou en d'autres termes, telle que $\mathbb{N}/\mathcal{R}_p = \{Pair, Impair\}$. Vérifier que $\mathcal{R}_p$ est bien une relation d'équivalence.
5. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et e un élément de E. Montrer que :

   (a) $\forall e \in E,\ e \in \bar{e}$

   (b) $\forall e, e' \in E,\ e\mathcal{R}e' \Rightarrow \bar{e} = \bar{e'}$ (*il s'agit ici de montrer l'égalité de deux ensembles*)

   (c) si $\bar{e} \cap \bar{e'} \neq \emptyset$, alors $\bar{e} = \bar{e'}$

   (d) $E/\mathcal{R}$ est une partition de E.
6. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire quelconque. Montrez que $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})^*$ est une relation d'équivalence et que c'est la plus petite relation d'équivalence qui contient $\mathcal{R}$.

Notations et rappels : X est un ensemble, Y est une partie non vide de X. Une relation binaire dans X qui est *réflexive* et *transitive* et *antisymétrique* est dite *relation d'ordre* dans X. On la note dans la suite $\leqslant$.

Ordre total $(X, \leqslant)$:	tous les éléments de X sont comparables, sinon c'est un ordre *partiel*	
une *Chaîne* de $(X, \leqslant)$:	un sous-ensemble Y où l'ordre est total	
Intervalle de $(X, \leqslant)$:	$[x, y] = \{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}$	Peut être vide
Le *minimum* de Y :	$\min(Y) \in Y$ et$\forall y \in Y,\ \min(Y) \leqslant y$.	N'existe pas forcément
Le *maximum* de Y :	analogue	
$(X, \leqslant)$ est *bien ordonné* :	toute partie non vide de X admet un minimum Exemple : $(\mathbb{N}, \leqslant)$. Contre-exemple : $(\mathbb{Z}, \leqslant)$	
$m \in X$ **un** *minimal* de $(X, \leqslant)$:	$\forall x \in X,\ x \leqslant m \Rightarrow x = m$.	N'existe pas forcément
Un *maximal*	analogue	
$m \in X$ **un** *minorant* de Y dans $(X, \leqslant)$:	$\forall y \in Y,\ m \leqslant y$.	N'existe pas forcément
un *majorant*	analogue	
La *borne inférieure* de Y dans $(X, \leqslant)$, notée $inf_X(Y)$:	$\forall x \in X,\ (\forall y \in Y, x \leqslant y) \Rightarrow x \leqslant inf_X(Y)$. Si Y admet un minimum, c'est également la borne inférieure.	N'existe pas forcément
La *borne supérieure*	analogue	
$(X, \leqslant)$ est un *treillis*	$\forall x, y \in X, \exists m, M \in X,\ \ m = \inf_X(\{x, y\}) \leqslant x, y \leqslant M = \sup_X(\{x, y\})$.	
Dans $(X, \leqslant)$, y *couvre* x	$x \leqslant y, x \neq y$ et il n'existe pas d'éléments entre eux $x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow x = z$ ou $z = y$	
Si $(X, \leqslant)$ est un ordre fini, son *diagramme de Hasse* :	un diagramme dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes (représentées du bas vers le haut) relient un sommet x plus bas qu'un sommet y si y couvre x.	

1. Soient les relations binaires :
   (a) $\subseteq$ dans $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$.
   (b) $\mid$ dans $[1, 10]_{\mathbb{N}}$ où $\mid$ dénote "est un diviseur de".
   (c) $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4), (5,5)\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   (d) Dans $\mathcal{P}(E)$: $(A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |A| \leq |B|$.
   (e) Dans $\mathcal{P}(E)$: $(A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |A| < |B|$.
   (f) $<$ dans l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

   Quel est le type de ces relations : ordre, pré-ordre (pas antisymétrique), ordre strict (un ordre privé de la diagonale) ?

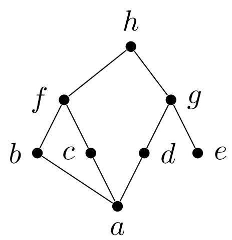
   Dans le cas où ces relations sont des ordres, donnez des exemples d'éléments comparables, incomparables (x est comparable à y si $(x, y) \in \mathcal{R}$ ou $(y, x) \in \mathcal{R}$).

   Dans le cas où ces relations sont des ordres finis, explicitez la relation de *couverture* en l'écrivant en extension.

   Dans le cas où ces relations sont finies, représentez le graphe de chacune d'entre elles.

   Dans le cas où ces relations sont finies et sont des ordres, représentez le diagramme de Hasse de ces ordres.

2. Identifier les minimum, maximum, éléments minimaux, maximaux, bornes inf et sup, s'ils existent de la relation d'ordre codée par le diagramme de Hasse suivant : Localiser toutes ses chaînes et donner leurs majorants et minorants.



3. Dans l'ensemble $E = [1, 10]_{\mathbb{N}}$ ordonné par la relation $|$ – "est un diviseur de" – soit $A = \{2, 3, 6\}$.
   Quels sont les éléments *minimaux, maximaux* de A ?
   A est–il *minoré, majoré* dans E ?
   A admet–il un *minimum*, un *maximum* dans E ?
   A admet–il un *minimum*, un *maximum*, une *borne inférieure*, une *borne supérieure* ?
   A est–il une *anti-chaîne* de E ?
   Représentez le graphe de la relation, puis son diagramme de Hasse.
4. Soit E un ensemble ordonné par $\mathcal{R}$. E n'est pas nécessairement fini et $\mathcal{R}$ n'est pas nécessairement total. A étant une partie de E, que penser des affirmations suivantes ?
   (a) Si x est maximum de A, alors x est maximal de A.

   (b) Si x est maximal de A, alors x est maximum de A.

   (c) Si A est fini, et si x est l'unique élément maximal de A alors x est maximum de A.

   (d) Si A est une chaîne non vide de E alors A admet au plus un élément maximal.

   (e) Si A est une chaîne non vide de E alors A possède un minimum.
5. Un pré-ordre est une relation binaire réflexive et transitive. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ un pré-ordre sur E.
   (a) Montrer que la relation $\sim$ définie sur E par $x \sim y$ si et seulement si ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) est une relation d'équivalence

   (b) Montrer que tout pré-ordre $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E induit une relation d'ordre $\mathcal{R}_o$ sur $E/\sim$, l'ensemble E quotienté par la relation d'équivalence $\sim$ définie ci-dessus. Définir précisément $\mathcal{R}_o$ et montrer que c'est bien une relation d'ordre sur $E/\sim$.

Notations et rappels

— Un ensemble $E \subseteq \mathcal{U}$ est défini inductivement par la donnée de sa base : un ensemble $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, et par un ensemble Ω de règles tels que :

Base $\mathcal{B} \subseteq E$.

Règles — Pour chaque règle interne $f_i \in \Omega$ d'arité n, pour chaque $x_1, ..., x_n \in E$: $f_i(x_1, ..., x_n) \in E$.

— Pour chaque règle externe $f_e \in \Omega$ d'arité n définie de $K_1 \times \ldots \times K_q \times E \times \ldots \times E$ dans E ($K_1, \ldots, K_q$ étant des ensembles parfaitement définis, $q < n$) et pour chaque n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in K_1, \ldots, x_q \in K_q, x_{q+1} \in E, \ldots, x_n \in E$: $f_e(x_1, \ldots, x_n) \in E$.

E est le plus petit ensemble vérifiant ces trois propriétés. (Au sens de l'inclusion ensembliste).

— Soit E un ensemble défini par induction à partir de $(\mathcal{B}, \Omega)$. On définit une fonction $\phi : E \longrightarrow F$ par induction avec :

— la valeur de $\phi(x)$ pour chaque $x \in \mathcal{B}$

— Pour chaque règle f d'arité n de Ω, $\phi(f(x_1, ..., x_n))$ est une valeur qu'on exprime en fonction de $x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)$.

