UNIVERSITÉ de MONTPELLIER
— Faculté des sciences —
Département de Mathématiques
Année 2018–2019

Algèbre Linéaire et Analyse 2
HLMA203
LICENCE 1ère année
Série 1 & Série 3

Contrôle Final : session 1

Date : 10 Mai 2019
Heure : 16h00
Durée : 3 heures (hors tiers-temps)
Document et calculatrice interdits

Exercice §1 : QCM. Qualifier les assertions suivantes par **V** (vraie) ou **F** (fausse), sur la copie ; bien reporter, au préalable, une colonne avec tous les numéros (pas les assertions elles-mêmes), dans l'ordre, mêmes ceux sans réponse. Toute réponse fausse est comptée négativement.

1. La somme de deux isomorphismes $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est un isomorphisme.
2. La fonction $f(x) = e^{e^x+x}$ est une primitive de la fonction $F(x) = e^{e^x}$.
3. Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est le produit des termes diagonaux.
4. Pour toutes matrices inversibles A et B, AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
5. L'équation différentielle $y' - 3y + 2 = 0$ est linéaire homogène.
6. La dimension de l'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_{2019}(\mathbb{R})$ est 2019.
7. Il existe deux plans vectoriels F et G dans $\mathbb{R}^4$ tels que $F \cap G = 0$.
8. Certaines applications linéaires $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ne sont pas injectives.
9. Le DL de $\sqrt{1+x}$, en $x = 0$ et à l'ordre 2, est donné par : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$.
10. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, avec A inversible, nous avons $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$.

Exercice §2 : les matrices commutantes.
Pour toute matrice carrée A, on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C}(A)$: les matrices B qui "commutent à A", *i.e.* telles que $AB = BA$; il y en a beaucoup : $B = A$, $B = I$ (unité), $B = A^2$,...

Partie I. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 1$, et soit $A \in E$.

1. Vérifier que $\mathcal{C}(A)$ est un s.e.v de E. Pourquoi $\mathcal{C}(A)$ est non nul ?
2. Montrer que l'application $f : E \to E$, $f(B) = AB - BA$, est un endomorphisme.
3. À l'aide du Théorème du Rang, établir la formule : $rang(f) = n^2 - \dim \mathcal{C}(A)$.
4. En déduire que f n'est pas surjective.

Partie II. On suppose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq b$.

1. Décrire explicitement les matrices $B \in \mathcal{C}(A)$: poser $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et résoudre le système.
2. En déduire que $\mathcal{C}(A)$ est un plan ; montrer ensuite que nous avons $\mathcal{C}(A) = Vect(I_2, A)$.
3. *Application :* montrer qu'il existe un polynôme $P(X) = X^2 - \tau X + \delta$, tel que $P(A) = 0$.
   Ind. : inutile d'expliciter τ et δ, l'existence de $P(X)$ se déduit de la propriété $A^2 \in \mathcal{C}(A)$.

Exercice §3. Soit l'équation différentielle du second ordre (linéaire à coefficients constants) :

$$(\mathcal{E}) \quad y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,,\ y'' - 4y' + 3y = 3e^{4x} - 4e^{3x}\ .$$

1. Donner une base de solutions de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$.
2. Trouver une solution particulière de la forme $y_1 = \alpha e^{4x}$ pour l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1) \quad y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,,\ y'' - 4y' + 3y = e^{4x}$.
3. Trouver une solution particulière de la forme $y_2 = \beta x e^{3x}$ pour l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2) \quad y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,,\ y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$.
4. En déduire une solution particulière pour $(\mathcal{E})$.
5. Trouver l'unique solution y de $(\mathcal{E})$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice §4. Rappelons les développements limités (DL) de sinus et cosinus en 0 ($n > 0$) :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\ ;$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\ .$$

1. Calculer le DL de $1/\cos$, en $x = 0$ et à l'ordre 8, par composition avec celui de $1/(1+x)$.
2. En déduire le DL de tangente (en $x = 0$, à l'ordre 8), par produit avec le DL de sinus.

Exercice §5. Soient les polynômes : $P_1 = X^6 + 6X^4 + 9X^2 + 4$ et $P_2 = X^6 + 9X^4 + 24X^2 + 16$.

1. Calculer le polynôme unitaire $P = pgcd(P_1, P_2)$.
2. Décomposer P en facteurs premiers dans $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire les décompositions en facteurs premiers de P_1 et P_2 (dans $\mathbb{R}[X]$).
4. Calculer le polynôme unitaire $ppcm(P_1, P_2)$.

Exercice §6. Soit la matrice réelle : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A.
2. En déduire qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, telle que $B^2 = A$.

Exercice §7. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

1. Pour $t = \tan \dfrac{x}{2}$, retrouver les formules $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$.
2. Effectuer le changement de variables $t = \tan \dfrac{x}{2}$ dans l'intégrale de I.
3. Conclure.