- Notes de cours -

Présentation du module

Contenu du cours. Théorie et algorithmique de graphes, et applications.

Responsable du module. Stéphane Bessy (`stephane.bessy@lirmm.fr`)

Planning. Les cours et td ont lieu le jeudi matin de 8h00 à 11h15. Le module comprend 12 crénaux de 1h30 de cours et 12 crénaux de 1h30 de td.

N.	Date	Contenu	Devoir
01	Je 15/09	*Chap. 1 :* Généralités	
02	Je 22/09	*Chap. 1 :* Généralités	
03	Je 29/09	*Chap. 2 :* Couplages	
04	Je 06/10	*Chap. 2 :* Couplages	
05	Je 13/10	*Chap. 3 :* Flots	
06	Je 20/10	*Chap. 3 :* Flots	
07	Je 27/10	*Chap. 4 :* Connectivité	
xx	Je 4/11	VACANCES D'AUTOMNE	
08	Je 10/11	*Chap. 4 :* Connectivité et **Contrôle continu** (chap. 1,2,3,4, type exam, durée : 1h30)	**CC**
09	Je 17/11	*Chap. 5 :* Coloration	
10	Je 24/11	*Chap. 5 :* Coloration	
11	Je 01/12	*Chap. 6 :* Classes de graphes	**DM**
12	Je 08/12	*Chap. 6 :* Classes de graphes	

Modalité de contrôle de connaissance. Le contrôle des connaissances pour ce module comprend deux parties : une partie de contrôle continu (un devoir en temps imparti, type examen et un résumé d'une lecture d'article à rendre) qui compte pour 30% de la note et un examen final qui compte pour 70% avec la règle 'du max' concernant le contrôle continu. **Les documents sont interdits pendant les examens à l'exception de ce polycopié, annoté à loisirs**.

Ressource. Des ressources pédagogiques sont disponibles sur le moodle du cours (version électronique des notes de cours, fiches de td, liens vers des ouvrages de références).

1 Généralités

1.1 Graphes

- Un **graphe** (fini) $\boldsymbol{G = (V, E)}$ est constitué :
  - d'un ensemble (fini) de **sommets** $\boldsymbol{V}$ (ou $\boldsymbol{V(G)}$) de taille $\boldsymbol{n}$ et
  - d'un ensemble d'**arêtes** $\boldsymbol{E}$ (ou $\boldsymbol{E(G)}$), paires d'éléments de V, de taille $\boldsymbol{m}$.
- Deux sommets $x, y \in V$ tels que $\{x, y\} \in E$ sont dits **voisins**, **reliés** ou **adjacents**. On note $\{x, y\} \in E$ ou $\boldsymbol{xy \in E}$ (ou $yx \in E$). L'arête xy est **incidente** aux sommets x et y qui sont ses **extrémités**. Si deux arêtes ont une extrémité en commun, elles sont **adjacentes**, sinon elles sont **disjointes**.
- Les graphes considérés dans ce cours ne contiennent ni **boucle** (arête de type xx) ni d'**arête multiple** (arête en plusieurs exemplaires).
- Le **voisinage** de x, noté $\boldsymbol{N_G(x)}$, est l'ensemble des voisins du sommet x.

Lemme 1 (Nbre max d'arêtes) *Tout graphe G vérifie $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.*

1.2 Sous-graphes

- Deux graphes G et G' sont **isomorphes** si il existe une bijection f de $V(G)$ dans $V(G')$ telle que pour tout $x, y \in V(G)$ on ait $xy \in E(G) \iff f(x)f(y) \in E(G')$. La fonction f est un **isomorphisme** entre G et G'. On considèrera (improprement...) que G et G' sont égaux si il existe un isomorphisme entre eux.
- Soient G et H deux graphes.
  Si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ alors H est un **sous-graphe** de G.
  Si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ alors H est un **sous-graphe couvrant** de G.
  Si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) = \{uv \ : \ uv \in EG(G),\ u \in V(H),\ v \in V(H)\}$ alors H est un **sous-graphe induit** de G.
  On dira (improprement...) que G **contient** H si H est isomorphe à un sous-graphe de G.
- Pour $X \subseteq V(G)$ on note $\boldsymbol{G[X]}$ le graphe induit par G sur X. On note $\boldsymbol{G \setminus X}$ le graphe $G[V(G) \setminus X]$.
  Pour $F \subseteq E(G)$ on note $\boldsymbol{G - F}$ le graphe $(V(G), E(G) \setminus F)$.
- Un graphe est **biparti** si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles indépendants X et Y. On appelle (X, Y) la **bipartition** de G.