1 Des ensembles définis par induction vus en cours

Définition 1.1 (Monoïde A^*)**.** Soit A un ensemble de lettres appelé alphabet. On définit A^* le monoïde libre sur A, comme l'ensemble des mots ou suites de lettres de A.
On note $u = a_1a_2...a_n$ le mot $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Sa longueur est $|u| = n$. Le mot de longueur 0 est noté ϵ.
L'opération du monoïde est la concaténation notée . telle que $(a_1, .., a_n).(b_1, ..., b_p) = (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_p)$

— *Base :* $\{\epsilon\} \cup A$

— *Règle :* $\forall u, v \in A^* : u.v \in A^*$

Définition 1.2 (ArbreBin)**.** L'ensemble ArbreBin des arbres binaires étiquetés sur un alphabet A est défini inductivement par :

— *Base :* $\{\text{ABvide}\}$

— *Règle :* $\forall a \in A, \forall g, d \in \text{ArbreBin} : (a, g, d) \in \text{ArbreBin}$

Définition 1.3 (Listes)**.** L'ensemble Listes des listes d'entiers, vu au semestre 1. `consL` est l'opérateur de construction des listes : `consL` : $\mathbb{N} \times Listes \longrightarrow Listes$. $\texttt{consL}(\texttt{p}, \texttt{L})$ ajoute l'entier p en tête de la liste L

— *Base* : $\{\text{Vide}\}$

— *Règle* : $\forall L \in Listes, \forall p \in \mathbb{N} : \texttt{consL}(\texttt{p}, \texttt{L}) \in Listes$

2 Ensembles définis par induction

1. Soit $A = \{a, b, c\}$, et soit $L \subseteq A^*$ défini de la manière suivante :

   — *Base :* $\{b\}$

   — *Règle :* $\forall u \in L : a.u.c \in L$

   Donnez 5 éléments de L. Donnez une expression générale pour tous les mots appartenant à L.

   Soit maintenant $L' \subseteq A^*$ défini de la manière suivante :

   — *Base :* $\{b\}$

   — *Règles :*

   (a) $\forall u \in L' : a.u \in L'$

   (b) $\forall u \in L' : u.c \in L'$

Donnez 5 éléments de L'. Donnez une expression générale pour tous les mots appartenant à L'.

Que pensez-vous de la relation entre L et L' ?

2. Soit $\Sigma = \{(,)\}$ l'alphabet constitué de la parenthèse ouvrante et de la parenthèse fermante. L'ensemble $\mathcal{D} \subseteq \Sigma^*$ des parenthésages bien formés, appelé langage de Dyck, est défini inductivement par
   - *Base* : $\{\epsilon\}$
   - *Règles* :
     (a) $\forall x \in \mathcal{D} : (x) \in \mathcal{D}$
     (b) $\forall x, y \in \mathcal{D} : x.y \in \mathcal{D}$

   Écrivez tous les mots de Dyck de longueurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Que remarquez-vous ?
3. Trouvez un schéma d'induction pour construire :
   (a) Les expressions algébriques bien parenthésées $EABP$, et dont les éléments de base sont les entiers, et les éléments construits le sont en utilisant des parenthèses et les opérations binaires $+$ et $\times$.
   Par exemple, $5, (3+12), (3 \times (2+5))$ sont des éléments de $EABP$, alors que $3+2\times 5$ et (5) n'en sont pas.
   (b) L'écriture en binaire (*i.e.* avec l'alphabet $\{0,1\}$) des entiers pairs, sans 0 inutile en tête.
   (c) Les mots de $\{0,1\}^*$ ne contenant pas deux 0 consécutifs.
   (d) *(***)* Les mots de $\{0,1\}^*$ qui ne sont pas des palindromes.
4. Comment définissez–vous des expressions représentées avec la notation postfixée ENP, dans laquelle les éléments de base sont les entiers, les seules opérations/règles sont $+$ et $\times$, il n'y a pas de parenthèse, et l'opération suit ses 2 opérandes ?
   Par exemple, $\boxed{5}$, $\boxed{3 \quad 12 \quad +}$, $\boxed{3 \quad 2 \quad 5 \quad + \quad \times}$ sont des éléments de ENP,
   alors que $\boxed{3 \quad + \quad 2 \quad \times \quad 5}$ n'en est pas un.

3 Fonctions définies par induction

5. Définir inductivement l'application nb_symb qui associe à chaque élément de ENP (vu à l'exercice précédent) son nombre d'opérations. Précisez quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de cette application.
   Exemples : $nb\_symb(5) = 0$, $nb\_symb(3 \quad 12 \quad +) = 1$ et $nb\_symb(3 \quad 2 \quad 5 \quad + \quad \times) = 2$.
6. Définir inductivement les applications suivantes, où V est un ensemble de lettres :
   (a) $miroir : V^* \longrightarrow V^*$ telle que $miroir(x_1x_2\ldots x_n) = {}^t(x_1x_2...x_n)$.
   (b) $nbocc : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $nbocc(x,w) = |w|_x$.

Notations et rappels

— Un démonstration par induction structurelle se fait sur le schéma suivant : Soit E un ensemble défini par induction à partir de $(\mathcal{B}, \Omega)$. Soit $P : E \longrightarrow Booléen$ le prédicat qu'on veut démontrer. Pour montrer que $P(x)$ est vrai pour chaque élément x de E, il suffit de prouver :

  — $\forall x \in \mathcal{B} : P(x)$

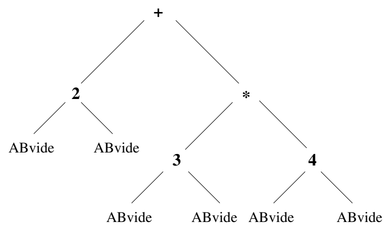
  — Pour chaque règle interne $f_i \in \Omega$ d'arité n définie de E^n dans E et pour chaque $x_1, \ldots, x_n \in E$: si $P(x_1), \ldots, P(x_n)$ sont vraies alors $P(f_i(x_1, \ldots, x_n))$ est vraie.

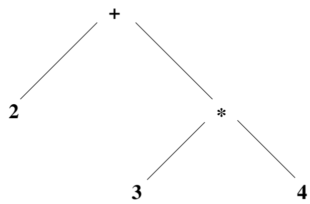
  — Pour chaque règle externe $f_e \in \Omega$ d'arité n définie de $K_1 \times \ldots \times K_q \times E \times \ldots \times E$ dans E ($q \leq p$, $q < n$), pour chaque $(x_1, \ldots, x_q)$ dans $K_1 \times \ldots \times K_q$ et pour chaque $(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ dans E^{n-q} : si $P(x_{q+1}), \ldots, P(x_n)$ sont vraies, alors $P(f_e(x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_n))$ est vraie.

Autrement dit, si P est vraie pour chaque élément de la base et si P est conservée par applications des règles de constructions, alors P est vraie pour tout l'ensemble ainsi défini.

1. Soit $AB : EABP \longrightarrow ArbreBin$ la fonction qui associe une expression algébrique bien parenthésée à un arbre binaire (*cf.* définition de $EABP$ à l'exercice **3a** du TD précédent).

   Exemple : soit $A = (+, (2, \text{ABvide}, \text{ABvide}), (*, (3, \text{ABvide}, \text{ABvide}), (4, \text{ABvide}, \text{ABvide})))$ un arbre binaire qu'on représente graphiquement comme suit, ou plus classiquement en oubliant les ABvide.





   et soit $e = (2 + (3 * 4))$. On a alors $AB(e) = A$.

   (a) Soit $x = (2 * ((((3 + 4) * (5 * 6)) + 7) * 8))$. Représentez $AB(x)$.

   (b) Définissez la fonction `AB` par induction.

   (c) Trouvez la relation entre le nombre de parenthèses ouvrantes d'une expression algébrique bien parenthésée et le nombre d'opérations de cette même expression.

   (d) Prouvez par induction structurelle votre formule.

2. Soit A^* l'ensemble des mots construits à partir d'un alphabet comportant 3 lettres, $A = \{a, b, c\}$.

   On définit alors E partie de A^* par l'induction suivante :

   — *Base :* Les mots ϵ, a,b et c sont dans E.

   — *Règle :* $\forall u \in E : a.u.a, b.u.b$ et $c.u.c \in E$

   (a) Démontrez, en utilisant uniquement la définition inductive de E, que chaque mot de E est un palindrome. On rappelle qu'un mot w est un palindrome si $w = {}^t w$, où ${}^t w$ est l'écriture ■ inverse ■ de w – de droite à gauche. Exemple *ababbaba* est un palindrome, alors que *ababcaba* n'en est pas un.

   (b) Démontrez, par récurrence sur la longueur d'un palindrome de A^*, que tout palindrome est dans E.

   (c) Conclusion ?

3. Soit $V = \{0, 1\}$. Soit E la partie de $V^* \times V^*$ définie inductivement par :

   Base $\forall w \in V^* : (w.0, w.1) \in E$. *Règles* si $(u, v) \in E$ alors $(u.1, v.0) \in E$.

