# Examen de Logique 1 – HLIN402 – session 1

Michel Leclère

2 mai 2018

Durée : 2h. 1 feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Pas de calculatrice.

**Question 1 (3 points)** Soit le connecteur $nor$ défini par $a\ nor\ b \equiv \neg(a \vee b)$. Montrez par induction sur le nombre $n$ de connecteurs que toute formule bien formée de la logique des propositions est équivalente à une formule ayant $nor$ comme seul connecteur. Dans cet exercice, il sera porté une grande attention à la qualité de la rédaction de votre preuve !

**Question 2 (2 points)** Modélisez (en expliquant vos choix) en logique des propositions les 5 phrases suivantes :

1. *Quand la musique est rythmée, il danse.*
2. *La musique rythmée ne le fait pas danser.*
3. *Il ne suffit pas que la musique soit rythmée pour qu'il danse.*
4. *Il n'a pas besoin de musique rythmée pour danser.*

**Question 3 (3 points)** *Dans le Marchand de Venise, de Shakespeare, Portia a trois coffrets, un d'or, un d'argent et un de plomb et, dans l'un d'eux, elle a caché son portrait. Quand un des soupirants se présente, elle lui fait choisir l'un des coffrets, et c'est celui qui saura trouver le coffret contenant son portrait qui pourra l'épouser. Mais le couvercle de chaque coffret porte deux inscriptions pour guider le choix du soupirant, car Portia ne veut pas choisir un époux pour sa vertu mais pour son intelligence :*

— *Coffret en or :*
  — *Le portrait n'est pas dans ce coffret*
  — *Le portrait est dans le coffret en argent*
— *Coffret en argent :*
  — *Le portrait n'est pas dans le coffret en or*
  — *Le portrait est dans le coffret en plomb*
— *Coffret en plomb :*
  — *Le portrait n'est pas dans ce coffret*
  — *Le portrait est dans le coffret en or*

*Elle expliqua à son soupirant que sur l'un des coffrets deux affirmations étaient vraies, sur un autre elles étaient fausses toutes les deux, et sur le troisième l'une était vraie et l'autre était fausse. Quel coffret le candidat au mariage devrait-il choisir pour épouser Portia ?*

1. Modélisez en logique des propositions ce problème. On choisira comme seuls symboles propositionnels : $O$=*"le portrait est dans le coffret en or"*, $A$=*"le portrait est dans le coffret en argent"*, $P$=*"le portrait est dans le coffret en plomb"*. On pourra par exemple modéliser le cas où c'est le coffret en or qui a une inscription vraie et une fausse et les deux autres qui sont pour l'une vraies et
2. Résolvez-le par la méthode de votre choix.

**Question 4 (4 points)** Montrez que la formule suivante est **insatisfiable** :

$$\neg(((r \vee t) \ \rightarrow \ (r \vee s)) \ \rightarrow \ (r \ \vee \ (t \rightarrow s)))$$

1. En utilisant la méthode des tableaux sémantiques. Vous expliquerez en quoi le tableau construit permet de conclure à l'insatisfiabilité de la formule.

2. En utilisant le système LK des séquents de Gentzen.

**Question 5 (2 points)** Dites si la formule suivante est **satisfiable** ou non en utilisant la méthode de résolution :

$$(a \leftrightarrow \; b \vee \neg(b \wedge a))$$

Vous séparerez bien mise sous forme clausale, simplification de l'ensemble de clauses obtenues, puis résolution et expliquerez pourquoi la résolution vous permet de conclure.

**Question 6 (3 points)** On s'intéresse à la *L-résolution*, une stratégie de résolution qui consiste à : **(1)** toujours réutiliser la dernière clause obtenue et **(2)** en effectuant une résolution avec une autre clause selon le symbole du premier littéral de cette clause (on voit donc les clauses comme des ensembles ordonnés). Par exemple si la dernière clause est $\{\neg p, \neg q\}$, on cherche à effectuer une résolution avec une clause contenant le littéral $p$.
On suppose par ailleurs que l'on est dans un contexte dit de système d'interrogation où l'on dispose d'un ensemble de **clauses définies** $D_1 \dots D_k$, des clauses ayant exactement un littéral positif, et d'une unique **clause requête** $R$, une clause ne contenant que des littéraux négatifs. Exemple : $D_1 = \{a, \neg c, \neg d\}$, $D_2 = \{e, \neg b\}$, $D_3 = \{f, \neg a, \neg e\}$, $D_4 = \{a, \neg c, \neg e\}$, $D_5 = \{b\}$, $D_6 = \{c\}$ et $R = \{\neg e, \neg f\}$.

1. Montrez par récurrence sur la longueur d'une dérivation que, dans un tel contexte, la *L-résolution* ne produit que des clauses contenant uniquement des littéraux négatifs, quand la clause de départ ne contient que des littéraux négatifs.
2. Sur l'exemple précédent, donnez deux dérivations différentes obtenues selon cette stratégie, l'une conduisant à un arrêt par absence de L-résolution possible et l'autre à la clause vide.
3. Cette stratégie de résolution est-elle complète et pour quelles conditions de mise en œuvre ? Justifiez votre réponse.

**Question 7 (3 points)** Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de formules bien formées de la logique des propositions, dites si les propriétés suivantes sont correctes ou non :

Propriété 1 : *$\mathcal{E}$ est contradictoire si et seulement s'il existe une formule $F \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{E} \setminus \{F\} \models \neg F$ (c'est à dire $\mathcal{E}$ privée de $F$ a pour conséquence logique $\neg F$)*

Propriété 2 : *$\mathcal{E}$ est consistant si et seulement s'il existe une formule $F \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{E} \setminus \{F\} \not\models F$.*

Vous justifierez vos réponses en donnant pour chacune des propriétés une preuve ou un contre-exemple pour *chacun des sens* de l'équivalence.

Prop. 1 vraie. Soit $\mathcal{E} = \{F, E_1, ...E_k\}$. On a par définition, $\mathcal{E}$ contradictoire si et seulement s'il n'existe pas de modèle commun à toutes les formules de $\mathcal{E}$. Par la sémantique du $\wedge$ ssi pour tout $I$ on a $v(F \wedge E_1 \wedge ... \wedge E_k, I) = 0$, c'est-à-dire $F \wedge E_1 \wedge ... \wedge E_k$ insatisfiable. Par théorème fondamental de la logique, ssi $\{E_1, ...E_k\} \models \neg F$, c'est à dire $\mathcal{E} \setminus \{F\} \models \neg F$. CQFD.

Prop. 2 fausse dans les 2 sens ! Soit $\mathcal{E} = \{F_1 = a \vee \neg a, \quad F_2 = b \to b\}$. On a bien $\mathcal{E}$ consistant (on peut prendre n'importe quelle interprétation pour avoir un modèle. Mais par contre quelque soit la formule considérée pour $F$ ($F_1$ ou $F_2$), on a bien l'autre entraine la première ($F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$) ce qui est un contre-exemple au sens direct de la propriété. Pour l'autre sens, il suffit de considérer $\mathcal{E} = \{F_1 = a, \quad F_2 = \neg a\}$. On a bien, $F_1 \not\models F_2$ (et $F_2 \not\models F_1$) et pourtant $\mathcal{E}$ est contradictoire.