De la combinatoire aux graphes (HLIN201) – L1

Graphes III : cheminement orienté

Sèverine Bérard

Université de Montpellier

2^{e} semestre 2017-18

Graphes III : cheminement orienté

Cheminement orienté

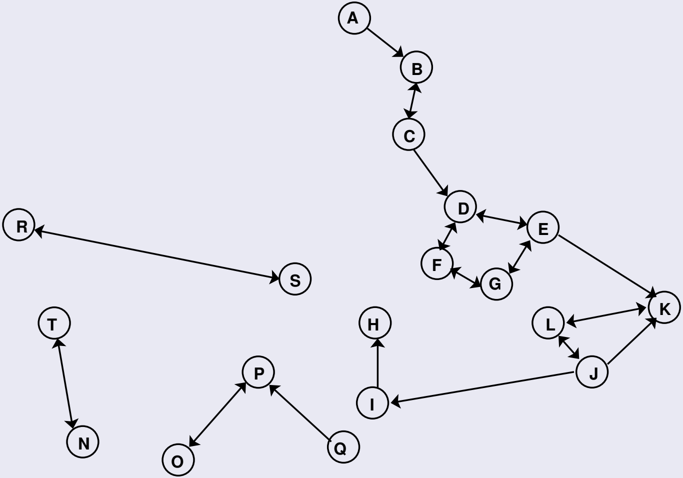


FIGURE – Graphe du plan des pistes de Montpellier avec orientation

Quels cheminements orientés ?

Questions posées

- Existe-t-il un cheminement pour aller de A à H ?
- `(A,B,C,D,E,G,F,D,E,K,L,J,I,H)` va bien de `A` à `H`. Mais le trajet n'a pas l'air optimal. On peut faire mieux ?
- Quels sont les points que l'on peut atteindre depuis le point D, et desquels on peut revenir en D ?

Toutes ces questions se modélisent en termes de *marches orientées*.

Questions posées

- Existe-t-il un cheminement pour aller de A à H ?
- `(A,B,C,D,E,G,F,D,E,K,L,J,I,H)` va bien de `A` à `H`. Mais le trajet n'a pas l'air optimal. On peut faire mieux ?
- Quels sont les points que l'on peut atteindre depuis le point D, et desquels on peut revenir en D ?

Toutes ces questions se modélisent en termes de *marches orientées*.

Quels cheminements orientés ?

Questions posées

- Existe-t-il un cheminement pour aller de A à H ?
- `(A,B,C,D,E,G,F,D,E,K,L,J,I,H)` va bien de `A` à `H`. Mais le trajet n'a pas l'air optimal. On peut faire mieux ?
- Quels sont les points que l'on peut atteindre depuis le point D, et desquels on peut revenir en D ?

Toutes ces questions se modélisent en termes de *marches orientées*.

Quels cheminements orientés ?

Questions posées

- Existe-t-il un cheminement pour aller de A à H ?
- `(A,B,C,D,E,G,F,D,E,K,L,J,I,H)` va bien de `A` à `H`. Mais le trajet n'a pas l'air optimal. On peut faire mieux ?
- Quels sont les points que l'on peut atteindre depuis le point D, et desquels on peut revenir en D ?

Toutes ces questions se modélisent en termes de *marches orientées*.

Quels cheminements orientés ?

Questions posées

- Existe-t-il un cheminement pour aller de A à H ?
- `(A,B,C,D,E,G,F,D,E,K,L,J,I,H)` va bien de `A` à `H`. Mais le trajet n'a pas l'air optimal. On peut faire mieux ?
- Quels sont les points que l'on peut atteindre depuis le point D, et desquels on peut revenir en D ?

Toutes ces questions se modélisent en termes de *marches orientées*.

Graphes III : cheminement orienté

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \ldots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \dots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \dots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \ldots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \ldots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \ldots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \ldots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

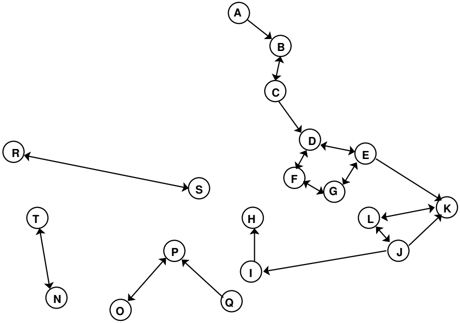
- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \ldots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Marches orientés

Définitions $G = (X, U)$ est un graphe orienté.

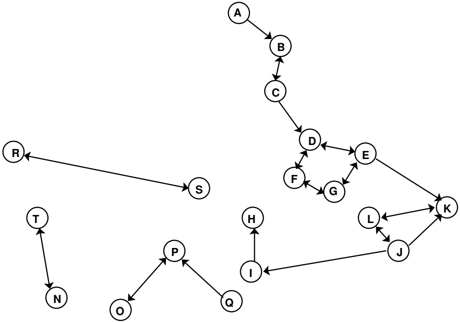
- Une marche orientée de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h)$ de sommets de G. Chaque $(x_i, x_{i+1}) \in U$
- La marche orientée w passe par l'arc (x_i, x_{i+1}), x_i et x_{i+1} sont consécutifs dans w
- x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
- On note ab–marche orientée une marche orientée d'origine a et d'extrémité b
- La marche orientée $w' = (x'_0, \ldots, x'_k)$ est extraite de w si ses sommets sont des sommets de w (pas forcément tous) dans le même ordre et si chaque arc (x'_i, x'_{i+1}) est un arc de w
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas deux fois par le même sommet (*chemin orienté*)
- Une marche orientée est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G.
- Une marche orientée est hamiltonienne si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G.

Exemples

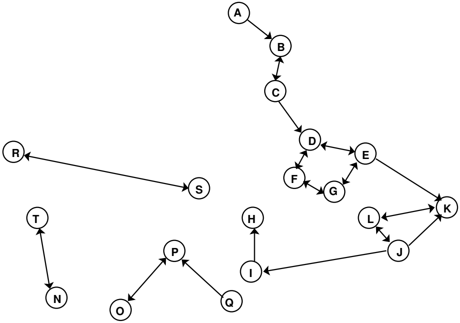


- $w_1 = (D, E, G, F, D, E, K, L, J, K)$ est une DK–marche orientée, de longueur 9. Elle passe 2 fois par l'arc (D, E).
- $w_2 = (D, E, K, L, J, K)$, $w_3 = (D, E, K)$ sont des [illegible]–marches orientées [illegible] de [illegible] et de longueur 5 et 2 respectivement.
- Y a-t-il une chaîne parmi w_1, w_2 et w_3 ?

Exemples



- $w_1 = (D, E, G, F, D, E, K, L, J, K)$ est une DK–marche orientée, de longueur 9. Elle passe 2 fois par l'arc (D, E).
- $w_2 = (D, E, K, L, J, K)$, $w_3 = (D, E, K)$ sont des
- Y a-t-il une chaîne parmi w_1, w_2 et w_3 ?

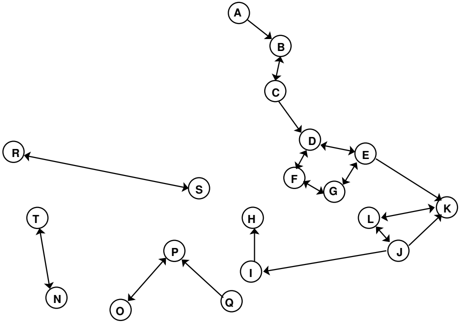


- $w_1 = (D, E, G, F, D, E, K, L, J, K)$ est une DK–marche orientée, de longueur 9. Elle passe 2 fois par l'arc (D, E).

- $w_2 = (D, E, K, L, J, K)$, $w_3 = (D, E, K)$ sont des DK–marches orientées extraites de w_1 et de longueur 5 et 2 respectivement.

- Y a-t-il une chaîne parmi w_1, w_2 et w_3 ?

Exemples

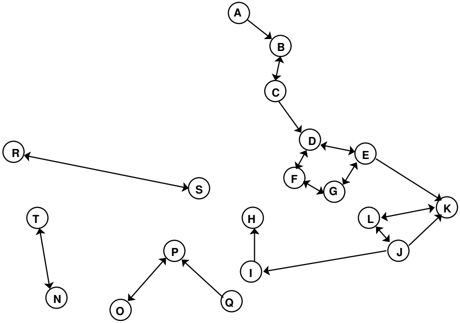


- $w_1 = (D, E, G, F, D, E, K, L, J, K)$ est une DK–marche orientée, de longueur 9. Elle passe 2 fois par l'arc (D, E).

- $w_2 = (D, E, K, L, J, K)$, $w_3 = (D, E, K)$ sont des DK–marches orientées extraites de w_1 et de longueur 5 et 2 respectivement.

- Y a-t-il une chaîne parmi w_1, w_2 et w_3 ?

Exemples



- $w_1 = (D, E, G, F, D, E, K, L, J, K)$ est une DK–marche orientée, de longueur 9. Elle passe 2 fois par l'arc (D, E).
- $w_2 = (D, E, K, L, J, K)$, $w_3 = (D, E, K)$ sont des DK–marches orientées extraites de w_1 et de longueur 5 et 2 respectivement.
- Y a-t-il une chaîne parmi w_1, w_2 et w_3 ?

Propriété (Chaînes extraites)

Soient x et y deux sommets de $G = (X, U)$. De toute xy–marche orientée w, on peut extraire une xy–chaîne.

Preuve : C'est la même que pour les chemins (cf. cours cheminement non orienté).

□

Il n'y a pas unicité des xy–chaînes extraites d'une même marche orientée.

Propriété (Chaînes extraites)

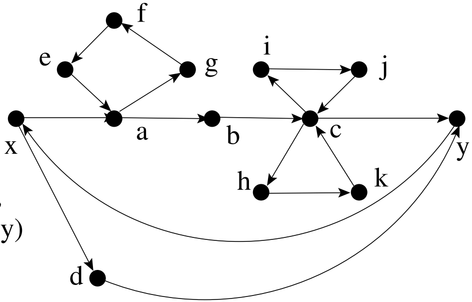
Soient x et y deux sommets de $G = (X, U)$. De toute xy–marche orientée w, on peut extraire une xy–chaîne.

Preuve : C'est la même que pour les chemins (cf. cours cheminement non orienté).

□

Remarque

Il n'y a pas unicité des xy–chaînes extraites d'une même marche orientée.



ch = (x,d,y,x,a,g,f,e,a,
b,c,i,j,c,h,k,c,y)

Propriété (Chaînes extraites)

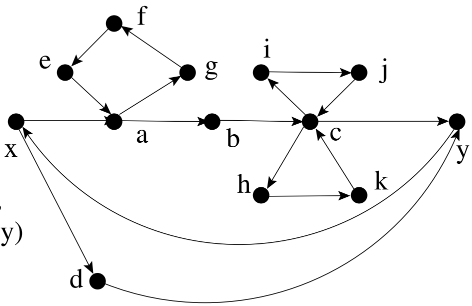
Soient x et y deux sommets de $G = (X, U)$. De toute xy–marche orientée w, on peut extraire une xy–chaîne.