   Les couples $(11, 00), (11, 100), (0111, 1000), (1011, 1100), 1100, 1111)$ appartiennent-ils à E ?

   Montrer que $(u, v) \in E$ si et seulement si $|u| = |v|$ et v est l'écriture binaire du successeur de l'entier dont l'écriture binaire est u.

   En déduire que E peut être défini par le schéma inductif suivant :

   Base $(0, 1) \in E$ *Règles* si $(u, v) \in E$ alors $(0.u, 0.v) \in E, (1.u, 1.v) \in E, (u.1, v.0) \in E$.

Notations et rappels

Version orientée

Un graphe orienté $G = (X, U)$:

- *sommets* : X ensemble *fini*, *non vide*
- *arcs* : U ensemble fini de couples d'éléments de X
- *ordre* de G : $n = |X|$ le nombre de sommets de G
- $m = |U|$ le nombre d'arcs de G

Soit $a = (x, y)$ un arc de G

- x est l'*origine* de l'arc (x, y),
- y est l'*extrémité* de l'arc (x, y),
- Si $x = y$, l'arc (x, x) est une *boucle* de G

- $d^-(x)$: le nombre d'arcs entrants en x
- $d^+(x)$: le nombre d'arcs sortants de x
- *degré d'un sommet* x, noté $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$

$$m = \sum_{x \in X} d^-(x) = \sum_{x \in X} d^+(x) \qquad 2m = \sum_{x \in X} d(x)$$

Pour $x \in X$, on appelle :

- *Successeurs de* x, noté $Succ(x)$ l'ensemble des $y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Ceci définit bien une application $Succ : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
- *Prédécesseurs de* x, noté $Pred(x)$, l'ensemble des $y \in X$ tels que $(y, x) \in U$. Ceci définit bien une application $Pred : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
- $x \in X$ est dit *sommet isolé* de G si $Succ(x) = Pred(x) = \emptyset$.
- $x \in X$ est dit *source* de G si $Pred(x) = \emptyset$
- $x \in X$ est dit *puits* de G si $Succ(x) = \emptyset$

Définitions alternatives d'un graphe orienté. X étant connu, on peut déterminer les arcs U d'un graphe par la donnée de :

- la fonction $Succ : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
  En effet $(x, y) \in U \Leftrightarrow (y \in Succ(x))$
- la fonction $Pred : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
  En effet $(x, y) \in U \Leftrightarrow (x \in Pred(y))$
- la *matrice d'adjacence* A du graphe. Si $X = \{x_1, ..., x_n\}$ alors $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est telle que $a_{i,j} = 1$ si $(x_i, x_j) \in U$, $a_{i,j} = 0$ sinon

Version non orientée

Un graphe non orienté $G = (X, E)$:

- *sommets* : X ensemble *fini*, *non vide.*
- *arêtes* : E ens. fini de parties de E à 1 ou 2 élts
- *ordre* de G : $n = |X|$ le nombre de sommets de G
- $m = |E|$ le nombre d'arêtes de G

Soit $e = \{x, y\}$ une arête de G

- x et y sont les extrêmités de l'arête $e = \{x, y\}$
- Si $x = y$, l'arête $e = \{x\}$ est une *boucle* de G

Attention, pour des raisons de cohérence, la notion de *degré* pour les graphes non orientés doit compter les boucles pour 2, comme dans la version orientée.

$$2m = \sum_{x \in X} d(x)$$

Pour $x \in X$, on appelle :

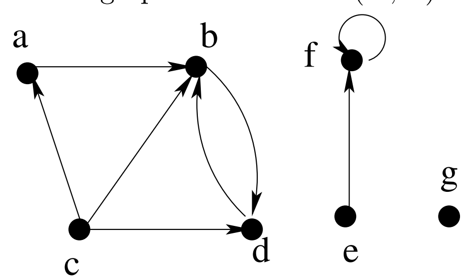
- *Voisins(x)*, l'ensemble des $y \in X$ tels que $\{x, y\} \in E$. Ceci définit bien une application $Voisins : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
- $x \in X$ est dit *sommet isolé* de G si $Voisins(x) = \emptyset$

Définitions alternatives d'un graphe non orienté. X étant connu, on peut déterminer les arêtes E d'un graphe par la donnée de :

- la fonction $Voisins : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
  En effet $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow (y \in Voisins(x))$
- la *matrice d'adjacence* A du graphe. Si $X = \{x_1, ..., x_n\}$ alors $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est telle que $a_{i,j} = 1$ si $\{x_i, x_j\} \in E$, $a_{i,j} = 0$ sinon. La matrice est donc symétrique

Version orientée	**Version non orientée**
Graphes associés à un graphe orienté $G = (X, U)$	**Graphes associés à un graphe non orienté** $H = (X, E)$
• **Le** *graphe non orienté sous-jacent* à G : c'est le graphe (X, E) tel que $E = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in U \text{ ou } (y, x) \in U\}$	
• $G_1 = (X_1, U_1)$ est **un** *sous-graphe* de G. Il vérifie : $X_1 \subseteq X$ et $U_1 \subseteq U \cap (X_1 \times X_1)$ (U_1 est un sous-ensemble de U tel que l'origine et l'extrémité de chaque arc de U_1 sont dans X_1)	• $H_1 = (X_1, E_1)$ est **un** *sous-graphe* de H. Il vérifie : $X_1 \subseteq X$ et $E_1 \subseteq E \cap \mathcal{P}(X_1)$ (E_1 est un sous-ensemble de E tel que les extrêmités de chaque arête de E_1 sont dans X_1)
• $X_2 \subseteq X$. $G_2 = (X_2, U_2)$ est ***le*** *sous-graphe de G induit par X_2* si : $U_2 = \{(x, y) \in U \text{ tq } x \in X_2 \text{ et } y \in X_2\}$ (en d'autres termes $U_2 = U \cap (X_2 \times X_2)$) G_2 est entièrement défini par G et X_2 On le note $G_2 = G(X_2)$	• $X_2 \subseteq X$. $H_2 = (X_2, E_2)$ est ***le*** *sous-graphe de H induit par X_2* si : $E_2 = \{\{x, y\} \in E \text{ tq } x \in X_2 \text{ et } y \in X_2\}$ (en d'autres termes $E_2 = E \cap \mathcal{P}(X_2)$). H_2 est entièrement défini par H et X_2 On le note $H_2 = H(X_2)$
• $G_3 = (X, U_3)$ est **un** *sous-graphe couvrant* G. Il a même ensemble de sommets que G, et c'est un sous-graphe de G.	• $H_3 = (X, E_3)$ est **un** *sous-graphe couvrant* H. Il a même ensemble de sommets que H, et c'est un sous-graphe de H.
Soient $G = (X, U)$ et $H = (Y, V)$ deux graphes orientés. G et H sont dits *isomorphes* s'il existe une application $f : X \longrightarrow Y$ bijective conservant les arcs, c.-à-d. telle que : $(x, y) \in U \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in V$	Soient $G = (X, E)$ et $H = (Y, F)$ deux graphes non orientés. G et H sont dits *isomorphes* s'il existe une application $f : X \longrightarrow Y$ bijective conservant les arêtes, c.-à-d. telle que : $\{x\} \in E \Leftrightarrow \{f(x)\} \in F$ et $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in F$

1. Soit le graphe orienté $G = (X, U)$ représenté par :



Soit $H = (X, E)$ le graphe non orienté sous–jacent à G. Dessinez H.
Complétez :
   - $X = \{\}$, H est d'ordre : .
   - $E = \{\}$
   - $d(a) =$, $d(b) =$, $d(f) =$, $d(g) =$
   - $Voisins(a) =$, $Voisins(b) =$, $Voisins(f) =$
   - Les sommets isolés de H sont : .
   - H_1 le sous-graphe de H induit par $\{a, b, c\}$ est :
   - Soient les graphes
     - $H_2 = (\{b, c, d\}, \{\{c, b\}, \{b, d\}\})$:
     - $H_3 = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{c, b\}, \{c, d\}, \{d, b\}\})$:

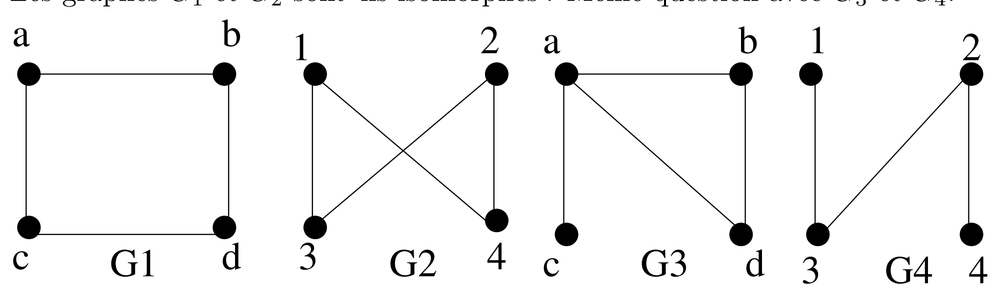
- $H_4 = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{c, b\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{c, a\}\})$:
- $H_5 = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{\{a, b\}, \{c, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\})$:

Pour chacun de ces graphes vous indiquerez s'il est un sous–graphe de H, et si oui, sa nature (couvrant, induit par une partie de X, quelconque).

