Chapitre 3

# Algorithmes gloutons

HLIN401 : Algorithmique et complexité

L2 Informatique
Université de Montpellier
2020 – 2021

# Les méthodes gloutonnes

- En un mot, **faire à chaque étape le choix possible qui semble le meilleur**. Parfois, ça marche et on obtient des bons algos...

- On voit dans ce cours des algorithmes gloutons simples et dont on peut prouver l'optimalité

  D'autres sont plus *célèbres* mais plus sophistiqués (par ex. l'algorithme de compression de Huffman) et seront étudiés dans des cours plus spécialisés

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est-ce qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

5. Dernier exemple : arbre couvrant de poids minimal

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est-ce qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

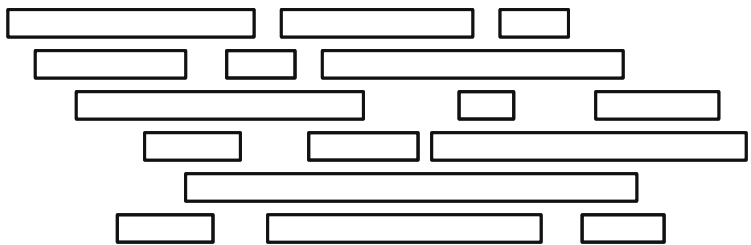
4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

5. Dernier exemple : arbre couvrant de poids minimal

# Définition du problème

**Entrée** un ensemble $\mathcal{C}$ de cours $C_i = (d_i, f_i)$ [début, fin], $i = 0, \ldots, n-1$

**Sortie** un ensemble ordonné maximal de cours $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ tels que pour tout $j < k$, $f_{i_j} \leq d_{i_{j+1}}$ $\rightsquigarrow$ cours **compatibles**

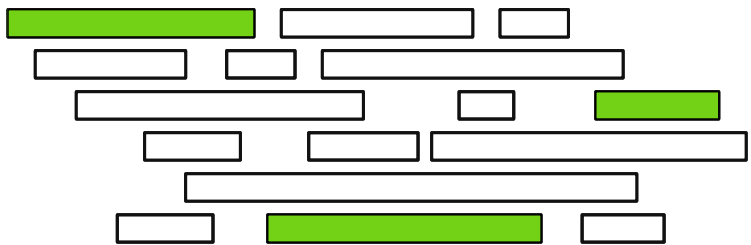


modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Définition du problème

**Entrée** un ensemble $\mathcal{C}$ de cours $C_i = (d_i, f_i)$ [début, fin], $i = 0, \ldots, n-1$

**Sortie** un ensemble ordonné maximal de cours $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ tels que pour tout $j < k$, $f_{i_j} \leq d_{i_{j+1}}$ $\rightsquigarrow$ cours **compatibles**

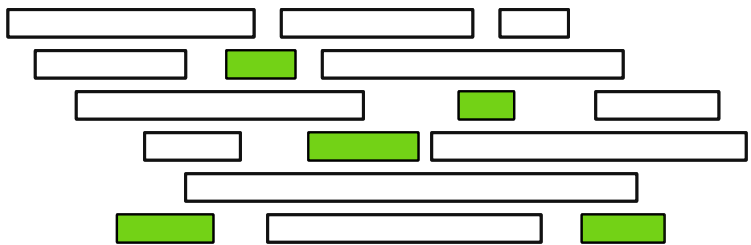


modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Définition du problème

**Entrée** un ensemble $\mathcal{C}$ de cours $C_i = (d_i, f_i)$ [début, fin], $i = 0, \ldots, n-1$

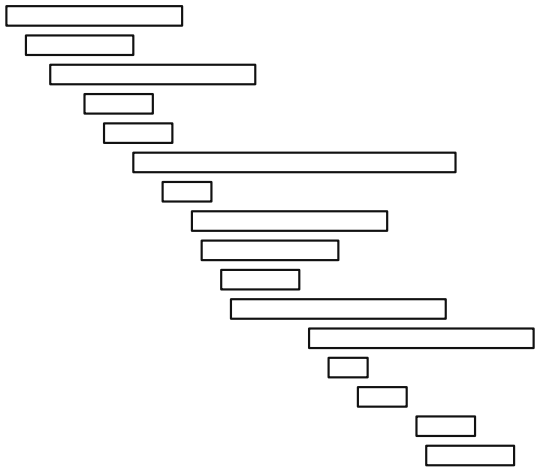
**Sortie** un ensemble ordonné maximal de cours $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ tels que pour tout $j < k$, $f_{i_j} \leq d_{i_{j+1}}$ $\rightsquigarrow$ cours **compatibles**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 1

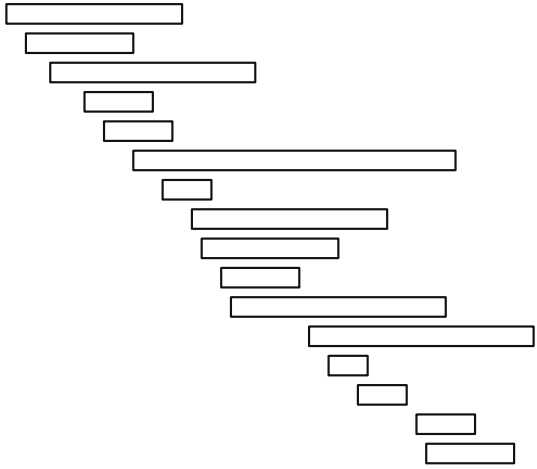
- Tri des cours par **dates de début croissantes**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 1

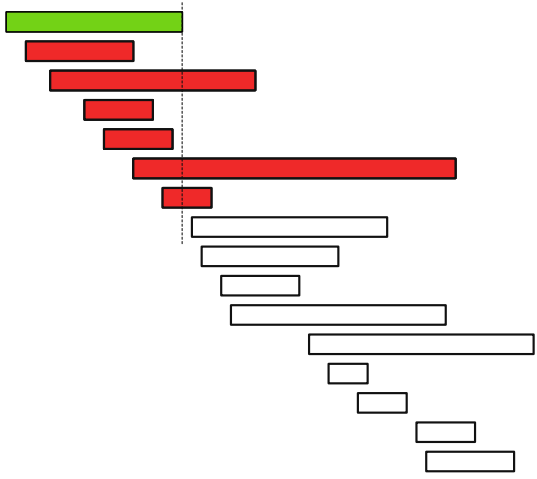
- Tri des cours par **dates de début croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui débute **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 1

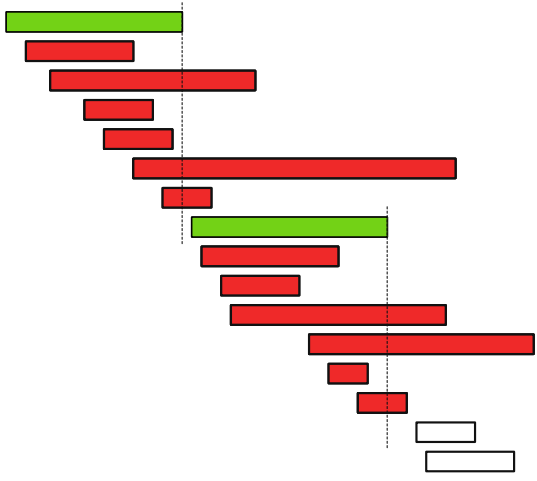
- Tri des cours par **dates de début croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui débute **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 1

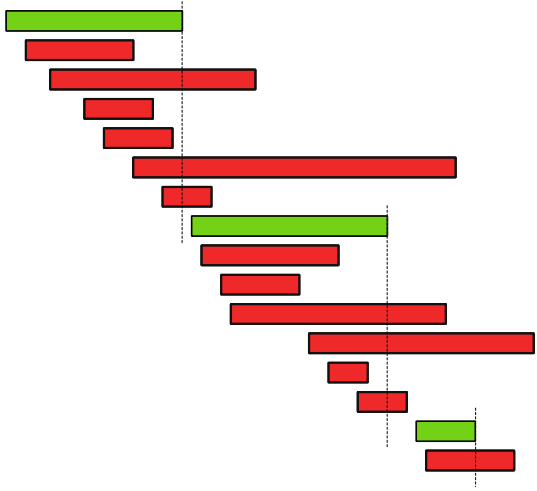
- Tri des cours par **dates de début croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui débute **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 1

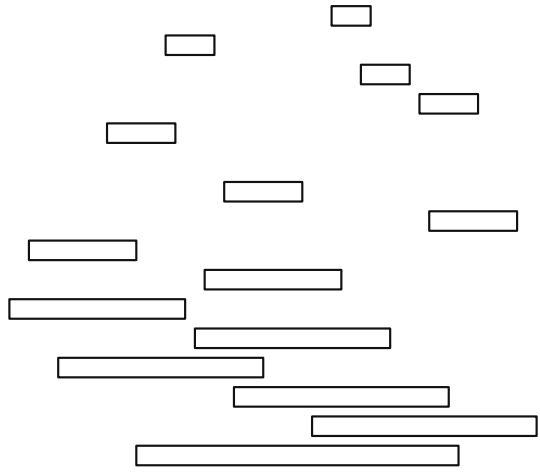
- Tri des cours par **dates de début croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui débute **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 2

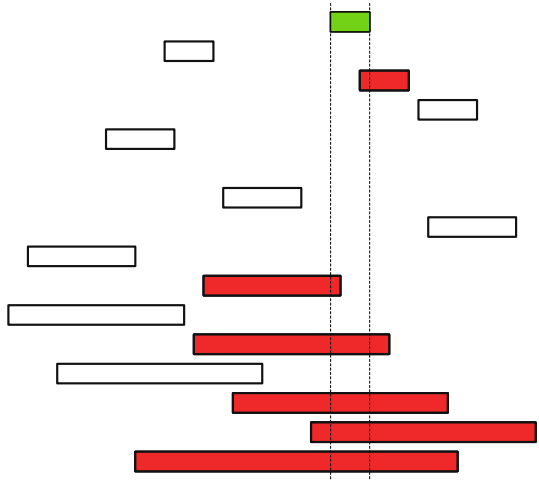
- Tri des cours par **durées croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours **le plus court**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 2

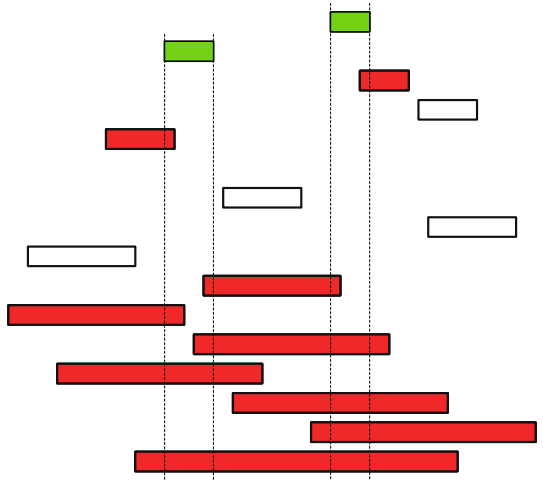
- Tri des cours par **durées croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours **le plus court**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 2