Preuve : C'est la même que pour les chemins (cf. cours cheminement non orienté).

□

Remarque

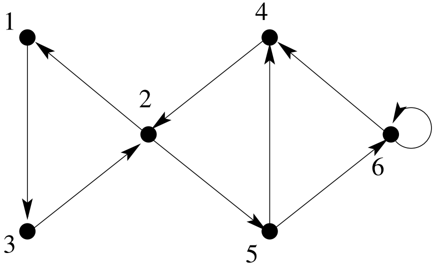
Il n'y a pas unicité des xy–chaînes extraites d'une même marche orientée.



ch = (x,d,y,x,a,g,f,e,a,
b,c,i,j,c,h,k,c,y)

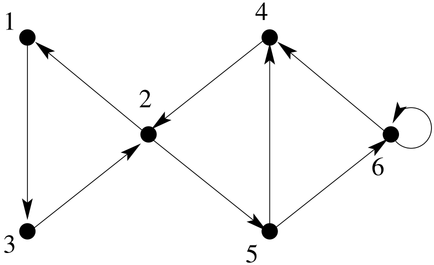
Circuits

Définitions



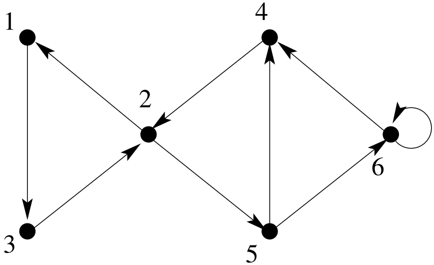
- Un circuit est une chaîne :
  - comportant au moins un arc (longueur non nulle),
  - commençant et finissant au même sommet x. C'est donc une xx–chaîne,
  - donc les arcs et les sommets sont deux à deux distincts (c'est un choix que nous faisons).
- Un circuit est invariant par rotation : (x_1, x_2, x_3, x_1), (x_2, x_3, x_1, x_2) et (x_3, x_1, x_2, x_3) sont des suites de sommets qui définissent un même circuit.

Définitions



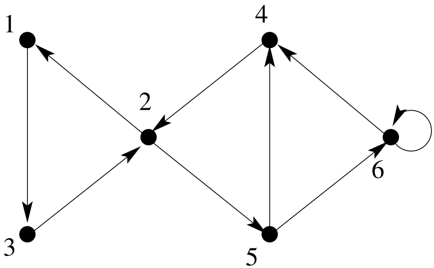
- Un circuit est une chaîne :
  - comportant au moins un arc (longueur non nulle),
  - commençant et finissant au même sommet x. C'est donc une xx–chaîne,
  - donc les arcs et les sommets sont deux à deux distincts (c'est un choix que nous faisons).
- Un circuit est invariant par rotation : (x_1, x_2, x_3, x_1), (x_2, x_3, x_1, x_2) et (x_3, x_1, x_2, x_3) sont des suites de sommets qui définissent un même circuit.

Définitions



- Un circuit est une chaîne :
  - comportant au moins un arc (longueur non nulle),
  - commençant et finissant au même sommet x. C'est donc une xx–chaîne,
  - donc les arcs et les sommets sont deux à deux distincts (c'est un choix que nous faisons).
- Un circuit est invariant par rotation : (x_1, x_2, x_3, x_1), (x_2, x_3, x_1, x_2) et (x_3, x_1, x_2, x_3) sont des suites de sommets qui définissent un même circuit.

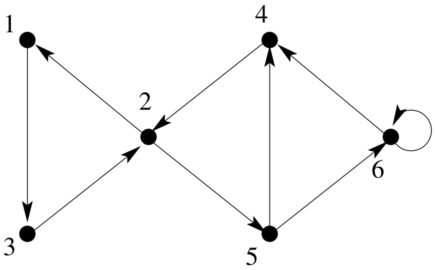
Définitions



- Un circuit est une chaîne :
  - comportant au moins un arc (longueur non nulle),
  - commençant et finissant au même sommet x. C'est donc une xx–chaîne,
  - donc les arcs et les sommets sont deux à deux distincts (c'est un choix que nous faisons).
- Un circuit est invariant par rotation : (x_1, x_2, x_3, x_1), (x_2, x_3, x_1, x_2) et (x_3, x_1, x_2, x_3) sont des suites de sommets qui définissent un même circuit.

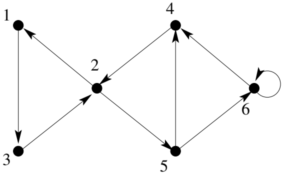
Circuits

Définitions



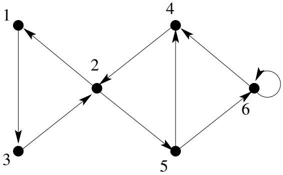
- Un circuit est une chaîne :
  - comportant au moins un arc (longueur non nulle),
  - commençant et finissant au même sommet x. C'est donc une xx–chaîne,
  - donc les arcs et les sommets sont deux à deux distincts (c'est un choix que nous faisons).
- Un circuit est invariant par rotation : $(x_1, x_2, x_3, x_1), (x_2, x_3, x_1, x_2)$ et (x_3, x_1, x_2, x_3) sont des suites de sommets qui définissent un même circuit.

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



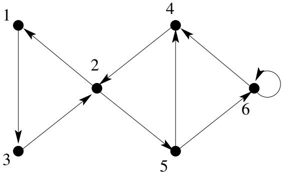
- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de c_1
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



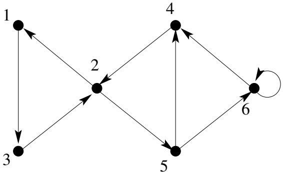
- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



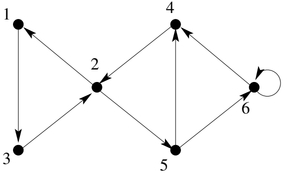
- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



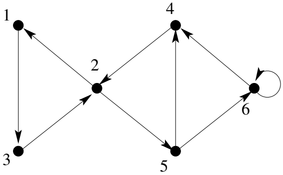
- $c_1 = (1,3,2,5,6,6,4,2,1)$ est une marche orientée fermée
- $(1,3,2,1)$ est un circuit extrait de
- $(1,2,3,1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



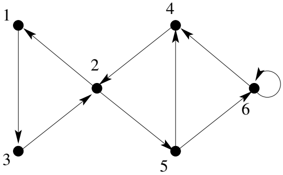
- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de c_1
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



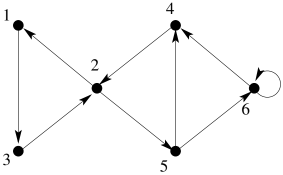
- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de c_1
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



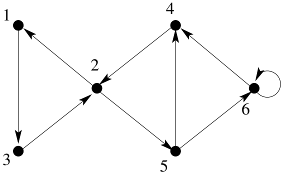
- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de c_1
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de c_1
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

- Une *marche orientée fermée* est eulérienne si elle passe exactement une fois par chaque arc de G (*tour eulérien*)
- Un *circuit* est hamiltonien s'il contient tous les sommets de G



- $c_1 = (1, 3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1)$ est une marche orientée fermée
- $(1, 3, 2, 1)$ est un circuit extrait de c_1
- $(1, 2, 3, 1)$ n'est pas une marche orientée du graphe, donc pas un circuit
- Circuit hamiltonien ? Tour eulérien ?

Définitions

Cycle

- Un cycle dans un graphe orienté est un sous-graphe de dans lequel chaque sommet est de degré (= cycle dans le graphe non orienté sous-jacent à)
- Un graphe orienté est dit sans cycle si le graphe non orienté sous–jacent est sans cycle
- Un circuit est-il un cycle ? Un cycle est-il un circuit ?

Connexe

- Un graphe orienté G est connexe ssi son graphe non orienté sous-jacent est connexe

Arbre

- Un graphe orienté est un arbre s'il est connexe et sans cycle. Autrement dit, si son graphe non orienté sous-jacent est un arbre

Définitions

Cycle

- Un cycle dans un graphe orienté G est un sous-graphe de G dans lequel chaque sommet est de degré 2 (= cycle dans le graphe non orienté sous-jacent à G)
- Un graphe orienté G est dit sans cycle si le graphe non orienté sous–jacent est sans cycle
- Un circuit est-il un cycle ? Un cycle est-il un circuit ?

Connexe

- Un graphe orienté G est connexe ssi son graphe non orienté sous-jacent est connexe

Arbre

- Un graphe orienté G est un arbre s'il est connexe et sans cycle. Autrement dit si son graphe non orienté sous-jacent est un arbre

Définitions

Cycle

- Un cycle dans un graphe orienté G est un sous-graphe de G dans lequel chaque sommet est de degré 2 (= cycle dans le graphe non orienté sous-jacent à G)
- Un graphe orienté G est dit sans cycle si le graphe non orienté sous–jacent est sans cycle
- Un circuit est-il un cycle ? Un cycle est-il un circuit ?

Connexe

- Un graphe orienté G est connexe ssi son graphe non orienté sous-jacent est connexe

Arbre

- Un graphe orienté G est un arbre s'il est connexe et sans cycle. Autrement dit, si son graphe non orienté sous-jacent est un arbre

Définitions

Cycle

- Un cycle dans un graphe orienté G est un sous-graphe de G dans lequel chaque sommet est de degré 2 (= cycle dans le graphe non orienté sous-jacent à G)
- Un graphe orienté G est dit sans cycle si le graphe non orienté sous–jacent est sans cycle
- Un circuit est-il un cycle ? Un cycle est-il un circuit ?

Connexe

- Un graphe orienté G est connexe ssi son graphe non orienté sous-jacent est connexe

Arbre

- Un graphe orienté G est un arbre s'il est connexe et sans cycle. Autrement dit, si son graphe non orienté sous-jacent est un arbre

Définitions

Cycle

- Un cycle dans un graphe orienté G est un sous-graphe de G dans lequel chaque sommet est de degré 2 (= cycle dans le graphe non orienté sous-jacent à G)
- Un graphe orienté G est dit sans cycle si le graphe non orienté sous–jacent est sans cycle
- Un circuit est-il un cycle ? Un cycle est-il un circuit ?