2. Questions de cours : VRAI/FAUX. Justifiez votre réponse.
   (a) Est-ce tous les graphes orientés $G = (X, E)$ sont des relations binaires sur X ?
   (b) Est-ce que toutes les relations binaires sur X sont des graphes orientés $G = (X, E)$?
   (c) Est-ce que les graphes non orientés peuvent représenter certaines relations binaires ?
   (d) Soit $G = (X, E)$ un graphe. Est-ce que X peut-être vide ? Est-ce que E peut-être vide ?
   (e) Soit G un graphe défini par la donnée de X et d'une matrice d'adjacence symétrique. Peut-on en conclure que G est un graphe non orienté ?
   (f) Est-ce qu'un sous-graphe couvrant d'un graphe $G = (X, E)$ contient toutes les arêtes de G ?
   (g) Est-ce qu'un sous-graphe d'un graphe $G = (X, E)$ induit par un sous-ensemble $X' \subseteq X$ contient tous les sommets de X' ?
   (h) Est-ce qu'un sous-graphe couvrant d'un graphe $G = (X, E)$ est forcément induit par un sous-ensemble $X' \subseteq X$?
   (i) Est-ce qu'un sous-graphe d'un graphe $G = (X, E)$ induit par un sous-ensemble $X' \subseteq X$ est forcément un sous-graphe couvrant de G ?
   (j) Si $G = (X, E)$ et $H = (Y, F)$ sont 2 graphes isomorphes, est-ce qu'on peut en déduire que :
      i. $|X| = |Y|$? $X = Y$? $|E| = |F|$? $E = F$?
      ii. S'il existe dans G exactement 3 sommets de degrés 5, alors il existe dans H exactement 3 sommets de degrés 5.
      iii. Si G est sans boucle, alors H est sans boucle
      iv. On peut représenter G et H par le même dessin ? (points et traits placés au même endroit, ce sont juste les noms des sommets qui changent)
      v. Il existe une application bijective de X vers Y ?
3. Soit le graphe non orienté $G = (X, E)$ défini par $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et sa matrice d'adjacence $M[1..5, 1..5]$:

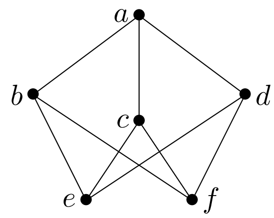
M	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	1	0	1	1
2	1	1	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0

   (a) Comment interpréter le fait que $M[4, 3] = 1$? et $M[2, 5] = 0$?
   (b) Représenter graphiquement G.
   (c) Définir la fonction $Voisins$.
   .
   (d) Quels sont les boucles, les sommets isolés de G ?
4. Soit le graphe non orienté G défini par ses sommets $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et sa fonction $Voisins : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ telle que : $Voisins(1) = \{2, 3\}$, $Voisins(2) = \{1, 2, 3, 4\}$, $Voisins(3) = \{1, 2, 4\}$, $Voisins(4) = \{2, 3\}$, $Voisins(5) = \{\}$.
   (a) Représentez graphiquement G.
   (b) Définissez E ensemble des arêtes de G.
   (c) Définissez A la matrice d'adjacence de G.
5. Les graphes G_1 et G_2 sont–ils isomorphes ? Même question avec G_3 et G_4.

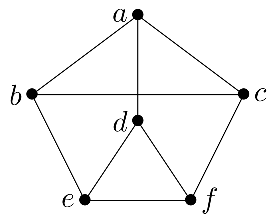


Quel est le graphe complémentaire de G_1 ?

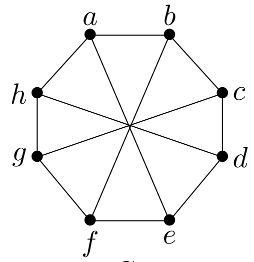
6. Un graphe est dit p–régulier si chaque sommet est de degré p. Quelles sont les paires de graphes qui sont isomorphes, parmi les 4 graphes 3–réguliers suivants :



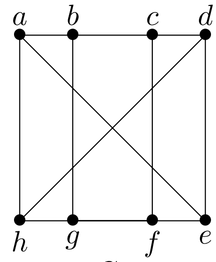
G_1



G_2



G_3



G_4

7. Montrez que dans un graphe non orienté le nombre de sommets de degré impair est pair.
8. Comptons un peu : Un ensemble de n sommets $X = \{x_1, ..., x_n\}$ est fixé.
   (a) Combien y a-t-il de graphes non orientés sans boucles $G = (X, E)$?
   (b) Combien y a-t-il de graphes non orientés $G = (X, E)$ comportant une seule boucle ?
   (c) Combien y a-t-il de graphes non orientés $G = (X, E)$ comportant exactement deux boucles ? p boucles ?
   (d) En déduire le nombre de graphes non orientés $G = (X, E)$.

Notations et rappels Dans cette section $G = (X, E)$ est un graphe non orienté.

- Une *marche* de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h), h \geqslant 0$ de sommets de G telle que $\forall i, 0 \leqslant i < h - 1,\ \{x_i, x_{i+1}\} \in E$
  Si les sommets x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w, on dit que la marche w *passe par l'arête* $\{x_i, x_{i+1}\}$
  x_0 et x_h sont les extrémités de w, h sa longueur
- La longueur de la marche $w = (x_0, \ldots, x_h)$ est h, le nombre d'arêtes par lesquelles elle passe
  La marche de longueur 0 est réduite à un sommet.
- Une marche d'extrémités les sommets a et b est dite *ab–marche*
- La marche w est dite extraite de la marche w' si toutes les arêtes de w sont dans w'
- Un *chemin* est une marche qui ne passe pas 2 fois par le même sommet

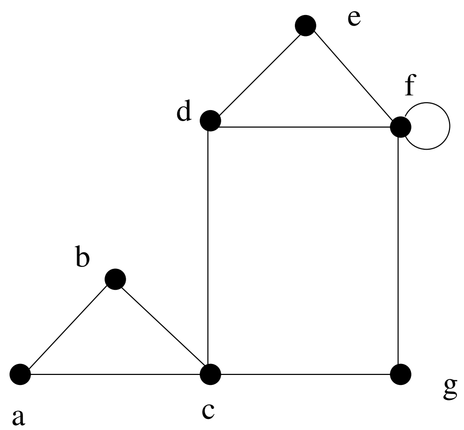
Propriété : Soient x et y deux sommets de $G = (X, E)$. De toute xy–marche w, on peut extraire un xy–chemin.

- Un *cycle* est une marche :
  - comportant au moins une arête (longueur non nulle),
  - commençant et finissant au même sommet x. C'est donc une xx–marche,
  - dont les sommets, sauf les extrémités, sont deux à deux distincts.

  En d'autres termes, un cycle est un chemin fermé.
- Un cycle reste invariant par rotation et retournement
- Un cycle est *hamiltonien* s'il contient tous les sommets du graphe
- Une marche fermée est *eulérienne* si elle contient toutes les arêtes du graphe (parfois nommée *cycle eulérien* bien qu'il puisse passer deux fois par le même sommet)

Propriété : De toute marche fermée ayant des arêtes distinctes et passant par une arête $e = \{x, y\}$, on peut extraire un cycle passant par e.

1. Soit $G = (X, E)$ le graphe de la figure ci-contre.



   (a) Exhibez une ag–marche qui ne passe pas 2 fois par la même arête. Énumérez toutes les ag–marches de ce type ?

   (b) Exhibez un ag–chemin. Énumérez tous les ag–chemins ?

   (c) Exhibez une ag–marche qui passe plusieurs fois par un même sommet et plusieurs fois par une même arête. À votre avis combien existe–t–il de ag–marches de ce type ?

