Université de Montpellier
Faculté des Sciences

Session : 2
Date : Jeudi 28 juin 2018
Licence ☒ **Master** ☐

Durée de l'épreuve : 3 heures
Documents autorisés : aucun
Matériels autorisés : aucun

Libellé + Code de l'UE : Algèbre et analyse 2 HLMA203

Le soin apporté à la rédaction sera un élément d'appréciation ; toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice 1. Soit f la fraction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{4x^2+4x+8}{(x-1)(x+3)^2}.$$

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}\,.$$

2. En utilisant le résultat précédent calculer l'intégrale suivante :

$$\int_2^3 \frac{4x^2+4x+8}{(x-1)(x+3)^2} dx\,.$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + 3y = 3x^2 - x + 2 \quad (E)\,.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2. Donner une solution particulière de l'équation (E). On pourra chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. Donner la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 3.

1. En effectuant une intégration par partie, donner une primitive de la fonction $f(x) = x\cos x$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y' - (x\cos x)y = 0.$$

Exercice 4.

1. Rappeler les développements limités en 0 et à l'ordre 4 exactement des fonctions sinus et cosinus.

2. En déduire le développement en 0 et à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto \sin(2x)$.

3. En déduire le développement limité en 0 et à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto \sin(2x)\cos x$.

4. En déduire la limite en 0 de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sin 2x \cos x - 2x}{x^3}.$$

Exercice 5. Soient P et Q les polynômes suivants : $P(X) = X^7 - X - 1$ et $Q(X) = X^5 + 1$.

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de P et Q.

2. En déduire deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 6. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$u(x, y, z) = (x - y, 2x + y, x + z, y + z)\,.$$

1. Montrer que u est une application linéaire.

2. Soient $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3 et f_4.

3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

4. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$.

Exercice 7. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel.

1. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi le déterminant de A est nul pour $a = 1$.

2. Calculer le déterminant de la matrice A.

3. Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles la matrice A n'est pas inversible.