Connexe

- Un graphe orienté G est connexe ssi son graphe non orienté sous-jacent est connexe

Arbre

- Un graphe orienté G est un arbre s'il est connexe et sans cycle. Autrement dit si son graphe non orienté sous-jacent est un arbre

Définitions

Cycle

- Un cycle dans un graphe orienté G est un sous-graphe de G dans lequel chaque sommet est de degré 2 (= cycle dans le graphe non orienté sous-jacent à G)
- Un graphe orienté G est dit sans cycle si le graphe non orienté sous–jacent est sans cycle
- Un circuit est-il un cycle ? Un cycle est-il un circuit ?

Connexe

- Un graphe orienté G est connexe ssi son graphe non orienté sous-jacent est connexe

Arbre

- Un graphe orienté G est un arbre s'il est connexe et sans cycle. Autrement dit, si son graphe non orienté sous-jacent est un arbre

Définitions

Cycle

- Un cycle dans un graphe orienté G est un sous-graphe de G dans lequel chaque sommet est de degré 2 (= cycle dans le graphe non orienté sous-jacent à G)
- Un graphe orienté G est dit sans cycle si le graphe non orienté sous–jacent est sans cycle
- Un circuit est-il un cycle ? Un cycle est-il un circuit ?

Connexe

- Un graphe orienté G est connexe ssi son graphe non orienté sous-jacent est connexe

Arbre

- Un graphe orienté G est un arbre s'il est connexe et sans cycle. Autrement dit si son graphe non orienté sous-jacent est un arbre

Arborescence

- $Desc_G(x)$: l'ensemble des descendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy-chaîne
- $Asc_G(x)$: l'ensemble des ascendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une [illegible]
- Une racine r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$

Arborescence

- Un graphe orienté G est une arborescence si G est un arbre possédant une racine

- $Desc_G(x)$: l'ensemble des descendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy-chaîne

- $Asc_G(x)$: l'ensemble des ascendants d'un sommet x de $G = (X, U)$,

- Une racine r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$

Arborescence

- Un graphe orienté G est une arborescence si G est un arbre possédant une racine

Arborescence

- $Desc_G(x)$: l'ensemble des descendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy-chaîne

- $Asc_G(x)$: l'ensemble des ascendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une yx-chaîne

- Une racine r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$

Arborescence

- Un graphe orienté G est une arborescence si G est un arbre possédant une racine

Arborescence

- $Desc_G(x)$: l'ensemble des descendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy-chaîne

- $Asc_G(x)$: l'ensemble des ascendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une yx-chaîne

- Une racine r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$

Arborescence

- Un graphe orienté G est une arborescence si G est un arbre possédant une racine

Arborescence

- $Desc_G(x)$: l'ensemble des descendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy-chaîne

- $Asc_G(x)$: l'ensemble des ascendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une yx-chaîne

- Une racine r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$

Arborescence

- Un graphe orienté G est une arborescence si G est un arbre possédant une racine

Arborescence

- $Desc_G(x)$: l'ensemble des descendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy-chaîne

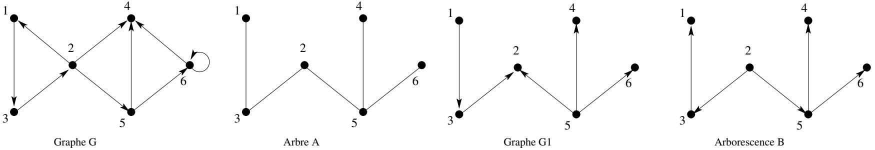
- $Asc_G(x)$: l'ensemble des ascendants d'un sommet x de $G = (X, U)$, c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une yx-chaîne

- Une racine r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$

Arborescence

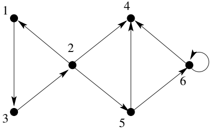
- Un graphe orienté G est une arborescence si G est un arbre possédant une racine

Exemples

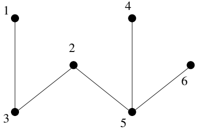


- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?
- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de est un sous-graphe de ? est une arborescence ?
- est une autre orientation de est une arborescence ?

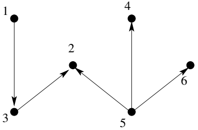
Exemples



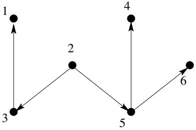
Graphe G



Arbre A

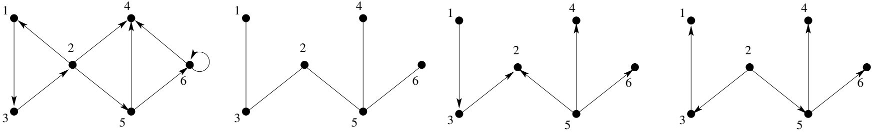


Graphe G1



Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?
- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de … est un sous-graphe de … ? … est une arborescence ?
- … est une autre orientation de … est une arborescence ?



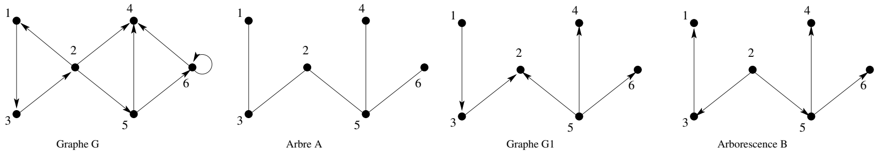
Graphe G — Arbre A — Graphe G1 — Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?

- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un

- Par rapport à A, G_1 est

Exemples



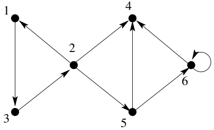
- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?

- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant

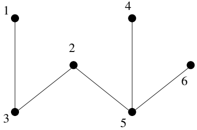
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de est un sous-graphe de est une arborescence ?

- est une autre orientation de est une arborescence ?

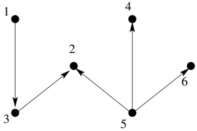
Exemples



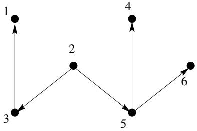
Graphe G



Arbre A



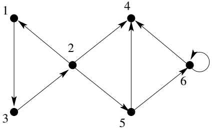
Graphe G1



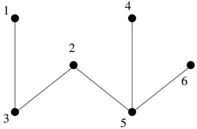
Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?
- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est

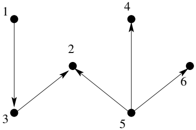
Exemples



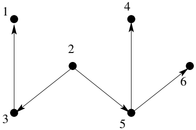
Graphe G



Arbre A



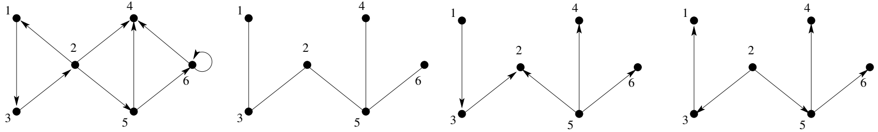
Graphe G1



Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?
- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de A. G_1 est un sous–graphe de G ? G_1 est une arborescence ?
- est une autre orientation de est une arborescence ?

Exemples

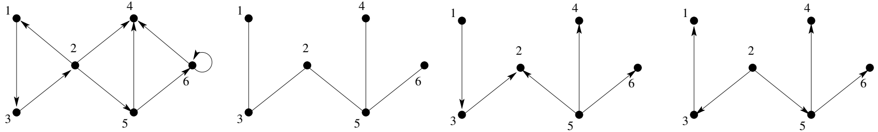


Graphe G — Arbre A — Graphe G1 — Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?

- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de A. G_1 est un sous–graphe de G ? G_1 est une arborescence ?

Exemples

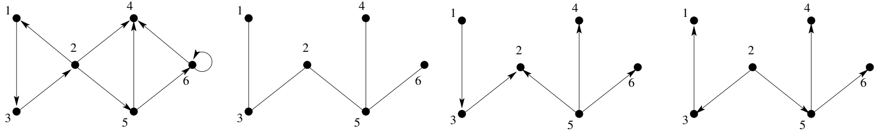


Graphe G — Arbre A — Graphe G1 — Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?

- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de A. G_1 est un sous–graphe de G ? G_1 est une arborescence ?

Exemples

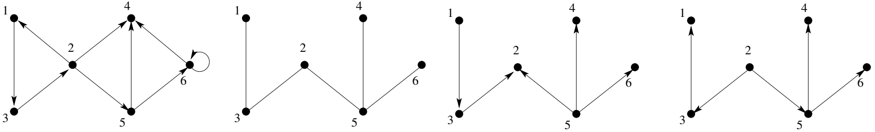


Graphe G — Arbre A — Graphe G1 — Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?

- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de A. G_1 est un sous–graphe de G ? G_1 est une arborescence ?

Exemples

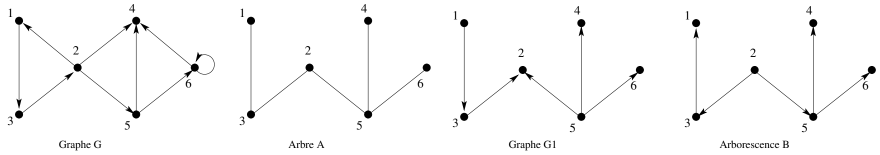


Graphe G — Arbre A — Graphe G1 — Arborescence B

- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?

- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de A. G_1 est un sous–graphe de G ? G_1 est une arborescence ?
- B est une autre orientation de A. B est une arborescence ?

Exemples



- Dans G, 2 est une racine . G est une arborescence ?
- Par rapport au graphe sous-jacent non orienté de G, A est un arbre couvrant
- Par rapport à A, G_1 est une orientation de A. G_1 est un sous–graphe de G ? G_1 est une arborescence ?
- B est une autre orientation de A. B est une arborescence ?

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne et une chaîne
dans
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent
On “renverse” ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
–marche dans , de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin)

□

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne et une chaîne
dans
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous-jacent
On "renverse" ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
–marche dans , de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin)

□

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$
On “renverse” ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
, de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On “renverse” ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
xy–marche dans G', de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin)

□

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ *possédant une racine* r *est connexe.*

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On "renverse" ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
–marche dans, de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe

□

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On "renverse" ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
xy–marche dans G', de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin).

□

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On "renverse" ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
–marche dans , de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin).

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On “renverse” ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
xy–marche dans G', de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On "renverse" ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une xy–marche dans G', de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On "renverse" ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une xy–marche dans G', de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin).

$\square$

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On “renverse” ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
xy–marche dans G', de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin)

$\square$

Propriété

Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une racine r est connexe.

Preuve : Soient x, y deux sommets quelconques.
Il existe une chaîne $c = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et une chaîne $c' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans G,
donc deux chemins $ch = (r, x_1, ..., x_p, x)$ et $ch' = (r, y_1, ..., y_q, y)$ dans le graphe non orienté sous–jacent $G' = (X, E)$.
On “renverse” ch en $ch^t = (x, x_p, ..., x_1, r)$
et on met bout à bout ch^t et ch' pour fabriquer une
xy–marche dans G', de laquelle on peut extraire un xy–chemin
donc G est connexe (puisque entre 2 sommets quelconques il y a un chemin).

