Lecture d'article - Star Chromatic Number (A. Vince)

1 Introduction

Les problèmes de colorations ont toujours occupé une place importante dans les mathématiques, et plus précisément en théorie des graphes. Nous connaissons déjà la définition du nombre chromatique, noté $\chi(G)$, correspondant au nombre minimum de couleur utilisées pour colorer un graphe. Ici, nous allons étendre cette définition en considérant les couleurs comme des entiers, numérotés de 0 à k. Dans $\chi(G)$, la couleur des sommets voisins doit être distincte (éloignée d'au moins 1). Nous introduisons alors le *star chromatic number* (nombre chromatique étoile), noté $\chi^*(G)$, où nous cherchons à ce que *l'écart* entre les sommets adjacents soit le plus grand possible.

2 Nombre k-chromatique

Pour commencer, soit Z_k, l'ensemble des entiers relatifs modulo k. De plus, posons $|x|_k$ la norme circulaire de x, qui correspondrait à la "distance à 0 de x". Par exemple, $|2|_5 = |3|_5 = 2$, ce qui signifie que la distance à 0 de 2 *modulo* k est la même que 3 *modulo* k, car $|2-2|_5 = 0$ et $|3+2|_5 = 0$.
De plus, une Z_k-coloration de G est la fonction $c : V \to Z_k$, qui associe à chaque sommet de G une des k valeurs de Z_k qui correspondent à une couleur.
Avec les trois notions précédentes, nous pouvons à présent introduire la fonction

$$\psi(c) = \frac{k}{\min\limits_{u\ adj\ v} |c(u) - c(v)|_k}$$

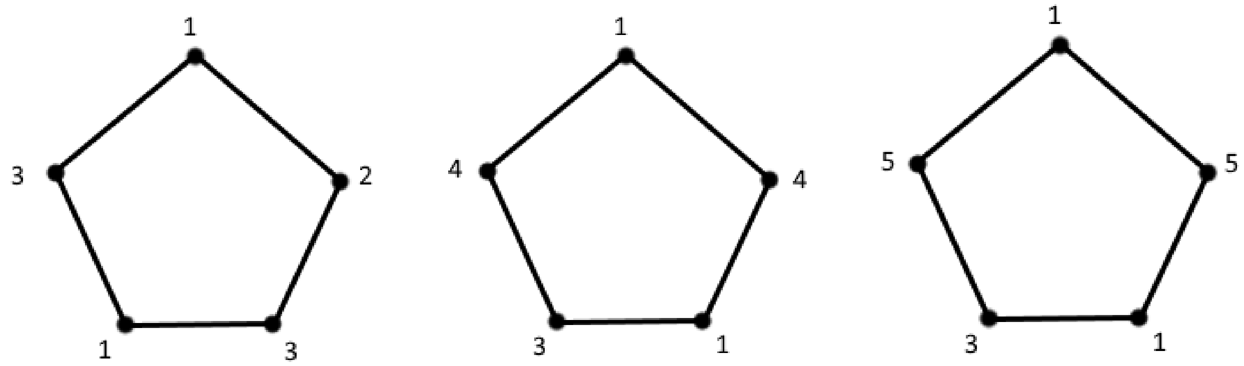
$\psi(c)$ correspond au nombre de couleurs utilisées, divisé par la distance *minimale* de deux couleurs adjacentes. S'il n'y a pas assez de couleurs pour colorer le graphe (donc que $k < \chi(G)$), la distance de couleur minimale est donc de 0 (car des sommets voisins ont donc la même couleur), dans ce cas, admettons $\psi(c) = \infty$.
Pour finir, soit C_k l'ensemble de toutes les Z_k-coloration de G, nous pouvons alors définir le nombre k-chromatique $\chi_k(G)$ comme le plus petit $\psi(c)$:

$$\chi_k(G) = \min_{c \in C_k} \psi(c) = \frac{k}{\max\limits_{c \in C_k} \min\limits_{u\ adj\ v} |c(u) - c(v)|_k}$$

$\min_{c \in C_k} \psi(c)$ revient à chercher la k-coloration pour laquelle la plus petite distance entre deux sommets est maximale.
Pour χ_k, cela revient à chercher la plus petite Z_{k_0}-coloration c, avec $k_0 \leq k$, tel que $\psi(c)$ est minimale.
Nous avons déjà vu que si $k < \chi(G)$ alors $\chi_k(G) = \infty$. De plus, si $k = \chi(G)$ alors $\chi_k(G) = \chi(G)$. Ceci est du au fait que si il existait une distance minimale de 2 entre chaque sommet, alors il existe une autre Z_{k-1}-coloration où les sommets sont au minimu à distance 1, ce qui contredit $\chi(G) = k$.

