DM H-Z induction

On veut montrer que pour toute fbf de la logique des propositions H, il existe ~~une~~ une fbf H' sémantiquement ~~identique~~ équivalente n'utilisant que les symboles propositionels, $\perp$ et $\rightarrow$ (implication)

(base) Soit H un symbole propositionel, on a alors :

- $H = Q$,
  par définition, un ~~sy~~ symbole propositionnel ne contient pas de connecteurs donc la règle est respectée
- pour $H = \perp$, la règle est respectée
- si $H = \top$, on pose $H' = \perp \rightarrow Q$ avec Q un symbole propositionnel, alors
  ~~[illegible]~~ • $H' = \perp \rightarrow Q \equiv \top = H$ [implication absurde]

  Donc $\top$ est bien dans la base.

(règle) Supposons que pour Q et R $\in PROP(S)$.

On a : • $Q' \equiv Q$ et $R' \equiv R$

• Q' et R' ne contiennent que des éléments de S, $\perp$ et $\rightarrow$

Montrons que la propriété est vraie sur tous les mots du langage en utilisant les règles de constructions du langage

r1 : si $H = \neg Q$, soit $H' = Q' \rightarrow \perp$.

par hypothèse de récurrence, Q' ne contient pas de connecteurs interdits (soit $\neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow$) ; et donc H' non plus

• $H' = Q' \rightarrow \perp \equiv \neg Q' \vee \perp \equiv \neg Q' \equiv \neg Q = H$ [absurdation] [substitution]

r2 : si $H = (R \vee Q)$, soit $H' = (R' \rightarrow \perp) \rightarrow Q'$

par Hi, R' et Q' ne contiennent pas $\neg, \leftrightarrow, \vee, \wedge$; donc H' non plus

• Or, $R' \vee Q' \equiv \neg R' \rightarrow Q' \equiv (R' \rightarrow \perp) \rightarrow Q'$ [implication] [r1]

Donc $H' = R' \vee Q' \equiv (R \rightarrow \perp) \rightarrow Q' \equiv R \vee Q = H$

$(R' \rightarrow (Q' \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$

r3 : si $H = (R \wedge Q)$, soit $H' = ((R' \rightarrow \perp) \rightarrow Q') \rightarrow \perp$

Par Hi, R' et Q' ne contiennent pas $\leftrightarrow, \neg, \vee$ et $\wedge$, $\top$, donc H' non plus.

Or $(R' \to (Q' \to \bot)) \to \bot \equiv \neg(R' \to \neg Q)$ [r1]

$\equiv \neg(\neg R' \vee \neg Q') \equiv (R' \wedge Q')$

[implication] [Morgan]

Donc $H' = (R' \to (Q' \to \bot)) \to \bot \equiv (R' \wedge Q') \equiv (R \wedge Q) = H$

r4 : si $H = R \to Q$, soit $H' = R' \to Q'$

- par H_i, R' et Q' ne contienent pas de c_i ni de c_L, donc H' non plus
- $H' = R' \to Q' \equiv R \to Q = H$ [H_i]

r5 : si $H = R \leftrightarrow Q$, soit $H' = (((R' \to Q') \to \bot) \to ((Q' \to R') \to \bot)) \to \bot$

par H_i, Q' et R' ne contiennent pas de c_i ni de c_L, donc H' non plus.

Or, $(((R' \to Q') \to \bot) \to (Q' \to R')) \to \bot$

[r1] $\equiv \neg(\neg(R' \to Q') \to \neg(Q' \to R'))$

[implication] $\equiv \neg(\neg(R' \to Q') \vee \neg(Q' \to R'))$

[Morgan] $\equiv ((R' \to Q') \wedge (Q' \to R'))$

[équivalence] $\equiv R' \leftrightarrow Q'$

[substitution]

Donc $H' = (((R' \to Q') \to ((Q' \to R') \to \bot))) \to \bot \equiv R' \leftrightarrow Q'$

$\equiv R \leftrightarrow Q = H.$ [H_i]

On à donc prouvé que pour toute fbf de la logique H, il existe une fbf sémantiquement équivalente qui ne contiens que des symboles propositionels, $\bot$ et $\to$. □