IV. Changement de Bases.

semaine du 23 mars 2020

L'écriture matricielle d'une application linéaire dépend du choix de bases ; il s'agit de comprendre ici cette dépendance.

Matrice de Passage

- Soient des e.v E et F, munis de bases : $B = (b_1, b_2, .., b_n)$ pour E, $C = (c_1, c_2, .., c_m)$ pour F ; si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction linéaire, nous obtenons une matrice $A = Mat_{C,B}(f)$.
- Avec d'autres bases $B' = (b'_1, b'_2, .., b'_n)$ et $C' = (c'_1, c'_2, .., c'_m)$, pour E et F, vient une autre matrice : $A' = Mat_{C',B'}(f)$.
- Il s'agit d'élucider le lien entre les écritures matricielles de f : A dans les "anciennes bases", A' dans les "nouvelles bases".
- Pour ce faire, appelons **matrice de passage** de B à B', la matrice de l'identité de E : $P = Mat_{B,B'}(id_E)$; nous avons aussi une **matrice de passage** de C à C' : $Q = Mat_{C,C'}(id_F)$.
- Bien noter : P et Q sont des matrices inversibles (id_E et id_F sont des isomorphismes). Aussi : c'est une erreur de penser $P = I_n$ (ou $Q = I_m$) : ce n'est vrai que si $B = B'$ (ou $C = C'$) !

- Le schéma qu'il faut avoir en tête est la composition :
$$\underset{B'}{E} \xrightarrow{id_E} \underset{B}{E} \xrightarrow{f} \underset{C}{F} \xrightarrow{id_F} \underset{C'}{F}$$
(les bases sont indiquées dessous).
- Bien entendu : $id_F \circ f \circ id_E = f$. C'est au niveau matriciel que la différence se perçoit : $Mat_{C',B'}(id_F \circ f \circ id_E) = Mat_{C',B'}(f)$ donne $Mat_{C',C}(id_F)Mat_{C,B}(f)Mat_{B,B'}(id_E) = Mat_{C',B'}(f)$.
- Par définition $P = Mat_{B,B'}(id_E)$ (matrice de passage) et $Mat_{C',C}(id_F) = Mat_{C',C}(id_F^{-1}) = (Mat_{C,C'}(id_F))^{-1} = Q^{-1}$.
- Nous avons montré la "formule de changement de bases" :

Théorème

$$A' = Q^{-1}AP \ .$$

Remarquer que la matrice de passage ne nécessite aucun calcul.

Cas des Endomorphismes

- Soit un e.v E, muni d'une base finie B. Tout endomorphisme f de E se voit attribuer une matrice $A = Mat_B^B(f)$. Une seconde base, B' de E, mène à une seconde matrice : $A' = Mat_{B'}^{B'}(f)$.
- Notant P, la matrice de passage de B à B' (P est inversible), nous obtenons la "formule de changement de bases" :

Théorème

$$A' = P^{-1}AP \ .$$

- En pratique, l'endomorphisme f est donné par sa matrice A dans une base B. Il s'agit souvent de chercher une base B' mieux adaptée à f, avec une matrice A' plus simple, par exemple **diagonale**... Ce n'est pas toujours possible ! Quand c'est le cas, on dit que f (ou A) est **diagonalisable**.

Puissances

- Soient des matrices carrées D et P, de même ordre avec P inversible et posons $A = PDP^{-1}$. Par récurrence, nous avons :

Théorème

$$\forall n \geqslant 1 \ , \quad A^n = PD^nP^{-1} \ .$$

- Si A est une matrice diagonalisable, il existe des matrices, P inversible et D diagonale, telles que : $A = PDP^{-1}$. Dans la formule précédente, le calcul des D^n n'est guère coûteux... Le calcul des A^n s'obtient au seul prix de l'inverse de P.
- Une matrice carrée A est **nilpotente** s'il existe un entier $n \geqslant 1$, tel que $A^n = 0$. **Proposition :** il existe des matrices, P inversible et T strictement triangulaire, telles que $A = PTP^{-1}$.

Trace

- La **trace** *tr* d'une matrice carrée A est la somme des termes diagonaux. **Exemple :** si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $tr(A) = 1 + 4 = 5$.

