Modèles de calcul

Université de Montpellier

TD 7

Exercice 1 Reconnaissance de langages et réécriture

Dans cet exercice, On ne s'intéresse qu'à des langages sur l'alphabet $\{a, b\}$. On dit qu'une machine de Turing **reconnaît** un langage si :

- elle s'arrête sur toutes les entrées correspondant à un mot sur $\{a, b\}$;
- elle accepte si son entrée est un mot du langage (selon le codage précédent). Dans ce cas, elle rend 1 écrit en unaire ;
- elle refuse si son entrée n'est pas un mot du langage. Dans ce cas, elle rend 0 écrit en unaire.
- le reste du ruban doit être à 0.

1. Donnez une machine de Turing qui reconnaît le langage des mots ayant un nombre pair de a.
2. Donnez une machine de Turing qui reconnaît les mots qui se terminent par b et refuse tous les autres mots.

Exercice 2 Toujours vrai !

Montrez que les formules suivantes sont des tautologies : elles sont toujours vraies quelles que soient les valeurs de vérité de A, B ou C.

1. $((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow A$ (*reductio ad absurdum*)
2. $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
3. Soit A, B et C trois propositions. Montrez que $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. (*Loi de Morgan*)
4. Soit P et Q deux propositions. Montrez que $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$. (*Négation de l'implication*)

Exercice 3 Séparations

En algèbre et en logique, une **signature** est une liste composée de constante(s), fonction(s) et/ou relation (s).
Un modèle est composé d'un **univers** (ensemble d'objets, de symboles...) et de l'interprétation de la signature dans cet univers.
Pour chacune des signatures suivantes, trouvez une formule qui sépare les deux modèles de cette même signature, c'est-à-dire une formule satisfaite dans un modèle mais non dans l'autre :

$$\begin{array}{ccc}
\langle \leqslant \rangle & \langle \mathbb{N}, \leqslant_{\mathbb{N}} \rangle & \langle \mathbb{Z}, \leqslant_{\mathbb{Z}} \rangle \\
\langle \leqslant \rangle & \langle \mathbb{Q}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle & \langle \mathbb{Z}, \leqslant_{\mathbb{Z}} \rangle \\
\langle *, = \rangle & \langle \mathbb{N}, \times, = \rangle & \langle \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \cap, = \rangle \\
\langle c, *, = \rangle & \langle \mathbb{N}, 1, \times, = \rangle & \langle \mathbb{Z}, 1, \times, = \rangle \\
\langle c, d, *, = \rangle & \langle \mathbb{R}, 0, 1, \times, = \rangle & \langle \mathbb{Q}, 0, 1, \times, = \rangle
\end{array}$$

Exercice 4 toujours logique

1. Soit $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ une fonction. Énoncer en langage courant ce que signifient les propositions suivantes exprimées à l'aide de quantificateurs. Pour chacune d'entre elles, peut-on trouver une fonction qui la satisfasse ? Une fonction qui ne la satisfait pas ?
   - $\forall x \in \mathcal{R}, \exists y \in \mathcal{R}, f(x) < f(y)$;
   - $\forall x \in \mathcal{R} \exists T \in \mathcal{R}, f(x) = (x + T)$;

- $\forall x \in \mathcal{R} \exists T \in \mathcal{R}^*, f(x) = (x+T)$;
- $\exists x \in \mathcal{R}, \forall y \in \mathcal{R}, y = f(x)$.