Théorème 1 (Caractérisation des bipartis) *Un graphe G est biparti ssi il ne contient pas de cycle impair. On peut détecter cela en temps linéaire (c'est -à-dire en $O(n+m)$).*

- Dans un graphe G un **chemin hamiltonien** est un chemin de longueur $n-1$. Un **cycle hamiltonien** est un cycle de longueur n.

1.3 Arbres, connexité

- Soient $x, y \in V(G)$, une xy**-marche** de G est une suite $M = (x = x_0, x_1, \dots x_{l-1}, x_l = y)$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, l-1\}$ on ait $x_i x_{i+1} \in E(G)$. La **longueur** de M est l.
  Si tous les x_i sont distincts alors on dit que M est un xy**-chemin**.

Lemme 2 (Marche/chemin) *Soient x et y deux sommets de G. Le graphe G contient une xy-marche ssi G contient un xy-chemin.*

- Un graphe G est **connexe** si pour tous sommets x et y de G, le graphe G contient un xy-chemin.
  Une **composante connexe** de G est un ensemble de sommets de G qui induit un sous-graphe connexe de G et qui est maximal pour cela. Si G est connexe alors il possède une seule composante connexe.

- Un **arbre** est un graphe connexe et sans cycle. Une **forêt** est un graphe sans cycle. Une **feuille** est un sommet ayant exactement un voisin.

> **Lemme 3 (Propriétés des arbres)** *Un arbre ayant au moins deux sommets contient au moins deux feuilles. Une forêt ayant c composantes connexes possède $n-c$ arêtes.*

> **Théorème 2 (Arbre couvrant)** *Un graphe G est connexe ssi il possède un arbre couvrant. On peut tester cela en temps linéaire (par un algo de parcours par exemple).*

- Un chemin de longueur minimum entre deux sommets x et y est appelé **un plus court chemin de x à y** et sa longueur est la **distance de x et y**, notée $\boldsymbol{dist_G(x,y)}$.
- Le **diamètre** de G est $\max\{dist_G(x,y) \ : \ x,y \in V(G)\}$ (ou $+\infty$ si G n'est pas connexe).

1.4 Degrés

- Le **degré** d'un sommet x est le nombre de ses voisins, on le note $d_G(x)$ (autrement dit $d_G(x) = |N_G(x)|$).

> **Lemme 4 (Formule des degrés)** *Pour tout graphe G on a $\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2m$*

- Un graphe est k**-régulier** si les degrés de tous ses sommets valent k.
- Le **degré moyen** de G est $\overline{\boldsymbol{deg}}(\boldsymbol{G}) = \frac{1}{n}\sum_{x\in V(G)} d_G(x) = \frac{2m}{n}$
  Le **degré min** de G est $\boldsymbol{\delta(G)} = \min\{d_G(x) \ : \ x \in V(G)\}$
  Le **degré max** de G est $\boldsymbol{\Delta(G)} = \max\{d_G(x) \ : \ x \in V(G)\}$
- Une marche est **fermée** si son sommet d'arrivée et son sommet de départ sont les mêmes. Une marche d'un graphe G est **eulérienne** si elle est fermée et passe exactement une fois par chaque arête de G.

> **Théorème 3 (Marche eulérienne)** *Un graphe G admet une marche eulérienne ssi G est connexe et tous les degrés de ses sommets sont pairs.*

