Calculabilité et complexité

Université de Montpellier
Examen partiel
9 novembre 2016

Durée 3 heures
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec soin !

Exercice 1 échauffement

Soit f une fonction récursive totale à deux arguments.
On note $\widehat{fAB} = \{f(x,y),\ x \in A \text{ et } y \in B\}$.

1. Montrez que si A et B sont énumérables, alors $\widehat{fAB}$ l'est aussi.
2. Que se passe-t-il si f est seulement récursive (partielle) ?

Exercice 2 archi-classique

Le symbole $\prec$ représente ici la réduction (many-one) entre ensembles d'entiers.
Soit $A = \{x,\ [x \mid \cdot] \text{ calcule une fonction totale}\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
2. Sans utiliser le théorème de Rice, montrez que $\mathbb{K} \prec A$.

Soit $B = \{x,\ [x \mid \cdot] \text{ a un domaine infini}\}$.

3. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que B n'est pas récursif.
4. Sans utiliser le théorème de Rice, montrez que $\mathbb{K} \prec B$.
5. Est-ce que $\overline{\mathbb{K}} \prec A$?
6. Est-ce que $\overline{\mathbb{K}} \prec B$?
7. Est-ce que $A \prec B$?
8. Est-ce que $B \prec A$?
9. Est-ce que $A \prec \overline{\mathbb{K}}$?
10. Est-ce que $B \prec \mathbb{K}$?

Exercice 3 facile

Soit g une fonction calculable.

1. Montrez qu'il existe une fonction calculable *totale* G telle que $[G(n) \mid \cdot] = n + g(.)$
2. Montrez que $\exists n\ [n \mid \cdot] = n + g(.)$.

Exercice 4 toujours facile

1. Montrez qu'il existe une fonction calculable *totale* f telle que $[f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + 1$
2. Quelles fonctions sont calculées par les points fixes de f ?

Exercice 5 classique

1. Montrez qu'il existe deux programmes dont le premier écrit (quelle que soit son entrée) 2 fois le texte du second et dont le second écrit (quelle que soit son entrée) 3 fois le texte du premier.
2. En utilisant uniquement le premier théorème de point fixe, montrez qu'il existe deux programmes dont le premier écrit (quelle que soit son entrée) 2 fois le texte du second et le second écrit (quelle que soit son entrée) 2 fois le texte du premier.
3. Montrez qu'il existe deux programmes différents dont le premier écrit (quelle que soit son entrée) son propre texte suivi par le miroir du texte du second et dont le second écrit (quelle que soit son entrée) son propre texte suivi par le mirroir du texte du premier.
4. En utilisant uniquement le premier théorème de point fixe, montrez qu'il existe deux programmes dont le premier écrit (quelle que soit son entrée) son propre texte suivi par le miroir du texte du second et dont le second écrit (quelle que soit son entrée) son propre texte suivi par le mirroir du texte du premier.

Exercice 6 plus intéressant

On note par W_x le domaine de la fonction calculée par le programme x : $W_x = \{y,\ [x \mid y] \downarrow\}$. On définit $A = \{x,\ W_x \subset \overline{\mathbb{K}}\}$.

1. Montrez que $A \subset \overline{\mathbb{K}}$.
2. Montrez qu'il existe x tel que $W_x = \overline{\{x\}}$.
3. Montrez que $A \neq \overline{\mathbb{K}}$.