UNIVERSITÉ MONTPELLIER	**Algèbre Linéaire et Analyse 2**
Département de Mathématiques	HLMA203
Année 2019–2020	Série 1 & Série 3

Planche d'Exercices n°2 : Espaces Vectoriels

Partie I : Révisions et pré-Requis.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ (lois usuelles). Parmi ceux suivants, quels sous-ensembles sont sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x+z=1\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x+z=0\}$ ou $E_3 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x+z+1=0\}$?
2. $F_1 = \{(x,y,z) \in E \,|\, y-2z=0 \text{ ou } x+y=0\}$ ou $F_2 = \{(x,y,z) \in E \,|\, y-2z=0 \text{ et } x+y=0\}$?
3. $G_1 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x^2+|y|+z^4=0\}$, $G_2 = \{(x,y,z) \in E \,|\, |z+1|^2-|z-1|^2=0\}$ ou $G_3 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x^2+y^2+z^2=-1\}$?

Exercice 2. Sans résoudre, montrer que les solutions du système suivant est un s.e.v : $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x-5y+z=0,\ 2x+y-7z=0,\ -x+3y-z=0$ et $3x+2y+z=0$.

Exercice 3.
1. Quels sont les sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbb{C}$? De $\mathbb{C}^2$?
2. Donner tous les sous-espaces vectoriels (réels) de $\mathbb{R}^2$. *Idem* pour $\mathbb{R}^3$.
3. Décrire qualitativement toutes les configurations de 3 plans affines réels dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Pour chacune des applications suivantes : étudier sa linéarité et, le cas échéant, déterminer ses noyau et image.

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, & f_1(x,y) = (2x+y, x-y)\ ; \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, & f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y)\ ; \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, & f_3(x,y,z) = (y^2, x+z+2)\ ; \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4\,, & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y). \end{array}$$

Exercice 5. *Contrôle Continu HLMA101, 2016-2017.* On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, définie par : $f(x,y,z,t) = (2x+z+t, x+2y+t, x+y+2z, 2x+y-z+2t)$.

1. Écrire la matrice A de f ; pour $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$, calculer les images $f(e_3 - e_2)$, $f(e_1 - 2e_2)$ et $f(\sum_{i=1}^4 e_i)$.
2. Donner une description paramétrique de l'ensemble S des antécédents de $e_2 - 3e_3 + 4e_4$ par f. (On pose le système et on le résout avec la méthode du pivot.)
3. Décrire le s.e.v T, noyau de f, en termes de vecteurs directeurs. Existe-t-il une relation entre S et T ? (Si "oui", laquelle ? Si "non", donner un argument logique.)
4. Peut-on en déduire que l'application f est (ou n'est pas) injective ? Surjective ?

Exercice 6. Questions courtes : la conjugaison complexe $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, avec $\kappa(z) = \bar{z}$, est-elle une application linéaire réelle ? κ est-elle une application linéaire complexe ?

Partie II : Entraînement.

Exercice 7. QCM : cocher avec **V** ou **F** (vrai/faux) la case en regard de chaque énoncé.

1. ☐ $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. ☐ Tout espace vectoriel réel est naturellement espace vectoriel complexe.
3. ☐ Les fonctions dérivables $]0,1] \to \mathbb{R}$ forment naturellement un espace vectoriel.
4. ☐ L'ensemble des solutions d'un système linéaire n'est pas forcément un s.e.v.
5. ☐ La réunion de deux s.e.v n'est pas toujours un s.e.v.
6. ☐ L'ensemble des fonctions réelles monotones est un s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
7. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, les polynômes réels de degré n forment un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$.
8. ☐ Pour toutes parties X et Y d'un e.v E, $Vect(X \cap Y) = Vect(X) \cap Vect(Y)$.
9. ☐ Pour ses lois naturelles, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas un plan vectoriel complexe.
10. ☐ Tout espace vectoriel non nul possède un sous-espace vectoriel non nul.

Total | /**10** | Compter : +1 point si réponse juste, -1 point si fausse (0 si absence).