1.5 Quelques invariants et opérateurs

- Le **complémentaire** d'un graphe G, noté $\overline{\boldsymbol{G}}$ est le graphe $(V(G), \{xy \ : \ x,y \in V(G), \ xy \notin V(G)\})$.
- Le **line graph** de G, noté $\boldsymbol{L(G)}$ est le graphe $(E(G), \{ef \ : \ e,f \in E(G), \ e\cap f \neq \emptyset\})$.
- La **stabilité** (ou **independence number**) de G, noté $\boldsymbol{\alpha(G)}$, est la taille du plus grand stable de G (c'est-à-dire la taille du plus grand ensemble de sommets deux-à-deux non reliés).
- Le **clique number** de G, noté $\boldsymbol{\omega(G)}$, est la taille de la plus grande clique de G (c'est-à-dire la taille du plus grand ensemble de sommets deux-à-deux reliés).
- Une k**-coloration** de G est une fonction $c : V(G) \to \{1,\dots,k\}$ telle que $xy \in E(G) \Rightarrow c(x) \neq c(y)$. Si G possède une k-coloration, alors G est dit k**-colorable**. Le **nombre chromatique** de G, noté $\boldsymbol{\chi(G)}$, est $\min\{k \ : \ G$ admet une k-coloration$\}$.
- Un **vertex cover** de G est un ensemble $X \subseteq V(G)$ qui touche toutes les arêtes de G (autrement dit $V(G)\setminus X$ est un stable). On note $\boldsymbol{vc(G)} = \min\{|X| \ : \ X$ est un vertex cover de $G\}$.
- Un **feedback vertex set** de G est un ensemble $X \subseteq V(G)$ qui intersecte tous les cycles de G (autrement dit $V(G)\setminus X$ est une forêt). On note $\boldsymbol{fvs(G)} = \min\{|X| \ : \ X$ est un feedback vertex set de $G\}$.

2 Couplages

- Un couplage est **maximal** si on ne peut pas l'étendre (c'est-à-dire trouver une arête supplémentaire pour trouver un couplage plus grand).
  Un couplage est **maximum** si il est taille la plus grande possible parmi tous les couplages du graphe.

2.1 Chemins augmentants

- Un sommet x d'un graphe G est dit **saturé** ou **couvert** par un couplage M de G si x est incident à une arête de M.
- Un couplage d'un graphe G est **parfait** si il couvre tous les sommets de G.
- La taille d'un couplage maximum de G est notée $\boldsymbol{\mu(G)}$.
- Soit M un couplage de G. Un chemin P est M**-alternant** si les arêtes de P alternent entre M et $E(G) \setminus M$. De plus si $P = v_1 \dots v_k$ est M-alternant et si v_1 et v_k ne sont pas couverts par M alors P est dit M**-augmentant**.

Théorème 4 (Théorème de Berge) *Un couplage M d'un graphe G est maximum ssi G ne contient pas de chemin M-augmentant.*

2.2 Couplages dans les graphes bipartis

- Pour un ensemble $X \subseteq V(G)$ on note $\boldsymbol{N_G(X)} = \bigcup_{x \in X} N_G(x)$.

Théorème 5 (Théorème de Hall, Lemme des mariages) *Un graphe biparti $(X \cup Y, E)$ contient un couplage qui sature X ssi pour toute partie $S \subseteq X$ on a $|N_G(S)| \geq |S|$.*

Corollaire 1 (Taille d'un couplage max) *Pour un graphe $G = (X \cup Y, E)$ biparti, on a $\mu(G) = |X| - \max^*\{|S| - |N_G(S)| \ : \ S \subseteq X\}$.*

Corollaire 2 (Bipartis réguliers) *Tout graphe biparti et régulier admet un couplage parfait.*

Théorème 6 (Algorithme de Egerváry) *Il existe un algorithme polynomial pour calculer un couplage maximum dans un graphe biparti.*

2.3 Couplages dans les graphes généraux

- Un sommet v de G est **universel** si $N_G(v) = V(G) \setminus v$.
- Une composante connexe de G contenant un nombre impair (resp. pair) de sommets est appelée une **composante impaire** de G (resp. **composante paire** de G). Le nombre de composantes impaires de G est noté $\boldsymbol{o(G)}$.

Théorème 7 (Théorème de Tutte) *un graphe G admet un couplage parfait ssi pour toutes parties $S \subseteq V(G)$ on a $o(G \setminus S) \leq |S|$.*

- Une arête e d'un graphe connexe G est dite **séparatrice** si $G - e$ n'est pas connexe.

