I. Base et Dimension.

semaine du 23 mars 2020

Dans cette seconde partie, nous abordons les théorèmes généraux sur les développements limités, c'est-à-dire les opérations licites.

Nous fixons un **espace vectoriel** E (e.v) ; un **corps** "des scalaires" $\mathbb{K}$ est donc sous-entendu.

- Une partie $X \subset E$ est **génératrice** si $Vect(X) = E$, soit : pour tout vecteur $u \in E$, il existe $\{x_1, x_2, .., x_n\} \subset X$ et des scalaires λ_1, λ_2,..,λ_n, tels que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
- Une partie $X \subset E$ est **libre** si, pour tout sous-ensemble $\{x_1, x_2, .., x_n\} \subset X$ et tous scalaires λ_1, λ_2,..,λ_n, nous avons : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow \forall i,\ \lambda_i = 0$.
- Ces concepts concernent aussi les familles de E, $X = (x_i)_{i \in I}$ (fonction $X : I \rightarrow E$, $i \mapsto x_i$). Par définition, X est génératrice si et seulement si son image $Im(X) = \{x_i\}_{i \in I}$ est génératrice ; X est libre si et seulement si X est injective et $Im(X)$ est libre.

Calculs

Pour prouver qu'une partie est libre (ou génératrice), nous devons la plupart des fois résoudre un système linéaire. Nous avons aussi :

- Toute partie d'une partie libre est libre ; *idem* pour une famille libre et ses sous-familles (restrictions).
- Toute partie contenant une partie génératrice est génératrice ; *idem* pour les "extensions" d'une famille génératrice.
- L'image directe $Y = f(X)$, d'une partie génératrice $X \subset E$ par une application linéaire **surjective** $f : E \longrightarrow F$, est une partie génératrice de F ; *idem* pour une famille génératrice de E.
- L'image directe $Y = f(X)$, d'une partie libre $X \subset E$ par une application linéaire **injective** $f : E \longrightarrow F$, est une partie libre de F ; *idem* si X est une famille libre de E.

Deux derniers points : pour une famille X de E (génératrice ou libre), prendre la famille composée $Y = f \circ X$.

Définition

Une **base finie** $B = (b_1, .., b_n)$ est une famille de E, à la fois libre et génératrice. ("Famille" plutôt que "partie" car l'ordre importe.)

Remarques :

- La "base" $B = (b_i)_i$ signifie que pour tout $u \in E$, il **existe** des scalaires **uniques** $\lambda_1, .., \lambda_n$, tels que : $u = \sum_i \lambda_{i=1}^n b_i$.
- Ces scalaires λ_i forment la matrice des **coordonnées** de u : une matrice (colonne) dépendante du choix de la base B. Réciproque : une matrice colonne définit un unique vecteur.
- Certains espaces vectoriels, admettent une **base infinie**, telle la base canonique $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ (monômes unitaires) ; il s'agit là aussi de familles génératrices et libres, à la fois.

Exemple. Chaque espace canonique $\mathbb{K}^n$ $(n \geqslant 0)$ admet une base particulière, formée de n vecteurs : sa **base canonique** ; par exemple, la base canonique de $\mathbb{K}^3$ est $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

Propriétés

Soit $B = (b_1, .., b_n)$, une base d'un e.v E. Tout $u \in E$ admet une matrice de coordonnées (colonne), $Mat_B(u) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Théorème

L'application $Mat_B : E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

En particulier : $dim(E) = n$.
Soit une application linéaire $f : E \longrightarrow F$. Nous savons que si f est un isomorphisme, l'image de toute base B de E est base de F : une base est libre et génératrice, un isomorphisme, injectif et surjectif.

Théorème

(Réciproque.) Si l'image par f de toute base de E, est une base de F, alors f est un isomorphisme.

Dimension

Rappel ($n \in \mathbb{N}$). Tout e.v E isomorphe à $\mathbb{K}^n$ est dit de **dimension** n, ce que nous notons $dim(E) = n$.
Le concept de "base" fournit une définition alternative pour la dimension : E **est de dimension** n **s'il admet une base de cardinal (longueur)** n. Outre une caractérisation limitée à la seule dimension finie, la difficulté rencontrée est double pour un e.v :

- Admet-il seulement une base ?
- Quand elle existe, la base n'est (presque) jamais unique : *quid* de l'invariance du cardinal ?

Un théorème répond précisément à ces questions philosophiques :

Théorème

Tout e.v admet une base ; deux de ses bases ont même cardinal.

Avec les bases canoniques, nous retrouvons : $dim(\mathbb{K}^n) = n$ ($n \geqslant 0$).

Produit et Somme

Si E_1 et E_2 sont des e.v, le produit $E_1 \times E_2$ est aussi un e.v.

Théorème

(Produit cartésien) $dim(E_1 \times E_2) = dim(E_1) + dim(E_2)$.

Cette formule se généralise à plusieurs e.v $E_1, ..., E_n$ (récurrence) :

Théorème

$dim(\prod_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n dim(E_i)$. *En particulier, pour tout e.v* E *et tout entier* $n \geq 0$: $dim(E^n) = n.dim(E)$.

Théorème

(Somme directe) Si F *et* G *sont des s.e.v d'un e.v* E, *tels que* $F \cap G = 0$, *nous avons* $dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$.

Généralisation à plusieurs s.e.v de E : $dim(\bigoplus_{i=1}^n F_i) = \sum_{i=1}^n F_i$.

Base Incomplète

Théorème

(Base "Incomplète") Toute famille libre est contenue dans une base. Toute famille génératrice contient une base.

Quelques estimations si E est un e.v de **dimension finie** :

Théorème

Longueur de toute famille libre L de E : $card(L) \leqslant dim(E)$.
Longueur de toute famille génératrice G de E : $card(G) \geqslant dim(E)$.

Une famille libre L de E avec $card(L) = dim(E)$ est dite **maximale** ; une famille génératrice G avec $card(G) = dim(E)$ est **minimale**.

Théorème

Une famille libre maximale, ou génératrice minimale, est une base.

Formule de Grassmann

Quelques corollaires issus du théorème de la base incomplète :

Théorème

Pour tout s.e.v F d'un e.v E, nous avons $dim(F) \leqslant dim(E)$; si E est de dimension finie et $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$.

Théorème

Tout s.e.v F de E admet (au moins) un s.e.v supplémentaire G.

Théorème

(Formule de Grassmann) Pour tous s.e.v F et G d'un e.v E, nous avons : $dim(F + G) + dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G)$.

En particulier : $dim(F + G) \leqslant dim(F) + dim(G)$.