Théorie des langages formels

1. Sous-monoïde

Soit le vocabulaire V donné par $V = \{a_1, a_2, ..., a_s\}$ avec s entier naturel non nul.
Les ensembles suivants, munis de l'opération de concaténation et de ε la chaine vide, forment-ils des sous-monoïdes de V^* ?

- A : ensemble des chaînes de longueur paire.
- B : ensemble des chaînes de longueur impaire.
- $C = \{ (a_1a_2)^n$, n entier naturel et $(a_1a_2)^n = a_1a_2a_1a_2\ldots a_1a_2 \}$
- $D = \{a_1^n a_2^n$, n entier naturel et $a_1^n a_2^n = a_1a_1\ldots a_1\, a_2a_2\ldots a_2\}$
- E : ensemble des chaînes contenant a_1 et a_2 en nombre identique.

2. Génération

Pour chacune des grammaires suivantes :

- donner son type,
- générer deux chaînes terminales à l'aide de dérivations successives,
- préciser les longueurs des deux chaînes précédentes,
- donner les arbres de dérivation associés aux deux chaînes précédentes dans le cas où la grammaire est de type 2 ou 3.

G_1 = ({a, b, c}, {S}, S, {	S $\rightarrow$ a S b S a
	S $\rightarrow$ c })
G_2 = ({a, b, ch, d}, {S, A, B, C}, S,{	S $\rightarrow$ BCaCbbA
	A $\rightarrow$ CaCbbA | ε
	Ca $\rightarrow$ ba
	Cbb $\rightarrow$ da
	B $\rightarrow$ cha })
G_3 = ({cha, bada}, {S, A}, S,{	S $\rightarrow$ chaA
	A $\rightarrow$ badaA | bada })
G_4 = ({a, b}, {S, A}, S,{	S $\rightarrow$ Aa | bA
	A $\rightarrow$ Sa | bS })
G_5 = ({a, b, c}, {S, A, B}, S,{	S $\rightarrow$ AB
	A $\rightarrow$ aA
	B $\rightarrow$ Bb
	AB $\rightarrow$ cABc | cc })

3.

Soit la grammaire :

G : ({a, b, ..., z, +, (,)}, {S, somme, produit, facteur, terme}, S,
{ S $\rightarrow$ somme
produit $\rightarrow$ produit facteur
produit $\rightarrow$ facteur
facteur $\rightarrow$ (somme)
facteur $\rightarrow$ terme
somme $\rightarrow$ somme+ produit
somme $\rightarrow$ produit
terme $\rightarrow$ a | b | c | ... | y | z })

1. Donner l'arbre de dérivation de la chaîne 'ab + (a + b) c + a (bc)'.
2. En cherchant l'arbre de dérivation de la chaîne 'a + ()', justifier sa non-appartenance au langage engendré par la grammaire ci-dessus.
3. Modifier la grammaire pour qu'elle prenne en compte les opérations '-' et '/', dont les propriétés sont respectivement égales à celles de l'addition et du produit. Pour cette nouvelle grammaire, donner l'arbre de dérivation de la chaîne 'a / (d + e - f)'

4.

Donner le type de ces grammaires, justifier.
Préciser le langage engendré les grammaires régulières ou hors-contexte.

G1 = ({a, b}, {S, A, B}, S, {	S $\rightarrow$ a A B	
	B $\rightarrow$ S A,	b B $\rightarrow$ a
	A a $\rightarrow$ S a b,	A b $\rightarrow$ S B b})
G2 = ({╱, ╲}, {S, A, U, V}, S, {	S $\rightarrow$ U A V | U V,	A $\rightarrow$ V S U | V U
	U $\rightarrow$ ╱ ,	V $\rightarrow$ ╲ })
G3 = ({a, b}, {S, A, B, C}, S, {	S $\rightarrow$ a S | b S | a A | b B	
	A $\rightarrow$ a C | a	
	B $\rightarrow$ b C | b	
	C $\rightarrow$ a C | b C | a | b})	
G4 = ({a}, {S, A, B}, S, {	S $\rightarrow$ a A B	
	A $\rightarrow$ S A | S	
	B $\rightarrow$ a	})
G5 = ({a, b}, {S, S1}, S, {	S $\rightarrow$ ε | S1	
	S1 $\rightarrow$ a S1 | b	})
G6 = ({a, b}, {S, S1}, S, {	S $\rightarrow$ ε | S1 | ab	
	S1 $\rightarrow$ a S1 b | ab	})
G7 = ({a, b}, {S, S1}, S, {	S $\rightarrow$ ε | S1	
	S1 $\rightarrow$ a S1 b | ε	})
G8 = ({a, b}, {S}, S, {	S $\rightarrow$ ε | a S | b	})

