Une feuille A4 manuscrite recto-verso est autorisée. Tout autre document et appareils électroniques (calculatrices, téléphones, tablettes, ...) sont interdits. Lisez bien les énoncés.
Barème indicatif : **Qu. 1 → 8,5 pts**, **Qu. 2 → 7 pts**, **Qu. 3 → 4,5 pts**. La note tiendra compte de l'orthographe et de la présentation de la copie.

Qu. 1 Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = [1, .., 4]_{\mathbb{N}}$.

a) Qu'est-ce que précisément $E \times F$? Combien d'éléments $E \times F$ contient-il ? Donner trois de ces éléments.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans $E \times F$ définie par $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ ssi $y < t$ ou $(x, y) = (z, t)$.

b) Donnez 2 éléments de $E \times F$ en relation par $\mathcal{R}$ et 2 éléments qui ne sont pas en relation par $\mathcal{R}$.

c) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $E \times F$.

d) Est-ce un ordre partiel ou total ? Justifiez.

e) Dessinez le diagramme de Hasse de la relation $\mathcal{R}$ sur $E \times F$.

f) L'ensemble $E \times F$ admet-il un maximum pour la relation $\mathcal{R}$? Si oui, lequel ?

g) L'ensemble $E \times F$ admet-il des éléments maximaux pour la relation $\mathcal{R}$? Si oui, lesquels ?

h) Donnez les minorants et la borne inférieure, si elle existe, de $\{(a, 2), (b, 2)\}$ dans $E \times F$ pour la relation $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{S}$ une relation binaire dans $E \times F$ définie par $(x, y)\mathcal{S}(z, t)$ ssi $x = z$.

i) Montrez que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur $E \times F$.

j) Combien la relation $\mathcal{S}$ définit-elle de classes d'équivalences ? Proposez une expression en compréhension de chacune de ces classes, que vous nommerez c_1 à c_n.

k) Montrez que $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ est une partition de $E \times F$.

Qu. 2 Soit $A = \{a, b, c, d\}$. On note A^* l'ensemble des mots construits avec l'alphabet A, y compris le mot vide ϵ. On définit $E \subseteq A^*$ par l'induction suivante :

Base : $\{\epsilon, a, b\}$

Règles :

R1. si $u \in E$, alors $u.a \in E$

R2. si $u \in E$, alors $u.b \in E$

a) Donnez tous les mots de E de longueur $\leqslant 3$. Donnez un élément de A^* n'appartenant pas à E.

b) Donnez la séquence de construction du mot $abbaa \in E$, c.-à-d. l'élément de la base et la suite de règles qui ont servi à le construire.

c) Définissez par induction l'application nba qui à chaque élément de E associe son nombre d'occurrence de a. Par exemple, $nba(a) = 1$, $nba(bbb) = 0$, $nba(abababa) = 4$.

d) Montrez par induction structurelle que tous les mots de E sont dans $\{a, b\}^*$ l'ensemble des mots de l'alphabet $\{a, b\}$.

e) Montrez par récurrence sur la longueur des mots que tout mot de $\{a, b\}^*$ est dans E.

f) Quelle est la relation entre E et $\{a, b\}^*$? Justifiez.

Qu. 3 Soit F un ensemble de 44 fleurs et V un ensemble de 10 vases.

a) Si on associe à **chaque** fleur de F **un** vase de V, quel objet mathématique est-on en train de construire ?

b) Qu'est-ce que cela signifierait sur la répartition des fleurs si cet objet était injectif ? surjectif ? Est-ce possible ? Justifiez.

c) Peut-on être sûr qu'au moins un vase contient au moins

i. 4 fleurs ?

ii. 5 fleurs ?

iii. 6 fleurs ?

Justifiez.

d) Combien existe-t-il de façons de répartir les fleurs dans les vases ? Justifiez.

e) Parmi celles-ci, combien mettent exactement 30 fleurs dans un vase ? Détaillez votre raisonnement.

Une feuille A4 manuscrite recto-verso est autorisée. Tout autre document et appareils électroniques (calculatrices, téléphones, tablettes, ...) sont interdits. Lisez bien les énoncés.
Barème indicatif : **Qu. 1** $\rightarrow$ **8,5 pts**, **Qu. 2** $\rightarrow$ **7,25 pts**, **Qu. 3** $\rightarrow$ **4,5 pts**. La note tiendra compte de l'orthographe et de la présentation de la copie.

