UNIVERSITÉ MONTPELLIER	**Algèbre Linéaire et Analyse 2**
Département de Mathématiques	HLMA203
Année 2019–2020	Série 1 & Série 3

Planche d'Exercices n°3 : Calcul Intégral & Développements Limités

Partie I : révisions.

Exercice 1. Soit un réel $a > 0$ et soit une fonction continue impaire $\varphi : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que nous avons $\int_{-a}^{a} \varphi(t)dt = 0$.

Exercice 2. Soit la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, définie par $f(x) = x^2$,

1. Évaluer f en les multiples entiers de $0,1$; s'en servir pour tracer le graphe de f sur un quadrillage 10×10. Échelle : 1 unité = 10 cm (1 carreau mesure donc 1 cm^2).
2. Comparer $N/100$ à $\displaystyle\int_0^1 x^2dx$, où N est la comptabilité des carreaux entièrement contenus dans l'hypographe de f.
3. Comparer aussi $\displaystyle\int_0^1 x^2dx$ avec $N'/100$, où N' est le complémentaire à 100 du nombres de carreaux contenus dans l'épigraphe de f.
4. Améliorer les approximations ci-dessus en tenant compte des carreaux interceptés par le graphe de f.

Exercice 3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1.5}^{+1.5} E(x)dx$, où E est la fonction partie entière.

Exercice 4. Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0\,; \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1\,; \\ 3 & \text{si } x = 1\,; \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2\,; \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$

1. Calculer $\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0, 4]$: calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0, 4]$; F est-elle dérivable sur $[0, 4]$?

Exercice 5. Calculer l'aire de la région de $\mathbb{R}^2$, délimitée par les deux courbes d'équations : $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$. *Indication* : commencer par étudier sommairement les deux fonctions $x \mapsto y = \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto y = \frac{1}{1+x^2}$, puis tracer leurs graphes.

Exercice 6. Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f(x) = e^x$.

1. Utiliser la convexité de f pour montrer l'inégalité : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 1 + x$.
2. Par calcul intégral, en déduire : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 1 + x + x^2/2$.
3. Recommencer le procédé et en déduire : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 1 + x + x^2/2 + x^3/6$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, montrer l'inégalité : $e^x \geqslant \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \quad (x \geqslant 0)$.

Partie II : calcul intégral.

Exercice 7. Calculez les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$. On vérifiera qu'on peut trouver des coefficients α et β, tels que :
$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1}\ .$$
2. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$. On vérifiera qu'on peut trouver des coefficients α et β tels que :
$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2}\ .$$

Exercice 8. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$
2. $\int x \arctan x\,dx$
3. $\int \ln x\,dx$ puis $\int (\ln x)^2\,dx$
4. $\int \cos x \exp x\,dx$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$ (intégration par parties) ;
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple) ;
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (changement de variable $x = \tan t$) ;
4. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \arctan x\,dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$).

Exercice 10. Calculez les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)x}\,dx$. On vérifiera qu'on peut trouver des coefficients α,β et γ, tels que :
$$\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{\alpha x+\beta}{x^2+1} + \frac{\gamma}{x}\ .$$
2. $\int_1^2 \frac{1+x}{(x^2+1)x^3}\,dx$. On vérifiera qu'on peut trouver des coefficients $(\alpha_i)_{1\le i\le 5}$, tels que :
$$\frac{1+x}{(x^2+1)x^3} = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\alpha_3}{x^3} + \frac{\alpha_4 x+\alpha_5}{(x^2+1)}\ ;$$
pour cela, on pourra effectuer la division par les puissances croissantes à l'ordre 2 de $1+x$ par $1+x^2$.

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.
Indication : pour la première on pourra effectuer le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ et pour la deuxième on pourra considérer la somme des deux intégrales.

Exercice 12. Calculer l'aire intérieure d'une ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Indications. On pourra calculer seulement la partie de l'ellipse correspondant à $x \ge 0$, $y \ge 0$, en exprimant d'abord y en fonction de x et en calculant l'intégrale ensuite.

