- TD 1. Généralités -

- Exercice 1 - Petersen -

Calculer $\chi(P)$, $\alpha(P)$, $vc(P)$ et $fvs(P)$ où P désigne le graphe de Petersen.

- Exercice 2 - Graphe mystère -

Dessiner le complémentaire du line-graph de K_5.

- Exercice 3 - Soirée chez Ramsey -

On considère un ensemble de six personnes. Montrer que au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou que au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux. Est-ce vrai pour un ensemble de cinq personnes ?

- Exercice 4 - Long chemin -

Montrer que tout graphe G contient un chemin de longueur $\delta(G)$, ainsi qu'un cycle de longueur $\geq \delta(G)+1$ si $\delta(G) \geq 2$. Montrer que ces résultats sont optimaux.

- Exercice 5 - Souvenirs -

Un graphe est dit *dessinable* si on peut trouver une marche qui passe exactement une et une seule fois par chacune de ses arêtes. Montrer qu'un graphe connexe est dessinable si, et seulement si, il possède au plus deux sommets de degré impair.

- Exercice 6 - Gros biparti -

Soit G un graphe. Montrer que G contient un sous-graphe couvrant H qui est biparti et tel que pour tout sommet v de G on ait $deg_H(v) \geq \frac{1}{2} deg_G(v)$.

- Exercice 7 - Cycle hamiltonien -

Soit G un graphe à n sommets vérifiant $deg_G(u) + deg_G(v) \geq n$ pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets non-adjacents. Montrer que G possède un cycle hamiltonien (on pourra d'abord montrer que G est connexe, puis considérer un plus long chemin P de G, montrer que $G[V(P)]$ admet un cycle hamiltonien puis conclure).

- Exercice 8 - Biparti -

Soit G un graphe biparti de bipartition (X, Y).

a. Montrer que $\sum_{x \in X} deg_G(x) = \sum_{y \in Y} deg_G(y)$.

b. Montrer que si G est k-régulier avec $k > 0$ alors $|X| = |Y|$.

c. Montrer que si G n'a pas de sommet isolé et que $deg_G(x) \geq deg_G(y)$ pour toute arête xy de G alors $|X| \leq |Y|$.

- Exercice 9 - Décomposition de K_n en bipartis -

Soient $\{B_1, \ldots, B_k\}$ une décomposition des arêtes de K_n en ensembles d'arêtes formant chacun un biparti complet. Le but de l'exercice est de monter que $k \geq n-1$ (résultat de Graham et Pollack -1971- et preuve de Tverberg -1982-). On suppose que ce n'est pas le cas et que $k < n-1$. On note alors (X_i, Y_i) la bipartition induite par B_i et on considère le système d'équations suivant :

$$\sum_{v \in V(K_n)} x_v = 0,\ \sum_{v \in X_i} x_v = 0,\ 1 \leq i \leq k$$

a. Justifier que le système précédent possède une solution $(c_v)_{v \in V(K_n)}$ à coefficient non tous nul.

b. Calculer $(\sum_{v \in V(K_n)} c_v)^2$ de deux manières différentes et conclure.