Qu. 1 **8,5 pts** Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = [1, .., 4]_{\mathbb{N}}$.

a) **1 pt** Qu'est-ce que précisément $E \times F$? Combien d'éléments $E \times F$ contient-il ? Donner trois de ces éléments. *$E \times F$ est le produit cartésien de E par F ou ensemble des couples dont le premier élément est élément de E et le second de F. $|E \times F| = 12$. $(a, 1)$, $(b, 2)$ et $(c, 4)$ sont dans $E \times F$.*

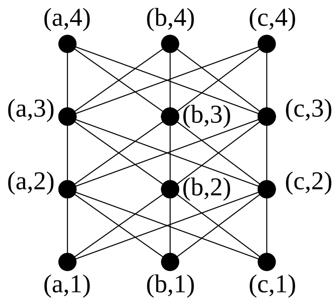
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans $E \times F$ définie par $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ ssi $y < t$ ou $(x, y) = (z, t)$.

b) **0.5 pt** Donnez 2 éléments de $E \times F$ en relation par $\mathcal{R}$ et 2 éléments qui ne sont pas en relation par $\mathcal{R}$. *$(a, 2)\mathcal{R}(a, 4)$ et $(a, 2) \not\mathcal{R} (a, 1)$*

c) **1 pt** Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $E \times F$. *$\mathcal{R}$ est réflexive car par définition $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ si $(x, y) = (z, t)$. $\mathcal{R}$ est antisymétrique, en effet si $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ et $(x, y) \neq (z, t)$ alors $y < t$ et donc $(z, t) \not\mathcal{R} (x, y)$. $\mathcal{R}$ est transitive car si $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ et $(z, t)\mathcal{R}(u, v)$ alors soit*
- *soit $(x, y) = (z, t)$ et $(z, t) = (u, v)$ donc $(x, y) = (u, v)$ et $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$*
- *soit $(x, y) = (z, t)$, d'où $y = t$, et $t < v$ donc $y < v$ et $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$*
- *soit $(y < t$ et $(z, t) = (u, v)$, d'où $t = v$, donc $y < v$ et $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$*
- *soit $y < t$ et $t < v$ donc $y < v$ et $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$*

d) **0.5 pt** Est-ce un ordre partiel ou total ? Justifiez. *Partiel car $(a, 1)$ et $(b, 1)$ ne sont pas comparables par exemple*

e) **1 pt** Dessinez le diagramme de Hasse de la relation $\mathcal{R}$ sur $E \times F$.



f) **0.5 pt** L'ensemble $E \times F$ admet-il un maximum pour la relation $\mathcal{R}$? Si oui, lequel ? *Pas de maximum*

g) **0.5 pt** L'ensemble $E \times F$ admet-il des éléments maximaux pour la relation $\mathcal{R}$? Si oui, lesquels ? $\{(a, 4), (b, 4), (c, 4)\}$

h) **0.5 pt** Donnez les minorants et la borne inférieure, si elle existe, de $\{(a, 2), (b, 2)\}$ dans $E \times F$ pour la relation $\mathcal{R}$. *$\{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$, pas de borne inf.*

Soit $\mathcal{S}$ une relation binaire dans $E \times F$ définie par $(x, y)\mathcal{S}(z, t)$ ssi $x = z$.

i) **1 pt** Montrez que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur $E \times F$. *$\mathcal{S}$ est réflexive car $\forall(x, y) \in E \times F$ $(x, y)\mathcal{S}(x, y)$. $\mathcal{S}$ est symétrique, en effet si $(x, y)\mathcal{S}(z, t)$ alors $x = z$ et donc $(z, t)\mathcal{S}(x, y)$. $\mathcal{S}$ est transitive car si $(x, y)\mathcal{S}(z, t)$ et $(z, t)\mathcal{S}(u, v)$ alors $x = z$ et $z = u$ donc $x = u$ et $(x, y)\mathcal{S}(u, v)$.*

j) **1 pt** Combien la relation $\mathcal{S}$ définit-elle de classes d'équivalences ? Proposez une expression en compréhension de chacune de ces classes, que vous nommerez c_1 à c_n. *Autant de classes que d'élément dans E c.-à-d. 3. $c_1 = \{(a, n) \mid n \in F\}$; $c_2 = \{(b, n) \mid n \in F\}$; $c_3 = \{(c, n) \mid n \in F\}$.*

k) **1 pt** Montrez que $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ est une partition de $E \times F$. *Aucun des c_i n'est vide. Les c_i sont deux à deux disjoints, chaque classe ayant comme premier élément de leurs couples des lettres différentes. L'union des c_i est égale à $E \times F$ puisque par définition chaque élément de $E \times F$ est dans une classe d'équivalence.*

Qu. 2 **7,25 pts** Soit $A = \{a, b, c, d\}$. On note A^* l'ensemble des mots construits avec l'alphabet A, y compris le mot vide ϵ. On définit $E \subseteq A^*$ par l'induction suivante :

Base : $\{\epsilon, a, b\}$

Règles :

R1. si $u \in E$, alors $u.a \in E$

R2. si $u \in E$, alors $u.b \in E$

a) **1.75 pts** Donnez tous les mots de E de longueur $\leqslant 3$. Donnez un élément de A^* n'appartenant pas à E. *$\{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\} \subseteq E$ et $ad \notin E$.*

b) **1 pt** Donnez la séquence de construction du mot *abbaa* $\in E$, c.-à-d. l'élément de la base et la suite de règles qui ont servi à le construire. $a \xrightarrow{R_2} ab \xrightarrow{R_2} abb \xrightarrow{R_1} abba \xrightarrow{R_1} abbaa$

c) **1 pt** Définissez par induction l'application *nba* qui à chaque élément de E associe son nombre d'occurrence de a. Par exemple, $nba(a) = 1$, $nba(bbb) = 0$, $nba(abababa) = 4$.