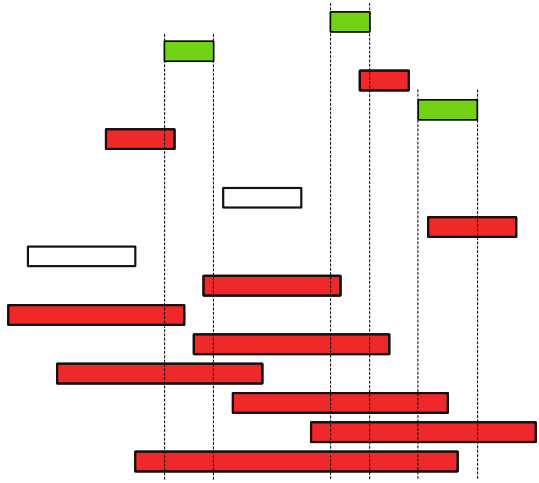
- Tri des cours par **durées croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours **le plus court**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 2

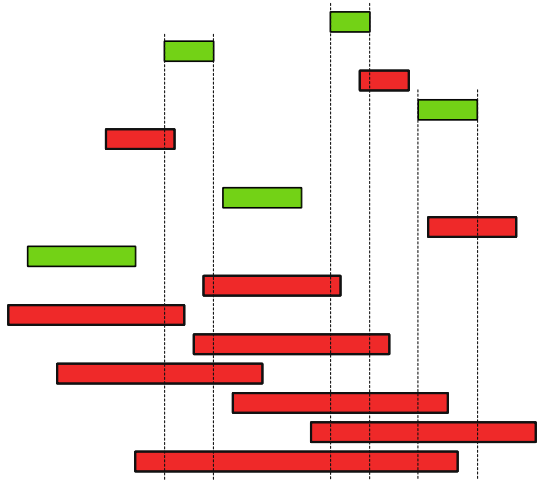
- Tri des cours par **durées croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours **le plus court**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 2

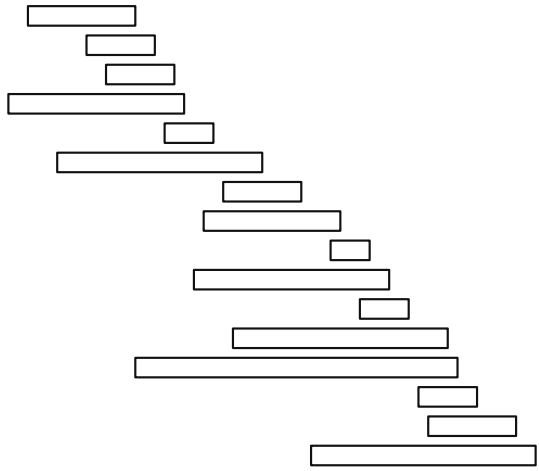
- Tri des cours par **durées croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours **le plus court**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 3

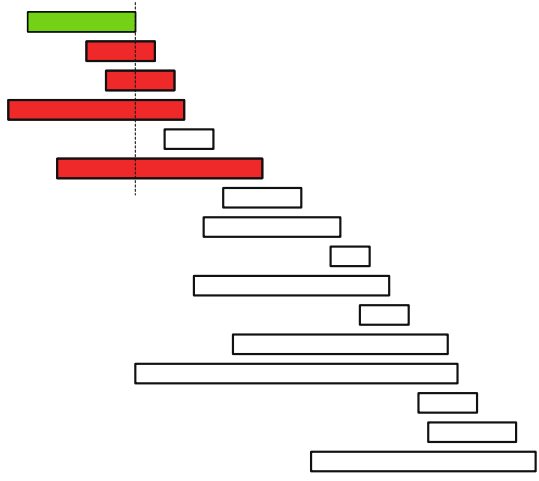
- Tri des cours par **dates de fin croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 3

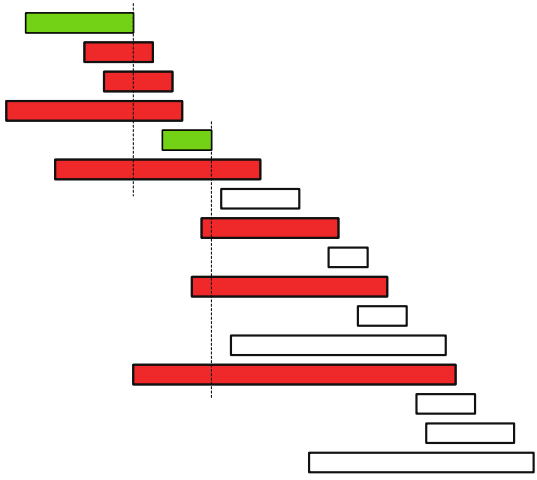
- Tri des cours par **dates de fin croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 3

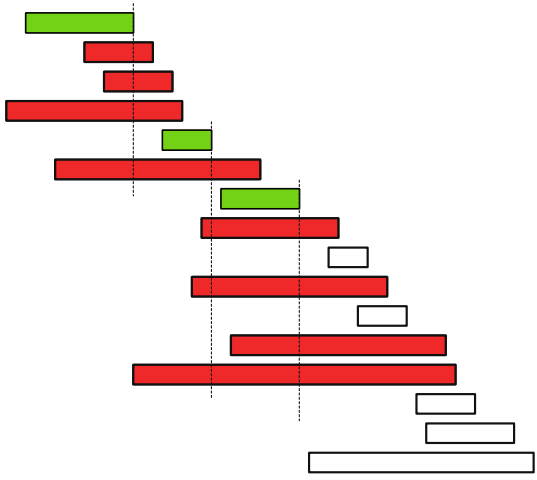
- Tri des cours par **dates de fin croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 3

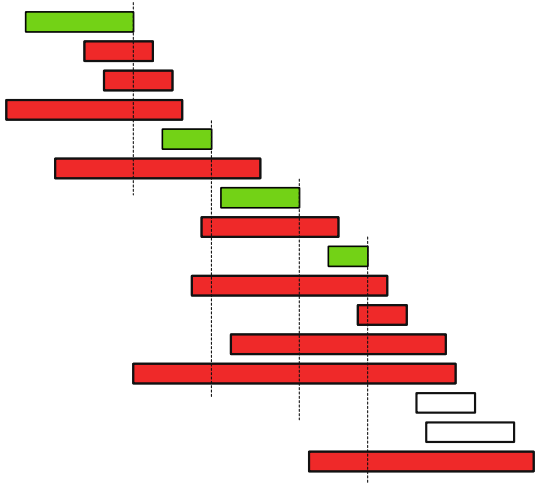
- Tri des cours par **dates de fin croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 3

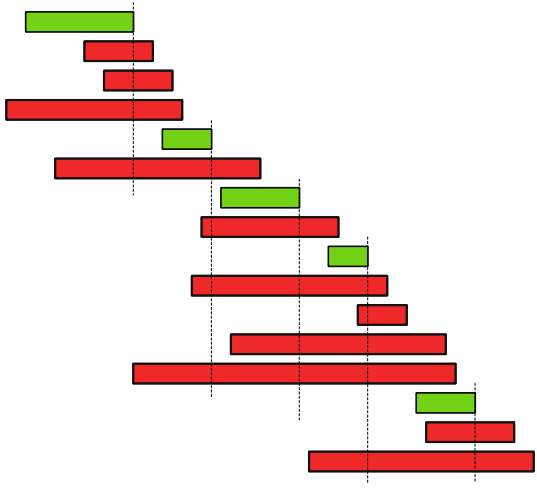
- Tri des cours par **dates de fin croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Idée gloutonne 3

- Tri des cours par **dates de fin croissantes**
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit **le plus tôt**



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

# Que fait-on ?

- Idée 1 donne une solution de taille 3 : on l'oublie !

# Que fait-on ?

- Idée 1 donne une solution de taille 3 : on l'oublie !
- Idées 2 et 3 donnent une solution de taille 5
  - Les deux sont bonnes ?

# Que fait-on ?

- Idée 1 donne une solution de taille 3 : on l'oublie !
- Idées 2 et 3 donnent une solution de taille 5
  - Les deux sont bonnes ?
- On pourrait avoir d'autres idées...
  - cours qui crée le moins d'incompatibilités
  - cours qui commence le plus tard
  - ...

# Que fait-on ?

- Idée 1 donne une solution de taille 3 : on l'oublie !
- Idées 2 et 3 donnent une solution de taille 5
  - Les deux sont bonnes ?
- On pourrait avoir d'autres idées...
  - cours qui crée le moins d'incompatibilités
  - cours qui commence le plus tard
  - ...

- Lesquelles fonctionnent ?
  - Contre-exemples quand ça ne marche pas
  - Besoin de **preuves** quand ça marche !

# Que fait-on ?

- Idée 1 donne une solution de taille 3 : on l'oublie !
- Idées 2 et 3 donnent une solution de taille 5
  - Les deux sont bonnes ?
- On pourrait avoir d'autres idées...
  - cours qui crée le moins d'incompatibilités
  - cours qui commence le plus tard
  - ...

- Lesquelles fonctionnent ?
  - Contre-exemples quand ça ne marche pas
  - Besoin de **preuves** quand ça marche !
- Aujourd'hui : choix de l'idée 3 (≪ finit le plus tôt ≫)
- TD : autres choix

# Algorithme glouton

**Algorithme :** ChoixCoursGlouton($\mathcal{C}$)

Trier $\mathcal{C}$ en fonction des fins
$I \leftarrow \{\mathcal{C}_{[0]}\}$ // Indice des cours choisis
$f \leftarrow \text{Fin}(\mathcal{C}_{[0]})$ // Fin du dernier cours choisi
**pour** $i = 1$ à $n - 1$ :
    **si** $\text{Début}(\mathcal{C}_{[i]}) \geq f$ :
        $I \leftarrow I \cup \{\mathcal{C}_{[i]}\}$
        $f \leftarrow \text{Fin}(\mathcal{C}_{[i]})$
**renvoyer** $I$

# Algorithme glouton

**Algorithme :** ChoixCoursGlouton($\mathcal{C}$)

Trier $\mathcal{C}$ en fonction des fins
$I \leftarrow \{\mathcal{C}_{[0]}\}$ // Indice des cours choisis
$f \leftarrow \text{Fin}(\mathcal{C}_{[0]})$ // Fin du dernier cours choisi
**pour** $i = 1$ *à* $n - 1$ **:**
  **si** $\text{Début}(\mathcal{C}_{[i]}) \geq f$ **:**
    $I \leftarrow I \cup \{\mathcal{C}_{[i]}\}$
    $f \leftarrow \text{Fin}(\mathcal{C}_{[i]})$
**renvoyer** $I$

## Question

*Quelle est la complexité de* ChoixCoursGlouton *?*

# Algorithme glouton

**Algorithme :** ChoixCoursGlouton($\mathcal{C}$)

Trier $\mathcal{C}$ en fonction des fins
$I \leftarrow \{\mathcal{C}_{[0]}\}$ `// Indice des cours choisis`
$f \leftarrow \text{Fin}(\mathcal{C}_{[0]})$ `// Fin du dernier cours choisi`
**pour** $i = 1$ *à* $n - 1$ **:**
  **si** $\text{Début}(\mathcal{C}_{[i]}) \geq f$ **:**
    $I \leftarrow I \cup \{\mathcal{C}_{[i]}\}$
    $f \leftarrow \text{Fin}(\mathcal{C}_{[i]})$
**renvoyer** $I$

## Question

*Quelle est la complexité de* ChoixCoursGlouton *?* $\rightsquigarrow$ *coût du tri :* $O(n \log n)$

# Correction de l'algorithme

## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

# Correction de l'algorithme

**Théorème**

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

**Preuve**

- Notons $\mathcal{C} = (C_0, \ldots, C_{n-1})$ les cours triés par dates de fin croissantes.

