UNIVERSITÉ de MONTPELLIER	**Algèbre Linéaire et Analyse 2**
— Faculté des sciences —	HLMA203
Département de Mathématiques	LICENCE 1ère année
Année 2018–2019	Série 1 & Série 3

Contrôle Final : session 2

Date : 26 juin 2019
Heure : 16h00
Durée : 3 heures (hors tiers-temps)
Document et calculatrice interdits

Exercice §1 : QCM. Qualifier les assertions suivantes par **V** (vraie) ou **F** (fausse), sur la copie ; bien reporter, au préalable, une colonne avec tous les numéros (sans les assertions), dans l'ordre, mêmes ceux sans réponse. Toute réponse fausse est comptée négativement.

1. Pour toutes matrices carrées A et B (même ordre), nous avons $AB = BA$ ou $AB = -BA$.
2. Un polynôme réel premier n'est pas nécessairement de degré 1.
3. La trace d'un automorphisme (endomorphisme bijectif) peut être nulle.
4. Le développement limité (ordre $n-1$) de f' s'obtient en dérivant celui de f (ordre n).
5. En $x = 0$, le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2, est $x - x^2/2 + O(x^3)$.
6. Toute primitive de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrit $(\ln x)^2/2 + C$, pour une certaine constante C.
7. Pour chaque entier $n > 0$, le déterminant définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{2019}(\mathbb{R})$, nous avons $\det(-A) = -\det(A)$.
9. La fonction $f(x) = e^{e^x}$ est une primitive de la fonction $F(x) = e^{e^x + x}$.
10. Pour tous s.e.v F et G d'un e.v E, nous avons $\dim(F+G) \geq \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice §2. Soient les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre λ la matrice B_λ n'est pas inversible ?

Exercice §3. Soit S, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}) \quad y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)\,,\ xy' + y - e^x = 0\ .$$

1. Résoudre l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$.
2. Trouver un élément particulier de S (méthode de la Variation de la Constante).
3. Décrire toute la droite affine S.
4. En déduire l'unique élément $f \in S$ telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Exercice §4 : puissances d'une matrice. On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^3$, défini par $u(x, y, z) = (4x + y + 3z, 2x + 2z, -2x - y - z)$.

Partie I. Soit A, la matrice de u relativement à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Calculer le déterminant et la trace de A.
2. L'application u est-elle surjective ?
3. Vérifier que le noyau de u est une droite dirigée par le vecteur $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$.
4. Pour $f_2 = (-1, 0, 1)$ et $f_3 = (2, 1, -1)$, montrer que nous avons $Im(u) = Vect(f_2, f_3)$.
5. Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
6. Avons-nous une formule de décomposition en somme directe $E = Ker(u) \oplus Im(u)$?

Partie II. La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ est notée P.

1. Expliciter P et, pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, évaluer u en f_i.
2. En déduire directement la matrice B de u, celle relative à la base $\mathcal{F}$.
3. Quelle formule relie les matrices A et B ?
4. Par récurrence, montrer les formules : $A^n = PB^nP^{-1}$, $n \geq 1$.
5. Procéder au calcul de A^n, pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice §5. Soient les polynômes $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 2$ et $Q = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X$.

1. Calculer les polynômes unitaires $pgcd(P, Q)$ et $ppcm(P, Q)$.
2. Décomposer P et Q en facteurs premiers dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Décomposer P et Q en facteurs premiers dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice §6. Calcul de $I = \int_0^{\pi/2} (x \cos x)^2 dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} (x \sin x)^2 dx$.

1. Trouver une primitive de la fonction $f(x) = x^2 \cos(2x)$.
2. En déduire les nombres I et J (au besoin, utiliser $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$).
