UNIVERSITÉ MONTPELLIER
Département de Mathématiques
Année 2019–2020

Algèbre Linéaire et Analyse 2
HLMA203
Série 1 & Série 3

Planche d'Exercices n°1 :
Lois, Nombres et Polynômes.

Partie I : Révisions et pré-Requis.

Exercice 1. Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivantes :

$$z_1 = i, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = z_1 - z_2, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_2 \ .$$

Exercice 2. Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres complexes :

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}; \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \ .$$

Exercice 3. Résoudre l'équation du second degré : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 2z + 1 + 2i = 0$. *Idem* pour l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $iz^4 - z^2 - 3 + i = 0$.

Exercice 4. Calculer les valeurs des polynômes P pour les nombres indiqués.

1. $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$, pour $X = -1, i$ et $-i$;
2. $P(X) = X^2 + X + 1$, pour $X = i, \jmath$ et $\bar{\jmath}$ (avec $\jmath = -1/2 + i\sqrt{3}/2$).

Exercice 5. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Indication : écrire que P est un polynôme de degré au plus 3 avec des coefficients inconnus. Les conditions demandées sur P se traduisent alors en un système d'équations linéaires.

Exercice 6. Rappel : la factorielle d'un entier naturel n est $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$ $(0! = 1)$.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers du nombre 10! ; 10! est-il un carré ?
2. Combien de diviseurs positifs possède l'entier 2019 ?
3. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $pgcd(n!, n^2)$ et $ppcm(n!, n^2)$.
4. Combien de chiffres 0, l'écriture décimale de 2020! comporte-t-elle à sa droite ?
5. Écrire 2018 en binaire (base 2) et en octal (base 8) : quel lien relie ces écritures ?
6. Montrer que l'entier 2017 est un nombre premier ; pourquoi 14 divisions suffisent ?

Exercice 7. Soient les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits A^2, AB, BA et B^2. Que constate-t-on ?
2. Comparer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$; *idem* pour $(A - B)^2$ et $A^2 - 2AB + B^2$.
3. Comparer la matrice $A^2 - B^2$ avec celles $(A - B)(A + B)$ et $(A + B)(A - B)$.

Partie II : Entraînement.

Exercice 8. QCM : cocher avec **V** ou **F** (vrai/faux) la case en regard de chaque énoncé.

1. ☐ Pour tous polynômes réels non nuls P et Q, nous avons $d°(P.Q) = d°(P).d°(Q)$.
2. ☐ Le polynôme réel $2X - 2$ est premier.
3. ☐ Tout polynôme réel, de degré $n \in \mathbb{N}$, admet n racines (multiplicités comptées).
4. ☐ Dans $M_n(\mathbb{K})$ (matrices carrées d'ordre n), le produit est associatif.
5. ☐ Le polynôme complexe $X^2 + 1$ est premier.
6. ☐ Tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine.
7. ☐ Pour $d, n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ (matrices carrées) : $(A+B)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} A^p B^{n-p}$.
8. ☐ L'entier relatif -7 n'est pas premier.
9. ☐ Le polynôme $X^6 - 2X^3 + 1$ admet $X = 1$ comme racine triple.
10. ☐ Le polynôme réel $X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$ n'est pas premier.

Total [**/10**] Compter : +1 point si réponse juste, -1 point si fausse (0 si absence).

Exercice 9. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{C}$), définissons son exponentielle "complexe" : $e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$.

1. Pour tout nombre réel θ, donner les parties réelle et imaginaire de $e^{e^{i\theta}}$.
2. Vérifier les formules attendues : $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ et $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}$.
3. Montrer que la fonction exponentielle $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est périodique (période à préciser).
4. L'exponentielle complexe est-elle injective ? Surjective, peut-être ?

Exercice 10. Définissons deux lois, notées $\circ$ et $\bullet$, sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall a > 0,\ \forall b > 0\ ,\quad a \circ b = a^{\ln(b)} \quad et \quad a \bullet b = a^b\ .$$

1. Calculer : $1 \bullet 2$, $2 \circ 1$, $e \circ 1$, $2 \bullet (2 \bullet 2)$, $(2 \bullet 2) \bullet 2$ et $2 \circ e$ ($e \cong 2.7$, nombre de Neper).
2. L'une de ces lois est-elle commutative ? Associative ?
3. L'une de ces lois possède-t-elle un élément neutre ?
4. L'une de ces lois distribue-t-elle l'addition ? La multiplication ?

