

TD 1: Espaces Vectoriels

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 1.

Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(1, 2, 2)$

Exercice 2.

Pour quelles valeurs de a les vecteurs $(1, 0, a)$, $(a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ sont ils coplanaires ?

Exercice 3.

Soit u , v et w trois vecteurs de l'espace et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation vectorielle d'inconnue $x : u \wedge x = v$.

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors u et v sont orthogonaux. On supposera dans la suite que u et v sont orthogonaux.
2. Déterminer toutes les solutions colinéaires à $u \wedge v$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Déterminer les vecteurs solutions qui vérifient en outre $\langle x, w \rangle = a$

Exercice 4.*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal. On note \mathcal{D} la droite passant par $A = (1, 3, -2)$ et de vecteur directeur $u = (2, 1, 0)$, \mathcal{P} le plan d'équation $2x - 3y + 5z = 7$ et M le point $(1, 2, 3)$.

1. Calculer la distance de M à \mathcal{D} .
2. Calculer la distance de M à \mathcal{P} . *Indication : remarquer que le point $(1, 0, 1)$ appartient au plan \mathcal{P} .*

Exercice 5.*

Déterminer la projection orthogonale Δ' de la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

dans le plan P d'équation $x + y + z = 1$.

Exercice 6.*

Calculer l'équation de la sphère de centre $(1, 1, 1)$ et dont le plan tangent est $x + y + z = 2$.