$\square$

Théorème

Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ d'ordre n, les conditions suivantes sont équivalentes :

- *(i)* G *est une arborescence*
- *(ii)* G *est sans cycle et possède une racine.*
- *(iii)* G *a une racine et* $n - 1$ *arcs.*
- *(iv)* G *a une racine* r *et* $\forall\ x \in X$, *il existe une seule* rx*-marche orientée dans* G
- *(v)* G *est connexe et* $\exists\ x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\ x \neq x_0, d^-(x) = 1$
- *(vi)* G *est sans cycle et* $\exists\ x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\ x \neq x_0, d^-(x) = 1$

Caractérisation des arborescences

Théorème

Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ d'ordre n, les conditions suivantes sont équivalentes :

- *(i) G est une arborescence*
- *(ii) G est sans cycle et possède une racine.*
- *(iii) G a une racine et $n-1$ arcs.*
- *(iv) G a une racine r et $\forall\, x \in X$, il existe une seule rx-marche orientée dans G*
- *(v) G est connexe et $\exists\, x_0 \in X$ tq $d^-(x_0) = 0$ et $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$*
- *(vi) G est sans cycle et $\exists\, x_0 \in X$ tq $d^-(x_0) = 0$ et $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$*

Caractérisation des arborescences

Théorème

Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ d'ordre n, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G *est une arborescence*

(ii) G *est sans cycle et possède une racine.*

(iii) G *a une racine et* $n - 1$ *arcs.*

(iv) G *a une racine* r *et* $\forall\, x \in X$, *il existe une seule* rx*-marche orientée dans* G

(v) G *est connexe et* $\exists\, x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

(vi) G *est sans cycle et* $\exists\, x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

Caractérisation des arborescences

Théorème

Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ d'ordre n, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G *est une arborescence*

(ii) G *est sans cycle et possède une racine.*

(iii) G *a une racine et* $n - 1$ *arcs.*

(iv) G *a une racine* r *et* $\forall\, x \in X$, *il existe une seule* rx*-marche orientée dans* G

(v) G *est connexe et* $\exists\, x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

(vi) G *est sans cycle et* $\exists\, x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

Caractérisation des arborescences

Théorème

Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ *d'ordre* n*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est une arborescence*

(ii) G *est sans cycle et possède une racine.*

(iii) G *a une racine et* $n - 1$ *arcs.*

(iv) G *a une racine* r *et* $\forall\, x \in X,$ *il existe une seule* rx*-marche orientée dans* G

(v) G *est connexe et* $\exists\, x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

(vi) G *est sans cycle et* $\exists\, x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\, x \neq x_0, d^-(x) = 1$

Caractérisation des arborescences

Théorème

Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ d'ordre n, les conditions suivantes sont équivalentes :

- *(i)* G *est une arborescence*
- *(ii)* G *est sans cycle et possède une racine.*
- *(iii)* G *a une racine et* $n - 1$ *arcs.*
- *(iv)* G *a une racine* r *et* $\forall\ x \in X,$ *il existe une seule* rx*-marche orientée dans* G
- *(v)* G *est connexe et* $\exists\ x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\ x \neq x_0, d^-(x) = 1$
- *(vi)* G *est sans cycle et* $\exists\ x_0 \in X$ *tq* $d^-(x_0) = 0$ *et* $\forall\ x \neq x_0, d^-(x) = 1$

Preuves

$(i) \Rightarrow (ii)$
arborescence $\Rightarrow$ sans cycle et possède une racine

- Conséquence de la définition

$(ii) \Rightarrow (iii)$
sans cycle et possède une racine $\Rightarrow$ une racine et $n-1$ arcs

- G a une racine, il est donc connexe.
- Comme il est sans cycle et connexe, c'est
- D'après le petit théorème des arbres,
- Donc G a bien une racine et $n-1$ arcs.

Preuves

$(i) \Rightarrow (ii)$
arborescence $\Rightarrow$ sans cycle et possède une racine

- Conséquence de la définition

$(ii) \Rightarrow (iii)$
sans cycle et possède une racine $\Rightarrow$ une racine et $n-1$ arcs

- G a une racine, il est donc connexe.
- Comme il est sans cycle et connexe, c'est un arbre.
- D'après le petit théorème des arbres,
- Donc G a bien une racine et $n-1$ arcs.

Preuves

$(i) \Rightarrow (ii)$
arborescence $\Rightarrow$ sans cycle et possède une racine

- Conséquence de la définition

$(ii) \Rightarrow (iii)$
sans cycle et possède une racine $\Rightarrow$ une racine et $n-1$ arcs

- G a une racine, il est donc connexe.
- Comme il est sans cycle et connexe, c'est un arbre.
- D'après le petit théorème des arbres, $m = n - 1$.
- Donc G a bien une racine et $n - 1$ arcs.

Preuves

$(i) \Rightarrow (ii)$
arborescence $\Rightarrow$ sans cycle et possède une racine

- Conséquence de la définition

$(ii) \Rightarrow (iii)$
sans cycle et possède une racine $\Rightarrow$ une racine et $n-1$ arcs

- G a une racine, il est donc connexe.
- Comme il est sans cycle et connexe, c'est un arbre.
- D'après le petit théorème des arbres, $m = n - 1$.
- Donc G a bien une racine et $n-1$ arcs.

Preuves

$(i) \Rightarrow (ii)$
arborescence $\Rightarrow$ sans cycle et possède une racine

- Conséquence de la définition

$(ii) \Rightarrow (iii)$
sans cycle et possède une racine $\Rightarrow$ une racine et $n - 1$ arcs

- G a une racine, il est donc connexe.
- Comme il est sans cycle et connexe, c'est un arbre.
- D'après le petit théorème des arbres, $m = n - 1$.
- Donc G a bien une racine et $n - 1$ arcs.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes
- $(r, \ldots z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes
- $(r, \ldots z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n-1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes
- $(r, \ldots z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n-1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes
- $(r, \ldots z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des $y_1 x$ et $y_2 x$–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

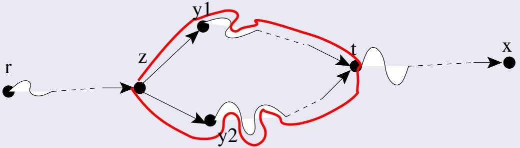
- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes
- $(r, \ldots z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$

une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes



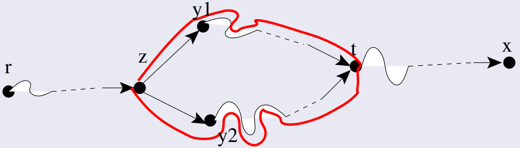
- $(r, ...z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$

une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes

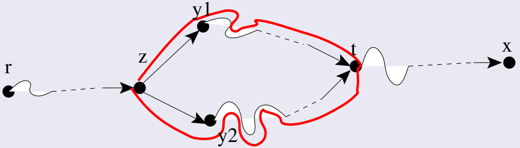


- $(r, ...z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes

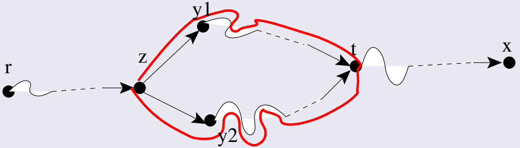


- $(r, ...z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- On a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes

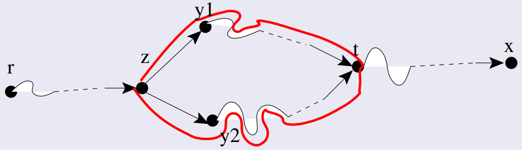


- $(r, ...z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- 0n a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$
une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes



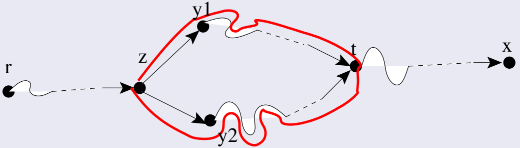
- $(r, ...z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des y_1x et y_2x–marches orientées
- 0n a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iii) \Rightarrow (iv)$

une racine et $n-1$ arcs $\Rightarrow$ une racine r et une seule rx–marche

- G a une racine, il est donc connexe.
- Connexe et $m = n - 1$, c'est donc un arbre (petit th. des arbres)
- Supposons qu'il existe au moins deux rx–marches orientées distinctes



- $(r, ...z)$ est le préfixe commun le plus long, $y_1 \neq y_2$
- t est le premier sommet commun des $y_1 x$ et $y_2 x$–marches orientées
- 0n a mis en évidence un cycle. Contradiction
- Donc il existe une seule rx–marche dans G

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe
- Soit $z \neq r$ un sommet,

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, ..., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et
- Soit $z \neq r$ un sommet,

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^-(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet,

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^{-}(x_0) = 0$ et $d^{-}(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^{-}(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet,

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$
une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^-(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet,

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^-(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet,

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^-(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet, $d^-(z) \geqslant 1$ car il existe un rz–marche orientée. Et z ne peut avoir deux prédécesseurs, sinon on aurait deux rz–marches distinctes.
  Donc tous les sommets différents de r ont un degré entrant égal à 1.

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^-(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet, $d^-(z) \geqslant 1$ car il existe un rz–marche orientée. Et z ne peut avoir deux prédécesseurs, sinon on aurait deux rz–marches distinctes.
  Donc tous les sommets différents de r ont un degré entrant égal à 1.

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^-(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet, $d^-(z) \geqslant 1$ car il existe un rz–marche orientée. Et z ne peut avoir deux prédécesseurs, sinon on aurait deux rz–marches distinctes.
  Donc tous les sommets différents de r ont un degré entrant égal à 1.

