Calculabilité et complexité

Université de Montpellier
Examen
15 janvier 2016

Durée 3 heures
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable, appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec soin !

Exercice 1 échauffement

Montrez que $\mathbb{K}$ est énumérable (cours). Montrez que si A et B sont énumérables, alors $A \cup B$ l'est aussi (cours).

Exercice 2 archi-classique

Soit $A = \{x,\ [x \mid \cdot]$ calcule un polynôme à coefficients entiers$\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
2. Sans utiliser le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
3. Montrez que $\bar{\mathbb{K}}$ se réduit à A. Indication : simuler $[x \mid x]$ sur y étapes et ensuite, si le calcul n'a pas convergé, calculez un polynôme adéquat. Si une convergence est observée, alors diverger.

Exercice 3 classique

Soit $B = \{x,$ si y est une puissance de 2 non nulle alors $[x \mid y] = 2$ sinon si y est une puissance de 3 non nulle alors $[x \mid y] \uparrow$ et dans les autres cas $[x \mid y] = 5\}$.
Montrez que ni B ni son complémentaire $\bar{B}$ ne sont énumérables.

Exercice 4 points fixes faciles

1. Proposez deux fonctions dont les ensembles de points fixes sont disjoints (il faut bien sûr le montrer).
2. Montrez qu'il existe une fonction récursive F qui à x associe un point fixe pour la fonction $[x \mid \cdot]$.

Exercice 5 réductions

Soit $C = \{x,\ \forall y\ [x \mid y] = F(y)\}$ où F est une fonction calculable définie sur un nombre fini non nul de point.

1. Montrez que C est l'ensemble des points fixes d'une fonction récursive qu'on explicitera.
2. Montrez que $\mathbb{K}$ se réduit à C.
3. Montrez que $\bar{\mathbb{K}}$ se réduit à C.
4. En déduire qu'il existe des ensembles de points fixes non énumérables.

Exercice 6 un peu de complexité

Montrez que NP est dans PSPACE (cours)

Exercice 7 tautologies

Soit TAUTO le problème qui prend en entrée une formule et qui cherche à décider si la formule est une tautologie (une tautologie est une formule propositionnelle qui est vraie quelle que soit la valeur de ses variables). Montrez que TAUTO est co-NP-complet.

Exercice 8 NP=co-NP ?

Montrez que NP = co-NP si et seulement si SAT et TAUTO peuvent mutuellement se réduire l'une à l'autre.

Exercice 9 Retour aux points fixes sérieux

Soit $D = \{x,\ \forall y\ [x \mid y] = F(x,y)\}$ où F est une fonction récursive totale. L'objet de l'exercice est de montrer que $\mathbb{K}$ et $\bar{\mathbb{K}}$ se réduisent à D.

1. Si F ne dépend que de y (en d'autres termes si $\forall a, b, y\ F(a,y) = F(b,y)$), expliquez pourquoi vous avez déjà prouvé le résultat recherché.
2. Maintenant, F est une fonction récursive totale qui dépend à la fois de x et de y. Montrez le résultat recherché. Aide : en faisant votre preuve, il est probable que vous ayez besoin comme lemme d'une version du théorème de point fixe avec variable. Vous pouvez seulement énoncer et utiliser le lemme (lucratif), ou alternativement l'énoncer, le prouver puis l'utiliser (très lucratif). Attention à être très précis dans vos preuves.
3. Que se passe-t-il si F est une fonction récursive partielle ?