

Modèles de calcul

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

TD 4

Exercice 1 Mots et Expressions Rationnelles

Dans cet exercice, on se place sur l'alphabet $\{a, b\}$. Soit l'expression $a(ab + ba^*)^*b^*a$.




1. Les mots suivants sont-ils dans le langage dénoté par cette expression? $aaba$, $abba$, $aaab$, $aaaba$
2. Construire un automate qui reconnaît cette expression.
3. Donnez une expression rationnelle qui dénote le langage de tous les mots qui se terminent par aa .
4. Donnez une expression rationnelle qui dénote le langage de tous les mots dans lesquelles chaque paire de a (chaque fois qu'il y a aa) apparaît devant une paire de b .
5. Donnez une expression rationnelle qui dénote le langage de tous les mots qui ne contiennent pas bab .



Exercice 2 Langages et expressions rationnelles






On définit $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}.\mathcal{L}^*$.

1. A quoi correspondent les éléments de \mathcal{L}^+ ?
2. A quelle condition sur \mathcal{L} appartient-il à \mathcal{L}^+ ?
3. Que vaut \mathcal{L}^{**} ? Et \mathcal{L}^{++} ?
4. Si $\mathcal{L} = \{aa, bab\}$, à quelle condition existe-t-il des mots de longueur n dans \mathcal{L}^+ ? Même question pour \mathcal{L}^* .

Exercice 3 Behold the tokens






Nous allons travailler avec des jetons, les jetons de Rózsa. Une suite de jetons bien formée représente une fonction n -aire sur les entiers. Nous commençons avec le premier type de jetons, les jetons fonctions :  $= \mapsto 0$,  $= x \mapsto x$ et  $= x \mapsto x + 1$.






1. Quelles sont les arités de ces trois jetons? Pourquoi la suite de jetons  n'a-t-elle pas de signification?

Nous introduisons maintenant un autre type de jetons, les jetons constructeurs (, , , qui construisent de nouvelles fonctions à partir d'autres fonctions, *i.e.*, des jetons fonctions ou des suites de jetons bien formées. Nous commençons par les jetons  et  (\mathbf{x} représente le vecteur fini de variables x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\langle \text{left arrow} \rangle \mathbf{f} = y, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$$























$$\langle \text{right arrow} \rangle \mathbf{f} = \mathbf{x}, y \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$$


2. Si  est d'arité n , quelles sont les arités des fonctions  et  ?

Le jeton constructeur ¹  permet de composer une fonction  d'arité p avec p fonctions , , ...,  de même arité n :



$$\text{Ⓜ} \text{ f } g_1 g_2 \dots g_p = \mathbf{x} \mapsto \text{f} (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_p(\mathbf{x}))$$

3. Les suites de jetons suivantes sont-elles syntaxiquement correctes et si oui que calculent-elles ?

- a)   
- b)   
- c)   
- d)   
- e)    
- f)      























Le jeton constructeur  permet de faire des constructions inductives. Il permet de définir une fonction h à partir d'une fonction f (le cas 0), et d'une fonction g (l'induction : le cas $n + 1$ en fonction du cas n) :

$$h = \text{R f g} = n, \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} \text{f}(\mathbf{x}) & \text{si } n = 0, \\ \text{g}(n - 1, h(n - 1, \mathbf{x}), \mathbf{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

- 4. Est-il possible d'écrire un programme valide de 3 symboles commençant par  ?
- 5. Trouvez tous (il y en a 4) les programmes de 4 symboles commençant par , donnez leurs arités et les calculs effectués.

Exercice 4 Reconnaissance

On appelle "programme" une suite de jetons. Pour les programmes suivants, vérifiez s'ils sont valides syntaxiquement, c'est-à-dire qu'ils correspondent bien à une suite bien formée de jetons, et si oui, donnez leur arité ainsi que la fonction qu'ils représentent :

- 1.       
- 2.         
- 3.       
- 4.         

1. Les jetons constructeurs permettent de donner un sens à certaines suites de jetons. Pour qu'une suite de jetons soit bien formée, il faut respecter les arités des fonctions utilisées dans une construction par un jeton constructeur.