Théorème

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant : $tr(AB) = tr(BA)$.

Il n'est pas écrit $tr(AB) = tr(A)tr(B)$! Une formule fausse...

- Soient des matrices carrées A et P, de même ordre, avec P inversible. Nous avons : $tr(PAP^{-1}) = tr(AP^{-1}P) = tr(A)$.

Théorème

Soient A et A', les matrices (carrées) d'un endomorphisme f, relativement à des bases B et B'. Nous avons : $tr(A) = tr(A')$.

Définition : $tr(f) = tr(A)$ (ne dépend pas de la base choisie).

Exemple de Déterminants

- Le **déterminant** d'une matrice carrée A, noté $|A|$ ou $det(A)$, est plus difficile à calculer qu'une trace (voir TD). Pour une matrice d'ordre 2, nous avons : $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.
- Pour l'ordre 3, il y a la **règle de Sarrus** du dédoublement : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ devient : $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$
  ce qui aide à obtenir la formule pour $det(A)$:
  $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{11}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$
- La règle de Sarrus ne s'applique pas à l'ordre 4 (ou plus) !
- Pour une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure), d'ordre quelconque : **le déterminant est le produit des termes diagonaux**. Faux pour les matrices non triangulaires !

Propriétés

- Pour tout $n \geqslant 1$, il y a une application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$. Contrairement à la trace, *det* est **non linéaire** pour $n \geqslant 2$: La formule $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ est fausse ! Et, pour le produit par un scalaire, nous avons : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Le déterminant est **multiplicatif** (faux pour la trace) : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; aussi : $\forall m,\ \det(A^m) = (\det\ A)^m$.
  Proposition : A est inversible $\iff det(A) \neq 0$.

Théorème

Si A et A' sont les matrices d'un endomorphisme f, relativement à deux bases B et B', nous avons : $\det(A) = \det(A')$.

Définition : $\det(f) = \det(A)$ (indépendant de la base choisie).
Propriétés : $\det(id_E) = 1$ et $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.

Idempotent et Symétrie

Un **projecteur** d'un e.v E (réel, complexe) est un endomorphisme p **idempotent** : *i.e.*, $p^2 = p$; en dimension finie, sa matrice P (relativement à une base) est aussi **idempotente** ($P^2 = P$).
Une **symétrie** de E est un endomorphisme s, **involutif** : $s^2 = 1$; sa matrice (E de dimension n) est aussi **involutive** : $S^2 = I_n$. Notons $Fix_+(s) = \{x \in E | s(x) = x\}$ et $Fix_-(s) = \{x \in E | s(x) = -x\}$: s.e.v !

Théorème

Pour tout idempotent p de E, nous avons $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.
Pour toute symétrie s de E, nous avons $E = Fix_+(s) \oplus Fix_-(s)$.

Théorème

Soit une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$. Il existe un projecteur p de E, tel que : $F = Im(u)$ et $G = Ker(u)$. Il existe une symétrie s de E, telle que : $F = Fix_+(s)$ et $G = Fix_-(s)$.

Petits Calculs

- p idempotent de E : $(1-p)^2 = 1-2p+p^2 = 1-p$ et $1-p$ est idempotent ; il vérifie $Im\, 1-p = Ker\, p$, $Ker\, 1-p = Im\, p$.

Théorème

p est diagonalisable, la diagonale de $Mat(p)$ étant formée de 1 et de 0. En particulier : $tr(p) = rang(p)$.

- s symétrie de E : $(-s)^2 = s^2 = 1$ et $-s$ est une symétrie ; on vérifie : $Fix_+(-s) = Fix_-(s)$ et $Fix_-(-s) = Fix_+(s)$.

Théorème

s est diagonalisable avec la diagonale de $Mat(s)$ formée de 1 et de -1 ; $det(s) = (-1)^{dim\, Fix_-(s)}$, $tr(s) = dim\, Fix_+(s) - dim\, Fix_-(s)$.

- Posons $\sigma = 1-2p$; donc $\sigma^2 = 1-4p+4p^2 = 1$ et σ est une symétrie ; de plus : $Fix_+(\sigma) = Im(p)$, $Fix_-(\sigma) = Ker(p)$,...