Preuves

$(iv) \Rightarrow (v)$

une racine r et une seule rx–marche $\Rightarrow$ connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- G a une racine, il est donc connexe.
- Supposons $y \neq r, y \in Pred(r)$, c-à-d qu'il existe un arc (y, r).
  Comme il existe une ry–marche orientée $(r, .., y)$, on peut construire $(r, ..., y, r, ..., y)$ un autre ry–marche orientée. Contradiction
  Donc $Pred(r) = \emptyset$, et $d^-(r) = 0$ (r est donc le sommet x_0).
- Soit $z \neq r$ un sommet, $d^-(z) \geqslant 1$ car il existe un rz–marche orientée. Et z ne peut avoir deux prédécesseurs, sinon on aurait deux rz–marches distinctes.
  Donc tous les sommets différents de r ont un degré entrant égal à 1.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de sont des chaînes, car
- Soit un sommet Une plus longue chaîne d'extrémité a pour origine
- Mais ne peut avoir de prédécesseur, sinon
- Donc
- Donc pour tout il existe une marche orientée

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de sont des chaînes, car
- Soit un sommet Une plus longue chaîne d'extrémité a pour origine
- Mais ne peut avoir de prédécesseur, sinon
- Donc
- Donc pour tout il existe une marche orientée

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de sont des chaînes, car
- Soit un sommet Une plus longue chaîne d'extrémité a pour origine
- Mais ne peut avoir de prédécesseur, sinon
- Donc
- Donc pour tout il existe une marche orientée

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de sont des chaînes, car
- Soit un sommet Une plus longue chaîne d'extrémité a pour origine
- Mais ne peut avoir de prédécesseur, sinon
- Donc
- Donc pour tout il existe une marche orientée

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de … sont des chaînes, car
- Soit … un sommet … Une plus longue chaîne d'extrémité … a pour origine
- Mais … ne peut avoir de prédécesseur, sinon
- Donc
- Donc pour tout … il existe une … marche orientée

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de sont des chaînes, car
- Soit un sommet Une plus longue chaîne d'extrémité a pour origine
- Mais ne peut avoir de prédécesseur, sinon
- Donc
- Donc pour tout il existe une marche orientée

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc $y = x_0$
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc $y = x_0$
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée.

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc $y = x_0$
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée. x_0 est la racine de G qui est connexe et sans cycle. Donc G est bien une arborescence

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc $y = x_0$
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée. x_0 est la racine de G qui est connexe et sans cycle. Donc G est bien une arborescence

$(v) \Rightarrow (vi)$

connexe et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1$

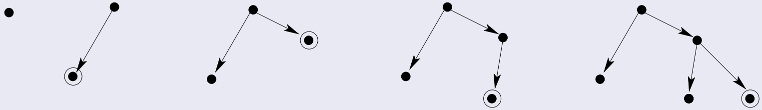
- $m = \sum d^-(x) = n - 1$, de plus G est connexe, donc G est un arbre (petit th. des arbres)
- G est un arbre donc G est sans cycle

$(vi) \Rightarrow (i)$

sans cycle et $d^-(x_0) = 0$ et $d^-(x) = 1 \Rightarrow$ une arborescence

- Toutes les marches orientées de G sont des chaînes, car G est sans cycle
- Soit x un sommet $\neq x_0$. Une plus longue chaîne d'extrémité x a pour origine y.
- Mais y ne peut avoir de prédécesseur, sinon ...
- Donc $y = x_0$
- Donc pour tout $x \neq x_0$ il existe une x_0x–marche orientée. x_0 est la racine de G qui est connexe et sans cycle. Donc G est bien une arborescence

Schéma 1



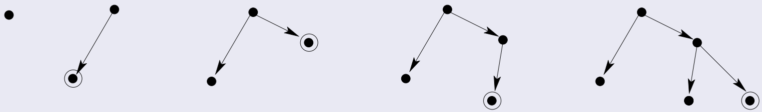
- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $A \in \mathcal{A}$ alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0 à $\mathcal{A}$ est une arborescence. En d'autres termes, si

  Ou encore si

Avec ce schéma, les arborescences d'ordre n sont exactement les graphes obtenus à partir de l'arborescence à un sommet par ajouts successifs de $n-1$ sommets de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0.

Construction inductive des arborescences

Schéma 1



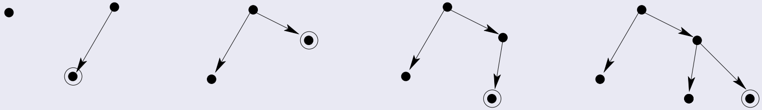
- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $A \in \mathcal{A}$ alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0 à $\mathcal{A}$ est une arborescence. En d'autres termes, si $A \in \mathcal{A}$ alors $A + x \in \mathcal{A}$ avec $d^-(x) = 1$ et $d^+(x) = 0$.

  Ou encore si $A = (X, U) \in \mathcal{A}$ alors pour un $x \notin X$ et pour tout $y \in X$, tout graphe de la forme $(X \cup \{x\}, U \cup \{(y, x)\})$ est élément de $\mathcal{A}$

Avec ce schéma, les arborescences d'ordre n sont exactement les graphes obtenus à partir de l'arborescence à un sommet par ajouts successifs de $n - 1$ sommets de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0.

Construction inductive des arborescences

Schéma 1

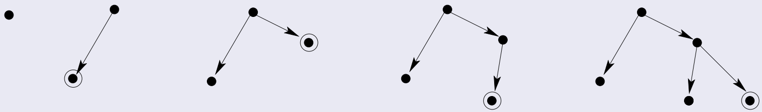


- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $A \in \mathcal{A}$ alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0 à $\mathcal{A}$ est une arborescence.
  En d'autres termes, si $A \in \mathcal{A}$ alors $A + x \in \mathcal{A}$ avec $d^-(x) = 1$ et $d^+(x) = 0$.
  Ou encore si $A = (X, U) \in \mathcal{A}$ alors pour un $x \notin X$ et pour tout $y \in X$, tout graphe de la forme $(X \cup \{x\}, U \cup \{(y, x)\})$ est élément de $\mathcal{A}$

Avec ce schéma, les arborescences d'ordre n sont exactement les graphes obtenus à partir de l'arborescence à un sommet par ajouts successifs de $n - 1$ sommets de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0.

Construction inductive des arborescences

Schéma 1

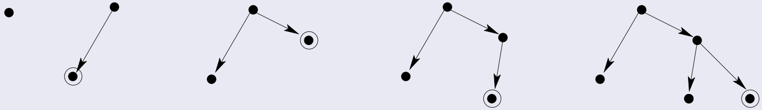


- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $A \in \mathcal{A}$ alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0 à $\mathcal{A}$ est une arborescence.
  En d'autres termes, si $A \in \mathcal{A}$ alors $A + x \in \mathcal{A}$ avec $d^-(x) = 1$ et $d^+(x) = 0$.
  Ou encore si $A = (X, U) \in \mathcal{A}$ alors pour un $x \notin X$ et pour tout $y \in X$, tout graphe de la forme $(X \cup \{x\}, U \cup \{(y, x)\})$ est élément de $\mathcal{A}$

Avec ce schéma, les arborescences d'ordre n sont exactement les graphes obtenus à partir de l'arborescence à un sommet par ajouts successifs de $n-1$ sommets de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0.

Construction inductive des arborescences

Schéma 1

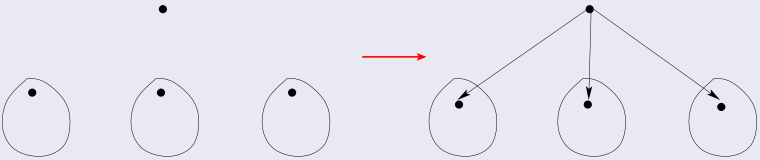


- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $A \in \mathcal{A}$ alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0 à $\mathcal{A}$ est une arborescence.
  En d'autres termes, si $A \in \mathcal{A}$ alors $A + x \in \mathcal{A}$ avec $d^-(x) = 1$ et $d^+(x) = 0$.
  Ou encore si $A = (X, U) \in \mathcal{A}$ alors pour un $x \notin X$ et pour tout $y \in X$, tout graphe de la forme $(X \cup \{x\}, U \cup \{(y, x)\})$ est élément de $\mathcal{A}$

Avec ce schéma, les arborescences d'ordre n sont exactement les graphes obtenus à partir de l'arborescence à un sommet par ajouts successifs de $n - 1$ sommets de degré intérieur 1 et de degré extérieur 0.

Construction inductive des arborescences

Schéma 2

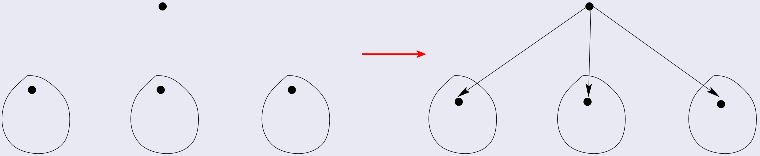


- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $(r_1, A_1), \ldots, (r_p, A_p)$ sont des arborescences (où r_i est la racine de A_i, $1 \leq i \leq p$,), alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet r et les arcs $(r, r_1), \ldots, (r, r_p)$ est une arborescence.

En d'autre termes , une arborescence de racine r est soit réduite à un sommet, soit obtenue à partir de p arborescences dont les racines sont les successeurs de r.

Construction inductive des arborescences

Schéma 2

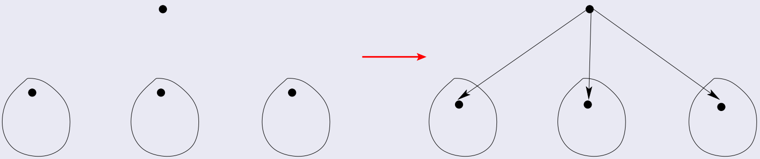


- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $(r_1, A_1), \ldots, (r_p, A_p)$ sont des arborescences (où r_i est la racine de $A_i, 1 \leq i \leq p$,), alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet r et les arcs $(r, r_1), \ldots, (r, r_p)$ est une arborescence.

En d'autre termes , une arborescence de racine r est soit réduite à un sommet, soit obtenue à partir de p arborescences dont les racines sont les successeurs de r.

Construction inductive des arborescences

Schéma 2



- Base : $K_1 \in \mathcal{A}$
- Règle : si $(r_1, A_1), \ldots, (r_p, A_p)$ sont des arborescences (où r_i est la racine de $A_i, 1 \leq i \leq p$,), alors le graphe obtenu en rajoutant un nouveau sommet r et les arcs $(r, r_1), \ldots, (r, r_p)$ est une arborescence.

En d'autre termes , une arborescence de racine r est soit réduite à un sommet, soit obtenue à partir de p arborescences dont les racines sont les successeurs de r.

