TD 5 - Calcul des séquents

Exercice 1

Démontrez à l'aide du système LK que les formules suivantes sont valides.

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
3. $p \wedge q \to p$
4. $p \to q \vee p$
5. $(p \vee q) \to ((p \to r) \to ((q \to r) \to r))$
6. $p \to (\bot \to \neg p)$
7. $\bot \to p$
8. $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$
9. $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$
10. $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$

Exercice 2

Démontrez que les 3 séquents des axiomes ($\mathbf{ax}$, $\bot_{\mathbf{g}}$ et $\top_{\mathbf{d}}$) du système LK correspondent à des conséquences logiques.

Exercice 3

Démontrez que les règles $\leftrightarrow_{\mathbf{d}}$, $\wedge_{\mathbf{d}}$, $\wedge_{\mathbf{g}}$ et $\neg_{\mathbf{d}}$ du système LK sont adéquates vis à vis de la sémantique logique, c'est-à-dire que les séquents antécédents correspondent à des conséquences logiques si et seulement si le séquent conclusion aussi.

Exercice 4

Démontrez à l'aide du système LK que les raisonnements suivants sont corrects :

1. $\{\neg(q \wedge \neg r) \wedge (p \to q \vee (r \wedge \neg p))\} \models (\neg(r \to s) \vee \neg p) \vee (r \wedge s)$
2. $\{a \to b, (c \wedge d) \to a, e \to c, d \wedge e\} \models b$

Exercice 5

Dans cet exercice, nous allons voir comment raisonner efficacement en présence de nouveaux connecteurs logiques.

1. On considère le connecteur binaire « ou exclusif », noté $\oplus$, et défini par : $(P \oplus Q) \hat{=} ((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$ où P et Q sont des formules. En 1965, Prawitz eut l'idée d'intégrer les connecteurs logiques dérivés aux règles de déduction du système de preuve. Par exemple, dans le calcul des séquents (système LK), on peut ajouter les deux règles suivantes (une règle gauche et une règle droite) pour raisonner sur le « ou exclusif » :

$$\dfrac{\Gamma, (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \vdash \Delta}{\Gamma, P \oplus Q \vdash \Delta}\,\oplus_{\mathsf{g}} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)}{\Gamma \vdash \Delta, P \oplus Q}\,\oplus_{\mathsf{d}}$$

   Avec ces nouvelles règles, prouver les formules : $F_1 = (p \oplus \neg p)$ et $F_2 = \neg(p \oplus p)$.

2. Faire de même avec le connecteur ternaire « Si Alors Sinon », noté _?_:_, et prouver les formules : $F_3 = (\top ? p : q) \to p$ et $F_4 = (\bot ? p : q) \to q$.
3. En 2007, Brauner, Houtmann et Kirchner eurent l'idée d'aller plus loin en observant qu'une fois intégrée comme une règle de déduction, on pouvait continuer à « déstructurer » la formule dépliée et ensuite éliminer les étapes de déstructuration. On obtient ainsi une règle « compilée », plus compacte, qu'on appelle règle de superdéduction. Par exemple, pour $\oplus_{\mathsf{d}}$, on obtient :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\,\vee_{\mathsf{d}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_{\mathsf{g}}}{\Gamma \vdash \Delta, \neg(A \wedge B)}\,\neg_{\mathsf{d}}}{\Gamma \vdash \Delta, (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)}\,\wedge_{\mathsf{g}}}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}\,\oplus_{\mathsf{d}}$$

Ce qui devient en éliminant les étapes de déstructuration intermédiaires :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}\ \oplus_{\mathsf{d}}$$

Faire de même pour la règle $\oplus_{\mathsf{g}}$, puis avec ces nouvelles règles, faire à nouveau la preuve de F_1 et F_2.

4. Produire les règles (gauche et droite) de superdéduction du connecteur « Si Alors Sinon », puis avec ces nouvelles règles, faire à nouveau la preuve de F_3 et F_4.

Exercice 6

En 1934, Gentzen a démontré son « Hauptsatz » (théorème principal), appelé théorème d'élimination des coupures, pour le calcul des séquents. Il peut se formuler ainsi :

Théorème 1 (**Élimination des coupures**). *Il existe un algorithme qui prend une preuve dans LK, et la transforme en une preuve sans coupure du même séquent.*

L'algorithme consiste, entre autre, à faire remonter les coupures aux feuilles et à les éliminer une fois que la preuve de la formule introduite par la coupure est axiomatique. Par exemple, si on la preuve suivante avec coupure :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, B \to C \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, A \vdash \Delta, B} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, A, C \vdash \Delta}}{\Gamma, B \to C, A \vdash \Delta}\ \to_{\mathsf{g}}}{\Gamma, B \to C \vdash \Delta}\ \mathsf{cut}$$

On peut faire remonter la coupure comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \Delta, B, A} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, A \vdash \Delta, B}}{\Gamma \vdash \Delta, B}\ \mathsf{cut} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, C \vdash \Delta, A} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, C, A \vdash \Delta}}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \mathsf{cut}}{\Gamma, B \to C \vdash \Delta}\ \to_{\mathsf{g}}$$

Comme dit précédemment, le processus s'arrête lorsque la preuve de la formule introduite par la coupure est axiomatique. Par exemple, si on a :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \mathsf{ax} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, A \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}\ \mathsf{cut}$$

La preuve devient simplement :

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \Delta}$$

En effet, si la preuve de $\Gamma \vdash \Delta, A$ est axiomatique, c'est que A est dans Γ et donc, il est inutile de rajouter A à Γ pour démontrer Δ.

On considère la preuve avec coupure ci-dessous. Appliquer les règles que nous venons de voir pour transformer cette preuve en une preuve sans coupure.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \to C, A \vdash C, B, A}\ \mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{B \to C, A, B \vdash C, B}\ \mathsf{ax}}{B \to C, A \to B, A \vdash C, B}\ \to_{\mathsf{g}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B, A, B \vdash C, B}\ \mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{A \to B, A, B, C \vdash C}\ \mathsf{ax}}{B \to C, A \to B, A, B \vdash C}\ \to_{\mathsf{g}}}{B \to C, A \to B, A \vdash C}\ \mathsf{cut}}{B \to C, A \to B \vdash A \to C}\ \to_{\mathsf{d}}}{B \to C \vdash (A \to B) \to (A \to C)}\ \to_{\mathsf{d}}}{\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\ \to_{\mathsf{d}}$$