Corollaire 3 (Théorème de Petersen) *Tout graphe cubique sans arête séparatrice admet un couplage parfait.*

2.4 L'algo de Edmonds

- Soient $G=(V,E)$ un graphe et X un sous-ensemble de sommets de G. Le graphe obtenu en **contractant** X est le graphe dont les sommets sont $(V\setminus X)\cup\{v_X\}$, où v_X est un nouveau sommet pour G, et dont les arêtes sont $\{xy\ :\ xy\in E(G), x\notin X, y\notin X\}\cup\{v_X y\ :\ xy\in E(G), x\in X, y\notin X\}$.

Théorème 8 (Algo d'Edmonds) *Il existe un algorithme polynomial pour calculer un couplage maximum dans un graphe (quelconque).*

2.5 Mariages stables

- Un **ensemble de préférences** pour un graphe $G=(V,E)$ est un ensemble d'ordres $(<_v)_{v\in V}$ où pour tout v, l'ordre $<_v$ est un ordre total sur les arêtes incidentes à v.
  Un couplage M de G est **stable** si pour toute arête $e=uv\notin M$ il existe une arête f de M soit incidente à u avec $e<_u f$ soit incidente à v avec $e<_v f$.

Théorème 9 (Théorème des mariages stables) *Pour tout graphe G biparti et tout ensemble de préférences pour G, il existe un mariage stable.*

3 Flots

3.1 Réseaux de transport, flots

- Un **graphe orienté $D=(V,A)$** est constitué d'un ensemble (fini) V de sommets et d'un ensemble d'**arcs** A constitué de couples d'éléments de V.
- Pour $(x,y)\in A$, on note $xy\in A$ et on dit que x **domine** y, que y est **voisin sortant** de x et que x est **voisin entrant** de y.
- Le **voisinage sortant de** x (resp. **voisinage entrant de** x) noté $\boldsymbol{N_D^+(x)}$ (resp. $\boldsymbol{N_D^-(x)}$) est l'ensemble des voisins sortants de x (resp. des voisins entrants de x). De plus, on note $\boldsymbol{d_D^+(x)}=|N_D^+(x)|$ (resp. $\boldsymbol{d_D^-(x)}=|N_D^-(x)|$) le **degré sortant de** x (resp. le **degré entrant de** x).
- Un sommet x de D est une **source** (resp. un **puit**) si $d_D^-(x)=0$ (resp. $d_D^+(x)=0$).
- Un **réseau de transport** $\mathcal{N}=(D,s,p,c)$ est formé d'un graphe orienté D, d'une source s de D, d'un puit p de D et d'une **fonction de capacité** $c:A\to\mathbb{R}^{+*}$.
- Un **flot** f sur un réseau (D,s,p,c) est une fonction $f:A\to\mathbb{R}^+$ vérifiant :
  - Pour tout $xy\in A$ on a $0\le f(xy)\le c(xy)$ (**contraintes de capacité**)
  - Pour tout $x\in V(D)\setminus\{s,p\}$ on a $\sum_{y\in N_D^-(x)} f(yx)=\sum_{z\in N_D^+(x)} f(xz)$ (**conservation du flot**)
- Etant donné un flot f sur un réseau de transport $\mathcal{N}=(D,s,p,c)$, on note $\boldsymbol{f(X,Y)}=\sum_{x\in X,y\in Y,xy\in A} f(xy)$ et $\boldsymbol{c(X,Y)}=\sum_{x\in X,y\in Y,xy\in A} c(xy)$.
- La **valeur d'un flot** f est $|\boldsymbol{f}|=f(s,V)$.

Lemme 5 (Propriétés des flots) *Pour un flot f sur un réseau de transport $\mathcal{N}=(D,s,p,c)$, on a :*
- $\forall X\subseteq V\setminus\{s,p\}\ \ f(X,V\setminus X)=f(V\setminus X,X)$
- $\forall X\subseteq V\setminus\{p\}$ *avec* $s\in X\ \ f(X,V\setminus X)=|f|+f(V\setminus X,X)$
- $|f|=f(V,p)$

3.2 Flot max, coupe min, algorithme de Ford-Fulkerson

- Pour un flot f sur un réseau de transport $\mathcal{N} = (D,s,p,c)$, le **réseau résiduel** $\mathcal{N}_f = (D',s,p,c')$ est défini sur le graphe orienté D' avec $V(D') = V(D)$ où pour chaque arc xy de D on ajoute à D' l'arc xy de capacité $c'(xy) = c(xy) - f(xy)$ et, si $x \neq s$ et $y \neq p$, l'arc yx de capacité $c'(yx) = f(xy)$.

