II. Opérations sur les DL.

semaine du 23 mars 2020

Dans cette seconde partie, nous abordons les théorèmes généraux sur les développements limités, c'est-à-dire les opérations licites.

Combinaisons Linéaires

Soient des réels λ et μ. Soient des fonctions f et g définies sur un voisinage I de 0, ayant des développements limités quand $x \to 0$: $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + o(x^m)$ *et* $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j + o(x^n)$.

Théorème

$\lambda.f(x) + \mu.g(x) = \sum_{k=0}^{\ell} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + o(x^\ell)$, *où* $\ell = \min\{m, n\}$.

La fonction $\lambda.f + \mu.g$ admet donc un développement limité en 0.

Remarques : si f et g sont suffisamment régulières, la formule de Taylor leur fournit de tels développements limités. Aussi :

- la combinaison se généralise à plus de 2 termes (récurrence) ;
- nous avons un résultat similaire avec la notation O.

Exemple : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ et $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$, quand $x \to 0$; d'où $ch(x) = (e^x + e^{-x})/2 = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ quand $x \to 0$; *idem* pour $sh(x) = (e^x - e^{-x})/2 = x + O(x^3)$, $x \to 0$.

Primitive

Soit une fonction f, définie et **continue** sur un voisinage 0, ayant un développement limité quand $x \to 0$: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n)$.

Théorème

Au voisinage de 0, toute primitive F de f admet le développement limité à l'ordre $n+1$: $F(x) = F(0) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{j} x^j + o(x^{n+1})$.

Remarques :

- L'hypothèse de continuité permet le calcul intégral (Riemann).
- Il existe un résultat similaire avec la notation "O".
- On ne dérive pas un développement limité !

Exemple : quand $x \to 0$, on peut obtenir le développement limité de $Ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ (à l'ordre 3) avec $Sh(x) = x + O(x^3)$ (primitive), mais pas en dérivant $Sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5)$...

Logarithme et Arctan

- La fonction $\ln(1-x)$, quand $x \to 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, partons de $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i + O(x^n)$; il vient :
$$-\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} + O(x^{n+1}), \text{ quand } x \to 0.$$
- Remplaçons x par $-x$. Nous obtenons pour tout $n \geqslant 1$:
$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} + O(x^{n+1}), \text{ quand } x \to 0.$$
- Remplaçons x par $-x^2$: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j} + O(x^{2(n-2)})$.
$$Arctan(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + O(x^{2n+3}), \text{ quand } x \to 0.$$
- De même, nous avons pour tout $n \geqslant 1$:
$$Argth(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + O(x^{2n+3}), \text{ quand } x \to 0.$$

Produit

Soient des fonctions f et g définies sur un voisinage I de 0, ayant des développements limités quand $x \to 0$:
$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + o(x^m)$ et $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j + o(x^n)$.

Théorème

Le produit $f(x).g(x)$ admet un développement limité quand $x \to 0$ à l'ordre $\ell = \min\{n, m\}$: $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\ell} c_k x^k + o(x^\ell)$,

$c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, etc ; sauf qu'il convient d'ignorer les termes $a_i b_j x^{i+j}$ quand $i + j > \ell$.

Exemple. Quand $x \to 0$, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. D'où le développement limité :
$\sin(x)\cos(x) = (0).1 + (0.1 + 1.1)x + (0.\frac{-1}{2} + 1.0 + 0.1)x^2 + (0.0 + 1.\frac{-1}{2} + 0.0 + \frac{-1}{6}.1) + (0.\frac{1}{24} + 1.0 + 0.\frac{-1}{2} + \frac{-1}{6}.0 + 0.1)x^4 + o(x^4)$
$= x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$ (ordre 4, $x \to 0$). À comparer avec $\sin(2x)$...

Composition

Soient des fonctions f et g définies sur un voisinage I de 0, ayant des développements limités quand $x \to 0$, à l'ordre m et n resp. : $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + o(x^m)$ et $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j + o(x^n)$.