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence

Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences). Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences).
Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets,
- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets,

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences).
Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets,
- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets,

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences).
Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets, en ôtant une feuille
- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets,

Preuve *(Sketch de preuve)*

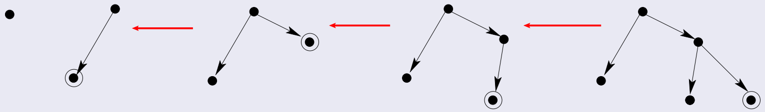
Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences).
Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets,
  en ôtant une feuille
- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets,

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences). Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets, en ôtant une feuille

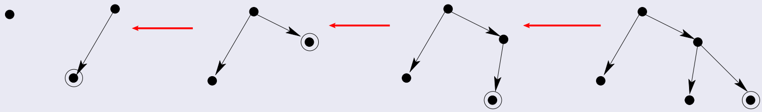


- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets,

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences).
Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets, en ôtant une feuille

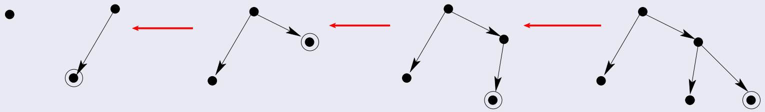


- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets, en ôtant la racine

Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (*v*) du théorème de caractérisation des arborescences). Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets, en ôtant une feuille

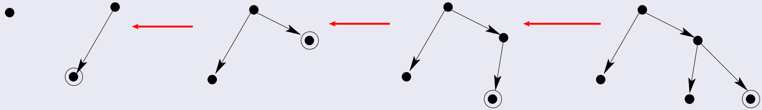


- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets, en ôtant la racine

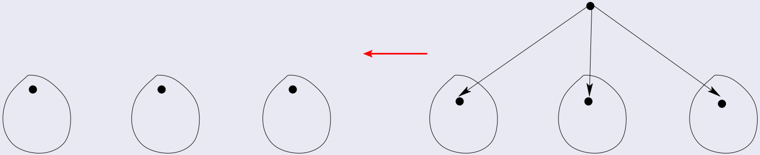
Preuve *(Sketch de preuve)*

Dans chacun de ces schémas, le graphe obtenu est une arborescence (caractérisation (v) du théorème de caractérisation des arborescences).
Réciproquement, toute arborescence admet une séquence de construction :

- (schéma 1) : par récurrence sur le nombre de sommets, en ôtant une feuille



- (schéma 2) par induction sur le nombre de sommets, en ôtant la racine



Arborescence couvrante

Définition

Une *arborescence couvrante* d'un graphe orienté G est un sous–graphe couvrant de G qui est une arborescence.

Théorème

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté d'ordre n. G possède une racine $\Leftrightarrow$ G possède une arborescence couvrante

$\Leftarrow$ évident

Arborescence couvrante

Définition

Une *arborescence couvrante* d'un graphe orienté G est un sous–graphe couvrant de G qui est une arborescence.

Théorème

Soit $G = (X, U)$ *un graphe orienté d'ordre* n. G *possède une racine* $\Leftrightarrow$ G *possède une arborescence couvrante*

$\Leftarrow$ évident

Arborescence couvrante

Définition

Une *arborescence couvrante* d'un graphe orienté G est un sous–graphe couvrant de G qui est une arborescence.

Théorème

Soit $G = (X, U)$ *un graphe orienté d'ordre* n. G *possède une racine* $\Leftrightarrow$ G *possède une arborescence couvrante*

$\Leftarrow$ évident

Arborescence couvrante

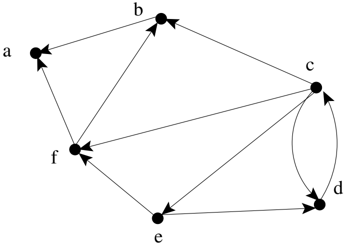
Définition

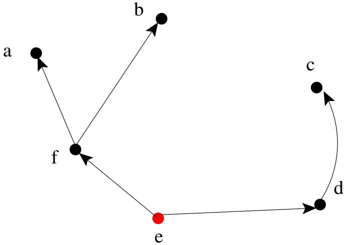
Une *arborescence couvrante* d'un graphe orienté G est un sous–graphe couvrant de G qui est une arborescence.

Théorème

Soit $G = (X, U)$ *un graphe orienté d'ordre* n*.* G *possède une racine* $\Leftrightarrow$ G *possède une arborescence couvrante*

$\Leftarrow$ évident





G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (1/2)

Preuve par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ de G. Soit $P(n)$: "tout graphe d'ordre n possédant une racine possède une arborescence couvrante"

- Base : $n = 1$.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (1/2)

Preuve par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ de G. Soit $P(n)$: "tout graphe d'ordre n possédant une racine possède une arborescence couvrante"

- Base : $n = 1$.

- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (1/2)

Preuve par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ de G. Soit $P(n)$: "tout graphe d'ordre n possédant une racine possède une arborescence couvrante"

- Base : $n = 1$. Les deux graphes à un seul sommet ont pour racine ce sommet et K_1 est leur arborescence couvrante. Donc $P(1)$ vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (1/2)

Preuve par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ de G. Soit $P(n)$: “tout graphe d'ordre n possédant une racine possède une arborescence couvrante”

- Base : $n = 1$. Les deux graphes à un seul sommet ont pour racine ce sommet et K_1 est leur arborescence couvrante. Donc $P(1)$ vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (1/2)

Preuve par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ de G. Soit $P(n)$: "tout graphe d'ordre n possédant une racine possède une arborescence couvrante"

- Base : $n = 1$. Les deux graphes à un seul sommet ont pour racine ce sommet et K_1 est leur arborescence couvrante. Donc $P(1)$ vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (1/2)

Preuve par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ de G. Soit $P(n)$: "tout graphe d'ordre n possédant une racine possède une arborescence couvrante"

- Base : $n = 1$. Les deux graphes à un seul sommet ont pour racine ce sommet et K_1 est leur arborescence couvrante. Donc $P(1)$ vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...
- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.
- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...
- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.
- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...
- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.
- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n+1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...
- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.
- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

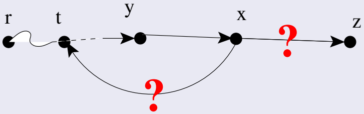
Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...
- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.
- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n+1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...

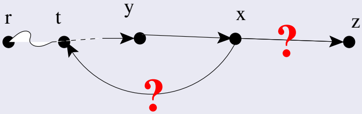


- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.
- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n+1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...

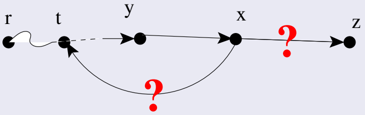


- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.
- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

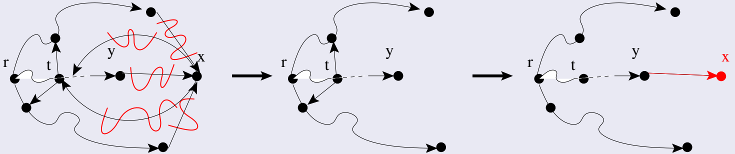
G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...



- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.

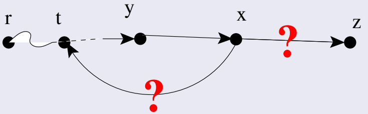


- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

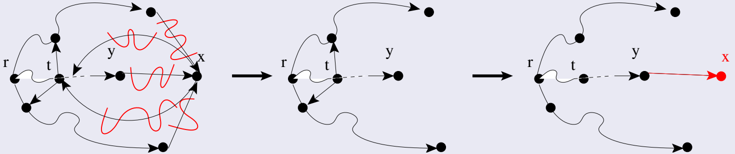
G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...



- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.

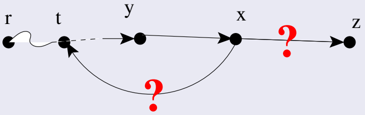


- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors $A' = (X, U' \cup \{(y, x)\})$ est une arborescence couvrant G.
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

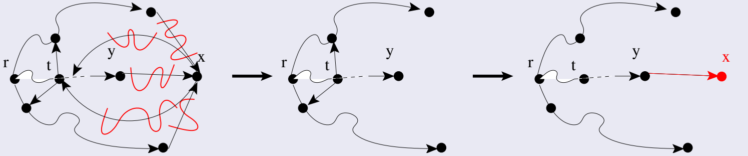
G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...



- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.

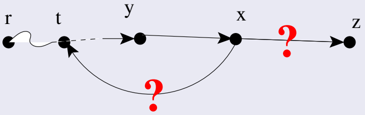


- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors $A' = (X, U' \cup \{(y, x)\})$ est une arborescence couvrant G.
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

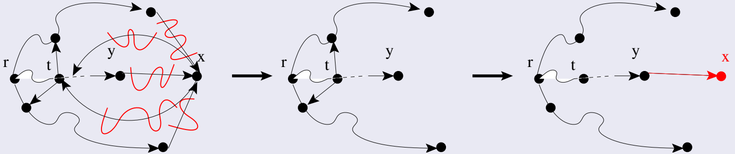
G possède une racine $\Rightarrow$ G possède une arbo. couvrante (2/2)

Soit alors $G = (X, U)$ un graphe possédant une racine r et d'ordre $n + 1 \geqslant 2$

- On considère une plus longue chaîne ch d'origine r. Soit x son extrémité, soit y le prédécesseur de x sur cette chaîne.
- Il ne peut exister d'arc (x, z) avec $z \notin ch$. Sinon ...



- $G(X \setminus \{x\})$ d'ordre n, a pour racine r.



- Par **HR**, il possède une arborescence couvrante $A = (X \setminus \{x\}, U')$. Alors $A' = (X, U' \cup \{(y, x)\})$ est une arborescence couvrant G.
- Conclusion : on a montré $P(1)$ vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

Forte connexité

Dans cette partie on suppose des graphes sans boucles.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On définit la relation $\underset{fc}{\approx}$ sur X par : $x \underset{fc}{\approx} y$ ssi il existe une xy-marche orientée et une yx-marche orientée dans G.
La relation $\underset{fc}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur X (immédiat).

Définition

Les classes d'équivalence de $\underset{fc}{\approx}$ sont appelées composantes fortement connexes de G.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On appelle graphe réduit de G le graphe quotient de G par la partition des sommets induite par $\underset{fc}{\approx}$.

Forte connexité

Dans cette partie on suppose des graphes sans boucles.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On définit la relation $\underset{fc}{\approx}$ sur X par : $x \underset{fc}{\approx} y$ ssi il existe une xy-marche orientée et une yx-marche orientée dans G.
La relation $\underset{fc}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur X (immédiat).

Définition

Les classes d'équivalence de $\underset{fc}{\approx}$ sont appelées composantes fortement connexes de G.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On appelle graphe réduit de G le graphe quotient de G par la partition des sommets induite par $\underset{fc}{\approx}$.

Forte connexité

Dans cette partie on suppose des graphes sans boucles.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On définit la relation $\underset{fc}{\approx}$ sur X par : $x \underset{fc}{\approx} y$ ssi il existe une xy-marche orientée et une yx-marche orientée dans G.
La relation $\underset{fc}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur X (immédiat).

Définition

Les classes d'équivalence de $\underset{fc}{\approx}$ sont appelées composantes fortement connexes de G.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On appelle graphe réduit de G le graphe quotient de G par la partition des sommets induite par $\underset{fc}{\approx}$.