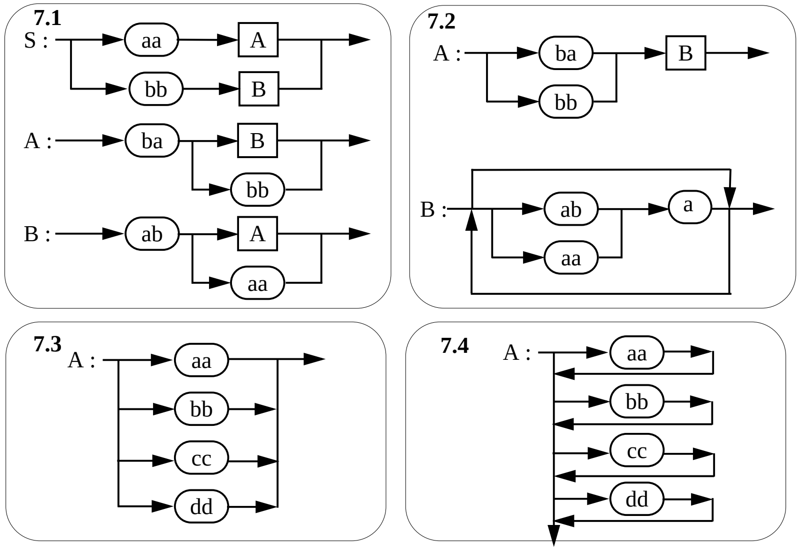
5.

Donner une grammaire pour les langages suivants. Préciser son type.

1. $V_T = \{a, b\}$ $L = \{w \in V_T^* \mid w = a^n b^n \text{ avec } n > 0\}$
2. $V_T = \{a, b, c\}$ $L = \{w \in V_T^* \mid w = a^m b^n c^p \text{ avec } m > 0, n > 0 \text{ et } p > 0\}$
3. $V_T = \{a, b, c\}$ $L = \{w \in V_T^* \mid w = a^n b^n c^p \text{ avec } n > 0 \text{ et } p > 0\}$
4. $V_T = \{a, b, c\}$ $L = \{w \in V_T^* \mid w = a^p b^q c^r \text{ avec } (p = q \text{ ou } q = r) \text{ et } p > 0 \text{ et } q > 0 \text{ et } r > 0\}$
5. $V_T = \{a, c\}$ $L = \{w \in V_T^* \mid w = a^m c\, a^p \text{ avec } m \geq p > 0\}$
6. $V_T = \{a, b\}$ $L = \{w \in V_T^* \mid w = a^p b^q \text{ avec } p \neq q \text{ et } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0\}$
7. $V_T = \{a, b, c\}$ $L = \{w \in V_T^* \mid w = a^p b^q c^r \;;\; p + q \geq r \;;\; p > 0, q > 0 \text{ et } r \geq 0\}$

6.

Traduire ces diagrammes de Conway en une grammaire hors-contexte ou régulière. Donnez-la sous la forme BNF. Dans le cas où il s'agit d'une grammaire régulière, donner l'expression régulière correspondante..

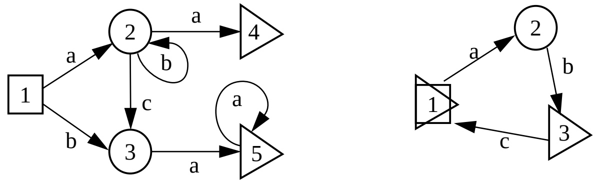


7.

Soit le vocabulaire V = {a, +, =}.
Donner une grammaire hors-contexte pour le langage L dont chaque chaîne représente une addition correcte de deux suites de caractères a.
Par exemple : aa + aaa = aaaaa.

8.

Soient les automates déterministes à états finis donnés par les figures suivantes :



automate 1 automate 2

Donner quatre chaînes reconnues par ces automates.

Ecrire les grammaires régulières correspondantes, ainsi que les expressions régulières.

9.

Construire les automates déterministes à états finis associés aux grammaires suivantes :

G1 = ({a, b}, {S}, S, { $S \rightarrow a\,S \mid b\,S \mid a \mid b$ })

G2 = ({aa, b, c, d}, {S, A, B, C}, S, { $S \rightarrow aa\,S \mid b\,S \mid c\,A \mid d\,B$
$A \rightarrow c\,C \mid c$
$B \rightarrow d \mid d\,C$
$C \rightarrow c\,C \mid d\,C \mid c \mid d$ })

G3 = ({a, b}, {S, S1}, S, { $S \rightarrow S1 \mid a \mid b \mid \varepsilon$
$S1 \rightarrow a\,S1 \mid b\,S1 \mid a \mid b$ })

10.

Construire les automates déterministes à états finis associés aux expressions régulières suivantes :

1. $V_T = \{a, b\}$ a^+b^*
2. $V_T = \{a, b\}$ $(ab)^*$
3. $V_T = \{a, b\}$ $(ab)^+$
4. $V_T = \{a, b\}$ $a(b^?c)^*d^+$