# Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- La sémantique de la LP
- Équivalence logique et Substitution
- Conséquence logique
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode de Davis et Putnam
- **Méthode des séquents**

# Deux aspects dans la modélisation du raisonnement

- L'aspect sémantique

  => théorie des modèles

  – On définit par des interprétations les conditions de validité d'un raisonnement $\models$

- L'aspect syntaxique

  => théorie de la démonstration

  – On définit par des règles d'inférence des pas élémentaires de raisonnement valide $\vdash$

# La théorie de la démonstration

- Objectif : formaliser les *objets* que manipulent les mathématiciens et les *raisonnements* qu'ils font
- Les objets :
  - Ils énoncent des assertions mathématiques (des conjectures) qu'ils cherchent à démontrer
  - Ces conjectures portent sur une propriété P, qui bien souvent est énoncée sous certaines conditions $H_1$, $H_2$ … $H_n$
  - On représente une telle conjecture par un séquent composé d'énoncés :

$$H_1, H_2 \ldots H_n \vdash P$$

*les énoncés hypothèses* *l'énoncé conclusion*

# La théorie de la démonstration

- Les raisonnements :
  - Ils réalisent des démonstrations en enchainant des pas élémentaires de raisonnement permettant de passer d'un *séquent* à l'autre
  - Ces pas élémentaires peuvent être **schématisés** en quelques types élémentaires de raisonnement formalisés par des règles d'inférence composées de séquents :

*Les (schémas) séquents* ***antécédents***

*Le (schéma)* ***conséquent***

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \ldots \quad S_n}{S} \; R_i \leftarrow$$

*Le nom de la règle*

# La théorie de la démonstration

- Les séquents peuvent ne pas avoir d'hypothèses, ils représentent donc des propriétés assertées sans aucune condition (quand ils sont démontrés, on parle de tautologie)

$$\vdash P$$

- Les règles d'inférence peuvent n'avoir aucun antécédent, elles représentent donc des énoncés considérés comme toujours démontrés, on les appelle des axiomes.

$$\frac{}{H_1, H_2 \dots H_n \vdash P}\ \mathrm{Ax}$$

- Un séquent que l'on peut produire (à partir des axiomes) en utilisant les règles d'inférences est appelé un théorème, ils représentent les conjectures démontrées. L'enchainement des règles ayant permis leur production constitue une preuve de ce théorème.
  - Remarque : tout séquent *correspondant* à un axiome est donc un théorème !

# La théorie de la démonstration

- Dans ce cadre, une théorie mathématique est composée :
  - D'un langage formel définissant l'ensemble des énoncés (ou formules) syntaxiquement corrects
  - D'un ensemble de règles d'inférences définies sur ces énoncés définissant l'ensemble des pas élémentaires de raisonnement admis dans cette théorie

- Ces deux éléments définissent l'ensemble des théorèmes de cette théorie
  - *Remarque : Il faut au moins un axiome pour produire des théorèmes*

# Un système à la Hilbert (début XXe) pour les fbf n'utilisant que ¬, →

- Un système de déduction dont les séquents n'ont pas d'antécédent composé de 4 règles (3 sont axiomes) dont les énoncés sont des fbf :

$$\frac{}{\vdash (P \to (Q \to P))}\,\text{Ax1} \qquad \frac{}{\vdash ((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))}\,\text{Ax2}$$

$$\frac{}{\vdash ((\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P))}\,\text{Ax3} \qquad \frac{\vdash P \qquad \vdash (P \to Q)}{\vdash Q}\,\text{MP}$$

  - L'axiome 1 signifie : *soit P et Q deux formules bien formées quelconques de la LP, le séquent* $\vdash (P \to (Q \to P))$ *est un théorème.*
    - *Ex. :* $\vdash (a \to (a \to a))$ *avec* $P=Q=a$

# Utilisation d'une règle d'inférence

- Une règle peut s'utiliser de deux manières :

$$\frac{\vdash P \qquad \vdash (P\rightarrow Q)}{\vdash Q}\ MP$$

1. En **analyse** (de bas en haut) : pour prouver la conclusion il faut prouver les antécédents
   - Pour la règle **M**odus **P**onens cela signifie : soit P et Q deux fbf quelconques de la LP, pour prouver le séquent $\vdash Q$ par utilisation de la règle MP, il faut prouver les séquents $\vdash P$ et $\vdash (P\rightarrow Q)$
   - Exemple : *pour prouver* $\vdash (a\rightarrow b)$ *par MP,*
     *on doit avoir une preuve de* $\vdash (a\rightarrow \neg c)$ *et* $\vdash ((a\rightarrow \neg c)\rightarrow(a\rightarrow b))$
     …*ou n'importe quel autre couple de séquent de la forme* $\vdash P$ et $\vdash (P\rightarrow(a\rightarrow b))$

2. En **synthèse** (de haut en bas) : si les antécédents sont prouvés alors la conclusion est prouvée.
   - Sur MP : si les séquents $\vdash P$ et $\vdash (P\rightarrow Q)$ sont des théorèmes alors le séquent $\vdash Q$ est un théorème.
   - Exemple : *les séquents* $\vdash (a\rightarrow (a\rightarrow a))$ *et*
     $\vdash ((a\rightarrow(a\rightarrow a)) \rightarrow ((a\rightarrow a)\rightarrow(a\rightarrow a)))$ *sont des théorèmes donc* $\vdash ((a\rightarrow a)\rightarrow(a\rightarrow a))$ *est un théorème*