> **Lemme 6 (Flot sur un réseau résiduel)** *Si f est un flot de $\mathcal{N} = (D,s,p,c)$ et f' est un flot sur le réseau résiduel $\mathcal{N}_f$, alors g défini par $g(xy) = f(xy)+f'(xy)-f'(yx)$ pour tout arc xy de D est un flot de $\mathcal{N}$ de valeur $|g| = |f|+|f'|$.*

- Un **chemin améliorant** pour un flot f défini sur un réseau $\mathcal{N}$ est un chemin orienté P de s à p dans le réseau résiduel $\mathcal{N}_f = (D',s,p,c')$. Le **flot améliorant** f' correspondant est défini par $f'(xy) = c$ si xy est un arc de P et $f'(xy) = 0$ sinon, où $c = \min\{c(xy) \ : \ xy \text{ est un arc de } P\}$.
- Pour un réseau $\mathcal{N} = (D,s,p,c)$, une (s,p)**-coupe** est un ensemble $X \subseteq V(D)$ avec $s \in X$ et $p \notin X$. Les **arcs de la coupe** sont les arcs xy de D avec $x \in X$ et $y \notin X$. La **capacité de la coupe** X est $c(X, V \setminus X)$.

> **Lemme 7 (Borne flot-coupe)** *Pour un réseau de transport $\mathcal{N} = (D,s,p,c)$ et pour tout flot f de $\mathcal{N}$ et toute coupe X de D on a $|f| \leq c(X, V \setminus X)$.*

> **Théorème 10 ('min cut = max flow')** *Pour un réseau $\mathcal{N} = (D,s,p,c)$ sont équivalents :*
> *- f a une valeur maximale sur $\mathcal{N}$.*
> *- $\mathcal{N}_f$ ne contient pas de chemin améliorant.*
> *- il existe une coupe X de D avec $|f| = c(X, V \setminus X)$.*
> *De plus X vérifie $c(X, V \setminus X) = \min\{c(Y, V \setminus Y) \ : \ Y \text{ est une coupe de } D\}$*

> **Corollaire 4 (Ford-Fulkerson pour les capacités entières)** *Si $c : A \to \mathbb{N}$ est à valeur entière, alors l'algorithme de Ford-Fulkerson trouve un flot maximum f et une coupe minimum de $\mathcal{N} = (D,s,p,c)$ en temps $O((n+m).|f|)$*

3.3 Circulations

- Une **circulation** d'un graphe $G = (V,E)$ connexe et sans pont est donnée par une orientation $D = (V,A)$ de G et une fonction $f : A \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout sommet x de D on ait $\sum_{y \in N_D^-(x)} f(yx) = \sum_{z \in N_D^+(x)} f(xz)$.

> **Lemme 8 (Existence de circulation)** *Tout graphe sans pont admet une circulation*

- Pour $k \geq 2$, une k**-circulation** de G, sans pont, est une circulation (D,f) de G vérifiant $\forall xy \in A \ f(xy) < k$.

> **Théorème 11 (Relation circulation-cycles)** *G admet une k-circulation ssi il existe une orientation D de G et une collection $\mathcal{C}$ de cycles orientés de D telle que chaque arc xy de D soit dans au moins 1 et au plus $k-1$ cycles de $\mathcal{C}$.*

- On note $\varphi(G)$ l'entier minimum k pour lequel G admet une k-circulation.

> **Lemme 9 (2-circulation)** *Un graphe sans pont admet une 2-circulation ssi il est eulérien.*

> **Lemme 10 (3-circulation des cubiques)** *Un graphe G sans pont et cubique vérifie $\varphi(G) = 3$ ssi G est biparti.*

4 Connectivité

4.1 Définitions, généralités

- Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un ensemble $X \subseteq V$ est un **sommet-séparateur** de G si $G \setminus X$ n'est pas connexe.
  Un ensemble $F \subseteq E$ est un **arête-séparateur** de G si $G - F$ n'est pas connexe.
- Un graphe G est k**-sommet-connexe** si tout sommet-séparateur de G a taille au moins k.
  Un graphe G est k**-arête-connexe** si tout arête-séparateur de G a taille au moins k.
- La **sommet-connectivité** d'un graphe G, notée $\boldsymbol{\kappa(G)}$, est $\max\{k : G \text{ est } k\text{-sommet-connexe}\}$.
  L'**arête-connectivité** d'un graphe G, notée $\boldsymbol{\lambda(G)}$, est $\max\{k : G \text{ est } k\text{-arête-connexe}\}$.