   (d) Existe–t–il une ag–marche ne passant pas plusieurs fois par une même arête mais plusieurs fois par un même sommet ? Et une marche ne passant pas plusieurs fois par un même sommet mais plusieurs fois par une même arête dans G ?

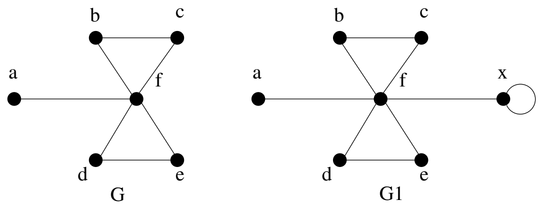
   (e) Existe–t–il une marche passant par tous les sommets de G sans passer plusieurs fois par la même arête (marche hamiltonienne) ? Et une marche passant par toutes les arêtes de G sans passer plusieurs fois par la même (marche eulérienne) ?

   (f) G est-il connexe ? Combien de composantes connexes dans $G(X \setminus \{c\})$?

   (g) Exhibez tous les cycles de G. Exhibez toutes les marches fermées de G passant plusieurs fois par un sommet mais pas plusieurs fois par une arête.

   (h) Existe–t–il un cycle passant par tous les sommets de G (cycle hamiltonien) ? Et une marche fermée passant exactement 1 fois par toutes les arêtes de G (marche eulérienne fermée) ?

2. (a) Le graphe G de la figure ci-contre est une af–marche ne passant pas plusieurs fois par la même arête, exhibez-la.



   i. Quelle est la parité des degrés des extrémités et celle des autres sommets de cette marche ?

   ii. Le graphe G_1 de la figure est une ax–marche ne passant pas plusieurs fois par la même arête, exhibez-la. Même question sur la parité des degrés des sommets de G_1.

(b) Soit maintenant $G = (X, E)$ un graphe non orienté quelconque.

   i. Soit C une xy–marche de G ne passant pas plusieurs fois par la même arête, et G' le sous–graphe de G défini par C (ses sommets sont ceux de C, ses arêtes sont celles de C). Démontrez que le degré, *dans* G', des sommets différents des extrémités est pair.

   Le degré des extrémités est-il toujours impair ?

   ii. Quel est ce degré, toujours dans G', quand la marche est un chemin ?

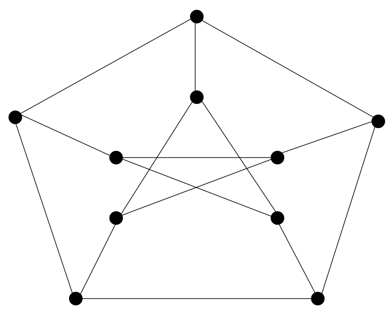
   iii. Quel est ce degré, toujours dans G', quand C est un cycle ?

Notations et rappels Dans cette section $G = (X, E)$ est un graphe non orienté.

- On définit la relation de connexité $\underset{c}{\approx}$ sur X par : $x \underset{c}{\approx} y$ ssi il existe une xy-marche dans G.
  La relation $\underset{c}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur X
- Les *composantes connexes* de $G = (X, E)$ sont les classes d'équivalence de la relation $\underset{c}{\approx}$
- Un graphe est dit *connexe* s'il possède une seule composante connexe
- Un *point d'articulation* de G est un sommet a tel que $G(X \setminus \{a\})$ n'est pas connexe
- G est *biparti* s'il existe une bipartition $\{X_1, X_2\}$ de X telle chaque arête de E a une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2
- Un graphe est dit p–régulier si chaque sommet est de degré p.

Lemme fondamental des graphes connexes : Tout graphe connexe d'ordre $\geqslant 2$ contient au moins deux sommets qui ne sont pas des points d'articulation.

1. Dans cette question les graphes sont non orientés.
   (a) Dessinez des graphes d'ordre 2,3,4,5 qui sont connexes, dont deux sommets sont de degré 1 et tous les autres sont de degré 2.
   (b) Soit un graphe $G = (X, E)$ d'ordre n supérieur ou égal à 2 et non connexe. Que pensez vous de la connexité de $G' = G + x$ obtenu par adjonction d'un nouveau sommet x de degré 1 dans G' ?
   (c) Démontrez par récurrence sur $n \geqslant 2$ l'ordre de G, que tout graphe connexe dont deux sommets sont de degré 1 et tous les autres sont de degré 2 est un chemin.
   (d) En déduire que tout graphe connexe dont chaque sommet est de degré 2 est un cycle.
   (e) Que pouvez-vous déduire pour un graphe non connexe dont chaque sommet est de degré 2 ?
2. Dans cette question, les graphes sont non orientés :
   (a) Dessinez, quand c'est possible, des graphes 1–réguliers d'ordre 1,2,3,4,5,6. Quelle est la structure d'un graphe 1–régulier ?
   (b) Montrer qu'un graphe 1–régulier est biparti. (Récurrence ?)
   (c) Dessinez un graphe biparti connexe d'ordre 5 et possédant un cycle.
   (d) Montrer que dans un graphe biparti il n'y a pas de cycle de longueur impaire.
   (e) Dessinez, quand c'est possible, des graphes 2–réguliers connexes d'ordre 1,2,3,4,5,6. Quelle est la structure d'un graphe 2–régulier connexe ? Et d'un graphe 2–régulier quelconque ?
   (f) Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe 2–régulier connexe ?
3. Soit $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le graphe de Petersen $P = (X, E)$ est le graphe non orienté défini comme suit : ses sommets sont les paires (sous–ensembles de cardinal 2) d'éléments de S, deux sommets sont joints si et seulement si ce sont des paires disjointes d'éléments de S.
   (a) Montrer que P est isomorphe au graphe dont la représentation suit :

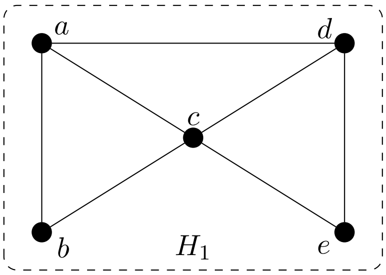


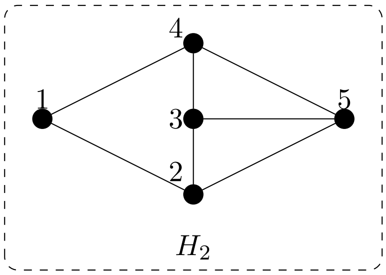
   (b) Exhiber trois cycles de P
   (c) Exhiber une marche passant exactement une fois par tous les sommets de P (marche hamiltonienne)
   (d) Montrer que pour tout sommet $x \in X$ le sous-graphe induit par $X \setminus \{x\}$ contient un cycle passant par tous les sommets de P (cycle hamiltonien). P contient–il des cycles hamiltoniens ?

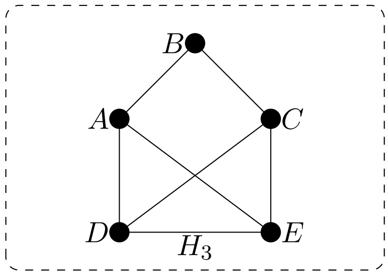
Notations et rappels La classe $\mathcal{GC}$ des graphes connexes est définie par le schéma inductif :

- Base : Un graphe à un seul sommet est dans $\mathcal{GC}$
- Règle : Soit $G = (X, E) \in \mathcal{GC}$. On va construire ce qu'on note $G + x$ en ■ ajoutant ■ un nouveau sommet x ■ relié ■ à G et tel que :
  1. $x \notin X$
  2. $X' = X \cup \{x\}$
  3. E' est E auquel on adjoint un ensemble d'arêtes ayant toutes une extrémité x, et qui contient au moins une arête qui ■ relie ■ x à X, c'est à dire une arête de la forme $\{x, y\}, y \in X$.

1. Soient H_1, H_2 et H_3 les graphes définis par les dessins ci-dessous. Trouvez la paire de graphes isomorphes et donnez une bijection montrant cet isomorphisme. Expliquez pourquoi les 2 autres paires de graphes ne sont pas isomorphes.