Base :

Base : $nba(\epsilon) = 0$, $nba(a) = 1$, $nba(b) = 0$.

Règles :

R1. $nba(u.a) = 1 + nba(u)$

R2. $nba(u.b) = nba(u)$

d) **1.5 pts** Montrez par induction structurelle que tous les mots de E sont dans $\{a, b\}^*$ l'ensemble des mots de l'alphabet $\{a, b\}$. *Soit P(e)="e est dans* $\{a, b\}^*$*". Montrons que P(e) est vraie* $\forall e \in E$.
— *Base :* ϵ, a *et* b *sont bien dans* $\{a, b\}^*$
— R_1 *: Soit* $u \in E$ *tel que* $P(u)$ *vrai, c.-à-d. que* $u \in \{a, b\}^*$. $R_1(u) = u.a$ *or* $u \in \{a, b\}^*$ *et* $a \in \{a, b\}^*$ *donc* $u.a \in \{a, b\}^*$
— *On montrerait de même pour* R_2.
Conclusion, par le principe d'induction structurelle, P(e) est vraie $\forall e \in E$.

e) **1.5 pts** Montrez par récurrence sur la longueur des mots que tout mot de $\{a, b\}^*$ est dans E. *Soit P(n)="Tout mot de* $\{a, b\}^*$ *de longueur n est dans E". Montrons que P(n) est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.
— *Base : pour* $n = 0$, *un seul mot de* $\{a, b\}^*$ *de longueur* 0 *:* ϵ *qui est bien dans* E. *Donc* $P(0)$ *vraie.*
— *Récurrence : Montrons que* $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ $\forall n \geqslant 0$.
HR *: On suppose* $P(n)$ *vraie pour un* $n \geqslant 0$
Considérons un mot $w \in \{a, b\}^*$ *de longueur* $n + 1 \geqslant 1$. *La dernière lettre de* w *est forcément un* a *ou un* b. *Supposons que ce soit un* a *(resp.* b*), alors* $w = v.a$ *(resp.* $w = v.b$*) avec* v *un mot de* $\{a, b\}^*$ *de longueur* n. *Par* **HR**, $v \in \{a, b\}^*$. *Or* $w = R_1(v)$ *(resp.* $w = R_2(v)$*), donc* $w \in \{a, b\}^*$. *D'où* $P(n + 1)$ *vraie.*
— *Conclusion : on a montré que* $P(0)$ *est vraie et que* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 0$, *donc par le principe de récurrence on a* $P(n)$ *vraie* $\forall n \geqslant 0$

f) **0.5 pt** Quelle est la relation entre E et $\{a, b\}^*$? Justifiez. *On a montré dans 2d que* $E \subseteq \{a, b\}^*$ *et dans 2e que* $\{a, b\}^* \subseteq E$, *donc* $E = \{a, b\}^*$.

Qu. 3 **4,5 pts** Soit F un ensemble de 44 fleurs et V un ensemble de 10 vases.

a) **0.75 pt** Si on associe à **chaque** fleur de F **un** vase de V, quel objet mathématique est-on en train de construire ? *Une application de* F *dans* V.

b) **1 pt** Qu'est-ce que cela signifierait sur la répartition des fleurs si cet objet était injectif ? surjectif ? Est-ce possible ? Justifiez. *L'application ne peut pas être injective car* $|F| > |V|$, *d'après le théorème vu en cours. Si l'application est surjective, alors aucun vase n'est vide*

c) **1 pt** Peut-on être sûr qu'au moins un vase contient au moins

i. 4 fleurs ? *oui*

ii. 5 fleurs ? *oui*

iii. 6 fleurs ? *non*

Justifiez. *D'après le principe des tiroirs au moins 1 vase contient au moins* $\lceil \frac{44}{10} \rceil = 5$

d) **0.75 pt** Combien existe-t-il de façons de répartir les fleurs dans les vases ? Justifiez. *Autant que d'applications de* F *dans* V, *c.-à-d.* $|V|^{|F|} = 10^{44}$

e) **1 pt** + *bonus* Parmi celles-ci, combien mettent exactement 30 fleurs dans un vase ? Détaillez votre raisonnement. *Choisir les 30 fleurs :* $\binom{30}{44}$, *choisir le vase :* $\binom{1}{10}$ *puis affecter les 14 fleurs restantes dans les 9 vases restant (= "applications de 14 fleurs vers 9 vases") :* 9^{14}. *Il ne reste plus qu'à multiplier ces quantités*