Forte connexité

Dans cette partie on suppose des graphes sans boucles.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On définit la relation $\underset{fc}{\approx}$ sur X par : $x \underset{fc}{\approx} y$ ssi il existe une xy-marche orientée et une yx-marche orientée dans G.
La relation $\underset{fc}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur X (immédiat).

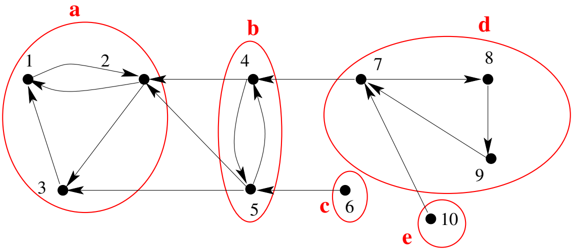
Définition

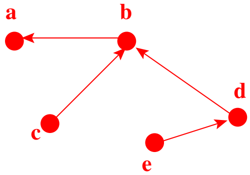
Les classes d'équivalence de $\underset{fc}{\approx}$ sont appelées composantes fortement connexes de G.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On appelle graphe réduit de G le graphe quotient de G par la partition des sommets induite par $\underset{fc}{\approx}$.

Exemple





Un graphe, ses composantes fortement connexes, le graphe réduit.

Théorème

Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans circuit.

Preuve :

- L'existence d'un circuit contenant des sommets du graphe réduit G_r induit l'existence d'un circuit du graphe passant par tous les sommets des composantes fortement connexes concernées.
- Il existe donc 2 marches orientés différentes pour aller des sommets d'une composante fortement connexe à des sommets d'une autre composante fortement connexe (une dans chaque sens)
- Ces sommets se trouvent donc dans la même composante fortement connexe.
- Contradiction

□

Théorème

Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans circuit.

Preuve :

- L'existence d'un circuit contenant des sommets du graphe réduit G_r induit l'existence d'un circuit du graphe G passant par tous les sommets des composantes fortement connexes concernées.
- Il existe donc 2 marches orientés différentes pour aller des sommets d'une composante fortement connexe à des sommets d'une autre composante fortement connexe (une dans chaque sens)
- Ces sommets se trouvent donc dans la même composante fortement connexe.
- Contradiction

□

Théorème

Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans circuit.

Preuve :

- L'existence d'un circuit contenant des sommets du graphe réduit G_r induit l'existence d'un circuit du graphe G passant par tous les sommets des composantes fortement connexes concernées.
- Il existe donc 2 marches orientés différentes pour aller des sommets d'une composante fortement connexe à des sommets d'une autre composante fortement connexe (une dans chaque sens)
- Ces sommets se trouvent donc dans la même composante fortement connexe.
- Contradiction

□

Théorème

Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans circuit.

Preuve :

- L'existence d'un circuit contenant des sommets du graphe réduit G_r induit l'existence d'un circuit du graphe G passant par tous les sommets des composantes fortement connexes concernées.
- Il existe donc 2 marches orientés différentes pour aller des sommets d'une composante fortement connexe à des sommets d'une autre composante fortement connexe (une dans chaque sens)
- Ces sommets se trouvent donc dans la même composante fortement connexe.
- Contradiction

□

Théorème

Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans circuit.

Preuve :

- L'existence d'un circuit contenant des sommets du graphe réduit G_r induit l'existence d'un circuit du graphe G passant par tous les sommets des composantes fortement connexes concernées.
- Il existe donc 2 marches orientés différentes pour aller des sommets d'une composante fortement connexe à des sommets d'une autre composante fortement connexe (une dans chaque sens)
- Ces sommets se trouvent donc dans la même composante fortement connexe.
- Contradiction

□

Théorème

Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans circuit.

Preuve :

- L'existence d'un circuit contenant des sommets du graphe réduit G_r induit l'existence d'un circuit du graphe G passant par tous les sommets des composantes fortement connexes concernées.
- Il existe donc 2 marches orientés différentes pour aller des sommets d'une composante fortement connexe à des sommets d'une autre composante fortement connexe (une dans chaque sens)
- Ces sommets se trouvent donc dans la même composante fortement connexe.
- Contradiction

□

Définition

- La fermeture transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^t = (X, U^t)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 1.
- La fermeture réflexive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe obtenu en rajoutant une boucle sur chaque sommet.
- La fermeture réflexo-transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^* = (X, U^*)$ avec $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 0.
  Remarque : $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow y \in Desc_G(x)$

Définition

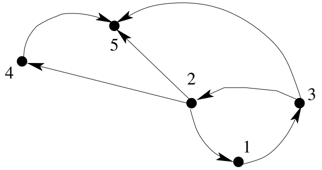
- La fermeture transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^t = (X, U^t)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 1.
- La fermeture réflexive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe obtenu en rajoutant une boucle sur chaque sommet.
- La fermeture réflexo-transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^* = (X, U^*)$ avec $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 0.
  Remarque : $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow y \in Desc_G(x)$

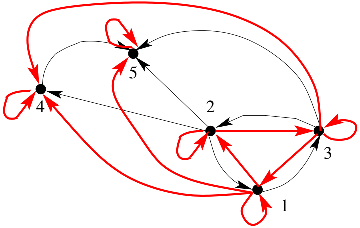
Définition

- La fermeture transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^t = (X, U^t)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 1.
- La fermeture réflexive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe obtenu en rajoutant une boucle sur chaque sommet.
- La fermeture réflexo-transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^* = (X, U^*)$ avec $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 0.
  Remarque : $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow y \in Desc_G(x)$

Définition

- La fermeture transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^t = (X, U^t)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 1.
- La fermeture réflexive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe obtenu en rajoutant une boucle sur chaque sommet.
- La fermeture réflexo-transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^* = (X, U^*)$ avec $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow$
  il existe une xy-marche orientée dans G de longueur ≥ 0.
  Remarque : $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow y \in Desc_G(x)$





Graphes III : cheminement orienté

Propriétés élémentaires

Propriété

Tout sous-graphe d'un graphe sans circuit est sans circuit.

Propriété

Un graphe G est sans circuit $\Leftrightarrow$ toute marche orientée de longueur > 0 est une chaîne.

Propriété

Un graphe G est sans circuit $\Leftrightarrow$ toutes ses composantes fortement connexes sont réduites à un sommet.

Propriétés élémentaires

Propriété

Tout sous-graphe d'un graphe sans circuit est sans circuit.

Propriété

Un graphe G est sans circuit $\Leftrightarrow$ toute marche orientée de longueur > 0 est une chaîne.

Propriété

Un graphe G est sans circuit $\Leftrightarrow$ toutes ses composantes fortement connexes sont réduites à un sommet.

Propriétés élémentaires

Propriété

Tout sous-graphe d'un graphe sans circuit est sans circuit.

Propriété

Un graphe G est sans circuit $\Leftrightarrow$ toute marche orientée de longueur > 0 est une chaîne.

Propriété

Un graphe G est sans circuit $\Leftrightarrow$ toutes ses composantes fortement connexes sont réduites à un sommet.

Propriétés élémentaires

Propriété

Dans un graphe sans circuit, tout sommet x se trouve sur une sp-marche orientée où s est une source et p un puits.

Preuve : Il suffit de considérer une marche orientée passant par x et maximale au sens de la longueur. Les extrémités fournissent source et puits.
□

Propriétés élémentaires

Propriété

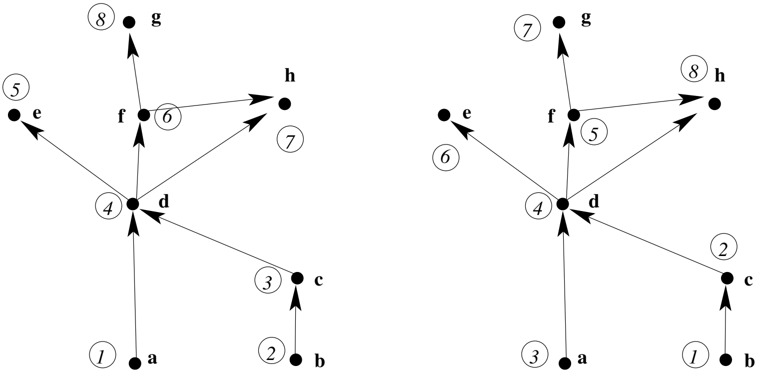
Dans un graphe sans circuit, tout sommet x se trouve sur une sp-marche orientée où s est une source et p un puits.

Preuve : Il suffit de considérer une marche orientée passant par x et maximale au sens de la longueur. Les extrémités fournissent source et puits.
$\square$

Numérotation compatible

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre n. Une numérotation compatible de X est une bijection **f :** $X \longrightarrow [1, n]_{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall x, y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow f(x) < f(y)$



Un graphe et deux de ses numérotations compatibles

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de "Tout graphe d'ordre sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons possède la numérotation
  Récurrence : Montrons que
  HR : Supposons vraie pour un
  Soit un graphe sans circuit d'ordre . Soit un puits de
  est un graphe sans circuit d'ordre . D'après l'HR il possède une numérotation compatible . On prolonge avec
  . On a bien

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ... Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de "Tout graphe d'ordre sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons possède la numérotation
  Récurrence : Montrons que
  HR : Supposons vraie pour un
  Soit un graphe sans circuit d'ordre . Soit un puits de est un graphe sans circuit d'ordre . D'après l'HR il possède une numérotation compatible . On prolonge avec . On a bien

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ... Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ... Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de "Tout graphe d'ordre sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons possède la numérotation
  Récurrence : Montrons que
  HR : Supposons vraie pour un
  Soit un graphe sans circuit d'ordre . Soit un puits de est un graphe sans circuit d'ordre . D'après l'HR il possède une numérotation compatible . On prolonge avec . On a bien

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: “Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible”.
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n + 1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n + 1$. On a bien $P(n + 1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$
HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n+1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n+1$. On a bien $P(n+1)$.

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Rightarrow$

- *Version constructive* : Soit $G = (X, U)$ sans circuit. Il possède une source s_1 qu'on numérote 1. $f(s_1) = 1$. On considère le graphe $G' = G(X \setminus \{s_1\})$. G' est sans circuit, il possède une source s_2 qu'on numérote 2, ...
  Soit alors $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in U$. Quand, dans ce processus, y est numéroté, il est source du graphe engendré. Donc x n'est pas un sommet de ce graphe. Donc x a été numéroté dans une étape précédente, et on a $f(x) < f(y)$.
- *Version synthétique* : Par récurrence sur l'ordre de G. $P(n)$: "Tout graphe d'ordre n sans circuit possède une numérotation compatible".
  Base : prenons $n_0 = 1$, K_1 possède la numérotation $f : x \mapsto 1$.
  Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit d'ordre $n + 1$. Soit p un puits de G. $G(X \setminus \{p\})$ est un graphe sans circuit d'ordre n. D'après l'**HR** il possède une numérotation compatible f. On prolonge f avec $f : p \mapsto n + 1$. On a bien $P(n + 1)$.

