TD 3 : Réduction des endomorphsimes

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 1. Vrai/Faux

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 2.

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Rang 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.*

Soit E un vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathsf{Im}(u)$ et $\mathsf{Ker}(u)$ sont stables par v. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose désormais que u est un projecteur. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $\mathsf{Ker}(u)$ et $\mathsf{Im}(u)$ sont stables par v.