Équations Différentielles.

semaine du 23 mars 2020

La résolution des équations différentielles linéaires (les plus importantes) utilise tout l'arsenal de l'Algèbre Linéaire.

- Une **équation différentielle** est un cas particulier d'**équation fonctionnelle** : une équation dont chaque solution est une fonction $y = f(x)$ (avec ensembles, de départ et d'arrivée). Mille modèles de lois d'évolutions temporelles ($y = f(t)$) fournissent de telles équations : Physique, Biologie,...
- **Exemple :** trouver une fonction, de classe $\mathcal{C}^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$. C'est une équation fonctionnelle (on cherche une fonction f), **différentielle d'ordre 2** car seules f et ses dérivées f' et f'' apparaissent ; on l'écrit : $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\;\; y'' - 2y' + y = 0$.
- Les problèmes premiers de toute équation sont ceux de l'**existence** et de l'**unicité** d'une solution. Les solutions de l'équation ci-dessus forment un sous-ensemble $S \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; S est non vide car la fonction nulle est évidemment solution ; un rapide calcul montre aussi : $\exp \in S$. **Exercice :** $\sin \notin S$.

- **Constat :** les équations différentielles sont impossibles à résoudre en général (approches **quantitatives**) ; même l'analyse **qualitative** des solutions (existence ou unicité) est souvent muette. Reste l'approche quantitative **approchée** sur ordinateur, telles les simulations météorologiques.
- Il existe cependant un type d'équation où abondent des résultats : les **équations linéaires**. Pour un entier $n > 0$ et une partie $I \subset \mathbb{R}$ (souvent un intervalle), soient $n+2$ fonctions (continues) $I \longrightarrow \mathbb{R}$: les $n+1$ **coefficients** $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$,...,$a_0(x)$ et le **2nd membre** $b(x)$. Ils définissent une équation différentielle linéaire d'ordre n :
$y \in \mathcal{C}^n(I)\,,\;\; a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = b(x).$

Deux Équations

- Le premier réflexe à avoir devant l'équation linéaire $(\mathcal{E})\ y \in \mathcal{C}^n(I)\,,\ \ a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y = b(x)$ est d'introduire l'équation **homogène** associée : $(\mathcal{E}_0)\ y \in \mathcal{C}^n(I)\,,\ \ a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y = 0.$
- Notant S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et, S_0 celui de $(\mathcal{E}_0)$:

Théorème

S_0 est un s.e.v de $\mathcal{C}^n(I)$; S est un s.e.a de $\mathcal{C}^n(I)$, dirigé par S_0.

Si y_1 est une solution **particulière** ($=$ quelconque) de $(\mathcal{E})$, nous avons : $S = y_1 + S_0 = \{y_1 + y_0 | y_0 \in S_0\}$.

- La linéarité de l'équation $(\mathcal{E})$ induit une géométrie affine sur l'ensemble de ses solutions S : *quid* de $dim(S) = dim(S_0)$?

Ordre 1 : cas homogène

- Pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, soit l'équation (différentielle linéaire d'ordre 1) : $(\mathcal{E})$ $y \in \mathcal{C}^1(I),\ \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$, où α, β et γ sont continues sur I ; nous avons l'équation homogène associée : $(\mathcal{E}_0)$ $\alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$.
  Nous supposons que α ne s'annule pas sur I ; sinon, on découpera I en intervalles I_k sur lesquels α ne s'annule pas.

Théorème

Soit une solution y_0 de $(\mathcal{E}_0)$. Pour tout $x_0 \in I$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $y_0(x) = C \exp \displaystyle\int_{x_0}^{x} -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} ds$ (on suppose $\alpha(s) \neq 0$ sur I).

- Donc S_0 est une droite vectorielle de $\mathcal{C}^1(I)$: toute solution de $(\mathcal{E}_0)$ est multiple de $\exp \int_{x_0}^{x} -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} ds$.

Variation de la Constante

- Pour $(\mathcal{E})$, nous avons le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème

Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y à $(\mathcal{E})$ telle que $y(x_0) = y_0$.

