Correction CC 2021

1 Exercice 1 : ABC

Est-ce que la formule $\forall x \exists y.F(x,y) \to \exists y \forall x.F(x,y)$ est vraie dans tous les modèles ayant un symbole de prédicat binaire F ? Si oui, expliquez pourquoi. Sinon, proposez un modèle qui fournit un contre-exemple.

Non, contre-exemple:

Soit F le prédicat de l'ordre total, noté $<$. Nous considérons le modèle $M = (\mathbb{R}, <)$.

Dans ce modèle, $\forall x \exists y.x < y$ est toujours vrai (il y a toujours un élément plus grand dans $\mathbb{R}$). Par contre $\exists y \forall x.x < y$ est toujours faux (il n'y a pas de maximum dans $\mathbb{R}$). Et $Vrai \to Faux$ est faux par la sémantique du implique.

Est-ce que la formule $\exists x \forall y.F(x,y) \to \forall y \exists x.F(x,y)$ est vraie dans tous les modèles ayant un symbole de prédicat binaire F ? Si oui, expliquez pourquoi. Sinon, proposez un modèle qui fournit un contre-exemple

Oui.

$A \to B$ - si A vrai, remplacer le x dans $\exists x \forall y.F(x,y)$ par une constante quelconque du modèle notée a. On obtient $\forall y.F(a,y)$. Alors dans $\forall y \exists x.F(x,y)$ on peut remplacer x par la même constante, et on obtient $Vrai \to Vrai$. Si A faux, peu importe B.

Par sémantique du implique, la formule est vraie.

2 Exercice 2 : ABC

Qu'est-ce qu'une théorie cohérente ?

Une théorie cohérente (ou **consistante**) est une théorie qui ne dérive pas l'absurde.

Donnez un exemple de théorie cohérente et de théorie incohérente.

Théorie cohérente : $T = \{\forall x.x = x\}$. On n'a pas $T \vdash \bot$

Théorie incohérente : $T = \{g \wedge \neg g\}$ telle que $T \vdash \bot$

3 Exercice 3 : ABC

Soit T une théorie cohérente et A et B deux formules closes. On suppose que $T \vdash A$ et $T \vdash \neg B$. Existe-t-il un modèle de T noté M tel que $M \models (B \vee \neg A)$? Justifiez soigneusement en explicitant les théorèmes du cours utilisés.

T est une théorie cohérente : elle ne dérive pas l'absurde.

On suppose $T \vdash A$. Si on a aussi $T \vdash \neg A$ alors par définition T est inconsistante. De même pour $T \vdash \neg B$. Donc en particulier, si $T \vdash \neg A \vee B$, T est inconsistante.

Par le théorème de cohérence, si $T \vdash A$ et $M \models T$, alors $M \models A$. D'où $M \models A$ et $M \models \neg B$.

Si $M \models B \vee \neg A$, alors soit B, soit $\neg A$ est vrai dans M (ou les deux), par sémantique du ou.

Si $M \models B$, on a $M \models \neg B$, ce qui est absurde.

Si $M \models \neg A$, on a $M \models A$, ce qui est absurde.
Donc non ce modèle n'existe pas.

4 Exercice 4 : ABC

Soient T1, T2 deux théories. Montrer que si $T1 \subseteq T2$ alors les modèles de T2 sont aussi des modèles de T1.

Si $T1 \subseteq T2$, alors $\forall f \in T1.f \in T2$, avec f n'importe quelle formule close.
Soit $M2$ un modèle quelconque de $T2$. $\forall f \in T2.T2 \vdash f$, et $M2 \models T2$, par le théorème de cohérence, $M2 \models f$.
Donc en particulier, $\forall f \in T1.M2 \models f$. Donc $M2$ est aussi modèle de $T1$.

Soit M un modèle. Montrer que M est un modèle de $th(M)$.

$th(M) = \{\Phi, M \models \Phi\}$
On a $M \models th(M)$ si et seulement si $\forall f \in th(M).M \models f$. Par définition de la théorie du modèle, M est un modèle de $th(M)$.

5 Exercice 5 : ABC

Soit T une théorie cohérente. On note $M1$ et $M2$ deux modèles de T . Définir l'équivalence élémentaire entre $M1$ et $M2$.

$M1$ et $M2$ sont élémentairement équivalents si $th(M1) = th(M2)$. Donc, par la définition donnée dans l'exercice 4, si toute formule vraie dans $M1$ est vraie dans $M2$ et inversement.

6 Exercice 6 : C

Soit T une théorie cohérente. Donnez une formule qui exprime que tout modèle de T a au moins k éléments

$\exists x1, x2...xk.\forall i \in \{1..k\}.\forall j \in \{1..k\}.i \neq j \rightarrow xi \neq xj$

Donnez une formule qui exprime que tout modèle de T a exactement k éléments.

$\exists x1, x2...xk.\forall i \in \{1..k\}.\forall j \in \{1..k\}.i \neq j \rightarrow xi \neq xj$

Proposez une théorie qui étend T et qui exprime que tout modèle de T est infini.

$Fn = \exists x1, x2...xn.\forall i \in \{1..n\}.\forall j \in \{1..n\}.i \neq j \rightarrow xi \neq xj$
$\{Fn, n \in \mathbb{N}\}$

7 Exercice 7 : BC

Soit F une théorie telle que chaque sous-ensemble fini de F admet un modèle. Soit g une formule close quelconque. On considère maintenant les ensembles de formules $F1 = F \cup \{g\}$ et $F2 = F \cup \{\neg g\}$.
Est-il possible qu'il existe un modèle M tel que $M \models F1$ et $M \models F2$?

Non. Par le théorème de cohérence.
On a $F1 \vdash g$ et $F2 \vdash \neg g$. Si $M \models F1$ et $M \models F2$ alors $M \models g$ et $M \models \neg g$. C'est absurde.

> Montrez qu'au moins l'un des ensembles F1 et F2 admet un modèle.

Chaque sous-ensemble fini de F admet un modèle, en particulier F admet un modèle.
Preuve du cours (thm complétude) qui montre que si T consistant alors si g formule close, T et g ou T et non g est consistant, donc que F1 ou F2 admet un modèle.

> Est-il possible que F1 admette un modèle et F2 aussi ? Justifiez.

Oui pour deux modèles séparés. Exemple, si g est la formule qui exprime la densité, F1 peut admettre un modèle dans l'univers R, alors que F2 en admet un dans l'univers N.

8 Exercice 9 : BC

> Inventez un ensemble de deux formules closes dont chacune a un modèle mais qui n'ont pas de modèle quand on les considère ensemble.

Soit $f = \forall x \exists y . x \neq y$ et $g = \forall x \forall y . x = y$.
f seule a pour modèle $M = (\mathbb{N})$, g seule a pour modèle $M = (\{0\})$.

> Inventez un ensemble de trois formules closes dont chaque paire a un modèle mais qui n'ont pas de modèle quand on les considère ensemble.

là je sèche