Exercice 11. Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1,\ B = X^2 + 2X + 3$
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1,\ B = X^3 + X + 2$
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2,\ B = X^2 - 2X + 4$
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9,\ B = X^2 - 5X + 4$

Exercice 12. Effectuer la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre k (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^{k+1}) :

1. $A = 1 - 2X + X^3 + X^4,\ B = 1 + 2X + X^2,\ k = 2$
2. $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6,\ B = 1 + X^2 + X^3,\ k = 4$

Exercice 13.
1. Déterminer le pgcd de chacun des couples de polynômes suivants :
   (a) $X^3 - X^2 - X - 2$ et $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$
   (b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $X^3 + X + 1$
   (c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$
2. Calculer le pgcd D des polynômes A et B ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.
   (a) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$
   et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$
   (b) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$
   et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 14. Donner la factorisation en irréductibles des polynômes de l'**Exercice 4**.

Exercice 15. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 - 1$;
2. $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$; on pourra remarquer que 1 est une racine du polynôme ;
3. $X^3 - 2X - 1$; on pourra remarquer que -1 est également une racine du polynôme ;
4. $X^3 + 2X^2 + X + 2$; on pourra remarquer que -2 est une racine du polynôme ;
5. $X^4 + X^3 - 2X$; on commencera par chercher deux racines "évidentes".

Exercice 16. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 17. Soient les polynômes réels $P(X) = X^7 - X - 1$ et $Q(X) = X^5 + 1$.

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de P et Q.
2. En déduire deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 18. (1er Contrôle Continu, mars 2017) Soient deux polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$: $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, $Q = X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2$.

1. Effectuer les divisions euclidiennes : i) P par $X^2 + 1$; ii) Q par $X^2 + X + 2$.
2. En déduire les polynômes $pgcd(P, Q)$ et $ppcm(P, Q)$.

Exercice 19. (2nde session d'examen, juin 2018) Posons $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ et $Q = X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2$ (2 polynômes réels).

1. Effectuer les divisions euclidiennes : i) P par $X^2 + 1$; ii) Q par $X^2 + X + 2$.
2. En déduire les polynômes $pgcd(P, Q)$ et $ppcm(P, Q)$.
3. Question subsidiaire : donner les décompositions de P et Q en facteurs premiers.

Partie III : Approfondissement.

Exercice 20. Équations diophantiennes : les inconnues (x,y,z,...) sont des entiers relatifs.

1. Pourquoi l'équation diophantienne $14x - 7y + 35z = 13$ n'admet pas de solution ?
2. Trouver une solution à l'équation de Bézout 7x+11y=1 (équation diophantienne).
3. Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, tels que $42x - 18y = 12$.
4. Résoudre l'équation de Pythagore : $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, $x^2 + y^2 = z^2$ (non linéaire).

Exercice 21. Soit n un entier positif ou nul et soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$$

(les L_i sont appelés **polynômes interpolateurs de Lagrange**).

1. Calculer $L_i(a_j)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$.
2. Soient $b_0, \dots, b_n$ des réels fixés.
3. Montrer que $P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$ vérifie :

$$P(a_j) = b_j \quad \text{pour tout } j \in \{0, \dots, n\}.$$

4. Montrer que le polynôme P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie les conditions de la question précédente.
5. Interpréter ce résultat pour les petites valeurs de n, $(n = 0, 1, 2, 3)$.
6. En utilisant les polynômes interpolateurs L_i retrouver le résultat de l'**Exercice 5.**

Exercice 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, fixé, on a le sous-ensemble $U_n = \{e^{i2k\pi/n} | k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

1. Vérifier que U_n est stable pour le produit. Quel est le cardinal de U_n ?
2. Clairement, tout $z \in U_n$ vérifie $z^n = 1$... Cette équation a-t-elle d'autres solutions ?
3. Par récurrence, montrer que nous avons : $\forall z \in \mathbb{C}, (z - 1) \sum_{p=0}^{n-1} z^p = z^n - 1$.
4. En déduire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, une expression de la somme $\sum_{p=0}^{n} \cos(p\theta)$ (Moivre).
5. En déduire, aussi, la somme des éléments de U_n. Calculer directement leur produit.
6. Pour tout entier k, tel que $0 < k < n/2$, montrer que $X^n - 1$ est divisible par le polynôme réel $X^2 - 2\cos(2k\pi/n)X + 1$. *Indication* : apparier les éléments de U_n.
7. Donner la décomposition en facteurs premiers du polynôme $X^n - 1$.

Exercice 23. Pour tous vecteurs $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$, définissons leur "produit vectoriel", noté $\wedge$, comme suit : $u_1 \wedge u_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$.

1. Montrer que le produit vectoriel distribue l'addition.
2. Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, calculer $u \wedge u$. *Quid* de l'existence d'un élément neutre ?
3. Si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique, calculer : $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_1$,...
4. Comparer $u \wedge v$ et $v \wedge u$, pour $u, v \in \mathbb{R}^3$: le produit vectoriel est-il commutatif ?