- Une preuve est donnée par la méthode de la **variation de la constante**, laquelle méthode énonce qu'il existe une solution particulière de $(\mathcal{E})$ qui s'écrit $y_1(x) = C(x) \exp \displaystyle\int_{x_0}^{x} -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} ds$. On fait "varier" C ! *Cf.* exemple, page suivante.
- **Remarques.** 1) Les solutions de $(\mathcal{E})$ forment une droite affine de vecteur directeur la fonction $\exp \int_{x_0}^{x} -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} ds$. 2) Les graphes des solutions de $(\mathcal{E})$ sont disjoints et recouvrent $I \times \mathbb{R}$.

Exemple : trouver la solution ω de l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{E})$ $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$, $\;y' + y/t = 1$, telle que $\omega(1) = 1$.

- L'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ est $(\mathcal{E}_0)$ $y' + y/t = 0$.
- L'ensemble S_0 des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est formé des fonctions : $y_0(t) = C \exp - \int_1^t \frac{ds}{s} = C/t$ (S_0 est une droite vectorielle).
- La méthode de la variation de la constante propose de poser $y_1(t) = C(t)/t$: C est une fonction ! Remplaçons dans $(\mathcal{E})$:
- $y_1'(t) + y_1(t)/t = (C'(t)t - C(t))/t^2 + C(t)/t^2 = C'(t)/t$. Avec $C'(t)/t = 1$, on prend $C(t) = t^2/2$; d'où $y_1(t) = t/2$.
- Toute solution y de $(\mathcal{E})$ s'écrit donc $y(t) = y_1(t) + y_0(t)$, où $y_0 \in S_0$: $y(t) = t/2 + C/t$, pour un certain $C \in \mathbb{R}$.
- La "condition de Cauchy" $\omega(1) = 1$ devient $1 = 1/2 + C$, soit $C = 1/2$. On en déduit : $\omega(t) = t/2 + 1/(2t)$.

Ordres Supérieurs

- L'équation $(\mathcal{E})$ $y \in \mathcal{C}^n(I)$, $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_0(x)y = b(x)$ (ordre n) se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 **matricielle** ou, aussi, à un **système différentiel** d'ordre 1. On dispose d'un théorème de Cauchy-Lipschitz "vectoriel".

Théorème

Si I est un intervalle et a_n ne s'y annule pas, alors $\dim(S) = n$.

- **Principe de superposition.** Supposons une décomposition $b(x) = \beta_1 b_1(x) + \beta_2 b_2(x)$ et introduisons les fonctions :
y_1, solution de $(\mathcal{E}_1)$ $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_0(x)y = b_1(x)$ et
y_2, solution de $(\mathcal{E}_2)$ $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_0(x)y = b_2(x)$.

Théorème

$y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$ *est solution de* $(\mathcal{E})$.

Coefficients Constants

Soit S_0 l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y \in \mathcal{C}^n(I)\,,\ a_n y^{(n)} + ... + a_0 y = 0$, avec des constantes a_i $(a_n \neq 0)$. On définit un **polynôme caractéristique** $P(r) = \sum_{i=0}^n a_i r^i$ ainsi qu'une **équation caractéristique** $\sum_{i=0}^n a_i r^i = 0$. Rappel : $P(r)$ possède n racines réelles ou complexes, multiplicités comprises.

Théorème

1) Si r est une racine réelle de P, d'ordre m, alors $(e^{rx}, xe^{rx}, .., x^{m-1}e^{rx})$ est une famille libre m de vecteurs de S_0.
2) Si $\alpha + i\beta$ est une racine complexe (avec $\beta \neq 0$) de P, d'ordre m, $(e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x), ..., x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x))$ est une famille libre de $2m$ vecteurs de S_0.
3) L'union de toutes ces familles libres est une base de S_0.