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}[X]$. Parmi ceux suivants, quels sous-ensembles en sont sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in E \mid d^\circ(P) = 5\}$, $E_2 = \{P \in E \mid d^\circ(P) < 7\}$ ou $E_3 = \{P \in E \mid d^\circ(P) \geq 1\}$?
2. $F_1 = \{P \in E \mid P(0) = 1\}$, $F_2 = \{P \in E \mid P(1) = 1\}$ ou $F_3 = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$?
3. $G_1 = \{P(X^2) | P \in E\}$, $G_2 = \{P(X^2)X | P \in E\}$ ou $G_3 = \{P^2 | P \in E\}$?
4. $H_1 = \{P \in E | X^2 + 1 \text{ divise } P\}$, $H_2 = \{P \in E | P \text{ divise } X^2 + 1\}$
   ou $H_3 = \{P \in E | X^2 + 1 \text{ ne divise pas } P\}$?
5. $I_1 = \{P \in E | P'(0) = P(0)\}$, $I_2 = \{P \in E | P"(0) = 0\}$,
   $I_3 = \{P \in E | P(0)^2 = 0\}$ ou $I_4 = \{P \in E | 2P'(0) = P(0) + P"(0)\}$?

Exercice 9. Parmi ceux suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1. le sous-ensemble E_1, des fonctions constantes ?
2. le sous-ensemble E_2, des fonctions dérivables ?
3. le sous-ensemble E_3, des fonctions continues mais non dérivables ?
4. le sous-ensemble E_4, des fonctions avec signe (fonctions positives ou négatives) ?
5. le sous-ensemble E_5, des fonctions croissantes ?
6. le sous-ensemble E_6, des bijections ?

Exercice 10. ($\mathbb{K}$ est un corps) Soient 3 droites vectorielles de $\mathbb{K}^2$: D_1, D_2 et D_3.

1. Montrer l'alternative pour tous i et j, avec $i \neq j$: $D_i = D_j$ ou $D_i \oplus D_j = \mathbb{K}^2$.
2. Supposons $D_1 \neq D_2 \neq D_3 \neq D_1$. Montrer alors que la formule de distributivité est fausse : $(D_1 + D_2) \cap D_3 = (D_1 \cap D_3) + (D_2 \cap D_3)$.

Exercice 11. Soit $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{K}$ est un corps). Notons $\mathbb{T}_+$ (*resp.* $\mathbb{T}_+^*$), le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures (*resp.* strictement supérieures). Pour les matrices triangulaires inférieures, nous avons $\mathbb{T}_-$ et $\mathbb{T}_-^*$.

1. Les sous-ensembles $\mathbb{T}_+$, $\mathbb{T}_+^*$, $\mathbb{T}_-$ et $\mathbb{T}_-^*$ sont-ils tous quatre des s.e.v de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Lesquelles, parmi des décompositions suivantes, sont valides ?
   $i)\, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{T}_+ \oplus \mathbb{T}_-$; $ii)\, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{T}_+^* \oplus \mathbb{T}_-$; $iii)\, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{T}_+^* + \mathbb{T}_-^*$;
   $iv)\, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{T}_+ \oplus \mathbb{T}_-^*$; $v)\, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{T}_+ + \mathbb{T}_-^*$; $vi)\, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{T}_+ + \mathbb{T}_-$;
   $vii)\, \mathbb{T}_+ = (\mathbb{T}_+ \cap \mathbb{T}_-) \oplus \mathbb{T}_+^*$; $viii)\, \mathbb{T}_- = (\mathbb{T}_+ \cap \mathbb{T}_-) \oplus \mathbb{T}_-^*$; $ix)\, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{T}_+^* \oplus (\mathbb{T}_+ \cap \mathbb{T}_-) \oplus \mathbb{T}_-^*$.

Exercice 12. Soient les sous-ensembles C et D de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés, respectivement, des fonctions croissantes et des fonctions décroissantes. Montrer que le sous-ensemble $F = \{f - g | f, g \in C\}$ de E est un s.e.v. Que dire de $G = \{f - g | f, g \in D\}$?

Exercice 13. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et soient ses sous-ensembles :

$$F = \{(x, y, z, t) \,|\, x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\} \text{ et } H = Vect((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)) \ .$$

1. Vérifier que F et H sont s.e.v de E ;
2. Montrer que nous avons une décomposition en somme directe : $E = F \oplus H$.
3. Trouver une base $\mathcal{C}$ de E, adaptée à cette décomposition.

Exercice 14. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 15. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\text{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 16. Soit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$, muni de l'addition usuelle. Pour tous $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $u = (x, y) \in E$, définissons $z \star u = (ax - by, ay + bx)$.

1. Vérifier que la loi $\star$ distribue l'addition, qu'elle est associative et que, pour tout $u \in E$, nous avons $1 \star u = u$.
2. Quelle structure définissons-nous ainsi sur E ?

