II. Théorème du rang.

semaine du 23 mars 2020

Le théorème du rang est un résultat central de l'Algèbre Linéaire.

Théorème

(Un **corps** "des scalaires" $\mathbb{K}$ est fixé.)
Soit une application linéaire $f : E \longrightarrow F$; rappelons que son **rang** est la dimension de son image : $rang(f) = dim(Im\, f)$.

Théorème

Si E est de dimension finie, $dim(E) = dim(Ker\, f) + rang(f)$; en particulier : $rang(f) \leqslant dim(E)$.

Preuve. La restriction $f^\circ : E \longrightarrow Im(f)$ de f est linéaire surjective. Soit alors un supplémentaire E' de $Ker(f)$ dans E : il existe d'après la base incomplète. Par calcul : $f^\circ(E') = f(E') = Im(f)$. En conséquence, la restriction f' de f° à E' est surjective aussi. Montrant la formule $Ker(f') = Ker(f) \cap E'$, nous déduisons $Ker(f') = 0$, soit $f' : E' \to Im(f)$ est un isomorphisme et $dim(E') = dim(Im\, f)$. Nous concluons avec $E = Ker(f) \oplus E'$: $dim(E) = dim(Ker\, f) + dim(E') = dim(Ker\, f) + dim(Im\, f)$.

Cas des Endomorphismes

Soit E, un e.v de dimension finie ; soit f, un endomorphisme de E.

Théorème

f est injectif $\Longleftrightarrow$ f est surjectif $\Longleftrightarrow$ f est bijectif.

- En dimension finie : un endomorphisme injectif est toujours un isomorphisme ; *idem* pour les endomorphismes surjectifs.
- Le théorème fonctionne aussi pour une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, telle que $dim(E) = dim(F)$ (dimension finie).
- Le "principe des tiroirs" assure que, pour un ensemble X **fini**, toute application injective $X \to X$ est surjective et *vice versa*. Notre théorème est une version linéaire de ce principe.
- Le théorème est faux en dimensions infinies, la dérivation D (fonctionnelle $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ ou polynomiale $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$) est un contre-exemple : elle est non injective (le noyau est une droite, l'ensemble des constantes), mais surjective (primitive).

Conditions Nécessaires

Soit une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ (e.v de dimensions finies).

Théorème

Si $dim(E) < dim(F)$, f n'est pas surjective.
Si $dim(F) < dim(E)$, f n'est pas injective.

Soient des entiers naturels n et m et soit une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Pour $n < m$, f n'est pas surjective ; pour $m < n$, f n'est pas injective. Mais les seules dimensions n et m ne permettent pas de conclure à l'injectivité ou à la surjectivité : garder en tête l'application **nulle** $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (rarement injective ou surjective).
Exercice : montrer la formule de Grassmann à partir du théorème du rang (F et G deux s.e.v d'un e.v E). 1) Considérer l'application $\Psi : F \times G \longrightarrow F + G$, $\Psi(x, y) = x + y$: linéaire et surjective. 2) La fonction $F \cap G \to Ker(\Psi)$, $x \mapsto (x, -x)$, est un isomorphisme.
3) Puisque $dim(F \cap G) = dim(Ker\,\Psi)$, conclure avec le Théorème.