Exemples : ordre 2

Soit l'équation (différentielle d'ordre 2, linéaire à coefficients constants) : $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ ay'' + by' + cy = 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- L'ensemble S_0 des solutions est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Pour en préciser une base $\mathcal{B}$, introduisons le polynôme caractéristique $ar^2 + br + c$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Pour $\Delta > 0$, nous avons les racines réelles distinctes : $r_+ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_- = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\mathcal{B} = (e^{r_+ x}, e^{r_- x})$.
- Pour $\Delta = 0$, nous avons une unique racine, réelle et double : $r_0 = \frac{-b}{2a}$; d'où une base pour S_0 : $\mathcal{B} = (e^{r_0 x}, xe^{r_0 x})$.
- Pour $\Delta < 0$, nous avons deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$; nous en déduisons une base de solutions : $\mathcal{B} = (e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x))$.

Équation Inhomogène

Il existe des méthodes pour trouver une solution à une équation (différentielle, linéaire, à coefficients constants) non homogène, à commencer par **la variation des constantes**. Celle-ci ne sera pas d'une grande utilité pour les seconds membres envisagés ici :

- x^m (monômes), avec $m \in \mathbb{N}$;
- $e^{\alpha x}$ (exponentielles), avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- $\cos(\beta x)$ et $\sin(\beta x)$ (trigonométrie de base), avec $\beta \in \mathbb{R}^*$;
- tous leurs produits : $x^m e^{\alpha x}$, $\sin(\beta x) e^{\alpha x}$, $x^m e^{\alpha x} \cos(\beta x)$,...

Notons que le principe de superposition autorise des combinaisons linéaires telles : $x^3 - x^2 + 5$ (polynômes), $x^2 e^{2x} - 5\cos(x) e^{-3x}$,...
L'idée est la suivante : **construire une solution qui ressemble au second membre**, avec un (ou plusieurs) coefficient(s) libre(s).
Cette méthode "par ressemblance", marche assez souvent ; encore faut-il la comprendre et bien l'appliquer...

Non Résonance

Soit l'équation $(\mathcal{E})$ $a_n y^{(n)} + .. + a_0 y = b(x)$ (coefficients constants), de polynôme caractéristique $P(r)$. Définissons le nombre $\rho = \alpha + i\beta$ si $b(x) = x^m e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ou $b(x) = x^m e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.

Définition. ρ est une **valeur de résonance** si $P(\rho) = 0$.

Quand ρ n'est pas en résonance, l'équation $(\mathcal{E})$ est plus facile à résoudre : on trouvera une solution particulière $y_1(x)$ de la forme

- $y_1(x) = k_1$, si $b(x) = 1$ $(\rho = 0)$;
- $y_1(x) = k_1 e^{\alpha x}$, si $b(x) = e^{\alpha x}$ $(\rho = \alpha)$;
- $y_1(x) = k_1 x + k_2$, si $b(x) = x$ $(\rho = 0)$;
- $y_1(x) = (k_1 x + k_2) e^{\alpha x}$, si $b(x) = x e^{\alpha x}$ $(\rho = \alpha)$;
- $y_1(x) = k_1 \sin(\beta x) + k_2 \cos(\beta x)$, si $b(x) = \cos(\beta x)$ $(\rho = i\beta)$;
- Etc. À chaque fois, il convient de vérifier la **non résonance** !

Reste ensuite à trouver les valeurs de k_1, de k_2,... Elles s'obtiennent en injectant directement $y_1(x)$ dans l'équation $(\mathcal{E})$.

Exemple Non Résonant

Résoudre l'équation : $(\mathcal{E})\ y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ \ y'' - 4y = 7e^x - 3\cos(2x)$**.**
1) C'est une équation différentielle d'ordre 2, linéaire à coefficients constants ; son polynôme **caractéristique** $P(r) = r^2 - 4$ a 2 racines réelles distinctes : $r_+ = 2$ et $r_- = -2$ $(\Delta = 16)$. Les solutions de l'**équation homogène** s'écrivent : $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ $(A, B \in \mathbb{R})$.
2) Cherchons des solutions particulières y_1 et y_2 aux 2 équations : $(\mathcal{E}_1)\ y'' - 2y = e^x$ et $(\mathcal{E}_2)\ y'' - 2y = \cos(2x)$. Nous posons $\rho_1 = 1$ pour $(\mathcal{E}_1)$ et $\rho_2 = 2i$ pour $(\mathcal{E}_2)$: **non résonantes**, nous tentons les solutions $y_1 = ke^x$ et $y_2 = k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x)$. Remplaçant y_1 dans $(\mathcal{E}_1)$, il vient : $k = -7/3$, soit $y_1(x) = -7e^x/3$. Pour y_2 dans $(\mathcal{E}_2)$: $-8k_1\cos(2x) - 8k_2\sin(2x) = \cos(2x)$; on trouve $k_1 = -1/8$ et $k_2 = 0$, soit $y_2(x) = -\cos(2x)/8$. Solution **particulière** de $(\mathcal{E})$: $7y_1 - 3y_2 = -49e^x/3 + 3\cos(2x)/8$ (principe de **superposition**).
3) Toutes les solutions de $(\mathcal{E})$: $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - \frac{49}{3}e^x + \frac{3}{8}\cos(2x)$.