# Correction de l'algorithme

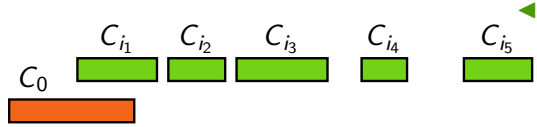
## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- Notons $\mathcal{C} = (C_0, \ldots, C_{n-1})$ les cours triés par dates de fin croissantes.
- **Petit Lemme** *: il existe une solution optimale contenant* $C_0$

  En effet, soit $\mathcal{B} = (C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ une solution optimale.
  - Si $C_{i_1} = C_0$, on est content...
  - Sinon, par définition de $C_0$, on a $f_0 \leq f_{i_1}$ et $(\mathcal{B} \setminus C_{i_1}) \cup C_0$ est aussi une solution optimale, contenant $C_0$ cette fois.



# Correction de l'algorithme

## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- Notons $\mathcal{C} = (C_0, \ldots, C_{n-1})$ les cours triés par dates de fin croissantes.
- **Petit Lemme** *: il existe une solution optimale contenant* $C_0$

  En effet, soit $\mathcal{B} = (C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ une solution optimale.
  - Si $C_{i_1} = C_0$, on est content...
  - Sinon, par définition de $C_0$, on a $f_0 \leq f_{i_1}$ et $(\mathcal{B} \setminus C_{i_1}) \cup C_0$ est aussi une solution optimale, contenant $C_0$ cette fois. ◀

  $\rightsquigarrow$ **ChoixCoursGlouton fait le premier bon choix !**

# Correction de l'algorithme

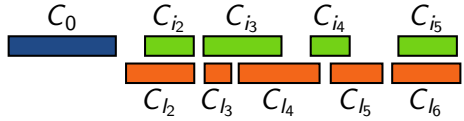
## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- Notons maintenant $\mathcal{C}_0 = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{n_1}}\}$ les cours *compatibles avec* $C_0$, triés par dates de fin croissantes (càd les cours dont la date de début est $\geq f_0$).

# Correction de l'algorithme




## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- Notons maintenant $\mathcal{C}_0 = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{n_1}}\}$ les cours *compatibles avec* $C_0$, triés par dates de fin croissantes (càd les cours dont la date de début est $\geq f_0$).
- **Moyen Lemme** *: il existe une solution optimale formée de* $C_0$ *et d'une solution optimale du problème sur l'entrée* $\mathcal{C}_0$

  En effet, soit $\mathcal{B} = (C_0, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ une solution optimale contenant $C_0$ (ça existe par le petit lemme).
  - Si $(C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ n'est pas une solution optimale pour $\mathcal{C}_0$, alors il existerait une meilleure solution $(C_{l_2}, \ldots, C_{l_{k+1}})$ sur $\mathcal{C}_0$.
  - Mais $(C_{l_2}, \ldots, C_{l_{k+1}})$ sont tous compatibles avec $C_0$, et $(C_0, C_{l_2}, \ldots, C_{l_{k+1}})$ serait meilleure que $\mathcal{B}$ : impossible !

# Correction de l'algorithme

## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- Notons maintenant $\mathcal{C}_0 = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{n_1}}\}$ les cours *compatibles avec* $C_0$, triés par dates de fin croissantes (càd les cours dont la date de début est $\geq f_0$).
- **Moyen Lemme** *: il existe une solution optimale formée de* $C_0$ *et d'une solution optimale du problème sur l'entrée* $\mathcal{C}_0$
- Du coup, par le Petit Lemme, comme il existe une solution optimale de $\mathcal{C}_0$ commençant par $C_{j_1}$, il existe une solution optimale du problème de départ commençant par $(C_0, C_{j_1})$.
  $\rightsquigarrow$ **ChoixCoursGlouton fait aussi un second bon choix !**

# Correction de l'algorithme

## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :

  $\mathcal{P}_s = \ll$ *Soit* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de* ChoixCoursGlouton *et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là. Alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$. $\gg$

# Correction de l'algorithme

## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :

  $\mathcal{P}_s = \ll$ *Soit* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de* ChoixCoursGlouton *et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là. Alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$. $\gg$

- $\mathcal{P}_1$ vraie par le Moyen lemme.

# Correction de l'algorithme

## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :

  $\mathcal{P}_s = \ll$ *Soit* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de* ChoixCoursGlouton *et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là. Alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$. $\gg$

- Si $\mathcal{P}_s$ vraie, alors par le Moyen Lemme, il existe une solution opt. sur $\mathcal{C}_s$ formée du premier cours $C_{p_{s+1}}$ de $\mathcal{C}_s$ et d'une solution opt. sur les cours de $\mathcal{C}_s$ compatibles avec $C_{p_{s+1}}$. Et $\mathcal{P}_{s+1}$ est vraie !

# Correction de l'algorithme

## Théorème

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *est optimal : il renvoie un ensemble maximal de cours compatibles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.*

## Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :

  $\mathcal{P}_s = \ll$ *Soit* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de* ChoixCoursGlouton *et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là. Alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$. $\gg$

  $\rightsquigarrow$ **ChoixCoursGlouton renvoie une solution optimale au problème !** ■

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est-ce qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

5. Dernier exemple : arbre couvrant de poids minimal

# Idée générale

Un **algorithme glouton** fait à chaque étape un choix **localement optimal** dans le but d'obtenir à la fin un **optimum global**.

# Idée générale

Un **algorithme glouton** fait à chaque étape un choix **localement optimal** dans le but d'obtenir à la fin un **optimum global**.

## Exemple du choix de cours

- Optimum local : cours qui minimise les incompatibilités
- Optimum global : maximum de cours compatibles

# Idée générale

Un **algorithme glouton** fait à chaque étape un choix **localement optimal** dans le but d'obtenir à la fin un **optimum global**.

## Exemple du choix de cours

- Optimum local : cours qui minimise les incompatibilités
- Optimum global : maximum de cours compatibles

## Remarques

- Construction pas-à-pas d'une solution
- Algorithmes simples à concevoir... mais pas toujours parfaits !

⇝ Résolution exacte, approximation, heuristique

# Concevoir des algorithmes gloutons

1. Décider d'un **choix glouton**
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant

# Concevoir des algorithmes gloutons

1. Décider d'un **choix glouton**
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où **ça ne marche pas**
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.

# Concevoir des algorithmes gloutons

Tri par durées croissantes

$\{(11, 14), (7, 12), (13, 19)\}$

1. Décider d'un **choix glouton**
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où **ça ne marche pas**
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.

# Concevoir des algorithmes gloutons

Tri par durées croissantes

$\{(11, 14), (7, 12), (13, 19)\}$

1. Décider d'un **choix glouton**
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où **ça ne marche pas**
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.
3. **Démontrer** que l'algorithme est correct
   - Il existe une solution optimale contenant le choix local
   - Choix local + glouton pour le reste $\rightsquigarrow$ solution optimale

# Concevoir des algorithmes gloutons

Tri par durées croissantes

$\{(11, 14), (7, 12), (13, 19)\}$

1. Décider d'un **choix glouton**
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où **ça ne marche pas**
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.
3. **Démontrer** que l'algorithme est correct
   - Il existe une solution optimale contenant le choix local
   - Choix local + glouton pour le reste $\rightsquigarrow$ solution optimale
4. Étudier la **complexité** de l'algorithme

# Algorithme glouton générique

## Problème générique

**Entrée** Un ensemble fini $X$, avec une **valeur $v_x$** pour tout $x \in X$

**Paramètre** Une propriété $\mathcal{P}$ définissant les sous-ensembles $A \subset X$ **acceptables**, telle que si $A$ vérifie $\mathcal{P}$, tout sous-ensemble $B \subset A$ vérifie $\mathcal{P}$ (propriété *monotone vers le bas*)

**Sortie** Un sous-ensemble $A \subset X$, acceptable, et qui maximise/minimise $v_A = \sum_{x \in A} v_x$ (parmi les sous-ensembles acceptables)

# Algorithme glouton générique

## Problème générique

**Entrée** Un ensemble fini $X$, avec une **valeur $v_x$** pour tout $x \in X$

**Paramètre** Une propriété $\mathcal{P}$ définissant les sous-ensembles $A \subset X$ **acceptables**, telle que si $A$ vérifie $\mathcal{P}$, tout sous-ensemble $B \subset A$ vérifie $\mathcal{P}$ (propriété *monotone vers le bas*)

**Sortie** Un sous-ensemble $A \subset X$, acceptable, et qui maximise/minimise $v_A = \sum_{x \in A} v_x$ (parmi les sous-ensembles acceptables)

## Choix de cours

- $X = \{(d_i, f_i) : 0 \leq i < n\}$ ; $v_x = 1$ pour tout $x \in X$ $(X = \mathcal{C})$
- $\mathcal{P} : A \subset X$ vérifie $\mathcal{P}$ si les cours de $A$ sont compatibles
- On cherche l'ensemble de cours compatibles *le plus grand*

# Algorithme glouton générique

## Problème générique

**Entrée** Un ensemble fini $X$, avec une **valeur $v_x$** pour tout $x \in X$

**Paramètre** Une propriété $\mathcal{P}$ définissant les sous-ensembles $A \subset X$ **acceptables**, telle que si $A$ vérifie $\mathcal{P}$, tout sous-ensemble $B \subset A$ vérifie $\mathcal{P}$ (propriété *monotone vers le bas*)

**Sortie** Un sous-ensemble $A \subset X$, acceptable, et qui maximise/minimise $v_A = \sum_{x \in A} v_x$ (parmi les sous-ensembles acceptables)

