Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- La sémantique de la LP
- **Équivalence logique et Substitution**
  - $\boldsymbol{P \equiv Q}$
  - Les formulaires
  - Théorème de Substitution
- Conséquence logique
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode des séquents
- Méthode de Davis et Putnam

Équivalence logique

- **Définition**

  « Deux fbf P et Q sont logiquement équivalentes ssi pour toute interprétation elles ont même valeur de vérité (v(P,I)=v(Q,I) pour tout I) . On note $P \equiv Q$.»

- Propriété

  $P \equiv Q$ ssi *pour tout I : $I \models P$ ssi $I \models Q$*

- Attention à ne pas confondre :
  - Équivalence logique $P \equiv Q$ ~~fbf~~, notion sémantique
  - Égalité syntaxique $P = Q$ ~~fbf~~, notion syntaxique
  - Connecteur équivalent $(P \leftrightarrow Q)$ fbf

Propriétés de l'équivalence logique

- **Théorème**

  $P \equiv Q$ ssi $(P \leftrightarrow Q)$ *est valide*

- **Propriétés des connecteurs vis à vis de l'équivalence**
  - L'équivalence logique permet de démontrer les propriétés algébriques des connecteurs : les formulaires sont des équivalences logiques de base qui énoncent ces propriétés
  - On peut les démontrer à l'aide des tables de vérité

Formulaires

$$P,Q,R \in PROP(S)$$

- Idempotence de $\wedge$ et $\vee$

$$(P \wedge P) \equiv P \qquad (P \vee P) \equiv P$$

- Associativité de $\wedge$ et $\vee$

$$((P \wedge Q) \wedge R) \equiv (P \wedge (Q \wedge R)) \qquad ((P \vee Q) \vee R) \equiv (P \vee (Q \vee R))$$

- Commutativité de $\wedge$ et $\vee$

$$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P) \qquad (P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$$

- Distributivité du $\wedge$ par rapport à $\vee$ (et vice versa)

$$((P \wedge (Q \vee R) \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$
$$((P \vee (Q \wedge R) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

Formulaires (suite)

- Double négation

$$\neg\neg P \equiv P$$

- Lois de De Morgan

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \qquad \neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$$

- Implication et équivalent

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q) \qquad (P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

- Négation et True et Absurde

$$\neg P \equiv (P \rightarrow \perp)$$

$$(P \vee \neg P) \equiv \top \qquad (\top \wedge P) \equiv P \qquad (\top \vee P) \equiv \top$$

$$(P \wedge \neg P) \equiv \perp \qquad (\perp \wedge P) \equiv \perp \qquad (\perp \vee P) \equiv P$$

Substitution

- Étant donnée une fbf P, la substitution consiste à remplacer une occurrence (plusieurs ou toutes) d'une sous-fbf Q de P par une autre fbf R
- Exemple :

$$P=(\ \overset{Q}{\boldsymbol{(p\to q)}}\ \vee\neg p) \qquad R=((r\wedge\bot)\vee\neg p)$$

$$P'=(\ \boldsymbol{((r\wedge\bot)\vee\neg p)}\ \vee\neg p)$$

Théorème de substitution

« Soit P une fbf, Q une sous-fbf de P et R une fbf équivalente à Q ($R \equiv Q$). Si on note par P' la fbf obtenue à partir de P en remplaçant une occurrence de Q par une occurrence de R alors $P \equiv P'$ »

- Exemple :

$$P = (\underbrace{\mathbf{(p \to q)}}_{Q} \vee \neg p) \qquad R = (\neg p \vee q)$$

$$P' = ((\neg p \vee q) \vee \neg p)$$

Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- La sémantique de la LP
- Équivalence logique et Substitution
- **Conséquence logique**
  - $\mathbf{P} \vDash \mathbf{Q}$
  - **Théorème** liant les problèmes de logique : **conséquence logique, validité, insatisfiabilité**
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode des séquents
- Méthode de Davis et Putnam

Conséquence logique

- **Définition**

« Une fbf C est ***conséquence logique*** d'un ensemble de fbf $\{H_1, ..., H_k\}$ ssi tout modèle de H_j pour j de 1 à k est un modèle de C (i.e. pour toute interprétation I telle que $v(H_j, I) = 1$, pour tout j de 1 à k, on a $v(C, I) = 1$) »

- On note $\{H_1, ..., H_k\} \models C$
  - La notion de conséquence logique peut être considérée comme une modélisation d'un raisonnement valide.

Propriétés de la conséquence logique

- Exemples

  $\{p,q\} \models p \wedge q$

  $\{p\} \models p \vee q$ *(pour un q quelconque)*

  $\{p, p \rightarrow q\} \models q$ *(modus ponens)*

  $\{\neg q, p \rightarrow q\} \models \neg p$ *(modus tollens)*

- Propriétés
  - Si P est valide alors E |= P *(pour un E quelconque y compris $\emptyset$, on note |=P)*
  - Si E est contradictoire alors E |= P *(pour un P quelconque)*
  - $P \equiv Q$ *ssi* $\{P\} \models Q$ *et* $\{Q\} \models P$

Propriétés fondamentales de la conséquence logique

- **Théorème**

  $\{H_1, ..., H_k\} \models C$ ssi

  $H_1 \wedge ... \wedge H_k \rightarrow C$ est valide ssi

  $H_1 \wedge ... \wedge H_k \wedge \neg C$ est insatisfiable

- Ainsi le problème de la validité d'un raisonnement peut se ramener à celui de la validité ou de la satisfiabilité d'une formule