Résonance

Soit l'équation $(\mathcal{E})$ $a_n y^{(n)} + .. + a_0 y = b(x)$ (a_i constants, $a_n \neq 0$), où $b(x) = x^m e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ou $b(x) = x^m e^{\alpha x} \sin(\beta x)$. Notons $P(r)$ le polynôme caractéristique et posons $\rho = \alpha + i\beta$.
Non résonance : si $P(\rho) \neq 0$, il existe des polynômes Q et R, de degrés $\leqslant m$, tels que $y_1(x) = Q(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + R(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ soit solution de $(\mathcal{E})$; si $b(x) = x^m e^{\alpha x}$, ρ est réel et $R = 0$. Il s'agit d'expliciter les coefficients k_i de $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} k_i x^i$ (ainsi que ceux de R) : on injecte $y_1(x)$ dans $(\mathcal{E})$ et l'on résout un système linéaire.
Résonance : $P(\rho) = 0$; on note μ la multiplicité de la racine ρ. Il existe des polynômes Q et R, de degrés $\leqslant m + \mu$, tels que $y_1(x) = Q(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + R(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ soit solution de $(\mathcal{E})$. Le système linéaire obtenu est encore avec $2m + 2$ inconnues, car nous avons $Q(x) = \sum_{i=\mu}^{m+\mu} k_i x^i$ (*idem* pour R).

Exemple Résonant

Trouver la solution de $(\mathcal{E})$ $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $y'' - 3y' + 2y = ch(x)$**,**
telle que $y(0) = 0$ **et** $y'(0) = 1$ **(conditions de Cauchy).**
1) Polynôme caractéristique : $P(r) = r^2 - 3r + 2$, de racines $r_+ = 2$ et $r_- = 1$ (réelles distinctes). Les solutions de l'**équation homogène** forment un plan vectoriel $S_0 = \{Ae^{2x} + Be^x | A, B \in \mathbb{R}\}$.
2) Puisque $ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$, introduisons les deux équations $(\mathcal{E}_1)$ $y'' - 3y' + 2y = e^x$ et $(\mathcal{E}_2)$ $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ (**superposition**).
3) Il y a une solution de $(\mathcal{E}_1)$ de la forme $y_1 = kxe^x$ (**résonance simple** pour $\rho_1 = 1$). Replaçons y_1 dans $(\mathcal{E}_1)$: nous obtenons $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = -ke^x$, d'où $k = -1$ et $y_1 = -xe^x$.
4) L'équation $(\mathcal{E}_2)$ a une solution de la forme $y_2 = \ell e^{-x}$ (**pas de résonance** pour $\rho_2 = -1$) ; en remplaçant, il vient $\ell = \frac{1}{6}$ et $y_2 = \frac{e^{-x}}{6}$.
5) Les solutions de $(\mathcal{E})$: $y = Ae^{2x} + (-x/2 + B)e^x + e^{-x}/12$.
6) Donc $y' = 2Ae^{2x} + (-x/2 + B - 1/2)e^x - e^{-x}/12$; conditions initiales : $0 = A + B + 1/12$ et $1 = 2A + B - 1/2 - 1/12$, de là $A = 5/3$, $B = -7/4$. La solution : $y = \frac{5}{3}e^{2x} - (\frac{x}{2} + \frac{7}{4})e^x + \frac{1}{12}e^{-x}$.