Partie III : développements limités.

Exercice 13. Soit la fonction polynomiale $f(x) = (1+x)^{2020}$. Uniquement avec la formule du binôme (pas de calcul), donner la valeur de $f^{(2019)}(0)$ (dérivée 2019-ième).

Exercice 14. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

1. $\cos x \cdot \exp x$, à l'ordre 3 ;
2. $(\ln(1+x))^2$, à l'ordre 4 ;
3. $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$, à l'ordre 6 ;
4. $\exp\big(\sin(x)\big)$, à l'ordre 4 ;
5. $\sin^6(x)$, à l'ordre 9 ;
6. $\ln\big(\cos(x)\big)$, à l'ordre 6 ;
7. $\dfrac{1}{\cos x}$, à l'ordre 4.

Exercice 15. Calculer les développements limités suivants :

- développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$;

- développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$;

- développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 16. En calculant des développements limités, obtenir les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 17. Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 18. Contrôle Continu n°2, 2015. Donner un développement limité de la fonction sinus en $x = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre 6. (*Indication* : $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.)

Partie IV : sujets d'examen.

Exercice 19. Sujet d'examen HLMA203, 1ère Session 2018.

Nous désirons calculer $\int_1^2 f(x)dx$, où $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 - x + 4}{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

1. Division euclidienne : trouver des polynômes $e(x)$ et $n(x)$, de degrés inférieurs ou égaux à 2, tels que $f(x) = e(x) + n(x)/(x^3 + 3x^2 + 2x)$.
2. Montrer qu'il existe des réels α, β et γ (que l'on explicitera), tels que
$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x+2} \ .$$
3. En déduire toutes les primitives de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Conclure.

Exercice 20. Sujet d'examen HLMA203, 1ère Session 2018.
Le cosinus hyperbolique est noté Ch : $Ch(t) = (e^t + e^{-t})/2$.
Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{Ch(t)}$ à l'aide du changement de variables $u = e^t$.

Exercice 21. Sujet d'examen HLMA203, 1ère Session 2019. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$.

1. Pour $t = \tan\dfrac{x}{2}$, retrouver les formules $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.
2. Effectuer le changement de variables $t = \tan\dfrac{x}{2}$ dans l'intégrale de I.
3. Conclure.

Exercice 22. Sujet d'examen HLMA203, 2nde Session 2019.
Calcul de $I = \int_0^{\pi/2}(x\cos x)^2 dx$ et $J = \int_0^{\pi/2}(x\sin x)^2 dx$.

1. Trouver une primitive de la fonction $f(x) = x^2\cos(2x)$.
2. En déduire les nombres I et J (au besoin, utiliser $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$).

Exercice 23. HLMA203 juin 2015, session 2. Donner le développement limité en 0, à l'ordre 5, des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \exp(Ch\, t) - \exp(\cos t)$;
2. $g(t) = \exp\left(t - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{1}{4}t^4 + \dfrac{1}{5}t^5\right)$.

Exercice 24. Sujet d'examen HLMA203 2018, Session 1.

1. Rappeler les développements limités, en $x = 0$ et à l'ordre 4, des fonctions : $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$ et $\sqrt{1+x}$.
2. Pour la fonction $\omega(x) = \sqrt{\cos x}$, définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$, trouver le développement limité en 0, à l'ordre 3. En déduire la valeur de ω'' en 0.
3. Calculer le développement limité en 0, à l'ordre 4, de $\varphi(x) = \exp(x - x^2/2 + x^3/3)$. Quelle est la limite de $(\varphi(x) - 1 - x)/x^4$ quand $x \to 0$?

Exercice 25. Sujet d'examen HLMA203 2019, Session 1.
Rappelons les développements limités (DL) de sinus et cosinus en 0 ($n > 0$) :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \ ;$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \ .$$

1. Calculer le DL de $1/\cos$, en $x = 0$ et à l'ordre 4, par composition avec celui de $1/(1+x)$.
2. En déduire le DL de tangente (en $x = 0$, à l'ordre 4), par produit avec le DL de sinus.