2. *Lemme de l'isthme :* Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté connexe. Un *isthme* de G est une arête $e \in E$ telle que le sous-graphe $(X, E \setminus \{e\})$ ne soit pas connexe.
   (a) Donnez un exemple d'isthme dans un graphe 3-régulier sans boucles.
   (b) Montrez que les 3 propositions suivantes sont équivalentes :
      (i) $e = \{x, y\}$ est un isthme de G
      (ii) (x, y) est le seul xy–chemin de G.
      (iii) e n'appartient à aucun cycle de G

3. $\mathcal{CSB}$ est défini sur l'ensemble des graphes non orientés par le schéma inductif suivant :
   - base : le graphe à un sommet sans boucle est élément de $\mathcal{CSB}$
   - règle : si $G = (X, E) \in \mathcal{CSB}$. Soit alors un graphe $G' = (X', E') = G + x$ obtenu en ajoutant un nouveau sommet x et des arêtes qui ne sont pas des boucles, et telles que $d(x) \neq 0$ dans G'.
     Tout graphe G' ainsi construit est dans $\mathcal{CSB}$.

   (a) Dessinez des graphes de $\mathcal{CSB}$ d'ordre 2,3,4,5.
   (b) On peut démontrer que $\mathcal{CSB}$ est la classe des graphes connexes sans boucles (ce n'est pas ce qui est demandé ici). En déduire que si G est connexe alors $m \geqslant n - 1$.
   (c) Un graphe tel que $m < n - 1$ est-il connexe ?
   (d) Un graphe tel que $m > n$ est-il connexe ?
   (e) Donner une condition suffisante sur m et n pour que G soit connexe.

Notations et rappels

- On appelle *sommet pendant* d'un graphe, tout sommet de degré 1
- Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle
- Une *forêt* est un graphe sans cycle

Lemme ESP (Existence Sommets Pendants) : Soit $G = (X, E)$ un graphe contenant n sommets avec $n \geqslant 2$, comptant $m = |E|$ arêtes. L'une ou l'autre des conditions qui suivent :

(i) G est connexe et sans cycle.

(ii) G est sans cycle et $m = n - 1$.

(iii) G est connexe et $m = n - 1$.

entraîne l'existence dans G d'au moins deux sommets pendants.

Lemme PRSP (Propriétés Retrait Sommet Pendant) Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe, d'ordre au moins 2, et contenant un sommet pendant x. Alors $G(X \setminus \{x\})$ est connexe. Si de plus G est sans cycle alors $G(X \setminus \{x\})$ est aussi sans cycle.

Grand théorème des arbres Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est un arbre.

(ii) T est sans cycle d'ordre $n \geqslant 1$ et $m = n - 1$

(iii) T est connexe d'ordre $n \geqslant 1$ et $m = n - 1$

(iv) T est *maximal sans cycle* (maximal en terme d'arêtes pour la propriété d'être sans cycle. C'est-à-dire, $T = (X, E)$ est sans cyle et $\forall x, y \in X, \{x, y\} \notin E \Rightarrow (X, E \cup \{\{x, y\}\})$ contient un cycle

(v) Entre deux sommets quelconques de T il existe un et un seul chemin

(vi) T est *minimal connexe* (minimal en terme d'arêtes pour la propriété d'être connexe. C'est-à-dire, $T = (X, E)$ est connexe et $\forall x, y \in X, \{x, y\} \notin E \Rightarrow (X, E \setminus \{\{x, y\}\}))$ n'est pas connexe

1. Utilisez le schéma inductif donné en cours pour exhiber (dessiner) tous les arbres possédant 6 sommets. Évidemment, vos graphes ne sont pas étiquetés (vous ne donnez pas de nom au sommets), et sont donc obtenus ■ à un isomorphisme près ■.

2. $\mathcal{A}$ est défini sur l'ensemble des graphes non orientés par le schéma inductif suivant :
   - base : le graphe à un sommet sans boucle ;
   - règle : si $G \in \mathcal{A}$ alors ■ tout graphe obtenu en ajoutant un sommet de degré 1 à G ■ est dans $\mathcal{A}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est la classe des arbres.

   (b) En déduire qu'un arbre est un graphe biparti.

3. On considère un arbre $G = (X, E)$. On utilise dans cet exercice les définitions qui suivent :
   - L'*excentricité* d'un sommet x, notée $exc_G(x)$ est la longueur maximale des chemins d'extrémité x.
   - Le *rayon* de G, noté $r(G)$, est la valeur minimale des excentricités des sommets de G : $r(g) = min_{x \in X}(exc_G(x))$.
   - Un *centre* de G est un sommet dont l'excentricité est égale au rayon.
   - Si G a 3 sommets ou plus, on appelle G' le graphe obtenu à partir de G en enlevant **tous** ses sommets pendants.

   (a) Exhiber l'ensemble des arbres non isomorphes ayant 4 ou 5 sommets. Calculer leurs centres

   (b) Démontrer qu'un sommet pendant d'un arbre ne peut être un centre.

   (c) Démontrer que G' est un arbre.

   (d) Démontrer que pour tout sommet x de G' : $exc_{G'}(x) = exc_G(x) - 1$.

   (e) Démontrer que G et G' ont mêmes centres.

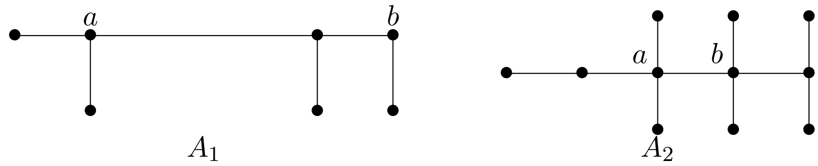
   (f) Démontrer que tout arbre a un ou deux centres, et que si un arbre a deux centres alors ceux–ci sont adjacents.

Notations et rappels

- Un *arbre couvrant* d'un graphe G est un sous–graphe couvrant de G qui est un arbre

Théorème : Un graphe G est connexe si et seulement si il admet un arbre couvrant.

1. Soit G un graphe connexe d'ordre supérieur ou égal à deux.
   (a) Faites un dessin d'un graphe d'ordre 5, connexe et ne contenant pas de sommet pendant.
   (b) Rappelez le *Lemme fondamental des graphes connexes.*
   (c) En utilisant ce lemme, montrez que si G est connexe et ne contient pas de sommet pendant alors G contient un cycle.
2. Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geqslant 2$.
   Soit $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par $f(x, y)$ est la longueur minimale d'une xy–marche.
   Soit $P_n(G, a, b)$ la proposition : ■ $G = (X, E)$ est un graphe connexe quelconque d'ordre n. $a, b \in X$ sont deux sommets quelconques de X. Il existe une numérotation $(x_1, \dots, x_n)$ des sommets de X telle que $x_1 = a, x_n = b$ et $\forall 1 \leqslant i < n : f(x_i, x_{i+1}) \leqslant 3$ ■.
   (a) Démontrez que f est une distance sur X.
   (b) Numérotez les sommets des arbres A_i suivants de sorte que $P_n(A_i, a, b)$, où n est l'ordre de A_i et a et b les sommets indiqués sur les graphes ci-dessous, soit vérifiée :



   (c) En suivant bien pas à pas toutes les indications données dans l'énoncé de cette question, vous allez montrer par induction sur le nombre de sommets que tout arbre A d'ordre $n \geqslant 2$ vérifie $P_n(A, a, b)$ où a, b sont deux sommets quelconques. On examinera deux cas suivant que $f(a, b) \geqslant 2$ ou $f(a, b) = 1$.
   Plus précisément :
      i. Quelle est la base de l'induction ?
      ii. Écrivez *(HI)* l'hypothèse d'induction.
      iii. Soit A un arbre possédant $n + 1$ sommets (pour quel n ?). Soient a, b deux sommets quelconques de A. Envisageons les deux cas :
      $f(a, b) > 1$.
      - À quel(s) arbres exemple(s) de la figure ceci correspond-il ? Faites d'abord la démarche exposée ci-dessous, pas à pas pour le(s) exemples concerné(s). Vous ferez la démonstration générale ensuite.
      - Appelez c le successeur de a dans l'unique ab–marche de A.
      - Enlevez l'arête $\{a, c\}$ de A. Vous obtenez deux composantes connexes C_1, C_2
      - Appliquez (HI) à chaque composante connexe, en choisissant convenablement les sommets a', b', a'', b'' vous obtiendrez $P_q(C_1, a', b')$ et $P_r(C_2, a'', b'')$. Et vous conclurez pour ce cas. Attention, nous n'avons pas envisagé les cas limites simples, où l'une des composantes connexes a un seul sommet.