**Algorithme :** GloutonGénérique$(X, \mathcal{P})$

Trier $X$ par *valeurs* croissantes/décroissantes + critère glouton
$S \leftarrow \emptyset$
**pour** $x \in X$ *(dans l'ordre du tri)* **:**
  **si** $S \cup \{x\}$ *vérifie* $\mathcal{P}$ **:** ajouter $x$ à $S$ // $S \leftarrow S \cup \{x\}$
**renvoyer** $S$

# Théorème des algorithmes gloutons

## Théorème

*On considère le problème générique avec la propriété $\mathcal{P}$. Si pour toute entrée $X$, il existe une solution optimale $S$ telle que*

- *le premier élément $x_0$ de $X$, **dans l'ordre du tri**, appartienne à $S$*
- *$S \setminus x_0$ soit une solution optimale sur l'entrée $X \setminus x_0$ du problème de paramètre $\mathcal{P}'$ où $A$ vérifie $\mathcal{P}'$ si $A \cup \{x_0\}$ vérifie $\mathcal{P}$*

*Alors* GloutonGénérique *est optimal.*

# Théorème des algorithmes gloutons

## Théorème

*On considère le problème générique avec la propriété $\mathcal{P}$. Si pour toute entrée $X$, il existe une solution optimale $S$ telle que*

- *le premier élément $x_0$ de $X$, **dans l'ordre du tri**, appartienne à $S$*
- *$S \setminus x_0$ soit une solution optimale sur l'entrée $X \setminus x_0$ du problème de paramètre $\mathcal{P}'$ où $A$ vérifie $\mathcal{P}'$ si $A \cup \{x_0\}$ vérifie $\mathcal{P}$*

*Alors* GloutonGénérique *est optimal.*

## Exemple du choix de cours

- $X$ : ensemble des cours ($v_x = 1$ pour tout $x$) ; $\mathcal{P}$ : cours compatibles entre eux
- Tri : dates de fin croissantes
- Preuve :
  - Il existe un ensemble de cours optimal contenant le 1$^{er}$ cours
  - En enlevant le 1$^{er}$ cours, il reste un ensemble optimal pour les cours commençant après la fin du 1$^{er}$ cours

# Théorème des algorithmes gloutons

## Théorème

*On considère le problème générique avec la propriété $\mathcal{P}$. Si pour toute entrée $X$, il existe une solution optimale $S$ telle que*

- *le premier élément $x_0$ de $X$, **dans l'ordre du tri**, appartienne à $S$*
- *$S \setminus x_0$ soit une solution optimale sur l'entrée $X \setminus x_0$ du problème de paramètre $\mathcal{P}'$ où $A$ vérifie $\mathcal{P}'$ si $A \cup \{x_0\}$ vérifie $\mathcal{P}$*

*Alors* GloutonGénérique *est optimal.*

## Preuve par récurrence sur $|X|$

- Si $|X| = 0$, la solution optimale est $\emptyset$
- Soit $X$ une entrée avec $|X| > 0$. Par hyp. de récurrence, GloutonGénérique trouve une solution optimale $S'$ pour $X \setminus x_0$ avec la propriété $\mathcal{P}'$. Donc $S' \cup \{x_0\}$ est optimale pour $X$ avec la propriété $\mathcal{P}$, sinon on obtient une contradiction... ■

# En pratique

- Il existe une théorie générale des algorithmes gloutons
  - basée sur la notion de **matroïde**
  - mais certains algorithmes « type glouton » ne rentrent pas exactement dans le moule

# En pratique

- Il existe une théorie générale des algorithmes gloutons
  - basée sur la notion de **matroïde**
  - mais certains algorithmes « type glouton » ne rentrent pas exactement dans le moule
- Dans ce cours : étude de plusieurs exemples
  - utilisation du théorème pour faciliter les preuves

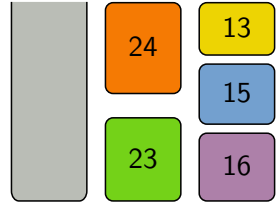
# En pratique

- Il existe une théorie générale des algorithmes gloutons
  - basée sur la notion de **matroïde**
  - mais certains algorithmes « type glouton » ne rentrent pas exactement dans le moule
- Dans ce cours : étude de plusieurs exemples
  - utilisation du théorème pour faciliter les preuves

**Objectifs :**

- Savoir tenter une stratégie gloutonne
- Savoir détecter si elle marche ou non
- Savoir l'analyser (correction et complexité)

# Problème du sac-à-dos



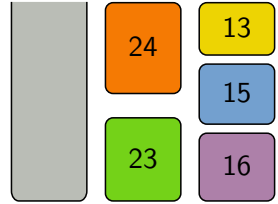

## Définition du problème

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** un sous-ensemble des objets qui

- rentre dans le sac : $\sum_i t_i \leq T$
- maximise la valeur totale $V = \sum_i v_i$

# Problème du sac-à-dos



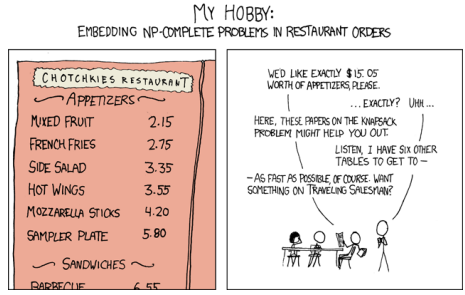

## Définition du problème

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** un sous-ensemble des objets qui

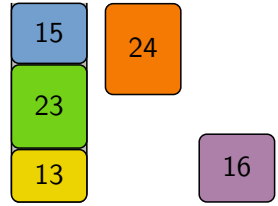
- rentre dans le sac : $\sum_i t_i \leq T$
- maximise la valeur totale $V = \sum_i v_i$

- Problème célèbre car utile
  - en théorie
  - en pratique
  - en cryptographie
- Difficile (NP-complet $\rightsquigarrow$ HLIN612)




https://xkcd.com/287/

# Problème du sac-à-dos

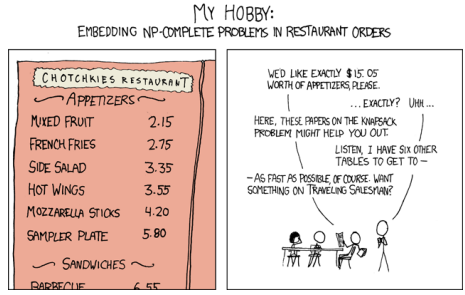



## Définition du problème

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

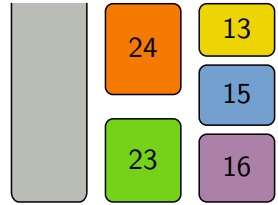
**Sortie** un sous-ensemble des objets qui
- rentre dans le sac : $\sum_i t_i \leq T$
- maximise la valeur totale $V = \sum_i v_i$

- Problème célèbre car utile
  - en théorie
  - en pratique
  - en cryptographie
- Difficile (NP-complet $\rightsquigarrow$ HLIN612)




https://xkcd.com/287/

# Problème du sac-à-dos fractionnaire




Objets *fractionnables* : on peut n'en prendre qu'une partie

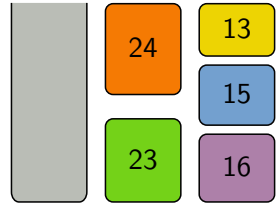
## Définition

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** une fraction $x_i \in [0, 1]$ pour chaque objet, telle que

- le total ne dépasse pas la taille du sac : $\sum_i x_i t_i \leq T$
- la valeur totale $V = \sum_i x_i v_i$ est maximale

# Problème du sac-à-dos fractionnaire




Objets *fractionnables* : on peut n'en prendre qu'une partie

## Définition

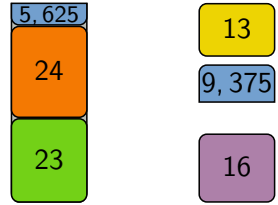
**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** une fraction $x_i \in [0, 1]$ pour chaque objet, telle que

- le total ne dépasse pas la taille du sac : $\sum_i x_i t_i \leq T$
- la valeur totale $V = \sum_i x_i v_i$ est maximale

- Problème simplifié !
- Approche pour résoudre le sac-à-dos

# Problème du sac-à-dos fractionnaire




Objets *fractionnables* : on peut n'en prendre qu'une partie

## Définition

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** une fraction $x_i \in [0, 1]$ pour chaque objet, telle que

- le total ne dépasse pas la taille du sac : $\sum_i x_i t_i \leq T$
- la valeur totale $V = \sum_i x_i v_i$ est maximale

- Problème simplifié !
- Approche pour résoudre le sac-à-dos

# Algorithme glouton

**Choix glouton :** choisir l'objet de meilleur *rapport qualité - prix*

# Algorithme glouton

**Choix glouton :** choisir l'objet de meilleur *rapport qualité - prix*

**Algorithme :** SàdFracGlouton$(O, T)$

Trier les objets $O_i = (t_i, v_i)$ par $v_i/t_i$ **décroissant**
$R \leftarrow T$ `// Espace encore libre dans le sac-à-dos`
**pour** $i = 0$ *à* $n-1$ *(dans l'ordre du tri)* **:**
    **si** $t_i \leq R$ **:**
        $x_i \leftarrow 1$
        $R \leftarrow R - t_i$
    **sinon :**
        $x_i \leftarrow R/t_i$
        $R \leftarrow 0$
**renvoyer** $(x_0, \ldots, x_{n-1})$

# Algorithme glouton

**Choix glouton :** choisir l'objet de meilleur *rapport qualité - prix*

**Algorithme :** SÀDFRACGLOUTON$(O, T)$

Trier les objets $O_i = (t_i, v_i)$ par $v_i/t_i$ **décroissant**
$R \leftarrow T$ `// Espace encore libre dans le sac-à-dos`
**pour** $i = 0$ *à* $n-1$ *(dans l'ordre du tri)* **:**
    **si** $t_i \leq R$ **:**
        $x_i \leftarrow 1$
        $R \leftarrow R - t_i$
    **sinon :**
        $x_i \leftarrow R/t_i$
        $R \leftarrow 0$
**renvoyer** $(x_0, \ldots, x_{n-1})$

## Lemme

*La complexité de* SÀDFRACGLOUTON *est* $O(n \log n)$.

# Correction de l'algorithme

**Lemme**

*Soit* $O = \{(t_0, v_0), \ldots, (t_{n-1}, v_{n-1})\}$ *un ensemble d'objets et* $T$ *une taille de sac-à-dos, où* $v_0/t_0 \geq v_1/t_1 \geq \cdots \geq v_{n-1}/t_{n-1}$. *Alors il existe une solution optimale* $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ *sur l'entrée* $(O, T)$ *telle que*

- $x_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } t_0 \leq T \\ T/t_0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *est solution optimale sur l'entrée* $\{(t_1, v_1), \ldots, (t_{n-1}, v_{n-1})\}$ *et* $T - t_0$

Preuve : en TD !

$\rightsquigarrow$ Optimalité de SàdFracGlouton d'après le théorème des algorithmes gloutons !

