HAI816I Logique pour le génie logiciel et l'intelligence artificielle
Épreuve de contrôle continu "seconde chance"
vendredi premier juillet 2022 11 :30
salle TD 1.10
durée 1h30 (tiers temps : 2h)
sujet : 3 pages
Aucun document n'est autorisé

Certains rappels de cours sont inclus dans le sujet *en italiques*.

Exercice 1. Modèles de Kripke

1. Donner la définition d'un modèle de Kripke $\mathcal{M} = \langle (\mathfrak{m}_i)_{i\in I}; R; \Vdash_0 \rangle$ pour un langage défini à partir des proposition atomiques $\{p_1, p_2, \ldots\}$ et des connecteurs unaires, $\{\neg, \Box, \Diamond\}$ (la négation et les deux modalités) et binaires $\{\to, \&, \vee\}$ (implique, et ou). en procédant par étape :
   (a) Qu'est ce qu'un cadre (frame) $\langle \mathfrak{m}; R\rangle$?
   (b) Qu'est ce que $\Vdash_0$?
   (c) Définir par induction sur la formule H, la relation $\mathfrak{m}_i \Vdash H$.
   (d) Quand dit-on que la formule H est valide dans le modèle $\mathcal{M} = \langle (\mathfrak{m}_i)_{i\in I}; R; \Vdash_0 \rangle$ (on dit aussi que $\mathcal{M}$ satisfait H.
2. Montrer que $\mathfrak{m}_i \Vdash \neg\Box\neg H$ si et seulement si $\mathfrak{m}_i \Vdash \Diamond H$
3. Montrer que toute instance du schéma d'axiome $\kappa : \Box(G \to H) \to \Box G \to \Box H$ de Kripke est vérifié en tout monde possible.
4. Donnez un modèle de Kripke dans lequel $\Box p \to p$ n'est pas valide.
5. Donnez un modèle de Kripke dans lequel $\Box p \to \Box\Box p$ n'est pas valide.
6. Donnez un modèle de Kripke dans lequel $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ n'est pas valide.
7. Donnez un modèle de Kripke dans lequel $\Box p \to p$, $\Box p \to \Box\Box p$, $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ sont toutes les trois valides.

Exercice 2. Modèles de Kripke arborescents et logique intuitionniste

Un modèle de Kripke arborescent *est une variante des modèles de Kripke, bien adaptée à la logique intuitionniste. Le langage de la logique intuitionniste considéré est défini par les atomes $\mathcal{P}$ ou variables propositionennelles p_k, la constante propositionnelle $\perp$ (faux) et les trois connecteurs binaires $\{\rightarrow, \&, \vee\}$ — attention il n'y a pas de négation !*

Un modèle arborescent de $\mathcal{M} = \langle (\mathfrak{m}_i)_{i \in I}; \leqslant; \Vdash_0 \rangle$la logique intuitionniste propositionnelle est défini par

- *un ensemble de mondes possibles $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ (aussi appelés noeuds) muni d'une relation d'accessibilité qui est un arbre, c'est-à-dire :*
  - *$\leqslant$ une relation d'ordre $\leqslant$ entre noeuds de l'arbre (réflexive, antisymétrique et transitive) ;*
  - *chaque noeud a exactement un prédécesseur sauf un unique noeud appelé racine et noté $\mathfrak{m}_0$ qui n'a aucun prédecesseur ; la racine notée $\mathfrak{m}_0$ est aussi appelée le monde initial.*
- *Le forcing atomique $\Vdash_0$ est (comme pour les modèles de Kripke usuels) une relation entre mondes et propositions atomiques $\mathfrak{m}_i \Vdash_0 p_k$ qui de plus satisfait :*
  - *Si $\mathfrak{m}_i \Vdash_0 p$ et $\mathfrak{m}_i \leqslant \mathfrak{m}_j$ alors $\mathfrak{m}_j \Vdash_0 p$ (persistence)*
  - *pour tout monde $\mathfrak{m}_i$, on n'a pas $\mathfrak{m}_i \Vdash \perp$. (cohérence)*
- *La relation $\mathfrak{m}_i \Vdash H$ est ensuite définie par induction sur la formule H ainsi :*
  - *$H = p_k$*
    $\mathfrak{m}_i \Vdash p_k$ lorsque $\mathfrak{m}_i \Vdash_0 p_k$
  - *$H = K \& L$*
    $\mathfrak{m}_i \Vdash K \& L$ lorsque $\mathfrak{m}_i \Vdash K$ et $\mathfrak{m}_i \Vdash L$
  - *$H = K \vee L$*
    $\mathfrak{m}_i \Vdash K \vee L$ lorsque $\mathfrak{m}_i \Vdash K$ ou $\mathfrak{m}_i \Vdash L$
  - *$H = K \rightarrow L$*
    $\mathfrak{m}_i \Vdash K \rightarrow L$ lorsque $\forall \mathfrak{m}_j \geqslant \mathfrak{m}_i$ si $\mathfrak{m}_j \Vdash K$ alors $\mathfrak{m}_j \Vdash L$
- *On dit qu'une formule H est valide dans un modèle de Kripke arborescent lorsqu'elle est vraie à la racine $\mathfrak{m}_0$.*