      $f(a, b) = 1$
      - À quel(s) arbres exemple(s) de la figure ceci correspond-il ? Faites d'abord la démarche exposée ci-dessous, pas à pas pour le(s) exemples concerné(s). Vous ferez la démonstration générale ensuite.
      - Enlevez l'arête $\{a, b\}$ de A. Vous obtenez deux composantes connexes C_1, C_2
      - Appliquez (HI) à chaque composante connexe, en choisissant convenablement les sommets a', b', a'', b'' vous obtiendrez $P_q(C_1, a', b')$ et $P_r(C_2, a'', b'')$. Et vous conclurez pour ce cas. Attention, nous n'avons pas envisagé les cas limites simples, où l'une des composantes connexes a un seul sommet.

(d) En déduire que tout graphe connexe G d'ordre $n \geqslant 2$ vérifie $P_n(G, a, b)$ pour deux quelconques de ses sommets.

Extrait d'examen (2014)

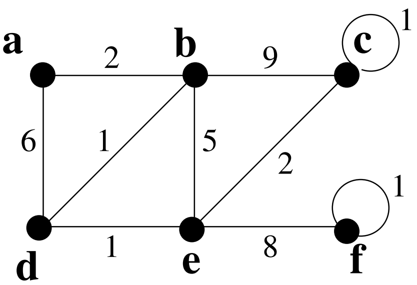
Dans cet exercice, on attend seulement des démonstrations simples, c.-à-d. directes ou par l'absurde, et non par récurrence ou induction.

Dans cette partie $G = (X, E)$ est un graphe non orienté connexe. Les arêtes de ce graphe sont pondérées par une fonction de poids $p\ : E \longrightarrow \mathbb{N}^*$, qui à chaque arête de E associe un entier strictement positif. Le poids d'une marche est la somme des poids de ses arêtes. Le poids d'un graphe est la somme des poids de ses arêtes.

Soit alors la fonction $$W_G : \begin{array}{ccl} X \times X & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ \{x, y\} & \longmapsto & \text{le plus petit poids d'une xy-marche de } G \end{array}.$$

Soit G le graphe ci-dessous, où le poids de chaque arête est donné par l'entier qui lui est adjacent (par exemple l'arête $\{a, d\}$ a un poids 6 ou dit autrement $p(\{a, d\}) = 6$).

1. Donnez w_1 et w_2 deux ac-marches distinctes passant par la boucle $\{c\}$ et leur poids respectif. Donnez w_3 un chemin extrait de w_1 ainsi que son poids.
2. Calculez $W_G(a, c)$, $W_G(c, f)$ et $W_G(a, f)$. Montrez que W_G possède la propriété de l'inégalité triangulaire, c.-à-d. que $\forall x, y, z \in X$, $W_G(x, y) + W_G(y, z) \geqslant W_G(x, z)$.



1. Exhibez un arbre couvrant de poids minimum $A = (X, T)$ de G avec T inclus dans E, quel est le poids de A ?
2. De manière générale, un graphe connexe admet-il un unique arbre couvrant de poids minimum ? Justifiez.
3. Pour $x, y \in X$, quelle relation entre $W_G(x, y)$ et $W_A(x, y)$ ($<, \leqslant, =, \geqslant, >$) ? Justifiez.

Voici ci-dessous l'algorithme de Kruskal pour calculer un arbre couvrant de poids minimum

Algorithme : Kruskal
Données : $G = (X, E)$ est un graphe non orienté connexe d'ordre n
Résultat : $T \subseteq E$ un ensemble d'arêtes tel que (X, T) est un arbre couvrant de poids minimum de G
$T \longleftarrow \emptyset$;
Trier les arêtes de E par poids croissant;
pour chaque $\{x, y\}$ `de` E `prise par ordre de poids croissant` **faire**
  si x `et` y `ne sont pas dans la même composante connexe de` (X, T) **alors**
    $T \longleftarrow T \cup \{x, y\}$;
fin pour chaque
retourner `T`

1. Combien de composantes connexes dans (X, T) avant la boucle **pour chaque** ? Justifiez. Montrez qu'à l'issue de la boucle **pour chaque**, c.-à-d. après examen de toutes les arêtes de E, (X, T) contient une seule composante connexe.
2. Montrez que si (X, T) ne contient pas de cycle avant un passage dans la boucle **pour chaque**, alors il ne contient pas de cycle après ce passage dans la boucle **pour chaque**.
3. En déduire qu'à l'issue de l'algorithme Kruskal, (X, T) est un arbre couvrant de G. (*On ne cherchera pas à prouver qu'il est bien de poids minimum*)

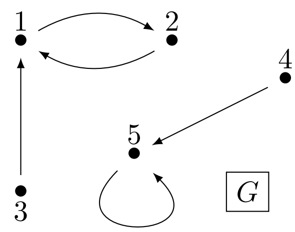
Notations et rappels Dans cette section $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- Une *marche orientée* de $G = (X, U)$ est une suite $(x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G telle que $h \geqslant 0$ et $\forall i, 0 \leqslant i < h-1,\ (x_i, x_{i+1}) \in U$. x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur. Pour $h = 0$ on a une marche orientée de longueur 0 (x_0)
- Une marche orientée w *passe par* l'arc (a, b) si les sommets a et b sont consécutifs dans w
- On note $\mathbf{x_0x_h}$–*marche orientée* une marche orientée d'origine x_0 et d'extrémité x_h
- Une *chaîne* $(x_0, \ldots, x_h)$ est marche orientée telle que tous ses sommets sont deux à deux distincts
- L'ensemble des *descendants* d'un sommet x de $G = (X, U)$, noté $Desc_G(x)$ est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy-chaîne
- L'ensemble des *ascendants* d'un sommet x de $G = (X, U)$, noté $Asc_G(x)$ est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une yx-chaîne
- Une *racine* r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$
- Un *circuit* de $G = (X, U)$ est une xx–chaîne de longueur non nulle dont tous ses sommets sont distincts deux à deux (sauf l'origine et l'extrémité)
- On définit la *relation de forte connexité* $\underset{fc}{\approx}$ sur X par : $x \underset{fc}{\approx} y$ ssi il existe un xy–marche orientée et une yx–marche orientée dans G. La relation $\underset{fc}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur X (immédiat)

  Les classes d'équivalence de $\underset{fc}{\approx}$ sont appelées *composantes fortement connexes* de G.
- On appelle *arborescence* tout arbre orienté possédant une racine.

Propriété : Tout graphe possédant une racine est connexe.

1. *Exercice concernant à la fois les graphes orientés et non orientés.*
   Soit $G = (X, E)$ un graphe. Soient $n = |X|$ et $m = |E|$.
   - X peut-être un ensemble vide VRAI/FAUX
   - E peut-être un ensemble vide VRAI/FAUX
   - Soit d l'application qui à chaque sommet associe son degrés. Son ensemble de départ est ..., son ensemble d'arrivée est ...
   - Si $x \in X$ est un sommet isolé, $d(x) =$...
   - Quelle relation relie m et d ? ...
2. Dessinez
   (a) Le graphe défini par $X = \{1, 2, 3\}$ et $Succ(1) = \{1, 2\}$, $Succ(2) = \{1, 3\}$ et $Succ(3) = \{\}$
   (b) Le graphe défini par $X = \{1, 2, 3\}$ et $Voisins(1) = \{1, 2\}$, $Voisins(2) = \{1, 3\}$ et $Voisins(3) = \{2\}$
   (c) Un graphe orienté de taille minimum en termes de sommets et contenant une seule source s, un seul puits p avec $s \neq p$ et au moins 2 arcs.
   (d) Le graphe orienté et le graphe non orienté définis par $X = \{a, b, c\}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Soit le graphe orienté $G = (X, U)$ défini par le dessin ci-contre.



   - Donnez en extension X et U
   - Dessinez G_1 un sous-graphe de G
   - Dessinez G_2 un sous-graphe couvrant de G
   - Dessinez G_3 le sous-graphe de G induit par $\{1, 3, 5\}$
   - Dessinez G_4 le graphe non orienté sous-jacent à G en veillant à ce que les 5 graphes soient différents entre eux

4. Dessinez un graphe orienté à 4 sommets $G = (X, U)$ tel que :
   (a) G est un arbre, mais pas une arborescence.
   (b) G possède une racine, mais n'est pas un arbre.
5. Pour tout graphe orienté G, on note $S(G)$ l'ensemble des sources de G (sommets sans arcs entrants) et $P(G)$ l'ensemble des puits de G (sommets sans arcs sortants).
   (a) Soit $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(4, 5), (3, 5), (5, 2), (5, 1), (3, 1), (6, 5)\})$. Calculer $S(G)$ et $P(G)$. G est–il un graphe sans circuit ?
   (b) Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit. Démontrer que le graphe obtenu en ajoutant à U l'ensemble des arcs $P(G) \times S(G)$ est un graphe fortement connexe.
6. **Loup, chèvre et chou**
   Un batelier doit faire passer une rivière à un loup, une chèvre et un chou, dans une barque si petite qu'il ne peut emporter que l'un d'entre eux au maximum à chaque voyage. Pour des raisons évidentes, il ne peut laisser le loup et la chèvre seuls sur une rive, pas plus que la chèvre et le chou.

