TD 2 : transformations linéaires

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 1. Transformation de $\mathbb{R}^2$

Écrire, pour chaque application linéaire ci dessous, la matrice (dans la base canonique) de

1. la rotation d'angle θ et de centre $(0,0)$.
2. la projection sur la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$
3. la symétrie par rapport à la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

Exercice 2.

Soit $a, b \in \mathbb{R}^3$. On note $a_{\perp b}$ le vecteur projeté de a sur le plan orthogonal à b.

1. Exprimer $a_{\perp b}$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que $a_{\perp b} = \frac{(b\wedge a)\wedge b}{\|b\|^2}$.
3. Trouver une matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $a_{\perp b} = Ma$. Est-elle inversible ?

Exercice 3. Inverser des matrices sans calculs

1. Soit $A = \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$. Caclculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 4.* Déterminant d'une matrice triangulaire

Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses entrées diagonales.

Exercice 5. Inverser des matrices avec calculs

À l'aide du pivot de Gauss, dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

1. Soit $A = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$.

Exercice 6.* Décomposition d'une rotation

On appelle cisaillement horizontal (x-shear) les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme $H_x = \begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. On appelle cisaillement vertical (y-shear) les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme $V_y = \begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

2. Représenter l'effet de ces transformations sur la base canonique.
3. Soit $R_{-\theta}$ la matrice de rotation d'angle $-\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer la décomposition suivante :

$$R_{-\theta} = H_{\tan \frac{\theta}{2}} V_{-\sin \theta} H_{\tan \frac{\theta}{2}}$$

Exercice 7.*

Soit A une matrice carrée à coefficients réels. Si A est inversible, est-ce que A^t est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Justifier.