Lemme 11 (Relation connectivités-degré) *Tout graphe G vérifie $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.*

4.2 Théorèmes de Menger

- Soient x et y deux sommets de G connexe. Un ensemble $X \subseteq V \setminus \{x, y\}$ est un (x, y)**-sommet-séparateur** si $G \setminus X$ n'est pas connexe et x et y appartiennent à des composantes connexes différentes de $G \setminus X$. On note $\boldsymbol{\kappa_G(x, y)}$ la valeur $\min\{|X| : X \text{ est un } (x, y)\text{-sommet-séparateur}\}$.
- Soient x et y deux sommets de G connexe. Un ensemble $F \subseteq E$ est un (x, y)**-arête-séparateur** si $G - F$ n'est pas connexe et x et y appartiennent à des composantes connexes différentes de $G - F$. On note $\boldsymbol{\lambda_G(x, y)}$ la valeur $\min\{|F| : F \text{ est un } (x, y)\text{-arête-séparateur}\}$.

Théorème 12 (Menger local version sommets) *On a $\kappa_G(x, y) \ge k$ ssi G contient k chemins sommet-disjoints (sauf en leurs extrémités) de x à y.*

Théorème 13 (Menger local version arêtes) *On a $\lambda_G(x, y) \ge k$ ssi G contient k chemins arête-disjoints de x à y.*

Théorème 14 (Menger global version sommets) *On a $\kappa(G) \ge k$ ssi pour tous sommets x et y de G, le graphe G contient k chemins sommet-disjoints (sauf en leurs extrémités) de x à y.*

Théorème 15 (Menger global version arêtes) *On a $\lambda(G) \ge k$ ssi pour tous sommets x et y de G, le graphe G contient k chemins arête-disjoints de x à y.*

4.3 Packing d'arbres couvrants

- Pour une partition $\mathscr{P} = (P_1, \ldots, P_l)$ des sommets d'un graphe G, une arête xy de G **croise** la partition $\mathscr{P}$ si $x \in P_i$ et $y \in P_j$ avec $i \neq j$. On note $\boldsymbol{e(\mathscr{P})}$ l'ensemble des arêtes de G qui croisent $\mathscr{P}$.

Théorème 16 (Tutte-Nash Williams, 1961) *Un graphe G contient k arbres couvrants arête-disjoints si, et seulement si, pour toute partition $\mathscr{P} = (P_1, \ldots, P_l)$ des sommets de G, on a $|e(\mathscr{P})| \ge k(l - 1)$.*

Corollaire 5 (Arbres couvrants disjoints et connexité) *Si G est $2k$-arête-connexe, alors G admet k arbres couvrants arête-disjoints.*

4.4 Structure des graphes 2-connexes

- Soient $G = (V, E)$ un graphe et H un sous-graphe de G. Un H-**chemin** $x_0, x_1, \ldots, x_k$ est un chemin de G avec $x_0, x_k \in V(H)$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ $x_i \notin V(H)$.
  Une **décomposition en anses** de G est une suite $H_0, \ldots, H_p$ de sous-graphes de G telle que H_0 est un cycle de G, pour tout $i \geq 1$, H_i est un $(\cup_{j=0}^{i-1} H_j)$-chemin et $G = \cup_{j=0}^{p} H_j$.

Théorème 17 (Décomposition en anses) *G admet une décomposition en anses ssi G est 2-sommet-connexe.*

- Soient $G = (V, E)$ un graphe et H un sous-graphe de G. Un H-**chemin faible** $x_0, x_1, \ldots, x_k$ est un chemin (si $x_0 \neq x_k$) ou un cycle (si $x_0 = x_k$) de G avec $x_0, x_k \in V(H)$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ $x_i \notin V(H)$.
  Une **décomposition en anses faible** de G est une suite $H_0, \ldots, H_p$ de sous-graphes de G telle que H_0 est un cycle de G, pour tout $i \geq 1$, H_i est un $(\cup_{j=0}^{i-1} H_j)$-chemin faible et $G = \cup_{j=0}^{p} H_j$.