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est-ce qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

5. Dernier exemple : arbre couvrant de poids minimal

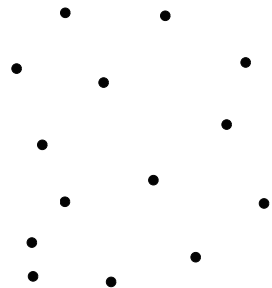
# Le problème

## SetCover

**Entrée** $n$ maisons placées dans le plan

**Sortie** un ensemble minimal de maisons où placer une antenne Wifi :

- chaque antenne a une portée de 100 m
- toutes les maisons doivent être couvertes



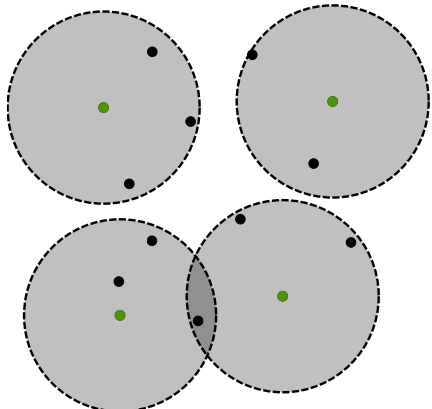
# Le problème

## SetCover

**Entrée** $n$ maisons placées dans le plan

**Sortie** un ensemble minimal de maisons où placer une antenne Wifi :

- chaque antenne a une portée de 100 m
- toutes les maisons doivent être couvertes



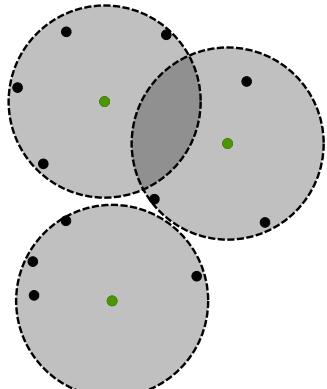
# Le problème

## SetCover

**Entrée** $n$ maisons placées dans le plan

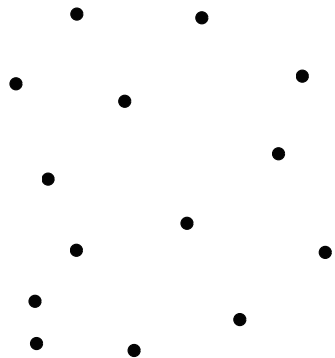
**Sortie** un ensemble minimal de maisons où placer une antenne Wifi :

- chaque antenne a une portée de 100 m
- toutes les maisons doivent être couvertes



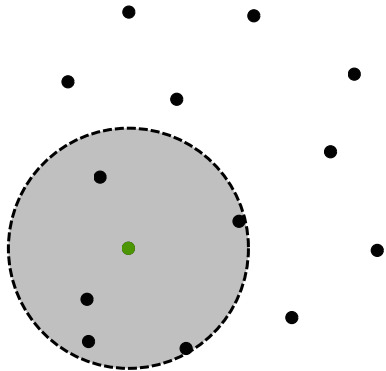
# Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



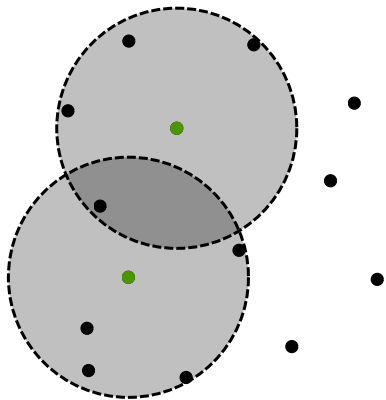
# Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



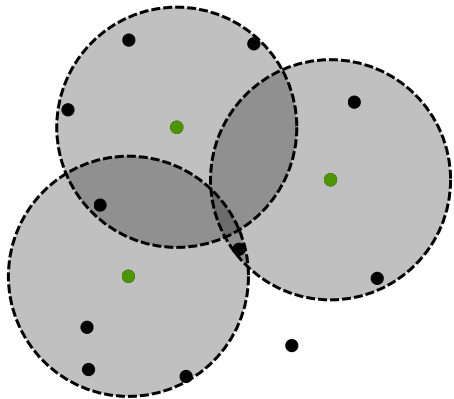
# Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



# Choix glouton

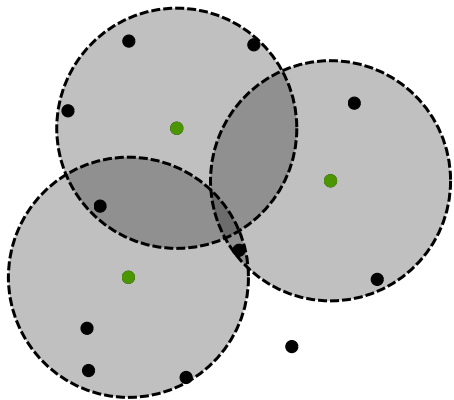
À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



# Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes

Choix non optimal mais...



# Propriétés du choix glouton

Lemme

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$*

Preuve : en TD !

# Propriétés du choix glouton

**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps* $O(n^3)$

Preuve : en TD !

**Lemme**

*Si* $k$ *est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec* $\leq k \ln n$ *antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvertes* après l'étape $t$.

# Propriétés du choix glouton

**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps* $O(n^3)$

Preuve : en TD !

**Lemme**

*Si* $k$ *est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec* $\leq k \ln n$ *antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvertes* après l'étape $t$.

- $n_0 = n$

# Propriétés du choix glouton

**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$*

Preuve : en TD !

**Lemme**

*Si $k$ est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k \ln n$ antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvertes* après l'étape $t$.

- $n_0 = n$
- Puisque $k$ antennes suffisent pour couvrir *toutes* les maisons, $k$ antennes suffisent pour les $n_t$ maisons non encore couvertes
- Donc l'emplacement qui couvre le plus de maisons non encore couvertes en couvre $\geq {}^{n_t}/_{k}$ (preuve : par contradiction)

# Propriétés du choix glouton

**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$*

Preuve : en TD !

**Lemme**

*Si $k$ est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k \ln n$ antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvertes* après l'étape $t$.

- $n_0 = n$
- Puisque $k$ antennes suffisent pour couvrir *toutes* les maisons, $k$ antennes suffisent pour les $n_t$ maisons non encore couvertes
- Donc l'emplacement qui couvre le plus de maisons non encore couvertes en couvre $\geq {}^{n_t}/_{k}$ (preuve : par contradiction)
- Alors $\boxed{n_{t+1} \leq n_t - {}^{n_t}/_{k} = (1 - \frac{1}{k})n_t}$

# Propriétés du choix glouton

**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$*

Preuve : en TD !

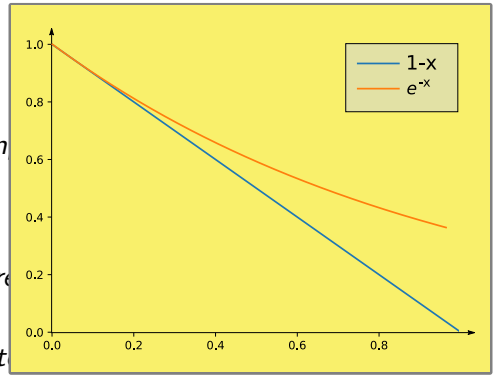
**Lemme**

*Si $k$ est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k \ln n$ antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvertes* après l'étape $t$.

- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}) n_t$

# Propriétés du choix glouton




**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en tem*

Preuve : en TD !

**Lemme**

*Si $k$ est le nombre minimal d'antennes nécessair*
*solution avec $\leq k \ln n$ antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvert*

- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}) n_t$
- Or $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x$, donc $n_{t+1} \leq e^{-\frac{1}{k}} n_t$

# Propriétés du choix glouton

**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$*

Preuve : en TD !

**Lemme**

*Si $k$ est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k \ln n$ antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvertes* après l'étape $t$.

- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}) n_t$
- Or $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x$, donc $n_{t+1} \leq e^{-\frac{1}{k}} n_t$
- D'où $n_t \leq e^{-\frac{1}{k}} n_{t-1} \leq e^{-\frac{2}{k}} n_{t-2} \leq \cdots \leq e^{-\frac{t}{k}} n_0 = e^{-\frac{t}{k}} n$

# Propriétés du choix glouton

**Lemme**

*L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$*

Preuve : en TD !

**Lemme**

*Si $k$ est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k \ln n$ antennes*

Preuve Notons $n_t$ le nb de maisons *non couvertes* après l'étape $t$.

- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}) n_t$
- Or $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x$, donc $n_{t+1} \leq e^{-\frac{1}{k}} n_t$
- D'où $n_t \leq e^{-\frac{1}{k}} n_{t-1} \leq e^{-\frac{2}{k}} n_{t-2} \leq \cdots \leq e^{-\frac{t}{k}} n_0 = e^{-\frac{t}{k}} n$
- Toutes les maisons sont couvertes dès que $e^{-\frac{t}{k}} n < 1$, càd $t > k \ln n$ ■

1. Exemple 1 : choix de cours

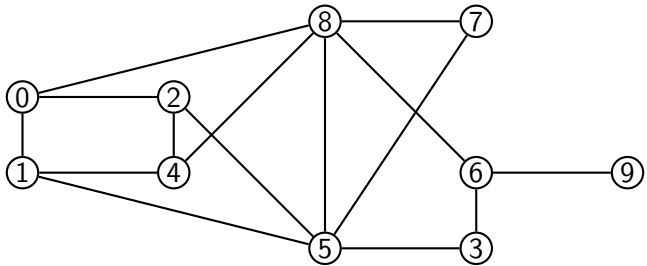
2. Qu'est-ce qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

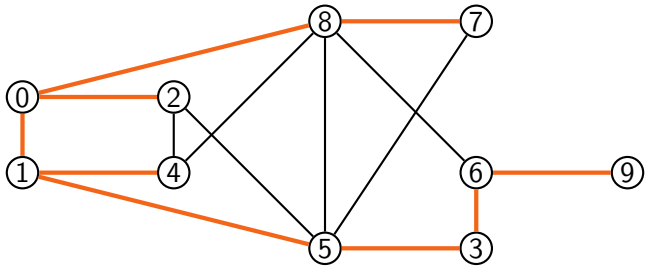
4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