Remarques :

- *La négation n'est* ***pas*** *une opération de base, $\neg H$ est simplement une abréviation pour $H \rightarrow \perp$.*
- *La définition du forcing pour l'implication est très différente.*

1. Quand est-ce que $\mathfrak{m}_i \Vdash \neg A$? Vous appliquerez la définition inductive de $\mathfrak{m}_i \Vdash K \to L$ avec $K = A$ et $L = \perp$ et vous la simplifierez avec la cohérence de manière à obtenir une définition intuitive.
2. Montrez que pour toute formule H si $\mathfrak{m}_i \Vdash H$, alors pour tout $\mathfrak{m}_j \geqslant m_i$ on a $\mathfrak{m}_j \Vdash H$ — en d'autres termes la persistence est demandée pour les atomes mais elle est aussi vraie pour les formules complexes. En déduire qu'une formule est valide (satisfaite à la racine) si et seulement si elle est vraie en tout noeud de l'arbre. On traitera indépendamment le "si" et le "seulement si". Pour uen des deux implications vous procéderez par induction structurelle sur la formule H.
3. Montrer que si un monde $\mathfrak{m}_i$ on a $\mathfrak{m}_i \Vdash A$ et $\mathfrak{m}_i \Vdash A \to B$ alors on a $\mathfrak{m}_i \Vdash B$
4. Montrer que le schéma d'axiome *ex falso quod libet sequitur* $\perp \to Q$ (Q formule quelconque) de la logique intuitionniste est valide dans tout modèle de Kripke arborescent.
5. Montrez que $\mathfrak{m}_i \Vdash (A\&B) \to C$ si et seulement si $\mathfrak{m}_i \Vdash A \to (B \to C)$ On traitera indépendamment le "si" et le "seulement si".
6. Trouver un modèle de Kripke arborescent dans le quel $p \vee (\neg p)$ n'est pas valide. ($\neg A$ est une abbréviation pour $A \to \perp$)
7. Trouver un modèle de Kripke arborescent dans le quel $(\neg\neg p) \vee (\neg p)$ n'est pas valide. ($\neg A$ est une abréviation pour $A \to \perp$)
8. Trouver un modèle de Kripke arborescent dans le quel $(\neg\neg p) \to p$ n'est pas valide. ($\neg A$ est une abréviation pour $A \to \perp$)

9. Si vous avez fini, vous pouvez vérifier que les schémas d'axiome de la logique intuitionnistes sotn valides dans tout modèle de Kripoke arborescent en tuilisant la question 5 (P, Q, R désignent des formules quelconques, pas forcément atomiques).

$K : P \to (Q \to P)$
$S : (P \to (Q \to R)) \to (P \to Q) \to (P \to R)$
$\&i : P \to (Q \to P\&Q)$
$\&e1 : (P\&Q) \to P$
$\&e2 : (P\&Q) \to Q$
$\vee i1 : P \to (P \vee Q)$
$\vee i2 : Q \to (P \vee Q)$
$\vee e : (P \to S) \to ((Q \to S) \to ((P \vee Q) \to S))$