Exemple : Considérons le graphe C_5, les cinq premiers nombre k-chromatiques sont alors :
$\chi_1 = \infty, \chi_2 = \infty, \chi_3 = 3, \chi_4 = 3, \chi_5 = \frac{5}{2}$.

Tout d'abord, comme le nombre chromatique ordinaire $\chi(C_5) = 3$, nous avons vu que $\chi_1 = \infty, \chi_2 = \infty$ car < 3. Remarquons que χ_3 et χ_4 ont la même valeur. Pour s'en convaincre, regardons une des 3-coloration optimale de C_5 en figure 1-a page 2, la distance minimale entre deux sommets est de 1, ce qui fait que $\chi_k(C_5) = \frac{3}{1} = 3$.
Pour une 4-coloration optimale de C_5 (figure 1-b), remarquons que la distance minimale entre deux sommet n'a pas augmenté, ce qui donne $\psi(c) = \frac{4}{1}$ pour $c : V \to Z_4$. Cependant, χ_k est défini comme le minimum des $\psi(c)$, ce pour cela que nous avons $\chi_4(C_5) = \chi_3(C_5) = 3$. Pour $\chi_5(C_5)$ une 5-coloration optimale de C_5 en figure 1-c nous permet de voir qu'en utilisant 5 couleurs, on peut augmenter à 2 la distance minimale entre deux sommet, ce qui donne $\chi_5(C_5) = \frac{5}{2}$.



(a) 3-coloration (b) 4-coloration (c) 5-coloration

Figure 1: Une Z_k-coloration optimale de C_5 pour $k = 3$, 4 et 5

3 Star chromatic number

À partir de la notion de $\chi_k(G)$ vue précédemment, définissons le star chromatic number $\chi^*(G)$, tel que le plus petit $\chi_k(G)$ pour un graphe de n sommets, avec $1 \leq k \leq n$. Dans l'exemple ci-dessus, $\chi^*(G) = \frac{5}{2}$.

Un des théorèmes les plus importants et qui va nous permettre de déduire beaucoup de chose est quelque peu surprenant, mais affirme que pour un graphe à n sommets, il existe un entier $k_0 \leq n$, tel que $\chi_{k_0}(G) \leq \chi_k(G)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. La preuve se base sur les fonctions de coloration de G qui prennent des valeurs réelle entre 0 et 1. Par la suite, la preuve utilise l'induction pour montrer que les arêtes entre les sommets ont une distance qui croit trop lentement, et que l'ajout de nouvelles couleurs ne peut pas aboutir à une diminution de χ^*.

À l'aide de la preuve précédente, on peut montrer que $\lim_{k\to\infty} \chi_k = \chi^*$. La démonstration s'appuie sur les bornes inférieures et supérieures de χ^* qui découlent également de sa définition.

À présent, nous voulons démontrer les deux résultats ci-dessous
$(a)\chi^*(K_n) = n$
$(b)\chi^*(C_{2n+1}) = 2 + \frac{1}{n}$
Pour ce faire, remarquons que $K_n = G_{1,n}$ ainsi que $C_{2n+1} = G_{n,2n+1}$. Par récurrence, nous pouvons montrer que $\chi^*(G_{m,n}) = n/m$, nous avons alors $\chi^*(K_n) = \frac{n}{1} = n$ et $\chi^*(C_{2n+1}) = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$.

Pour finir, montrons que $\chi(G) = \omega(G)$, alors $\chi^*(G) = \chi(G)$.
Pour cela, nous utilisons le fait que si H est un sous graphe de G, alors $\chi^*(H) \leq \chi^*(G)$. La preuve est immédiate venant du fait que n'importe quelle Z_k-coloration $c : V(G) \to Z_k$ peut être réduite à une coloration de $V(H)$. En utilisant les résultats (a) et (b) précédents, on montre que $\omega(G) = \chi(G) \geq \chi^*(G)\chi^*(K_{\omega(G)}) = \omega(G)$. ■

4 Questions ouvertes

Les propriétés de base du star chromatic number ont été discutées dans les parties précédentes ; il reste cependant plusieurs question ouvertes à son sujet :

- Comment déterminer $\chi^*(G) = \chi(G)$?
- Quels sont les graphes, autres que les cycles impairs, pour lesquels $2 < \chi^*(G) < 3$?

Sources

– *A. Vince, Star Chromatic Number*, University of Florida, Gainesville, Florida (1988).

– *S. Stahl, n-tuple coloring and associated graphs*, J. Combinato, Theory Ser (1976).