5. Dernier exemple : arbre couvrant de poids minimal

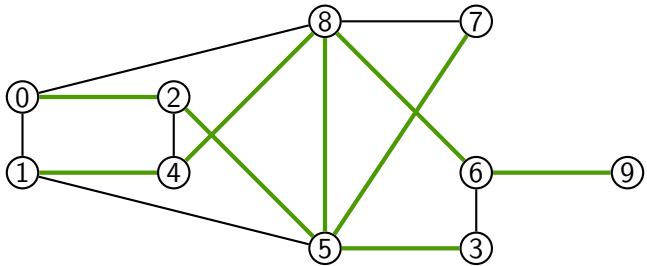
# Arbre couvrant



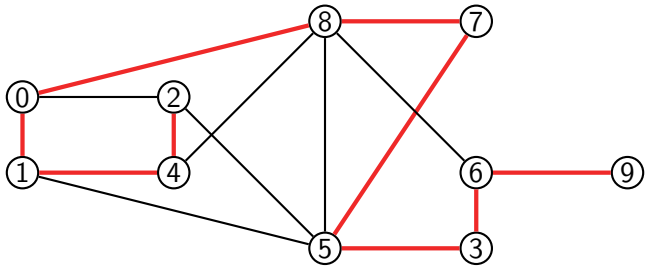
# Arbre couvrant



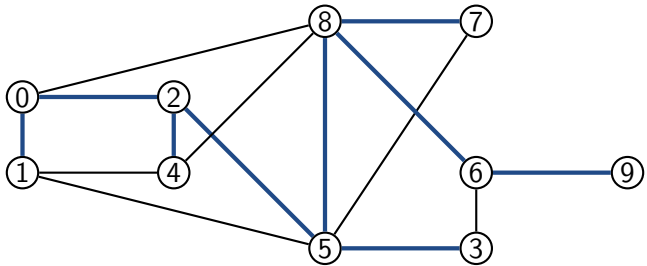
# Arbre couvrant



# Arbre couvrant



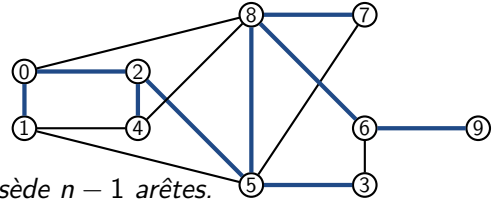
# Arbre couvrant




## Définition

Un **arbre couvrant** d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble $B \subset A$ des arêtes tel que $T = (S, B)$ est un arbre (graphe connexe et sans cycle).

# Propriétés



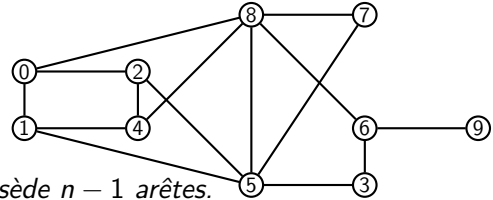

## Lemme

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

Preuve par récurrence sur $n$ (cas $n = 1$ trivial) :

- L'arbre possède au moins un sommet de degré 1 (*feuille*), sinon il a un cycle
- Si on supprime ce sommet et son arête, on a un arbre couvrant de $n-1$ sommets, donc $n-2$ arêtes par hypothèse de récurrence. ■

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

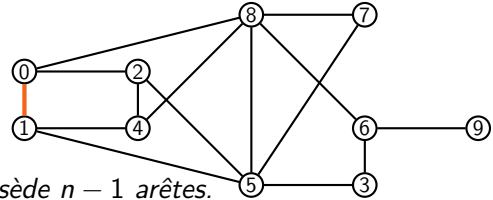
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

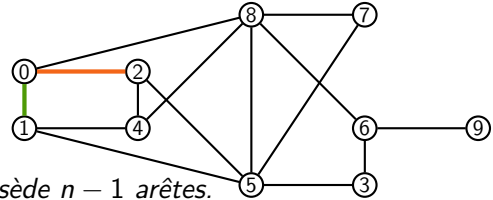
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

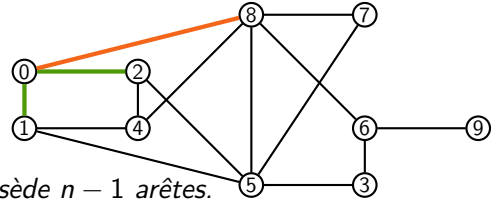
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

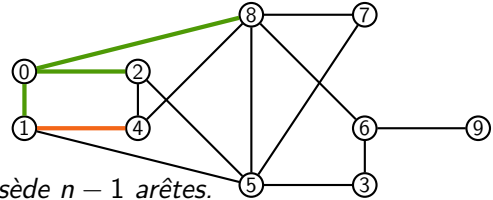
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

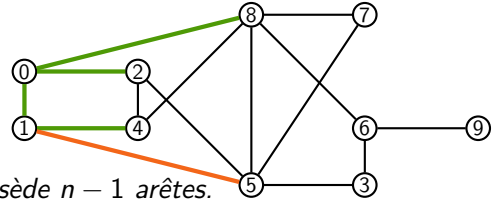
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

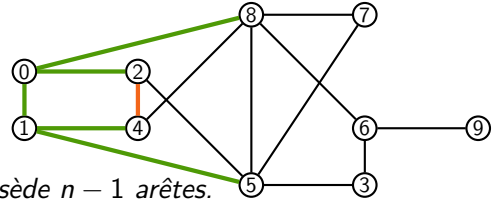
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

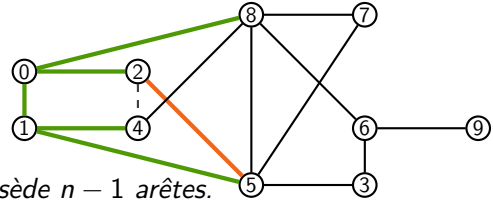
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

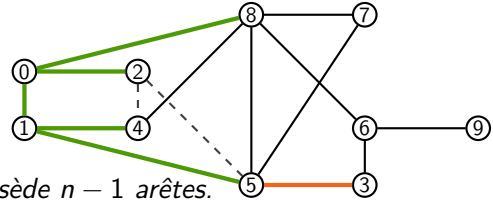
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

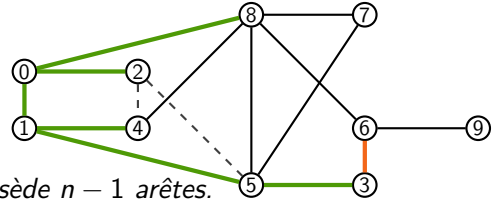
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




## Lemme

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

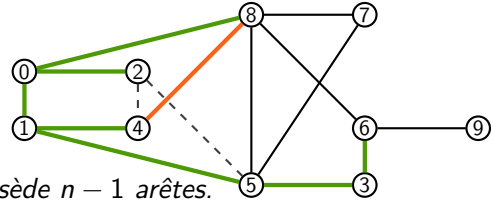
## Lemme

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

## Preuve

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

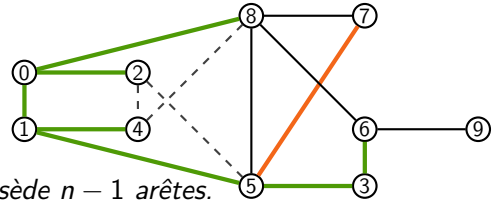
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

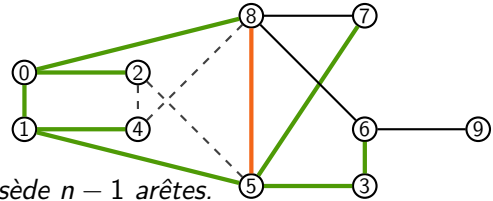
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




## Lemme

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

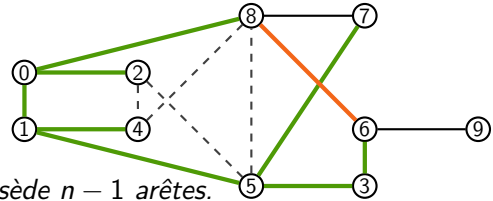
## Lemme

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

## Preuve

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

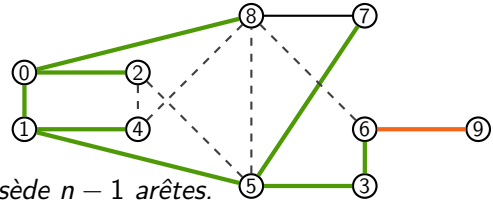
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

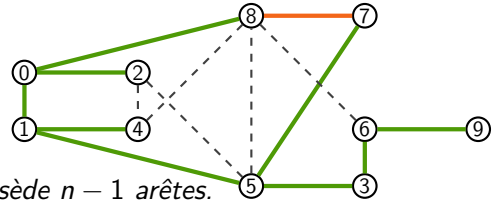
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

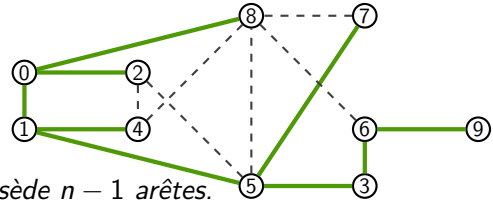
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

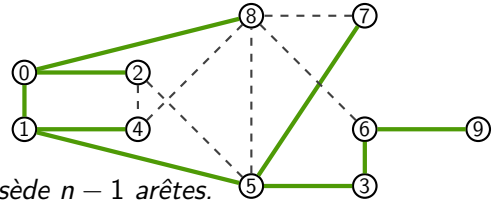
**Lemme**

*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

# Propriétés




**Lemme**

*Un arbre couvrant d'un graphe à $n$ sommets possède $n-1$ arêtes.*

**Lemme**

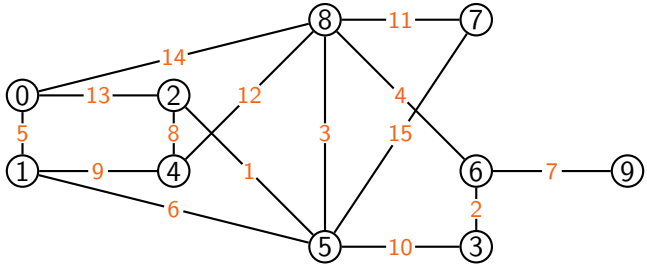
*Un graphe possède (au moins) un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

**Preuve**

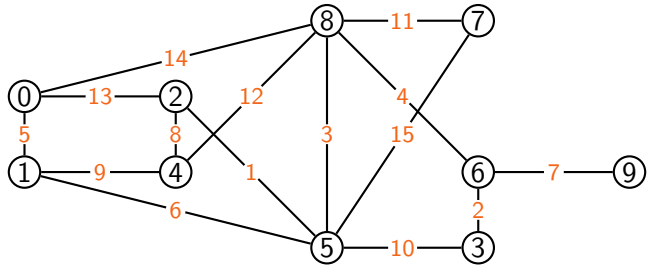
- Si $G$ a un arbre couvrant $T = (S, B)$, il est connexe
- Si $G$ est connexe : algorithme *glouton* de construction de $B$
  - Pour chaque arête $e \in A$ (ordre qcq), ajouter $e$ à $B$ si elle ne crée pas de cycle

$\rightsquigarrow (S, B)$ est sans cycle, et connexe (sinon on pourrait ajouter des arêtes à $B$) ■