   Utilisez un graphe pour montrer de quelle manière ces trois passagers peuvent être transportés d'une rive à l'autre. Attention, on ne demande pas de trouver la/une solution ! Il s'agit dans cet exercice de modéliser le problème posé en termes de graphes : orienté/non orienté ? quels sommets ? arc/arêtes ? puis de définir la réponse en terme de recherche dans un graphe : une marche, une marche orientée, un cycle, ...

Notations et rappels Dans cette section $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- La *fermeture transitive* de $G = (X, U)$ est le graphe $G^t = (X, U^t)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$ il existe une xy–marche orientée dans G de longueur ≥ 1
- La *fermeture réflexive* de $G = (X, U)$ est le graphe obtenu en rajoutant un boucle sur chaque sommet
- La *fermeture réflexo-transitive* de $G = (X, U)$ est le graphe $G^* = (X, U^*)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$ il existe une xy–marche orientée dans G de longueur ≥ 0
  Remarque : $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow y \in Desc_G(x)$
- La classe $\mathcal{A}$ des arborescences se définit par les deux schémas d'induction suivants :

  Schéma 1 – Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
  – Règle : si $A \in \mathcal{A}$ alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0 à $\mathcal{A}$ est une arborescence

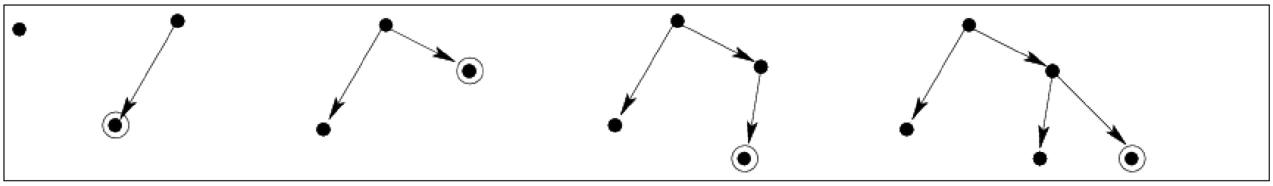
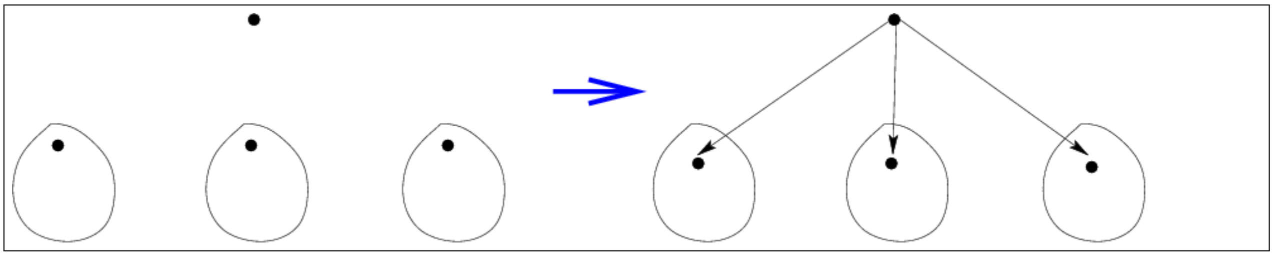


  Schéma 2 – Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
  – Règle : si $(r_1, A_1), \ldots, (r_p, A_p)$ sont des arborescences (où r_i est la racine de $A_i, 1 \leq i \leq p,$), alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet r et les arcs $(r, r_1), \ldots, (r, r_p)$ est une arborescence



- Une *arborescence couvrante* d'un graphe orienté G est un sous–graphe couvrant de G qui est une arborescence

Théorème : G possède une racine $\Leftrightarrow$ G possède une arborescence couvrante

Théorème (Caractérisation des arborescences) : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est une arborescence

(ii) G est sans cycle et possède une racine

(iii) G a une racine et $n - 1$ arcs

(iv) G a une racine r et $\forall\, x \in X,$ il existe une seule rx-marche orientée dans G

(v) G est connexe et $\exists\, x_0 \in X$ tq $d^-(x_0) = 0$ et $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

(vi) G est sans cycle et $\exists\, x_0 \in X$ tq $d^-(x_0) = 0$ et $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

Dans cette partie on suppose des graphes sans boucles.

- On appelle *graphe réduit* de G le graphe quotient de G par la partition des sommets induite par $\underset{fc}{\approx}$.

Théorème : Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans circuit.

1. On considère le graphe orienté
   $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(5, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\})$.
   (a) Le graphe G est–il connexe ? est–il fortement connexe ?
   (b) Construisez la fermeture transitive, les composantes fortement connexes de G.

(c) On considère le graphe orienté
$H = (\{a, b, c, d, e\}, \{(b, a), (b, c), (b, d), (d, b), (d, a), (e, d), (c, d)\})$. Les graphes G et H sont–ils isomorphes ?

2. Soit le graphe $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{(1, 3), (3, 4), (5, 5), (6, 4), (5, 7), (3, 6), (6, 6), (4, 3), (2, 5)\})$.
   (a) Construire la fermeture transitive de G, ses composantes connexes et ses composante fortement connexes.
   (b) La fermeture réflexo–transitive de G est–elle un ordre ?
   (c) Définissez et représentez un graphe réduit $G' = (X', U')$ de G.
   (d) La fermeture réflexo–transitive de G' est–elle un ordre ?
   (e) Trouvez deux numérotations compatibles des sommets de G'.
3. (*Question de l'examen terminal de mai 2012*) Soit G un graphe orienté défini comme suit :
   - X l'ensemble des sommets de G est $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
   - $Succ(1) = \{1, 2, 3\}$ $Succ(2) = \{1\}$ $Succ(3) = \{2, 4\}$
     $Succ(4) = \{5\}$ $Succ(5) = \{4\}$

   (a) Rappelez précisément quel type d'objet mathématique est $Succ$
   (b) Représentez le graphe G.
   (c) G est–il connexe ? fortement connexe ?
   (d) Quels sont les points d'articulation de G ? On les veut **tous**.
   (e) Expliquez précisément pourquoi G n'est pas un arbre.
   (f) Donnez les composantes fortement connexes de G et représentez son graphe réduit.
   (g) De manière générale, si G à n sommets et x composantes fortement connexes, pouvez-vous être sûr qu'une composante fortement connexe contient au moins p sommets ? Explicitez p et justifiez votre raisonnement.
4. (*Question de l'examen terminal de mai 2016*) *(La dernière question est indépendante des autres.)* On s'intéresse ici à la classe des arborescences. On appelle *arborescence binaire* une arborescence dans laquelle tous les sommets ont un degré sortant égal à 2 ou à 0, les sommets de degré sortant 0 sont appelés les *feuilles*. On rappelle que le *rang* d'un sommet est la longueur de l'unique chaîne entre la racine et ce sommet.

   (a) Dessiner un arborescence binaire de 11 sommets et indiquer à côté de chaque sommet son rang.
   (b) Une *arborescence binaire saturée* est telle que tous les sommets de même rang ont le même nombre de descendants. Construire une arborescence binaire saturée à partir de votre dessin précédent.
   (c) Soit $A = (X, U)$ une arborescence binaire saturée telle que le rang de ses sommets est un entier compris entre 0 et R_{max}, autrement dit $\forall x \in X$, $rang(x) \in [0..R_{max}]$. Dénombrer le nombre de sommets de rang i, $\forall i \in [0..R_{max}]$.
   (d) La *hauteur* d'une arborescence A est définie par la longueur d'une plus longue chaîne de A. Donner une relation entre la hauteur d'une arborescence A et le rang de ses sommets.
   (e) Soit f le nombre de feuilles d'une arborescence saturée, donner une relation entre f et h, la hauteur de A.
   (f) **Démontrer par récurrence** sur le nombre de sommets qu'une arborescence possède 1 sommet de plus que d'arcs, c.-à-d. que $m = n - 1$.