Graphes et Structures, HMIN223M Année 2018-2019
Examen, session 1
M1 Info, M1 Math-Info.

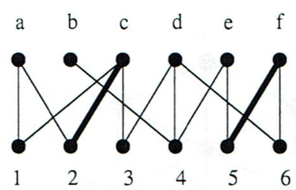
- Graphes et Structures, ~~contrôle continu~~ examen -

- Durée : 3 heure - Tous documents de cours autorisés -
Mai 2019

Le barème est indicatif. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutes les réponses doivent être claires et justifiées.

- Exercice 1 - Couplage (2 points) -

a. Calculer un couplage maximum dans le graphe biparti suivant en utilisant l'algorithme vu en cours et en partant du couplage pré-calculé $\{2c, 5f\}$ (expliquer les étapes du déroulement de l'algorithme).



b. *Modélisation :* un laboratoire pharmaceutique veut expérimenter n médicaments sur n volontaires, de sorte que chaque volontaire teste un et un seul médicament. Certains volontaires déclarent toutefois avoir des allergies à certains composants présents dans les médicaments. Comment savoir si le test est possible sur tous les volontaires ? Comment affecter un médicament à tester à chaque volontaire en respectant toutes les contraintes d'allergie ? Modéliser le problème et donner un algorithme de résolution.

- Exercice 2 - Connectivité - (4 points) -

On note par H_d l'*hypercube de dimension* d, c'est-à-dire le graphe de sommets $\{0,1\}^d$ dans lequel $x_1 \dots x_d$ et $y_1 \dots y_d$ sont reliés si et seulement si il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $x_i \neq y_i$ et $x_j = y_j$ pour tout $j \neq i$.

1. Dessiner H_3 en précisant les labels des différents sommets. Calculer en justifiant $\kappa(H_3)$.
2. Prouver que H_d est régulier et calculer son degré. En déduire que $\kappa(H_d) \leq d$.
3. Pour $k = 0, 1$ on définit $X_k = \{x_1 \dots x_d \in \{0,1\}^d \ : \ x_1 = k\}$. Pour $k = 0, 1$, montrer que :
   (a) X_k est isomorphe à H_{d-1}
   (b) Que $\{0,1\}^d$ est l'union de X_0 et de X_1 et enfin
   (c) Que X_0 et X_1 sont reliés par un couplage M de taille 2^{d-1} dans H_d que l'on explicitera.
4. Par récurrence sur d montrer que tout ensemble $S \subseteq V(H_d)$ de taille inférieure ou égale à $d - 1$ ne déconnecte pas H_d (on pourra commencer par supposer que $S \subseteq X_0$...).
5. En déduire $\kappa(H_d)$.

- Exercice 3 - Stable facile pour les chordaux (5 points) -

Le but de l'exercice est de proposer un algorithme polynomial pour le calcul d'un stable maximum dans les graphes chordaux.

a. Donner un exemple de graphe chordal à 6 sommets, qui ne soit ni une clique, ni un arbre.

b. Donner un exemple de graphe non chordal à 4 sommets. Montrer que cet exemple est le seul graphe non chordal à 4 sommets.

Une *couverture par cliques* d'un graphe G est une partition $\mathcal{K} = (K_1, \ldots, K_p)$ des sommets de G telle que pour tout $i = 1, \ldots, p$ l'ensemble K_i soit une clique de G. On dit que $\mathcal{K}$ est une *couverture minimum par cliques* de G si p est minimum parmi toutes les couvertures par cliques de G.
Soient maintenant G un graphe chordal et x un sommet simplicial de G. On note $X = \{x\} \cup N_G(x)$ et $G' = G \setminus X$. Soient aussi S' un stable maximum de G' et $\mathcal{K}'$ une couverture minimum par cliques de G'.

c. Montrer que $S = S' \cup \{x\}$ est un stable maximum de G.

d. Montrer que $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \{X\}$ est une couverture minimum par cliques de G.

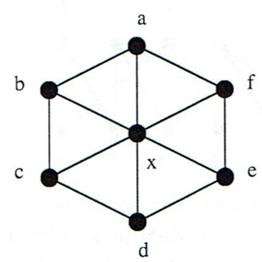
e. Montrer que $|S| = |\mathcal{K}|$.

f. En déduire un algorithme linéaire pour calculer un stable maximum d'un graphe chordal G, en supposant qu'un ordre parfait d'élimination simplicial de G soit donné en entrée.

g. Conlure quant à l'objectif de l'exercice.

- Exercice 4 - FIRST-FIT **- (4 points) -**

On considère H le graphe suivant :



a Calculer le nombre chromatique de H.

b Proposer deux applications de l'algorithme FIRST-FIT sur H, une produisant une coloration avec $\chi(H)$ couleurs et l'autre produisant une coloration avec strictement plus de $\chi(H)$ couleurs.

c Soit maintenant $G = (V, E)$ un graphe quelconque dont la séquence de degré est $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ avec $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ (c'est-à-dire que l'on peut écrire $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $deg_G(x_i) = d_i$ pour $i = 1, \ldots, n$). En utilisant l'algorithme FIRST-FIT sur un ordre des sommets bien choisi, montrer que $\chi(G) \leq \max\{\min\{d_i + 1, i\} \ : \ 1 \leq i \leq n\}$.

d En déduire que $\chi(G) \leq \lceil\sqrt{2m}\rceil$ (en notant p la valeur de droite de cette inégalité, on pourra montrer que $p(p-1) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i$).

- Exercice 5 - Déchargement (5 points) -

Le but de l'exercice est d'utiliser la technique de déchargement pour prouver le résultat suivant : *Tout graphe planaire sans cycle de longueur 4 à 11 est (sommet) 3-colorable* (Abbott et Zhou, 1991). Pour cela on suppose que le résulat est faux et considère G un graphe plan, contre-exemple minimale à l'énoncé.

a. Montrer que G est 2-sommet connexe.

b. Remarquer que G ne contient pas deux triangles partageant une arête.

c. Pour mettre en place la méthode de déchargement, on place des valeurs, appelées *les charges* sur les sommets et les faces de G : chaque sommet v de G reçoit la charge $6 - d_G(v)$ et chaque face f de G reçoit la charge $6 - 2d_G(f)$, où $d_G(v)$ désigne le degré du sommet v dans G et $d_G(f)$ est le *degré de la face* f, c'est-à-dire son nombre de sommets incidents. En utilisant la formule d'Euler, montrer que la somme de toutes les charges est strictement positive.

d. On considère la règle suivante : (R) *chaque face de degré supérieur ou égal à 12 reçoit* $\frac{3}{2}$ *valeur de charge de chacun de ses sommets incidents.*

e. Remarquer que la somme des charges après application de (R) est inchangée.

f. En utilisant l'hypothèse que G ne contient pas de cycle de longueur 4 à 11, déduire que G contient forcément un sommet de degré 2.

g. Conclure