Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Partiel de logique - 2021
13 octobre 2021

Durée 1h30
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Exercice 1 ABC

1. Est-ce que la formule $\forall x \exists y F(x,y) \to \exists y \forall x F(x,y)$ est vraie dans tous les modèles ayant un symbole de prédicat binaire F ? Si oui, expliquez pourquoi. Sinon, proposez un modèle qui fournit un contre-exemple.
2. Est-ce que la formule $\exists y \forall x F(x,y) \to \forall x \exists y F(x,y)$ est vraie dans tous les modèles ayant un symbole de prédicat binaire F ? Si oui, expliquez pourquoi. Sinon, proposez un modèle qui fournit un contre-exemple.

Exercice 2 ABC

1. Qu'est-ce qu'une théorie cohérente ?
2. Donnez un exemple de théorie cohérente et de théorie non cohérente.

Exercice 3 ABC

Soit T une théorie cohérente et A et B deux formules closes. On suppose que $T \vdash A$ et $T \vdash \neg B$. Existe-t-il un modèle de T noté $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models (B \vee \neg A)$? Justifiez soigneusement en explicitant les théorèmes du cours utilisés.

Exercice 4 ABC

1. Soient T_1, T_2 deux théories. Montrer que si $T_1 \subseteq T_2$ alors les modèles de T_2 sont aussi des modèles de T_1.
2. Soit $\mathcal{M}$ un modèle. Montrer que $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathrm{th}(\mathcal{M})$.

Exercice 5 ABC

Soit T une théorie cohérente. On note $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux modèles de T. Définir l'équivalence élémentaire entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.

Exercice 6 C

Soit T une théorie cohérente.

1. Donnez une formule qui exprime que tout modèle de T a au moins k éléments.
2. Donnez une formule qui exprime que tout modèle de T a exactement k éléments.
3. Proposez une théorie qui étend T et qui exprime que tout modèle de T est infini.

Exercice 7 BC

Soit F une théorie telle que chaque sous-ensemble fini de F admet un modèle. Soit g une formule close quelconque. On considère maintenant les ensembles de formules $F_1 = F \cup \{g\}$ et $F_2 = F \cup \{\neg g\}$.

1. Est-il possible qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models F_1$ et $\mathcal{M} \models F_2$?
2. Montrez qu'au moins l'un des ensembles F_1 et F_2 admet un modèle.
3. Est-il possible que F_1 admette un modèle et F_2 aussi ? Justifiez.

Exercice 8 B

Nous nous plaçons dans le modèle $(\mathbb{N}, S(x), 0)$ où $S(x)$ est la fonction unaire successeur.

1. Ecrivez une formule qui, interprétée dans ce modèle, exprime que chaque entier strictement positif est le successeur d'un autre entier.

Nous ajoutons au modèle un prédicat binaire $<$ représentant l'ordre strict.

2. Qu'exprime la formule $\forall x\ x < S(x)$?
3. Proposez un ordre sur $\mathbb{N}$ tel que $\neg(\forall x\ x < S(x))$ mais où l'une des formules $F_n = \forall x\ x < S(S(\ldots S(x)))$ – où le symbole S apparait n fois – est vraie.

Exercice 9 BC

1. Inventez un ensemble de deux formules closes dont chacune a un modèle mais qui n'ont pas de modèle quand on les considère ensemble.
2. Inventez un ensemble de trois formules closes dont chaque paire a un modèle mais qui n'ont pas de modèle quand on les considère ensemble.

Exercice 10 A

On considère $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$ les entiers relatifs avec l'ordre habituel. On note $T = \mathrm{th}(\mathcal{M})$. On ajoute maintenant deux symboles de constante a et b et on obtient $\mathcal{M}' = (\mathbb{Z}, a, b, <)$.

1. Ecrivez une formule f_n qui exprime qu'il y a au moins n éléments entre a et b.
2. Montrez que $T \cup \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ a un modèle qu'on notera $\mathcal{M}'_1$.
3. On définit $\mathcal{M}_1$ en enlevant les symboles de constante a et b du langage du modèle. Montrez que $\mathcal{M}_1 \models T$.
4. Montrez que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_1$ son élémentairement équivalents mais non isomorphes.

Exercice 11 A

Soit T une théorie de l'ordre total strict et dense sans maximum ni minimum noté $<$, avec une constante 0. On note $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, <_{\mathbb{Q}})$ le modèle classique de T d'univers $\mathbb{Q}$. Montrez qu'il n'existe pas de formule $A(x, y, z)$ qui exprimerait dans $\mathbb{Q}$ que $|x - y| = |y - z|$.