Théorème

Si $g(0) = 0$ ($b_0 = 0$), $f \circ g$ admet un développement limité quand $x \to 0$ à l'ordre $\ell = \min\{n, m\}$: $f(g(x)) = \sum_{k=0}^{\ell} c_k x^k + o(x^\ell)$.

Les coefficients c_k s'obtiennent avec la composition polynomiale $P(Q(x))$ (où $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, $Q = \sum_{j=1}^{n} b_j X^j$) ; mais il convient de ranger dans $o(x^\ell)$ les termes de degré $> \ell$.

Exemple. Développement limité de $e^{\cos x}$ quand $x \to 0$ (ordre 2). Nous avons : $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand $x \to 0$, mais $\cos 0 \neq 0$... Il faut donc utiliser $g(x) = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$: $e^{\cos x} = e^1 e^{g(x)} = e(1 + g(x) + \frac{g(x)^2}{2} + o(g(x)^2) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^2)$.

Soit une fonctions f, définie sur un voisinage I de 0, ayant un développements limité quand $x \to 0$ ("o" ou "O").

Théorème

Si $f(0) \neq 0$, $1/f(x)$ admet un développement limité, quand $x \to 0$.

Preuve. Quitte à factoriser, on suppose $f(0) = 1$; la réécriture $1/f = i \circ (f - 1)$, avec $i(x) = \frac{1}{1+x}$, ramène le calcul du développement limité de $1/f$ à celui d'une composition. Notons que l'ordre du développement limité de $1/f(x)$ est celui de $f(x)$.
Exemple : développement limité de $1/\cos x$ ($x \to 0$, ordre 2). Nous avons : $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $i(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.
$\frac{1}{\cos x} = i(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) = 1 - (-\frac{x^2}{2})^1 + (-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Quotient

Soient des fonctions f et g définies sur un voisinage I de 0, ayant des développements limités quand $x \to 0$, à l'ordre m et n.

Théorème

Si $g(0) \neq 0$, $f(x)/g(x)$ admet un développement limité, quand $x \to 0$, à l'ordre $\ell = \min\{n, m\}$.

Avec l'inverse, nous disposons déjà d'une stratégie pour obtenir ce résultat : si $g(0) = 1$ alors $f/g = f.(i \circ (g-1))$, où $i(x) = \frac{1}{1+x}$.
Une seconde stratégie consiste à effectuer la division "puissance croissante" des polynômes de nos développements limités.
Exemple : $\tan = \sin/\cos$, en 0, à l'ordre 3. Quelques rappels : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. La division donne : $x - \frac{x^3}{6} = x(1 - \frac{x^2}{2}) + \frac{x^3}{3}$ et $\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}(1 - \frac{x^2}{2}) + \frac{x^5}{6}$, soit $x - \frac{x^3}{6} = (x + \frac{x^3}{3})(1 - \frac{x^2}{2}) + \frac{x^5}{6}$. De là : $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Tangentes

Nous disposons de plusieurs méthodes pour obtenir les développements limités de la fonction tangente (en 0) : formule de Taylor, quotient de sin par cos (inverse, "puissance décroissante").

Théorème

$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$, *quand* $x \to 0$. *(ordre 6)*

Une autre méthode, récursive, utilise la dérivée : $\tan' = 1 + \tan^2$; admettons que nous ayons déjà $\tan(x) = x + O(x^3)$ (ordre 2) ; la dérivée se récrit : $\tan(x)' = 1 + (x + O(x^3))^2 = 1 + x^2 + O(x^4)$; on intègre, $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)$: ordre 4. Et on peut réitérer ! Ce procédé rapide s'applique aussi à $Th = Sh/Ch$ ($Th' = 1 - Th^2$) :

Théorème

$Th(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$, *quand* $x \to 0$. *(ordre 6)*