Exercice 17. Soient 2 sous-espaces vectoriels, F et G, d'un espace vectoriel E. Montrer :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Longleftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

Exercice 18. Soit $\mathcal{F}$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ suivants :

— $\mathcal{P}$, le sous-ensemble des fonctions paires ;
— $\mathcal{I}$, le sous-ensemble des fonctions impaires.

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$

Exercice 19. Pour F, G et H, trois s.e.v d'un espace vectoriel E, on considère la formule de distributivité : $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

1. Trouver un contre-exemple invalidant cette formule.
2. Supposons $G \subset F$ (ou $H \subset F$) : montrer que la formule de distributivité est vraie.

Partie III : Approfondissement.

Exercice 20. Considérons l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur un intervalle : montrer qu'il est généré par ses seules fonctions croissantes. *Indication* : montrer que toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.

Exercice 21. Pour deux espaces vectoriels E_1 et E_2, posons $E = E_1 \times E_2$.

1. Rappeler les lois d'espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E'_1 = E_1 \times \{0\}$ et $E'_2 = \{0\} \times E_2$ sont des s.e.v de E.
3. Montrer que nous avons une décomposition en somme directe : $E = E'_1 \oplus E'_2$.

Exercice 22. Soit un ensemble X et soit l' ensemble $E = \mathbb{C}^X$ (fonctions $X \to \mathbb{C}$) : E est un espace vectoriel complexe ; soit aussi son sous-ensemble $F = \{f \in E | Im(f) \subset \mathbb{R}\}$.

1. Rappeler la définition de $f + g$ et de zf, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tous $f, g \in E$.
2. F est-il stable pour la loi externe ? Vérifier que E est aussi un espace vectoriel réel.
3. Quelle structure vectorielle a-t-on sur F ?
4. Pour $z \in \mathbb{C}$, vérifier que la partie $\{zf | f \in F\} \subset E$, notée $F(z)$, est un s.e.v réel.
5. Montrer la décomposition en somme directe : $E = F \oplus F(i)$.
6. **Cas particulier.** Soit $X = \mathbb{R}$ et soit la fonction $\varepsilon \in E : \forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon(x) = \exp(ix)$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de nombre $z \in \mathbb{C}$, tel que $\varepsilon \in F(z)$.
   (b) Donner la décomposition de la fonction ε, correspondant à $E = F \oplus F(i)$.

Exercice 23. Par restriction, la multiplication (interne) de $\mathbb{R}$ fournit une multiplication (externe) de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Avec cette loi-là (et l'addition), $\mathbb{R}$ n'est-il pas un espace vectoriel rationnel ?
2. Que dire alors de l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$?
3. Que dire aussi de la partie $\{p + q\sqrt{2} \,|\, p, q \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathbb{R}$?

Exercice 24. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des "octets", aussi appelés "mots de 8 bits" ; exemples : $00001010 \in \mathcal{O}$, $10100110 \in \mathcal{O}$. Noter que $\mathcal{O}$ est un ensemble fini à $2^8 = 256$ éléments. Bit de parité d'un mot : il vaut **0** si ce mot a un nombre pair de bits égaux à 1, sinon c'est **1**.

1. Rappeler l'addition et la multiplication (tables) du corps à 2 éléments, $\mathbb{K} = \{0, 1\}$.
2. Définir deux lois sur $\mathcal{O}$, qui en fasse un espace vectoriel sur ce corps $\mathbb{K}$.
3. Dénombrer les droites vectorielles de $\mathcal{O}$, ainsi que ses plans vectoriels.
4. Les mots pairs (*resp.* impairs) sont ceux dont le bit de parité égale 0 (*resp.* 1) : on note $\mathcal{O}_0$ (*resp.* $\mathcal{O}_1$) leur sous-ensemble. Quelles géométries a-t-on pour $\mathcal{O}_0$ et $\mathcal{O}_1$?

Exercice 25. Nous notons $\oplus$ le produit numérique sur $E = \mathbb{R}_+^*$; attention : $2 \oplus 3 = 6$. Rappelons que $\oplus$ est une loi de composition interne sur E, associative et commutative.

1. Quel est l'élément neutre de E pour la loi $\oplus$? Tout élément de E admet-il un symétrique pour $\oplus$?
2. Introduisons la loi $\otimes$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, $\lambda \otimes u = u^\lambda$. Vérifier que cette loi distribue la loi $\oplus$ et qu'elle est associative "externe". Calculer aussi $1 \otimes u$, pour tout $u \in E$.
3. De quelle structure les lois $\oplus$ et $\otimes$ équipent-elles l'ensemble E ?
4. Préciser : avec les lois $\oplus$ et $\otimes$, montrer que E est une droite.