# Recherche bibliographique
# La logique épistémique dans la théorie des jeux

HADDAD Gatien

7 mai 2021

De nos jours, il nous est assez commun de voir des utilisation de la logique propositionnelle dans divers domaines, tels que les mathématiques, ou la programmation. Cette logique permet de savoir si un raisonnement est correct, c'est à dire si à partir de la vérité des hypothèses, nous pouvons déduire la vérité de la conclusion. Il existe néanmoins une autre branche de la logique appelée logique épistémique, qui elle s'intéresse au raisonnement d'un ou de plusieurs personnes, appelées acteurs ou agents. Ce genre de raisonnement logique se retrouve également dans divers domaines, notamment celui de la théorie des jeux, domaine dans lequel on s'intéresse aux interactions entre joueurs (ou agents) afin de maximiser ses gains (ou respectivement, minimiser ses pertes). Comment peut-on alors utiliser la logique épistémique pour étudier la théorie des jeux ?

## 1 Logique épistémique

La logique épistémique est une interprétation, qui considère un ensemble de n acteurs, chacun doté d'un opérateur de connaissance $K_i$ tel que $K_i$p ($K_i$ de p) signifie : "l'acteur i sait la proposition p". A partir de propositions p appartennant à P en nombre n fini, on appelle $L_m$(P) le plus petit ensemble de propositions contenant P. Il doit être également fermé sur les opérateurs ! (négation), $\wedge$ (intersection) et $K_i$ (connaissance). Dans cet ensemble, le stock de connaissances que possède réellement l'agent sera appelé son "système de connaissances" $K_i =$ (p tel que $K_i$p). Une proposition p peut avoir trois statuts :

- considérée comme vraie : $K_i$p,
- considérée comme fausse : $K_i$ !p,
- pas décidable : !($K_i$p) $\wedge$ !($K_i$ !p).

Toutefois, le système peut être contradictoire s'il contient à la fois p et !p, et sera alors noté K.

## 2 Puzzle des enfants sales

Une mise en application de ce que nous venons de voir est le sujet de notre stage, le "puzzle des enfants sales". Dans ce problème, trois enfants jouent dans la boue, ils savent qu'ils ne doivent pas se tâcher sous peine de se faire gronder, mais chaque enfant aimerais voir ses frères et soeur se faire gronder, donc même si certains ont de la boue sur eux, ils ne disent rien. Le père appelles les enfant pour rentrer, et certains enfant on de la boue sur leur front, évidemment, chaque enfant ne peut pas voir son propre front, mais il peut voir le front des autres. Le père leur dit alors, "au moins l'un d'entre vous à de la boue sur le front", les enfants examinent alors le front de leur voisin. Le père dit ensuite "Si l'un de vous sais s'il a le front sale ou propre, qu'il lève la main". Aucun enfant ne lève la main. Le père répète sa phrase une seconde fois, toujours pas de réponse. Lorsqu'il énonce sa phrase une troisième fois, tout les enfants lèvent la main.

Ici, la connaissance commune qu'obtiennent les enfants au départ, est qu'"au moins un des enfants à de la boue sur le front". Si on considère que k enfant ont de la boue sur le front, soit $k \geq 1$.

On peut également prouver par induction que lorsque le père aura répété k-fois sa phrase, alors tout les enfants qui ont de la boue sur le front lèveront la main. pour cela, on généralise à n enfant au lieu de 3. Si on a k=1, alors quand le père demandera qui sait si il a de la boue sur le front, alors l'enfant qui ne voit de la boue sur aucun autre front sait qu'il est le seul à avoir de la boue, il lève donc la main immédiatement. Maintenant on suppose que k=2, alors il y a deux enfants qui ont de la boue sur le front, on les appelle Bob et Alice ; tout deux ne lèvent pas la main la première fois, car ils se voient mutuellement avec de la boue. Cependant, quand Alice ne lève pas la main, Bob réalise qu'Alice voit un autre enfant au front sale, et comme Bob ne voit qu'Alice, il peut conclure qu'il est le second et seul autre enfant au front sale ; Alice effectuant le raisonnement analogue, quand le père pose la question pour la seconde fois, tout deux lèvent la main. De plus, si on veut généraliser pour $k \leq n$, à chaque fois que le père pose la question pour la ième fois, on sait qu'au moins $k \geq i$ enfants ont de la boue sur le front, et donc qu'à la k-ème question, tout les enfants ayant de la boue sur le front lèveront la main.

