TD 4 – Méthode de résolution

Exercice 1 – Montrez que l'on peut produire la clause vide par la méthode de résolution à partir la forme clausale suivante :

$$F=\{\{a1,a2,a3\},\{b1,b2,b3\},\{\neg a1,\neg b1\},\{\neg a2,\neg b2\},\{\neg a3,\neg b3\},\{\neg b1\},\{\neg a1,\neg b3\},\{\neg a2,\neg b3\},\{\neg b2,a2\}\}$$

Exercice 2 – Démontrez par la méthode de résolution que : $\{a\rightarrow b, (c\wedge d)\rightarrow a, e\rightarrow c, d\wedge e\} \models b$

Exercice 3 – Montrez à l'aide de la méthode de résolution que $\neg p$ ne peut pas se déduire de $\{(p \rightarrow (q \vee r)) , (q \rightarrow (r \rightarrow s)) , \neg s\}$ c'est-à-dire que : $\{(p \rightarrow (q \vee r)) , (q \rightarrow (r \rightarrow s)) , \neg s\} \not\models \neg p$.

Exercice 4 – Grâce à la méthode de résolution, déterminez si la formule suivante est satisfiable ou non :

$$(A\vee B) \wedge (A\vee\neg B\vee C) \wedge (A\vee\neg B\vee\neg C) \wedge (\neg A\vee B\vee C) \wedge (\neg A\vee\neg B\vee D) \wedge (\neg A\vee\neg D) \wedge (D\vee\neg A\vee\neg C)$$

Exercice 5 - Après mise sous forme clausale, utilisez la méthode de résolution avec la stratégie en largeur (cf. algorithme vu en cours) pour dire si les formules suivantes sont satisfiables ou non :

$$((\neg(b\wedge a) \rightarrow (a\leftrightarrow b)) \wedge \neg(\neg a\vee b))$$

$$((\neg p\wedge(\neg q\vee r))\vee(p\rightarrow(q\wedge\neg r)))\wedge(p\leftrightarrow\neg q)$$

Exercice 6 – Montrez que les formule suivante est valide à l'aide de la méthode de résolution :

$$((a\vee b)\rightarrow(a\vee c))\rightarrow(a\vee(b\rightarrow c))$$

Exercice 7 –Soit les formules bien formées suivantes de la logique des propositions :

$A = \neg(q\wedge\neg r)\wedge(p\rightarrow q\vee(r\wedge\neg p))$

$B = (\neg(r\rightarrow s)\vee\neg p)\vee(r\wedge s)$

1. Calculez les valeurs de vérité de A et B pour l'interprétation I suivante : I(p)=1, I(q)=0, I(r)=1 et I(s)=1. Que peut-on en conclure sur A et B ?
2. Mettre A sous forme clausale.
3. Montrez par la méthode de résolution que B se déduit logiquement de A ($A \models B$).

Exercice 8 – On a démontré en cours que la règle de résolution est une règle d'inférence, c'est-à-dire que si C_r est produite par résolution à partir de C_1 et C_2 alors $\{C_1, C_2\} \models C_r$. Soit F une forme clausale et C une clause, démontrez que si C est dérivable de F par une séquence de résolution ($F \vdash_{res} C$) alors $F \models C$, par induction sur la longueur de la dérivation. En déduire, l'adéquation de la méthode de résolution, c'est-à-dire que s'il existe une dérivation qui permet de produire la clause vide à partir de F ($F \vdash_{res} \emptyset$) alors F est insatisfiable.

Exercice 9 – Le résultat de la méthode de résolution est : « une forme clausale *F* est insatisfiable ssi il existe une résolution de *F* terminant par la clause vide (une telle résolution est appelée réfutation) ». Mais comment obtenir une réfutation ? Un moyen simple consiste à calculer toutes les résolvantes possibles. L'ensemble des résolvantes possibles étant fini cette stratégie garantit de ne pas rater la clause vide (on dit que la stratégie est complète). Mais elle est coûteuse. Nous proposons ici d'autres stratégies :

- Une première stratégie est la unit-résolution qui ne calcule les résolvantes qu'entre une clause unitaire et une clause quelconque.
  - Appliquez l'unit-résolution aux clauses $\{a\vee c , \neg a\vee b , \neg c , \neg b\}$
  - L'unit-résolution est-elle complète ?

- Une seconde stratégie possible, la résolution en largeur, construit à partir d'une forme clausale F, la séquence de formes clausales $S_0, S_1, \dots S_n$ où :
  - $S_0 = F$,
  - Pour tout i appartenant à [0..n-1], S_{i+1} est l'ensemble des résolvantes de clauses de S_i.

  On ne calcule donc les résolvantes qu'entre clauses produites à l'étape précédente.
  - Calculez la séquence produite par les clauses précédentes ;
  - Cette stratégie est-elle complète ?

Exercice 10 – Définition : une clause est une clause de Horn si elle contient au plus un littéral positif. Une forme clausale est de Horn si elle ne contient que des clauses de Horn. Exemple $(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge p\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$ est une forme clausale de Horn.

- Donnez un exemple de forme clausale de Horn insatisfiable.
- Donnez un modèle de la forme clausale de Horn : $(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee\neg p)$.
- Montrez que si toutes les clauses d'une forme clausale de Horn contiennent au moins 2 littéraux, alors cette forme clausale possède au moins un modèle.
- Soient C1 et C2 2 clauses de Horn « résolvables ». Que peut-on dire de la résolvante de C1 et C2 ?
- Que peut-on alors conclure de l'utilisation de la unit-résolution sur une forme clausale de Horn ?