# Systèmes à base de règles en logique des propositions

Sémantique logique

**ML** Mugnier

# Règles positives : que calcule exactement le chaînage avant ?

**K** BF = 
$$\{A, B\}$$

 $\mathsf{BF^*} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$ 

- 1.  $A \rightarrow C$
- 2.  $B \wedge C \rightarrow D$
- 3.  $E \rightarrow F$

Si on suppose que les connaissances de *K* sont **vraies**, BF\* contient les symboles qui sont **forcément vrais** 

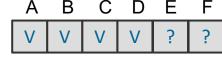
**Interprétation** : application {symboles de K}  $\rightarrow$  {vrai,faux}

« monde complètement connu »

**Modèle** de K: interprétation qui rend K vraie (ou : « qui satisfait K »)

c'est-à-dire rend vrai chaque fait de BF et chaque règle de BR

Quels sont les modèles de K?



3 modèles (selon les valeurs de E et F)

## Règles positives : que calcule exactement le chaînage avant ?

K BF = {A, B}

1. 
$$A \rightarrow C$$
2.  $B \land C \rightarrow D$ 
3.  $E \rightarrow F$ 

BF\* = {A,B,C,D}

A B C D E F
V V V V ? ?

3 modèles (selon les valeurs de E et F)

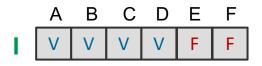
K décrit un monde partiellement connu

Un modèle de K correspond à un monde complètement connu « qui étend » celui décrit par K

BF\* contient les symboles qui sont vrais dans tous les modèles de K

### BF\* peut aussi être vue comme un modèle de K

BF = 
$$\{A, B\}$$
  
1.  $A \rightarrow C$   
2.  $B \land C \rightarrow D$   
3.  $E \rightarrow F$ 



À BF\* on peut associer une **interprétation I** qui rend vrai les symboles de BF\* et faux les autres **Cette interprétation est-elle un modèle de K**?

- I est bien un modèle de BF car BF ⊆ BF\*
- I est bien un modèle de BR :
   en effet, si I n'est pas un modèle d'une règle R : H → C, c'est que I rend H vrai mais C faux ;
   puisque H ⊆ BF\*, R serait donc applicable mais non appliquée
   Ceci contredit le fait que BF\* est la base de faits saturée

#### BF\* peut aussi être vue comme un modèle de K

À BF\* on peut associer une **interprétation I** qui rend vrai les symboles de BF\* et faux les autres **On obtient un modèle de K** 

De plus, ce modèle est **minimal** (on dit aussi : c'est un plus petit modèle), au sens où ce n'est plus un modèle si on passe un symbole de vrai à faux

BF = {A, B}

1. 
$$A \rightarrow C$$
2.  $B \land C \rightarrow D$ 
3.  $E \rightarrow F$ 

# Quel rapport avec la conséquence logique ?

**K** BF = 
$$\{A, B\}$$

- 1.  $A \rightarrow C$
- 2.  $B \wedge C \rightarrow D$
- 3.  $E \rightarrow F$

$$BF^* = \{A,B,C,D\}$$

On veut savoir ce qui « découle » de K

$$K \models S$$
: «  $S$  est conséquence logique de  $K$  » tout modèle de  $K$  est un modèle de  $S$ 

De K, peut-on inférer la valeur de vérité d'un symbole S?

- Si *K* **\=** *S*, S est vrai
- Si  $K \models \neg S$ , S est faux
- Sinon ( $K \not\models S$  et  $K \not\models \neg S$ ), la valeur de S est inconnue

 $K \models \neg S$  est-ce possible ??