# Application

- Démontrons que $\vdash (a \rightarrow a)$ est un théorème
- Recherche d'une preuve :

  1. *$\vdash (a \rightarrow a)$ ne correspond pas à un schéma d'axiome*

  2. *Donc la seule possibilité est d'utiliser MP*

  3. *Il faut donc identifier une formule **P** et démontrer :*

     4. *D'une part : $\vdash \boldsymbol{P}$*

     5. *Et d'autre part : $\vdash (\boldsymbol{P} \rightarrow (a \rightarrow a))$*

# Propriété du système formel de Hilbert

- **Propriété** : Le système formel de Hilbert produit toutes les formules valides de la logique des propositions :

  ***pour toute fbf F : $\vdash$ F est un théorème ssi F est valide***

  – On dit que ce système formel est adéquat et complet vis à vis de la sémantique formelle de la logique

- Hilbert introduit de plus un système de déduction sous hypothèse et démontre via le théorème de déduction la complétude de son système.
  – Cette notion de déduction sous hypothèse est repris de manière plus simple par Gentzen dans la déduction naturelle, puis dans le calcul des séquents.

# La déduction naturelle (G. Gentzen 1934)

1. Permettre la représentation d'énoncé sous hypothèses
   ➔ Les séquents peuvent avoir des hypothèses

2. Rendre ***naturelle*** l'exploitation des connecteurs logiques en donnant pour chaque connecteur des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs
   - Exemple du connecteur →

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash (P \to Q)} \to_i \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash (P \to Q) \qquad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \to_e$$

*Ici les lettres latines représentent des fbf et les lettres grecques des ensembles de fbf*

3. Un unique axiome représentant « une démonstration sous hypothèse triviale »

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P} ax$$

4. Pour des raisons techniques, il en propose une version plus symétriques (mais moins naturelle !) : le calcul des séquents. Ce système est très adapté à la démonstration automatique.

# Le calcul des séquents ou Système LK

(“**k**lassische Prädikaten**l**ogik”)

- *Les séquents peuvent avoir plusieurs conclusions :*

$$H_1, H_2 \ldots H_n \vdash C_1, C_2 \ldots C_k$$

*les énoncés hypothèses* *les énoncés conclusion*

– ***Attention***
  - *Un même énoncé peut être présent plusieurs fois dans l'hypothèse ou dans la conclusion*
  - *Les énoncés de l'hypothèse sont interprétés comme une* ***conjonction*** *de formules* ➔ *Si n=0 alors cela correspond à une hypothèse toujours vraie*
  - *Les énoncés de la conclusion sont interprétés comme une* ***disjonction*** *de formules* ➔ *Si k=0 alors cela correspond à une conclusion toujours fausse*

# Les règles du système LK

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash \Delta, P}\,\text{ax} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\,\top_d$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\,\bot_g \qquad \frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash Q}\,\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash \Delta}{\Gamma, P \vdash \Delta}\,\text{cont}_g \qquad \frac{\Gamma \vdash P, P, \Delta}{\Gamma \vdash P, \Delta}\,\text{cont}_d$$

# Les règles du système LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P}{\Gamma, \neg P \vdash \Delta}\ \neg_g \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg P}\ \neg_d$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash \Delta}\ \wedge_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P \qquad \Gamma \vdash \Delta, Q}{\Gamma \vdash \Delta, P \wedge Q}\ \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta \qquad \Gamma, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \vee Q \vdash \Delta}\ \vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P, Q}{\Gamma \vdash \Delta, P \vee Q}\ \vee_d$$

# Les règles du système LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P \qquad \Gamma, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \rightarrow Q \vdash \Delta} \rightarrow_g \qquad\qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta, Q}{\Gamma \vdash \Delta, P \rightarrow Q} \rightarrow_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P, Q \qquad \Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \leftrightarrow Q \vdash \Delta} \leftrightarrow_g \qquad\qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta, Q \qquad \Gamma, Q \vdash \Delta, P}{\Gamma \vdash \Delta, P \leftrightarrow Q} \leftrightarrow_d$$

# Propriété du système LK

- **Théorème** : Le système LK est adéquat et complet vis à vis de la sémantique de la logique des propositions :
  - Il ne prouve que des conséquences logiques et les prouve toutes !

$$H_1, H_2 \ldots H_n \vdash C_1, C_2 \ldots C_k \text{ est démontrable (prouvable)}$$

***SSI***

$$\{ H_1, H_2, \ldots H_n \} \models C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$$

*<u>Remarque</u> : On dit que l'on prouve F quand on construit une preuve du séquent $\vdash$ F (où F est énoncé sans hypothèses)*

# En pratique

F est valide
ssi
le séquent $\vdash F$ est démontrable dans LK

F est insatisfiable
ssi
le séquent $F \vdash$ est démontrable dans LK

$\{H_1, H_2 \dots H_n\} \models C$
ssi
le séquent $H_1, H_2 \dots H_n \vdash C$ est démontrable dans LK