# Arbre couvrant de poids minimum



# Arbre couvrant de poids minimum

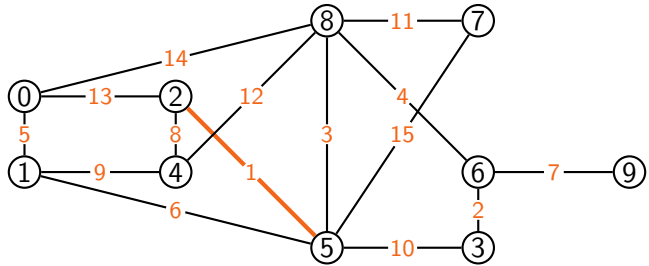



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

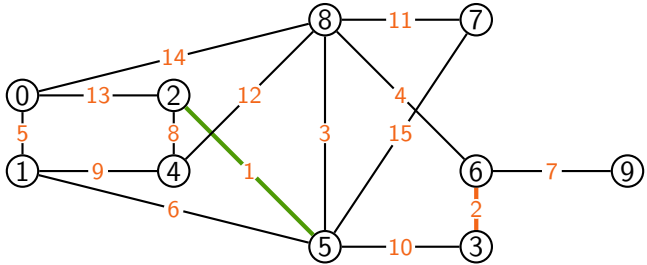



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

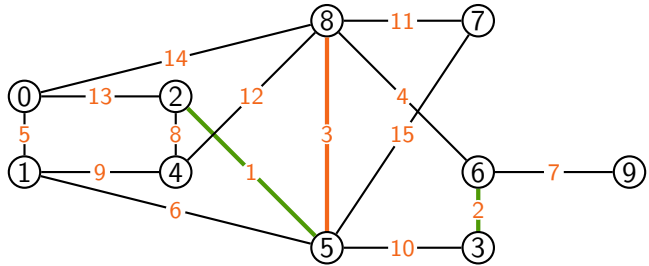



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

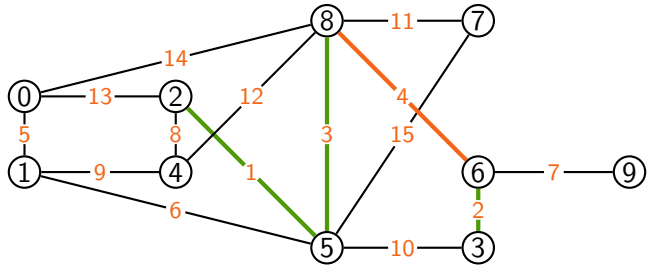



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

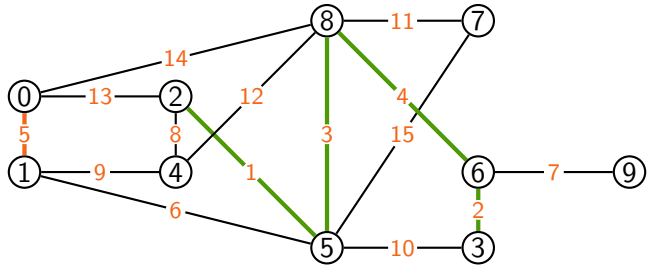



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

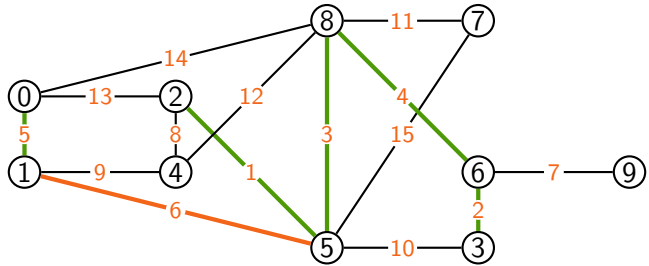



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

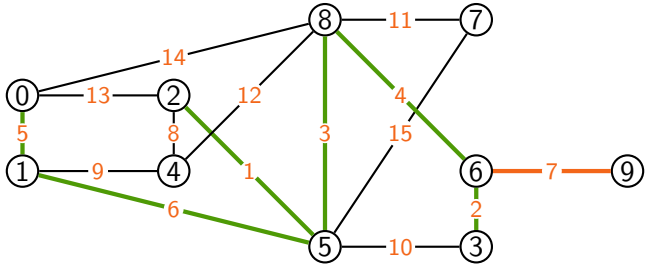



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

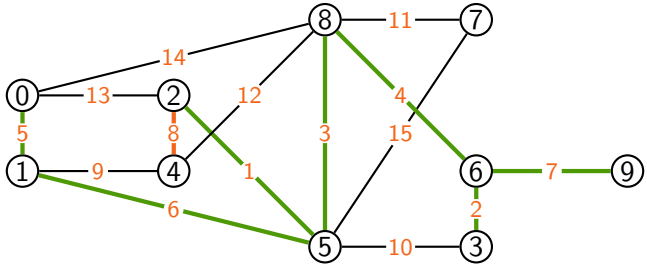



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

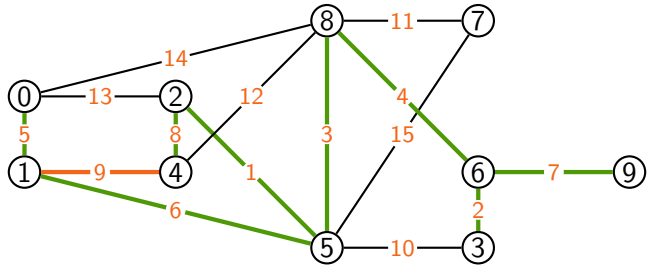



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

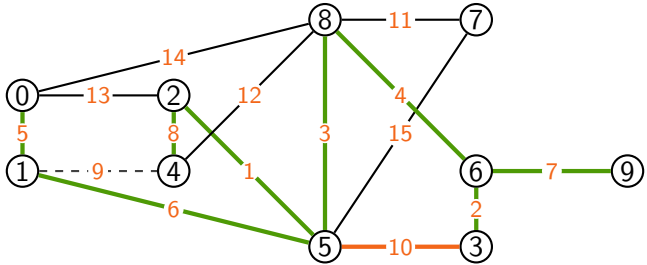



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

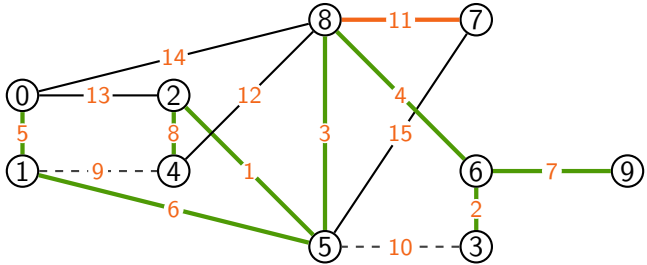



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

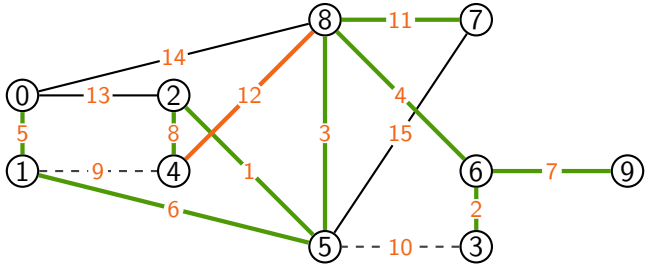



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

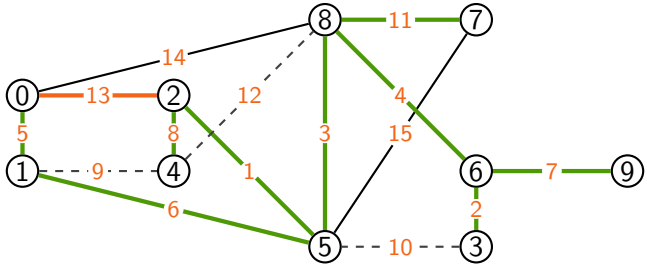



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

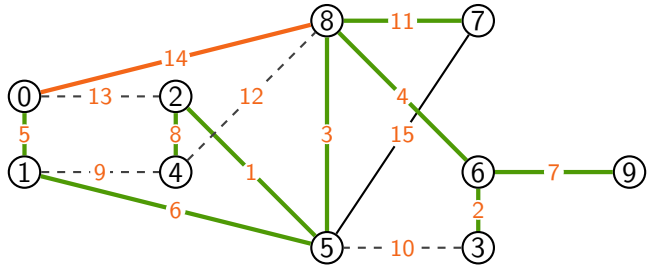



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

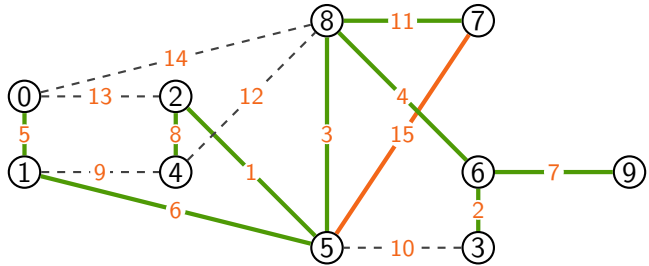



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

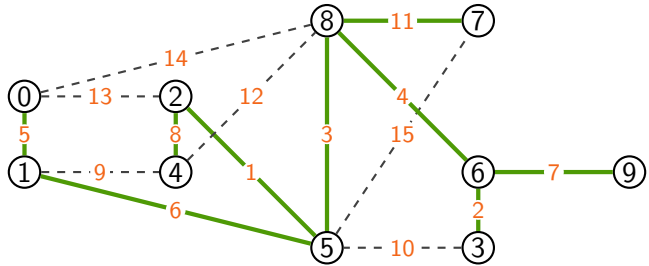



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum

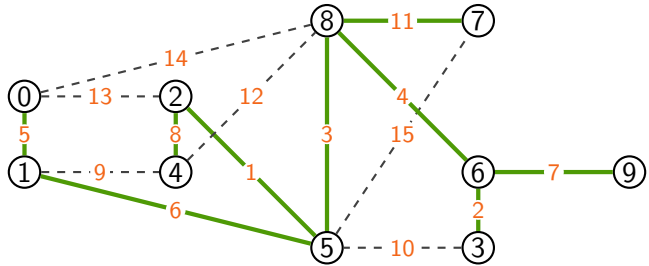



Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Arbre couvrant de poids minimum




Arbre couvrant de poids $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 11 = 47$.

