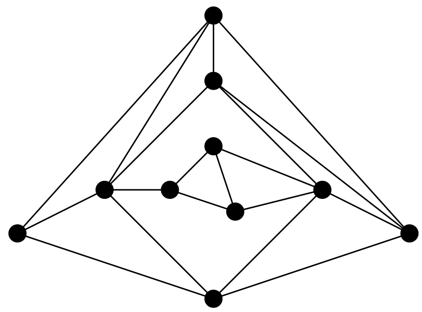
- Fiche de TD4 : Connectivité -

- Exercice 1 - Échauffement -

Calculer la sommet-connectivité et l'arête-connectivité du graphe suivant.



- Exercice 2 - Échauffement (plus dur) -

Calculer $\kappa(P)$ (où P est le graphe de Petersen), $\lambda(K_n)$ (où K_n est le graphe complet à n sommets ; on pourra utiliser le fait que si F est un ensemble d'arêtes de taille $\leq n-2$ de K_n, $(V(K_n), F)$ n'est pas connexe) et $\kappa(Q_d)$ (où Q_d est l'hypercube de dimension d, de sommets $\{0,1\}^d$ avec $x_1 \ldots x_d$ et $y_1 \ldots y_d$ sont reliés si et seulement si $\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i| = 1$; on pourra raisonner par récurrence sur d).

- Exercice 3 - Connectivité des cubiques -

Trouver un graphe G vérifiant $\lambda(G) = 3$ et $\kappa(G) = 1$.
Soit G un graphe cubique (ie. 3-régulier). Montrer que G est 3-arête-connexe si, et seulement si, il est 3-sommet-connexe.

- Exercice 4 - Treillis des séparateurs -

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et x et y deux sommets de G. Pour X un (x, y)-(sommet-)séparateur de G, on note $C(X, x)$ la composante connexe de $G \setminus X$ contenant x.
Soient X et Y deux (x, y)-(sommets-)séparateurs, montrer que $A = (X \cap C(Y, x)) \cup (X \cap Y) \cup (Y \cap C(X, x))$ et $B = (X \cap C(Y, y)) \cup (X \cap Y) \cup (Y \cap C(X, y))$ sont des (x, y)-(sommets-)séparateurs de G.

- Exercice 5 - Graphes 2-connexes -

Soient $G = (V, E)$ un graphe et x et y deux sommets de G. Le graphe $G/\{x, y\}$, obtenu après *contraction de la paire* $\{x, y\}$ est le graphe $G \setminus \{x, y\}$ auquel on ajoute un sommet v_{xy} de voisinage $N_G(x) \cup N_G(y)$ (on supprime les potentiels arêtes multiples).
On suppose que G est 2-sommet-connexe et possède au moins 4 sommets. Soit e une arête de G. Montrer que soit $G - e$ est 2-sommet-connexe, soit G/e est 2-sommet-connexe.

- Exercice 6 - Menger étendu -

Soient $G = (V, E)$ un graphe k-sommet-connexe.

a. On ajoute à G un sommet u de degré k. Montrer que le graphe G' ainsi obtenu est encore k-sommet-connexe.
b. Pour le reste de l'exercice, on revient au graphe G de départ. Soient X et Y deux sous-ensembles de V de taille au moins k. Montrer qu'il existe k chemins sommet-disjoints de X à Y.
c. Soit maintenant z un sommet de G n'appartenant pas à X, montrer de même que G contient k chemins sommet-disjoints (sauf en z) de z à X.

- Exercice 7 - Plein de cycles -

Soit $G = (V, E)$ un graphe k-sommet-connexe, avec $k \geq 2$.

a. Soient x_1 et x_2 deux sommets distincts de G. Montrer qu'il existe un cycle contenant x_1 et x_2.

b. On veut généraliser le résultat précédent. Soient $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un ensemble de k sommets distincts de G. Montrer qu'il existe un cycle de G contenant tous les x_i (on pourra considérer un cycle qui contient le plus grand nombre possible de sommets x_i puis appliquer le résultat de l'exercice précédent).

- Exercice 8 - Gros cycle -

Soit $k \geq 2$. Montrer que tout graphe k-sommet-connexe contenant au moins $2k$ sommets contient un cycle de longueur au moins $2k$.

- Exercice 9 - Arbres couvrants disjoints -

Montrer que tout graphe G possède $t(G) = \lfloor \max\{e(\mathscr{P})/(|\mathscr{P}|-1)\ :\ \mathscr{P}$ est une partition des sommets de $G\}\rfloor$ arbres couvrants arête-disjoints et pas plus.
Calculer $t(G)$ pour les graphes G donnés dans l'exercice 2.

- Exercice 10 - Pas plus de deux... -

Montrer que tout graphe G possède un arbre couvrant si, et seulement si, pour toute partition $\mathscr{P}$ des sommets de G en *deux* parties on a $e(\mathscr{P}) \geq |\mathscr{P}| - 1$.
Peut-on généraliser à deux arbres couvrants arête-disjoints ?

- Exercice 11 - Jeu de Shannon -

Le *jeu de Shannon* se joue à deux joueurs sur un graphe $G = (V, E)$ connexe. Le joueur *Secure* (S) sécurise à chaque tour de jeu une arête de G. Le joueur *Cut* coupe à chaque tour de jeu une arête de G qui n'est pas sécurisée. Cut gagne la partie si il arrive à déconnecter G et Secure gagne si il arrive à sécuriser un arbre couvrant. Cut commence la partie.
Montrer que si G a deux arbres couvrants arête-disjoints alors Secure a une stratégie gagnante. Montrer que si ce n'est pas le cas, alors Cut a une stratégie gagnante.