Propriété (que l'on va montrer) :

Pour tout symbole S, K ⊨ S si et seulement si S ∈ BF\*

# Adéquation du chaînage avant avec des règles positives

Pour tout symbole S, si S  $\in$  BF\* alors K  $\models$  S

Autrement dit :  $K = BF^*$ 

<u>Idée</u>: à chaque étape d'application de règle, on applique le modus ponens:
 à partir de H et de (H → C) on conclut C »

Preuve : par récurrence sur le nombre d'applications de règles produisant BF\*

On note  $BF_i$  la base de faits obtenue après i applications de règles. On montre que pour tout  $i \ge 0$ , on a  $K \models BF_i$ 

- pour i = 0:  $BF_0 = BF$ , donc  $K \models BF_0$
- supposons que la propriété est vraie pour i ≤ n.
   BF<sub>n+1</sub> = BF<sub>n</sub> U {C} où C est produit par une règle R: H → C
   Puisque H ⊆ BF<sub>n</sub>, on a K ⊨ H par hypothèse de récurrence
   De plus K ⊨ R. On a donc K ⊨ H, H → C. Donc K ⊨ C

### Complétude du chaînage avant avec des règles positives

Pour tout symbole S, si  $K \models S$  alors  $S \in BF^*$ 

Preuve : Supposons que K ⊨ S c'est-à-dire que **tout** modèle de K est un modèle de S

Prenons I le modèle de K qui correspond à BF\* : pour tout symbole A, I(A) = vrai ssi A ∈ BF\*

Puisque I est un modèle de K et que  $K \models S$ , on a I(S) = vrai

Or, par définition de I,  $I(S) = vrai ssi S \in BF^*$ .

Donc S ∈ BF\*

# Si on a des littéraux et pas seulement des atomes

**K** BF = 
$$\{A, \neg B\}$$

- 1.  $A \land \neg C \rightarrow D$
- 2.  $\neg B \rightarrow \neg C$
- 3.  $\neg D \rightarrow E$

$$BF^* = \{A, \neg B, \neg C, D\}$$

**Remarque** : K peut être **insatisfiable** (ou : inconsistante) :

BF = 
$$\{A,B\}$$
  
BR =  $\{B \rightarrow \neg A ; C \rightarrow D\}$   
BF\* =  $\{A,B,\neg A\}$ 

Puisque K n'a aucun modèle, tout est conséquence de K

De K (satisfiable), peut-on inférer la valeur de vérité d'un symbole S ?

- Si  $K \models S$ , S est vrai
- Si K  $\models \neg S$ , S est faux
- Sinon, la valeur de S est inconnue

Propriété qu'on voudrait (pour K satisfiable) :

pour tout littéral S, K ⊨ S ssi S ∈ BF\*

# Si on a des littéraux et pas seulement des atomes

Propriété qu'on voudrait (pour K satisfiable) :

**FAUX** 

pour tout littéral S, K ⊨ S ssi S ∈ BF\*

K BF = {A, 
$$\neg$$
B}  
1. A  $\wedge$  C  $\rightarrow$  D  
2. A  $\wedge$   $\neg$ C  $\rightarrow$  D

Le chainage avant n'est pas complet

K a 2 modèles Dans ces 2 modèles, D est vrai Donc K ⊨ D et pourtant D ∉ BF\*

## Adéquation et complétude

Un mécanisme de chaînage avant / arrière est

 adéquat (ou correct) : s'il ne produit que des conséquences de K
 Pour tout littéral A,
 si A ∈ BF\* alors K ⊨ A (pour le chaînage avant)
 si A est prouvé alors K ⊨ A (pour le chaînage arrière)

 complet : s'il produit toutes les conséquences de K
 Pour tout littéral A,
 si K ⊨ A alors A ∈ BF\* (pour le chaînage avant)
 si K ⊨ A alors A est prouvé (pour le chaînage arrière)