□

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Leftarrow$)
Si $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 0$ est un circuit de G,
alors $f(x_1) < ... < f(x_h) < f(x_1)$.
Contradiction.
$\square$

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Leftarrow$)
Si $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 0$ est un circuit de G,
alors $f(x_1) < ... < f(x_h) < f(x_1)$.
Contradiction.

$\square$

Théorème

G est sans circuit $\Leftrightarrow$ G admet une numérotation compatible.

Preuve : $\Leftarrow$)
Si $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 0$ est un circuit de G,
alors $f(x_1) < ... < f(x_h) < f(x_1)$.
Contradiction.
$\square$

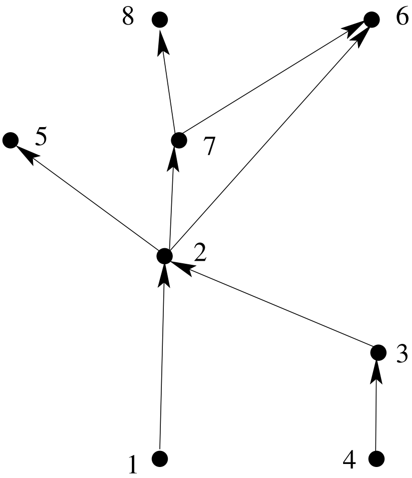
Décomposition par niveaux

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté sans circuit. On note $S(G)$ l'ensemble des sources de G. La décomposition en niveaux de G (ou S-séquence) est la suite de parties non vides de X $(S_0, S_1, \ldots, S_k)$ telle que :

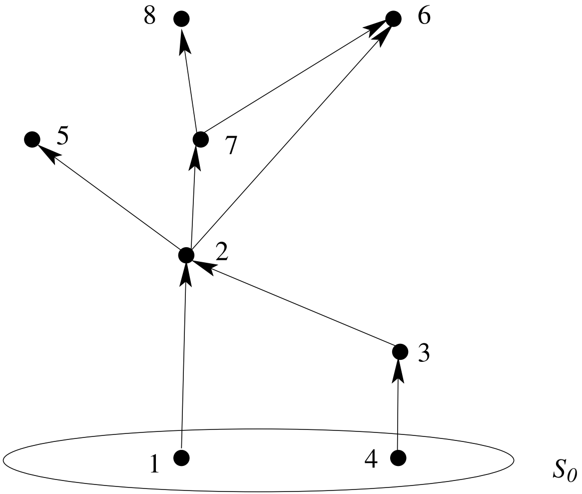
- $S_0 = S(G)$
- $S_1 = S(G(X \setminus S_0))$
- $S_2 = S(G(X \setminus (S_0 \cup S_1)))$
- $S_i = S(G(X \setminus (S_0 \cup \ldots \cup S_{i-1})))$
  c.à.d. que S_i est l'ensemble des sources du sous-graphe de G induit par l'ensemble de sommets $X \setminus (S_0 \cup \ldots \cup S_{i-1})$
- $S_{k+1} = \emptyset$

Exemple



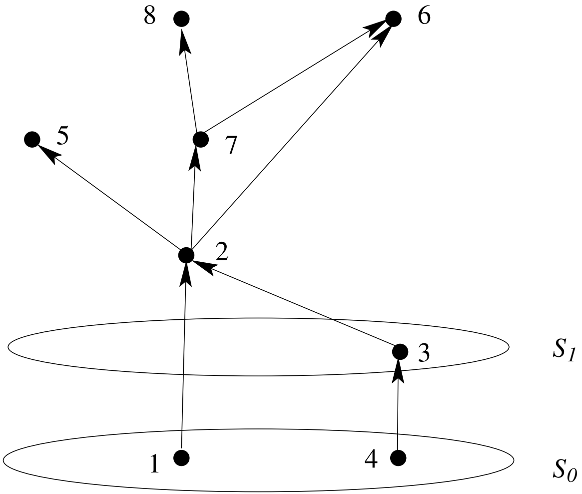
Un graphe et sa décomposition en niveaux

Exemple



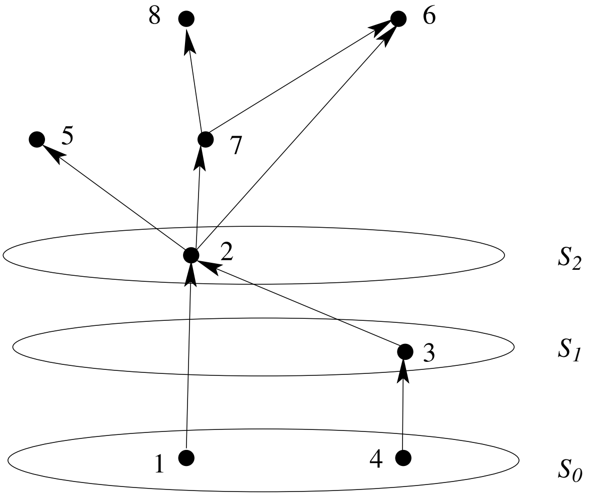
Un graphe et sa décomposition en niveaux

Exemple



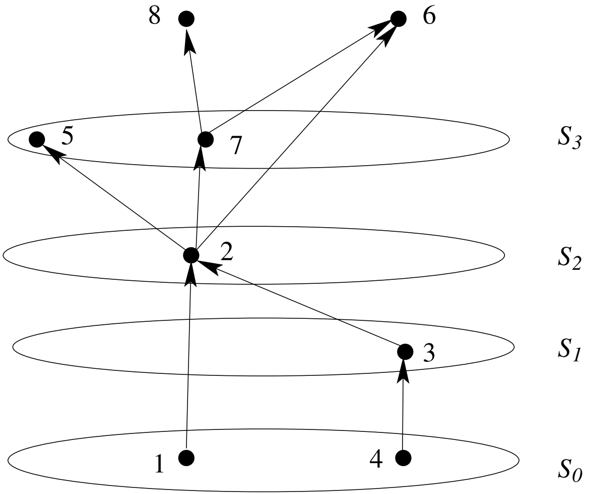
Un graphe et sa décomposition en niveaux

Exemple



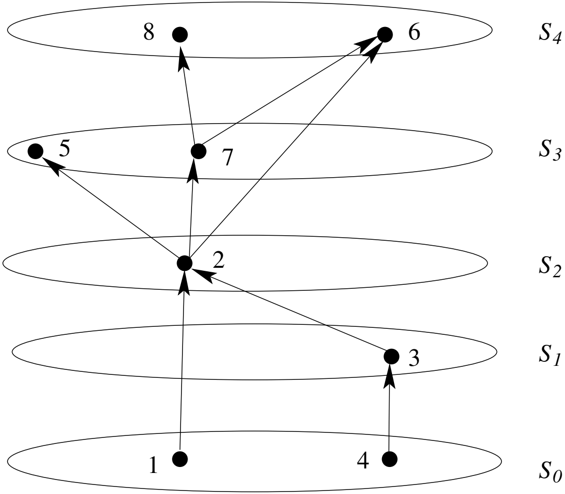
Un graphe et sa décomposition en niveaux

Exemple



Un graphe et sa décomposition en niveaux

Exemple



Un graphe et sa décomposition en niveaux

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des** S_i par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.

Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.

Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.
Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.
$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.
Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.
$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.

Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

□

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.

Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

□

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide**.
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous-graphe.

Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide**.
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.
Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.
$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.

Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

□

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide**.
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.
Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, \ldots, x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < \ldots < i_h < i_1$. Contradiction.

$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide**.
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.

Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

$\square$

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.
Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.
Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.

□

Théorème

$G = (X, U)$ est sans circuit $\Leftrightarrow$ la S-séquence de G forme une partition de X

Preuve : $\Rightarrow$) :

- **Aucun des S_i n'est vide.**
- Par construction les S_i sont deux à deux **disjoints**.
- À l'étape i on considère un sous–graphe de G, donc sans circuit. Il possède au moins une source, donc l'ordre de la suite des sous–graphes décroît strictement et le processus termine. On a bien X **qui est l'union des S_i** par construction.

La S-séquence de G forme une partition de X.

$\Leftarrow$) : Si $(x, y) \in U$, soit $x \in S_i$ et $y \in S_j$. On a $i < j$. Dans le processus, tant que x n'a pas été enlevé des sommets du sous–graphe induit, y n'est pas une source de ce sous–graphe.
Supposons alors qu'il existe un circuit $(x_1, ..., x_h, x_1)$ avec $h \geqslant 1$. Chaque x_i se trouve dans l'un des S_{i_k}, et on a $i_1 < ... < i_h < i_1$. Contradiction.
□

Rang

Définition

Dans un graphe sans circuit $G = (X, U)$, le rang d'un sommet est défini par la fonction **rang :** $X \longrightarrow [0, k]_{\mathbb{N}}$ où k est l'indice maximum des niveaux de G et $rang(x) = i \Leftrightarrow x \in S_i$.

Propriété

Pour tout sommet x d'un graphe $G = (X, U)$, on a :

- *si x est une source de G, $rang(x) = 0$*
- *sinon, $rang(x) = 1 + max(\{rang(y) \mid y \in Pred(x)\})$*

Propriété

Le rang d'un sommet x est la longueur maximum d'une chaîne d'extrémité x.

Rang

Définition

Dans un graphe sans circuit $G = (X, U)$, le rang d'un sommet est défini par la fonction **rang :** $X \longrightarrow [0, k]_{\mathbb{N}}$ où k est l'indice maximum des niveaux de G et $rang(x) = i \Leftrightarrow x \in S_i$.

Propriété

Pour tout sommet x d'un graphe $G = (X, U)$, on a :

- *si x est une source de G, $rang(x) = 0$*
- *sinon, $rang(x) = 1 + max(\{rang(y) \mid y \in Pred(x)\})$*

Propriété

Le rang d'un sommet x est la longueur maximum d'une chaîne d'extrémité x.

Rang

Définition

Dans un graphe sans circuit $G = (X, U)$, le rang d'un sommet est défini par la fonction **rang :** $X \longrightarrow [0, k]_{\mathbb{N}}$ où k est l'indice maximum des niveaux de G et $rang(x) = i \Leftrightarrow x \in S_i$.

Propriété

Pour tout sommet x d'un graphe $G = (X, U)$, on a :

- *si x est une source de G, $rang(x) = 0$*
- *sinon, $rang(x) = 1 + max(\{rang(y) \mid y \in Pred(x)\})$*

Propriété

Le rang d'un sommet x est la longueur maximum d'une chaîne d'extrémité x.