Théorème 18 (Décomposition en anses faible) *G admet une décomposition en anses faible ssi G est 2-arête-connexe.*

- Un **bloc** d'un graphe G connexe est soit une arête séparatrice de G et ses deux extrémités, soit un sous-graphe de G 2-sommet-connexe et arête maximal pour cela.
  Un **sommet séparateur** de G est un sommet x de G tel que $G \setminus x$ n'est pas connexe.
  Le **block graph** de G est le graphe biparti construit sur {blocks de G} et {sommets séparateurs de G} où on relie le bloc B au sommet séparateur x si $x \in B$.

Théorème 19 (Block graph) *Pour tout graphe G connexe, le block graph de G est un arbre.*

5 Colorations

5.1 Coloration des sommets

Théorème 20 (Algo FIRST-FIT) *Pour tout graphe G, on a $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ et l'algorithme* FIRST-FIT *produit en temps polynomial une coloration de G en $\Delta(G) + 1$ couleurs.*

- Un graphe G est dit d-**dégénéré** pour un entier $d \in \mathbb{N}$ si G et tous ses sous-graphes possèdent toujours un sommet de degré inférieur ou égal à d.
  Si G est d-dégénéré on lui associe un **ordre de dégénérescence** $v_1, \ldots, v_n$ tel que pour tout $i = 2, \ldots, n$ on ait $|N_G(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}| \leq d$.

Théorème 21 (Dégénérescence) *Tout graphe d-dégénéré G vérifie $\chi(G) \leq d$.*

Théorème 22 (Brooks, 1941) *Si G n'est ni un graphe complet ni un cycle impair, alors on a $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Théorème 23 (Construction de Myscelski, 1932) *Pour tout entier $k \geq 1$ il existe un graphe sans triangle et de nombre chromatique k.*

- Si G n'est pas une forêt, on définit $\boldsymbol{g(G)} = \min\{|C| \ : \ C \text{ est un cycle de } G\}$.

Théorème 24 (Erdős, 1959) *Pour tout entier $k \geq 1$ il existe un graphe G avec $g(G) \geq k$ et $\chi(G) \geq k$.*

5.2 Coloration des arêtes

- Une k**-coloration des arêtes** de $G = (V, E)$ est une application $c : E \to \{1, \ldots, k\}$ telle que $c(e) \neq c(e')$ si e et e' sont deux arêtes de G ayant une extrémité en commun.
  L'**indice chromatique** de G, noté $\boldsymbol{\chi'(G)}$ est le plus petit entier k tel que G admette une k-arête coloration.

Lemme 12 (Borne sur χ') *Tout graphe G ayant au moins une arête vérifie $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$*

Théorème 25 (Vizing, 1964) *Tout graphe G vérifie $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

6 Deux classes de graphes : planaires et chordaux

6.1 Les graphes planaires

- Un **graphe plan** est un graphe dessiné dans le plan : ses sommets sont des points de $\mathbb{R}^2$, ses arêtes sont des courbes de $\mathbb{R}^2$ telles que deux arêtes ne s'intersectent pas, sauf éventuellement en leurs extrémités qui doivent être des sommets du graphe.
  Un graphe est **planaire** si il admet une **représentation planaire**, c'est-à-dire, si il existe un graphe plan qui lui soit isomorphe.
- Étant donné un graphe plan $G = (V, E)$ les points de $\mathbb{R}^2 \setminus (V \cup E)$ se partitionnent en parties connexes maximales : les **faces** de G. Parmi les faces de G, une est non-bornée, on la nomme la **face externe** du graphe G.
  Le graphe induit par les sommets et les arêtes incidents à une face f de G est appelé la **frontière** de f et est noté $\boldsymbol{Fr(f)}$.

Lemme 13 (Faces d'un graphe plan) *Soit G un graphe plan.*
- Si G n'est pas une forêt alors la frontière de chaque face de G contient un cycle et G a au moins deux faces.
- Si G est une forêt alors G n'a qu'une seule face dont la frontière est G.
- Si G est 2-sommet-connexe alors la frontière de toute face de G est exactement un cycle.