Problème ACPM

Entrée Graphe **pondéré** $G = (S, A, \mathbf{p})$, avec $p : A \to \mathbb{R}_+$

Sortie Arbre couvrant $T = (S, B)$ de $G$ de **poids minimum** : $P = \sum_{e \in B} p(e)$

# Algorithme de Kruskal

**Algorithme :** KRUSKAL$(S, A, p)$

Trier les arêtes par poids croissants
$B \leftarrow \emptyset$ `// aucune arête`
**pour** *chaque arête* $e \in A$ *dans l'ordre* **:**
    **si** $(S, B \cup \{e\})$ *n'a pas de cycle* **:**
        Ajouter $e$ à $B$
**renvoyer** $B$

# Algorithme de Kruskal

**Algorithme :** KRUSKAL$(S, A, p)$

Trier les arêtes par poids croissants
$B \leftarrow \emptyset$ `// aucune arête`
**pour** *chaque arête* $e \in A$ *dans l'ordre* **:**
  **si** $(S, B \cup \{e\})$ *n'a pas de cycle* **:**
    Ajouter $e$ à $B$
**renvoyer** $B$

**Théorème**

*L'algorithme* KRUSKAL *renvoie un arbre couvrant de poids minimum de* $G = (S, A, p)$.

Remarque : on suppose que les poids sont distincts deux-à-deux

# Algorithme de Kruskal

**Algorithme :** KRUSKAL$(S, A, p)$

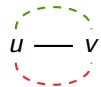
Trier les arêtes par poids croissants
$B \leftarrow \emptyset$ `// aucune arête`
**pour** *chaque arête* $e \in A$ *dans l'ordre* **:**
  **si** $(S, B \cup \{e\})$ *n'a pas de cycle* **:**
    Ajouter $e$ à $B$
**renvoyer** $B$

**Théorème**
*L'algorithme* KRUSKAL *renvoie un arbre couvrant de poids minimum de* $G = (S, A, p)$.

Remarque : on suppose que les poids sont distincts deux-à-deux

Lemme On ajoutant une arête à un arbre couvrant, on crée un unique cycle.

Preuve Supposons qu'en ajoutant une arête $uv$, deux cycles $u - v - \cdots - u$ distincts sont créés. Alors il existe deux chemins distincts (et distincts de l'arête $uv$) entre $u$ et $v$, càd un cycle qui passe par $u$ et $v$.



# Algorithme de Kruskal

**Algorithme :** KRUSKAL$(S, A, p)$

Trier les arêtes par poids croissants
$B \leftarrow \emptyset$ // aucune arête
**pour** *chaque arête* $e \in A$ *dans l'ordre* **:**
  **si** $(S, B \cup \{e\})$ *n'a pas de cycle* **:**
    Ajouter $e$ à $B$
**renvoyer** $B$

**Théorème**
*L'algorithme* KRUSKAL *renvoie un arbre couvrant de poids minimum de* $G = (S, A, p)$.

Remarque : on suppose que les poids sont distincts deux-à-deux

Preuve Soit $C$ un ensemble d'arêtes tq $(S, C)$ soit un arbre couvrant. Soit $e_i$ l'arête la plus légère qui est dans $B$ mais pas dans $C$.

- $(S, C \cup \{e_i\})$ contient un cycle $u_1 - u_2 - \cdots - u_k - u_1$ (avec $e_i = u_k u_1$)
- Il existe $e_j = u_t u_{t+1}$ tq $p(e_j) > p(e_i)$ : sinon $e_i$ ne serait pas choisie par KRUSKAL
- Donc $(S, C \cup \{e_i\} \setminus \{e_j\})$ est un arbre couvrant de poids moindre :
  - Cycle supprimé en supprimant $e_j$
  - Connexe car il suffit de remplacer $e_j$ par $u_{t+1} - \cdots - u_k - u_1 - \cdots - u_t$
  - Poids plus faible car $p(e_i) < p(e_j)$.

# Questions d'implantation et de complexité

Comment tester **efficacement** à chaque étape si ajouter $e$ à $B$ crée un cycle ?

# Questions d'implantation et de complexité

Comment tester **efficacement** à chaque étape si ajouter $e$ à $B$ crée un cycle ?

1. Retenir la *composante connexe* de chaque sommet
   - Numéro d'un des sommets de la composante, unique pour la composante
2. Ajout d'une arête :
   - Seulement si composantes différentes (sinon création de cycle)
   - Nécessité de faire l'*union* des deux composantes

# Questions d'implantation et de complexité

Comment tester **efficacement** à chaque étape si ajouter $e$ à $B$ crée un cycle ?

1. Retenir la *composante connexe* de chaque sommet
   - Numéro d'un des sommets de la composante, unique pour la composante
2. Ajout d'une arête :
   - Seulement si composantes différentes (sinon création de cycle)
   - Nécessité de faire l'*union* des deux composantes

## Structure de données de type UNION-FIND

1. Données :
   - Tableau $c$ des composantes : $c_{[u]} = v$ si la composante de $u$ est $v$
   - Pile $P_{c_{[u]}}$ pour chaque composante, contenant tous les sommets de la composante
2. Union de deux composantes $c_{[u]}$ et $c_{[v]}$ :
   - Vider la pile $P_{c_{[u]}}$ dans $P_{c_{[v]}}$, en mettant à jour $c_{[w]}$ pour chaque $w \in P_{c_{[u]}}$
   - Rôles $u$ et $v$ inversés si $P_{c_{[u]}}$ est plus grande que $P_{c_{[v]}}$

# Algorithme de Kruskal (complet)

**Algorithme :** KRUSKAL$(S, A, p)$

Trier les arêtes par poids croissants

$B \leftarrow \emptyset$ `// aucune arête`

**pour** *chaque arête* $e = uv \in A$ *dans l'ordre* **:**

  **si** $c_{[u]} \neq c_{[v]}$ **:** `// e ne crée pas de cycle`

    Ajouter $e$ à $B$

# Algorithme de Kruskal (complet)

**Algorithme :** KRUSKAL$(S, A, p)$

Trier les arêtes par poids croissants
$B \leftarrow \emptyset$ // aucune arête
**pour** *chaque sommet* $v \in S$ **:**
    $c_{[v]} \leftarrow v$
    $P_{c_{[v]}} \leftarrow$ Pile $\{v\}$ // un seul élément
    $t_{c_{[v]}} \leftarrow 1$ // taille de la pile
**pour** *chaque arête* $e = uv \in A$ *dans l'ordre* **:**
    **si** $c_{[u]} \neq c_{[v]}$ **:** // $e$ ne crée pas de cycle
        Ajouter $e$ à $B$
        UNION$(c_{[u]}, c_{[v]})$

# Algorithme de Kruskal (complet)

**Algorithme :** KRUSKAL$(S, A, p)$

Trier les arêtes par poids croissants
$B \leftarrow \emptyset$ `// aucune arête`
**pour** *chaque sommet* $v \in S$ **:**
    $c_{[v]} \leftarrow v$
    $P_{c_{[v]}} \leftarrow$ Pile $\{v\}$ `// un seul élément`
    $t_{c_{[v]}} \leftarrow 1$ `// taille de la pile`
**pour** *chaque arête* $e = uv \in A$ *dans l'ordre* **:**
    **si** $c_{[u]} \neq c_{[v]}$ **:** `// e ne crée pas de cycle`
        Ajouter $e$ à $B$
        UNION$(c_{[u]}, c_{[v]})$

**Algorithme :** UNION$(x, y)$

**si** $t_x > t_y$ **:** UNION$(y, x)$
**sinon :**
    $t_y \leftarrow t_y + t_x$
    **tant que** $P_x$ *est non vide* **:**
        $w \leftarrow$ dépiler $P_x$
        $c_{[w]} \leftarrow y$
        Empiler $w$ sur $P_y$

# Complexité de l'algorithme de Kruskal

**Théorème**

*L'algorithme* KRUSKAL *a une complexité* $O(m \log n)$, *où* $n$ *est le nombre de sommets et* $m$ *le nombre d'arêtes.*

# Complexité de l'algorithme de Kruskal

**Théorème**

*L'algorithme* KRUSKAL *a une complexité* $O(m \log n)$*, où* $n$ *est le nombre de sommets et* $m$ *le nombre d'arêtes.*

**Lemme**

*Pour tout sommet* $u$*, le nombre total de mises à jour de la case* $c_{[u]}$ *au cours de l'algorithme est* $\leq \log n$*.*

Preuve La mise à jour a lieu dans UNION, avec $t_{c_{[v]}} \geq t_{c_{[u]}}$. Donc après mise à jour, $t_{c_{[u]}}$ a au moins doublé. Comme $t_{c_{[u]}} \leq n$, le nombre de mises à jour est $\leq \log n$. ■

# Complexité de l'algorithme de Kruskal

**Théorème**

*L'algorithme* KRUSKAL *a une complexité* $O(m \log n)$*, où* $n$ *est le nombre de sommets et* $m$ *le nombre d'arêtes.*

**Lemme**

*Pour tout sommet* $u$*, le nombre total de mises à jour de la case* $c_{[u]}$ *au cours de l'algorithme est* $\leq \log n$*.*

**Preuve du théorème**

- Tri des arêtes : $O(m \log m)$, or $m \leq n^2$ donc $\log m \leq 2 \log n$ $\rightsquigarrow O(m \log n)$
- Parcours de toutes les arêtes une fois $\rightsquigarrow O(m)$
- Pour chaque sommet, $\leq \log n$ mises à jour de $c_{[u]}$ $\rightsquigarrow O(n \log n)$

# Conclusion

# Bilan

## Pourquoi des algorithmes gloutons ?

- Algorithmes souvent simples et rapides...
- ... parfois optimaux
- ... parfois avec de bonnes propriétés
- ... parfois qui marchent en pratique
- ... parfois parfaitement inutiles !

# Bilan

## Pourquoi des algorithmes gloutons ?

- Algorithmes souvent simples et rapides...
- ... parfois optimaux
- ... parfois avec de bonnes propriétés
- ... parfois qui marchent en pratique
- ... parfois parfaitement inutiles !

## Comment les utiliser ?

1. Chercher un choix glouton
2. Démontrer que c'est un bon choix (en **théorie** ou pratique)
3. Étudier la complexité obtenue

# Aussi vu dans ce cours

- Algorithme d'**approximation** (SetCover) : ne résout pas le problème exactement, mais fournit une **solution approchée**
- Complexité **amortie** (Union) : technique d'analyse de complexité qui remplace le pire cas par la **somme** (ou **moyenne**) des coûts de plusieurs exécutions

  *Étudiés dans le cours d'algorithmique de L3*

# Aussi vu dans ce cours

- Algorithme d'**approximation** (SetCover) : ne résout pas le problème exactement, mais fournit une **solution approchée**
- Complexité **amortie** (Union) : technique d'analyse de complexité qui remplace le pire cas par la **somme** (ou **moyenne**) des coûts de plusieurs exécutions

  *Étudiés dans le cours d'algorithmique de L3*

- Structure de donnée **Union-Find** pour stocker des **ensembles disjoints** :
  - Trois opérations : MakeSet, Union et Find
  - Plusieurs implantations possibles :
    - Tableau + Piles : complexité amortie $O(n \log n)$
    - Meilleure implantation possible : $O(n\alpha(n))$

      inverse de la fonction d'Ackermann : $\alpha(n) \leq 4$ pour $n \leq 2^{2^{2^{65536}}} - 3$

*Voir* `https://fr.wikipedia.org/wiki/Union-find`