# Résultats d'adéquation et complétude

- BF = {atomes} et BR = {règles conjonctives **positives**} : adéquation **et** complétude
- BR = {règles conjonctives (pas forcément positives)} : adéquation mais pas complétude
  - même si (BF,BR) satisfiable
  - même si BF ne contient que des atomes

$$BF = \{A\}$$

- 1.  $A \wedge C \rightarrow D$
- 2. A  $\wedge \neg C \rightarrow D$

#### Complexité du raisonnement en logique des propositions

#### Problème « inférence d'un atome » :

**Données** : une formule  $\mathcal{F}$ , un atome (symbole) A

**Question**: a-t-on  $\mathcal{F} \models A$ ?

- Si  $\mathcal{F}$  est une formule propositionnelle quelconque, ou une conjonction de clauses (CNF), ce problème est co-NP-complet ( $\mathcal{F} \nvDash A$  est NP-complet)
- Si  $\mathcal{F}$  est une base de connaissances avec des règles conjonctives positives : le problème devient polynomial, et même linéaire en la taille de  $\mathcal{F}$  puisque le chaînage avant (ou arrière) est adéquat et complet
- Si  $\mathcal{T}$  est une base de connaissances avec des règles conjonctives (avec littéraux) : le problème est aussi difficile que si  $\mathcal{T}$  était une CNF car toute CNF peut être vue comme une base de connaissances (BF, BR) où BF est éventuellement vide

#### Donc ...

Puisque le chaînage avant est incomplet pour les règles avec négation

n'est-il donc utilisable que sur des règles positives ?

Cela dépend de quelle négation on parle!

Ceci est lié à deux façons de voir les connaissances représentées :

- Hypothèse du monde ouvert
- Hypothèse du monde clos

### Deux visions de la connaissance représentée

Hypothèse du monde clos (Closed World Assumption)

On suppose qu'on a une connaissance complète de la réalité représentée

Exemple : liste des formations offertes par l'université

=> si une formation est absente cette liste, c'est qu'elle n'est pas offerte par l'université

Hypothèse du monde ouvert (Open World Assumption)

On suppose qu'on a une connaissance incomplète de la réalité représentée

Exemple : liste des témoins d'un accident

- ⇒ si quelqu'un n'est pas dans cette liste, ça ne veut pas forcément dire qu'il n'a pas été témoin
- ⇒ pour affirmer que ce n'est pas un témoin, il faut le prouver

### Hypothèse du monde ouvert

La base de connaissances décrit une réalité qu'on ne connait que partiellement

Si une information ne « découle » pas de la base de connaissance, ça ne veut pas dire qu'elle est fausse : elle est inconnue

Ceci correspond à la conséquence logique classique : on considère tous les mondes possibles compatibles avec la base de connaissances, c'est-à-dire tous ses modèles

$$BF = \{A, \neg B\} \text{ et } BR = \{B \rightarrow C\}$$

$$K \models A, K \models \neg B$$
 et on ne sait rien sur C

BF = {A} et BR = { 
$$B \rightarrow C$$
;  $\neg B \rightarrow C$ }

$$K \models A, K \models C$$
 et on ne sait rien sur B

### Hypothèse du monde clos

La base de connaissances décrit une réalité complètement connue

Une information est considérée comme fausse si rien n'indique (on ne peut pas prouver) qu'elle est vraie

$$BF = \{A, \neg B\} \text{ et } BR = \{B \rightarrow C\}$$

Poser ¬B dans BF n'a pas de sens ici

$$\mathsf{BF} = \{\mathsf{A}\} \qquad \text{et } \mathsf{BR} = \{\mathsf{B} \to \mathsf{C}\}$$

A est vrai, B et C sont faux (car rien n'indique qu'ils sont vrais)

$$\mathsf{BF} = \{\mathsf{A}\} \; \mathsf{et} \; \mathsf{BR} = \{\; \mathsf{B} \to \mathsf{C}; \; \neg \mathsf{B} \to \mathsf{C}\}$$

A est vrai, rien n'indique que B est vrai donc B est faux, donc C est vrai

Par la suite, not désignera la négation du monde clos, ou négation par l'échec, par défaut

¬A est vrai si on a une preuve de ¬A

not A est vrai si on n'a pas de preuve de A