Lemme 14 (Projection stéréographique) *Un graphe est planaire si, et seulement si, il est plongeable sans croisement sur la sphère.*

Théorème 26 (Formule d'Euler, 1740) *Si G est un graphe plan et connexe alors G vérifie $n - m + f = 2$, où f est le nombre de faces de G.*

Corollaire 6 (Borne sur m) *Tout graphe planaire G avec $n \geq 3$ vérifie $m \leq 3n - 6$.*

- Un graphe planaire G vérifiant $m = 3n-6$ est appelé une **triangulation plane**. Dans toute représentation plane de G, chaque face est un triangle.

Corollaire 7 (Dégénérescence des planaires) *Tout graphe planaire est 5-dégénéré.*

- Soit G un graphe plan 3-arête connexe. Le **dual** de G, noté $G^\star$ est le graphe dont les sommets sont les faces de G et dont deux faces sont reliées dans $G^\star$ si leur frontière partage une arête.

Lemme 15 (Graphe dual) *Pour tout graphe G plan et 3-arête connexe on a $G^\star$ est planaire, $G^{\star\star} = G$ et $n(G^\star) = f(G)$, $m(G^\star) = m(G)$ et $f(G^\star) = n(G)$ dans n'importe quel représentation plane de $G^\star$.*

Théorème 27 (Heawood, 1890) *Tout graphe planaire G vérifie $\chi(G) \leq 5$*

- Le graphe obtenu par **contraction d'une arête** xy d'un graphe G est le graphe de sommets $(V(G) \setminus \{x,y\}) \cup \{v_{xy}\}$ et d'arêtes $(E(G) \setminus (\{xz \ : \ z \in N_G(x)\} \cup \{yz \ : \ z \in N_G(y)\})) \cup \{v_{xy}z \ : \ z \in (N_G(x) \cup N_G(y)) \setminus \{x,y\}\}$.
  Un graphe H est un **mineur** d'un graphe G si on peut obtenir H à partir de G par une suite de retraits de sommet, de retraits d'arêtes et de contraction d'arêtes.

Théorème 28 (Kuratowski, 1930) *Un graphe G est planaire si, et seulement si, il ne contient pas K_5 ou $K_{3,3}$ comme mineur.*

Théorème 29 (Exemple de déchargement) *Tout triangulation plane G avec $\delta(G) = 5$ contient deux sommets de degré 5 adjacent ou un sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 6.*

6.2 Graphes chordaux

- Une **corde** d'un cycle C d'un graphe G est une arête de G reliant deux sommets de C non consécutifs le long de C. Un graphe G est **chordal** si tout cycle de G de longueur supérieure ou égale à 4 admet une corde.
- Un sommet x est **simplicial** dans un graphe G si $N_G(x)$ induit une clique de G.
  Un **ordre parfait d'élimination simplicial (opes)** d'un graphe G est un ordre $v_1, \ldots, v_n$ sur les sommets de G tel que pour tout $i = 2, \ldots, n$ le sommet v_i est simplicial dans le graphe $G[v_1, \ldots, v_i]$.

Théorème 30 (Simpliciaux dans les chordaux) *Tout graphe chordal G qui n'est pas une clique contient deux sommets simpliciaux non adjacents.*

Corollaire 8 (Opes) *Un graphe G est chordal si, et seulement si, il admet un opes.*

Théorème 31 (LEXBFS) *Pour tout graphe G, l'algorithme* LEXBFS *retourne en temps linéaire un opes de G si G est chordal ou signale que G n'est pas chordal sinon.*

- Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une séquence de sous-ensemble d'un espace U. Un graphe G est un **graphe d'intersection** de modèle $(U, (X_1, \ldots, X_n))$ si $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et x_i est relié à x_j si, et seulement si, X_i et X_j s'intersectent.

Théorème 32 (Intersections de sous-arbres) *Un graphe G est chordal si, et seulement si, G est le graphe d'intersection d'un ensemble de sous-arbres d'un arbre.*

Théorème 33 (Calculs sur les chordaux) *Sur les graphes chordaux, les calculs de α, ω et χ se font en temps polynomial.*