UNIVERSITÉ de MONTPELLIER	**Algèbre Linéaire et Analyse 2**
— Faculté des sciences —	HLMA203
Département de Mathématiques	LICENCE 1ère année
Année 2017–2018	Série 1 & Série 3

Contrôle Final : session 1

Date : 14 Mai 2018
Heure : 16h00
Durée : 3 heures (hors tiers-temps)
Document et calculatrice interdits

Exercice §1 : QCM. Qualifier les assertions suivantes par **V** (vraie) ou **F** (fausse), sur la copie ; bien reporter, au préalable, une colonne avec tous les numéros (pas les assertions elles-mêmes), dans l'ordre, mêmes ceux sans réponse. Toute réponse fausse est comptée négativement.

1. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire forment un espace vectoriel.
2. Le développement limité de exp en $x = 1$ à l'ordre 2 est : $exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
3. Si A est une matrice inversible, alors $det(A^{-1}) = (det\, A)^{-1}$.
4. Les primitives de la fonction $(\ln x)^2$ (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) sont les fonctions $\dfrac{(\ln x)^3}{3} + C$.
5. Si A et B sont des matrices carrées (même ordre), alors $det(A - B) = det(A) - det(B)$.
6. L'équation différentielle $y' - yy' + 2y = e^x$ est du premier ordre et linéaire.
7. Quel que soit le choix des bases, la matrice d'un isomorphisme est toujours carrée.
8. La règle de Sarrus permet de calculer le déterminant des matrices carrées de tout ordre.
9. Il existe une infinité de matrices carrées X d'ordre 2, telles que $X^2 = X$.
10. Les polynômes premiers à coefficients complexes sont tous de degré 1.

Exercice §2. Puissance d'un endomorphisme. Soient les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & -4 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

1. Par récurrence, montrer que nous avons $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner l'expression de $\alpha(x, y, z)$.
3. Montrer, à l'aide du déterminant, que α est bijective.
4. Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = ((1, 2, 1), (2, 3, 2), (-1, -1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de passage P, donnée par l'application identité relativement à la base $\mathcal{B}'$ (espace de départ) et à la base $\mathcal{B}$ (espace d'arrivée). Calculer son inverse P^{-1}.
6. Appliquer le changement de bases pour montrer que B est la matrice de α relativement à la base $\mathcal{B}'$.
7. Par récurrence montrer que $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.
8. En déduire l'expression de la matrice A^{2018} (puissance 2018-ième de A).

Exercice §3. Développements limités.

1. Rappeler les développements limités, en $x = 0$ et à l'ordre 4, des fonctions : $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$ et $\sqrt{1+x}$.
2. Pour la fonction $\omega(x) = \sqrt{\cos x}$, définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$, trouver le développement limité en 0, à l'ordre 3. En déduire la valeur de ω'' en 0.
3. Calculer le développement limité en 0, à l'ordre 4, de $\varphi(x) = \exp(x - x^2/2 + x^3/3)$. Quelle est la limite de $(\varphi(x) - 1 - x)/x^4$ quand $x \to 0$?

Exercice §4. Nous désirons calculer $\int_1^2 f(x)dx$, où $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 - x + 4}{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

1. Division euclidienne : trouver des polynômes $e(x)$ et $n(x)$, de degrés inférieurs ou égaux à 2, tels que $f(x) = e(x) + n(x)/(x^3 + 3x^2 + 2x)$.
2. Montrer qu'il existe des réels α, β et γ (que l'on explicitera), tels que

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x+2} \ .$$

3. En déduire toutes les primitives de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Conclure.

Exercice §5. Le cosinus hyperbolique est noté Ch : $Ch(t) = (e^t + e^{-t})/2$.
Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{Ch(t)}$ à l'aide du changement de variables $u = e^t$.

Exercice §6. Soit l'équation différentielle linéaire : $(\mathcal{D}) \quad y \in C^1(\mathbb{R}),\ y' + 2y = x^3 e^x$.

1. Trouver une primitive de $f(x) = x^3 e^x$ à l'aide uniquement d'intégrations par parties.
2. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation $\mathcal{D}$.
3. Appliquer la méthode de la Variation de la Constante pour obtenir une solution de $\mathcal{D}$.
4. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $\mathcal{D}$.
5. Trouver l'unique solution $\bar{y}$ de l'équation différentielle $\mathcal{D}$ vérifiant $\bar{y}(0) = 1/2$. Quelle est la valeur de $\bar{y}'(0)$?