# 3 Théorie des jeux

La théorie des jeux classifie les jeux en catégories en fonction de leurs approches de résolution. "Theory of Games and Economic Behavior" d'Oskar Morgenstern et John von Neumann, paru en 1944, est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne. Il consistait en la modélisation des jeux à somme nulle, où la somme des gains entre les joueurs est toujours égale à zéro. Par exemple, un jeu ou il faudrait se partager une somme d'argent mise en jeu ; par exemple, si deux joueurs misent 10€, alors celui qui empoche 20€aura fait un bénéfice de 10€, tandis que l'autre une perte de 10€.

Les travaux initiaux de Morgenstern et Von Neuman reposent également sur une théorie des jeux dite "collaborative", dans laquelle les agents peuvent se coordonner dans leurs actions. Dans la réalité, de nombreuses actions sont non collaboratives et non coordonnées, et ces actions peuvent être ramenées dans la théorie des jeux à un tableau initial qui est celui du "dilemme du prisonnier", tel qu'énoncé par Dresher et Flood en 1950.

Le dilemme du prisonnier permet de modéliser une interaction stratégique non coopérative. Deux agents (prisonniers) ne pouvant pas communiquer subissent un interrogatoire. On leur donne ces informations :

- Si l'un des deux avoue et que l'autre non, l'un sera libéré, tandis que l'autre écopera de 3 ans de prison.
- Si les deux avouent, ils subiront tous les deux une peine légère de deux ans.
- Cependant, si aucun des deux n'avoue, ils subissent la peine minimale d'un an.

| A \ B | B se tait | B parle |
|---|---|---|
| A se tait | -1 / -1 | -3 / 0 |
| A parle | 0 / -3 | -2 / -2 |

Figure 1 - Tableau du dilemme du prisonnier

En suivant un raisonnement de logique épistémique, les deux prisonniers peuvent en conclure que le meilleur des choix est d'avouer, car dans le meilleur des cas si A parle, il sera libre (donc B n'a pas parlé), mais dans le meilleur des cas si A ne parle pas, il écopera d'une année de prison.

Ce raisonnement peu intuitif est le résultat d'une réflexion de logique que l'on pourrait qualifier de "personnelle", mais qui n'est pas la meilleure solution d'un point de vue "collaboratif", en effet, il est facile de se rendre compte que si les deux prisonniers collaboraient, ils écoperait d'une somme de peine

minimale ; mais l'absence de communication et le raisonnement épistémique entraîne à la conclusion que dans tout les cas, le meilleur des choix est de dénoncer l'autre agent.
On appelle ainsi "équilibre de Nash" une situation qui résulte du fait que chaque acteur a appliqué la stratégie la plus optimale pour lui, quelle que soit l'option choisie par l'autre acteur.

## 4 Conclusion – utilisation corrélée

Au niveau collectif, la logique épistémique est intéressée par les échanges d'informations entre agents modifiant leurs connaissances, plutôt que par la détermination et la coordination de leurs actions. En revanche, la théorie des jeux étudie la notion d'équilibre entre acteurs, les plans d'action de chaque joueur, dépendant de ceux des autres. Toutefois, l'équilibre peut aussi être obtenu par un pur raisonnement des acteurs dans leur "sphère mentale", chaque agent anticipant les actions des autres à partir de sa connaissance de leurs déterminants et de leur rationalité. Le cas particulier pour lequel les actions des joueurs consistent exclusivement en échanges d'information, peut être illustré par plusieurs paradoxes, où une connaissance distribuée est progressivement homogénéisée, avec convergence éventuelle vers la connaissance commune.

## 5 Références


1. Alexandru Baltag and Bryan Renne, Dynamic Epistemic Logic, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
plato.stanford.edu

2. Hans van Ditmarsch, Barteld Kooi "One hundred prisonners and a light bulb", Springer 2015, Chapitre 3

3. Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses and Moshe Vardi "Reasoning About Knowledge" MIT Press, 1995, Chapitre 2

4. Eric Rasmusen "Games and information : an introduction to game theory", 2006, page 50.

5. The Muddy Children Puzzle http://sofia.nmsu.edu/ pmorandi/math111f01/MuddyChildren.html

6. J.-J. Ch. Meyer et W. van der Hoek, "Epistemic Logic for Computer Science and Artificial Intelligence, Volume 41", Cambridge University Press, 1995