- Fiche de TD2 : Couplages -

- Exercice 1 - Euh... -

Que vaut $\alpha(L(G))$?

- Exercice 2 - Couplage maximum Vs couplage maximal -

Soient G un graphe, M un couplage maximal de G et $M^\star$ un couplage maximum de G. Montrer que $|M| \leq |M^\star| \leq 2|M|$.

- Exercice 3 - Couplage dans les graphes sans triangle -

Un graphe est dit *sans triangle* si il ne contient pas de cycle de longueur 3 comme sous-graphe. Si G est sans triangle, montrer que $\chi(\overline{G}) + \mu(G) = n$.

- Exercice 4 - Jeu de Slither-

Le *jeu de Slither* se joue sur un graphe connexe, noté G. Chaque joueur choisit à son tour un sommet v_i non précédemment choisi. La suite $v_0, v_1, v_2 \ldots$ doit former un chemin, c'est-à-dire que pour tout $i = 1, 2, \ldots,$ v_i doit être choisi comme adjacent à v_{i-1}. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.
Montrer que si G admet un couplage parfait alors le second joueur a une stratégie gagnante. Montrer que si G n'admet pas un couplage parfait alors le premier joueur a une stratégie gagnante.

- Exercice 5 - Tous d'un coup -

Soit $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti de bipartition (X, Y) avec $\Delta(G) \geq 1$.

a. Montrer que G admet un couplage couvrant tous les sommets de X de degré $\Delta(G)$.
b. Montrer que G admet un couplage couvrant tous les sommets de G de degré $\Delta(G)$.
c. En déduire qu'il est possible de partitionner les arêtes de G en $\Delta(G)$ couplages.

- Exercice 6 - Famille couvrante de cycles dans les graphes $2k$-réguliers -

Un *2-factor* d'un graphe G est un sous-graphe 2-régulier couvrant G. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant dû à J. Petersen (1891) : *tout graphe régulier de degré pair admet un 2-factor*.
Soit G un graphe régulier de degré pair.

a. À l'aide d'une marche eulérienne de G, montrer que G admet une orientation D dans laquelle $d^+(x) = d^-(x)$ pour tout sommet x de G.
b. Le *biparti d'adjacence* d'un graphe orienté $D = (V, A)$ est le graphe de sommets $\{x^+, x^- \ : \ x \in V(D)\}$ et d'arêtes $\{u^+v^- \ : \ uv \in A(D)\}$. En étudiant le biparti d'adjacence du graphe orienté produit à la question précédente, conclure.

- Exercice 7 - SDR -

Soient A un ensemble fini et $(A_1, \ldots, A_p)$ un ensemble de sous-ensembles de A. Un *système de représentants distincts* des A_i (*SDR* en anglais...) est un ensemble $\{x_1, \ldots, x_p\}$ d'éléments distincts de A tels pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ on ait $x_i \in A_i$.

a. Montrer que $(A_1, \ldots, A_p)$ admet un SDR si, et seulement si, $|\bigcup_{i \in J} A_i| \geq |J|$ pour tout $J \subseteq \{1, \ldots, p\}$.
b. Que dire de plus si $|\bigcup_{i \in \{1,\ldots,p\}} A_i| = p$?
c. *Application :* Voilà une ligne de jeu de Sudoku (les chiffres sur les cases grisées sont bien placés, dans les autres cases, les diverses possibilités sont indiquées) :
Simplifier la ligne.
d. Soient $(d_1, \ldots, d_p)$ des entiers strictement positifs. On cherche maintenant des sous-ensembles disjoints $D_1, \ldots, D_p$ de A tels $D_i \subseteq A_i$ et $|D_i| = d_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Montrer que les D_i existent si, et seulement si, $|\bigcup_{i \in J} A_i| \geq \sum_{i \in J} d_i$ pour tout $J \subseteq \{1, \ldots, p\}$.

143	3689	2	48	13	7	5	1369	1348

- Exercice 8 - Subtil SAT -

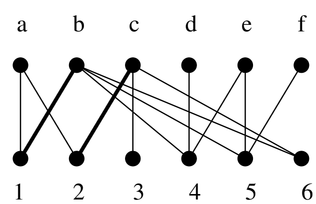
Une formule $(=3)$-SAT(≤ 3) est une formule SAT où chaque clause a taille 3 exactement et chaque variable apparaît au plus 3 fois (positivement ou négativement).
Une formule (≤ 3)-SAT(≤ 3) est une formule SAT où chaque clause a taille au plus 3 et chaque variable apparaît au plus 3 fois (positivement ou négativement).

a. Montrer que décider si une formule (≤ 3)-SAT(≤ 3) est satisfaisable est un problème NP-complet (on pourra transformer une formule 3-SAT quelconque en une formule (≤ 3)-SAT(≤ 3) équivalente).

b. Montrer que décider si une formule $(=3)$-SAT(≤ 3) est satisfaisable est un problème polynomial (on pourra considérer un graphe biparti particulier).

- Exercice 9 - Algo de couplage max - Part I -

Dans le graphe biparti suivant, appliquer l'algo de calcul d'un couplage maximum, en sachant que le couplage $\{1b, 2c\}$ a déjà été précalculé.



- Exercice 10 - Couplage maximum dans les graphes quelconques -

Soit G un graphe (pas forcément biparti). Montrer que $\mu(G) \geq k$ si, et seulement si $o(G \setminus S) \leq |S| + |V(G)| - 2k$ pour tout $S \subseteq V(G)$ (où $o(G \setminus S)$ désigne le nombre de composantes connexes ayant un nombre impair de sommets de $G \setminus S$).

- Exercice 11 - La barrière bleue -

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et M un couplage de G, une *barrière* pour M est un ensemble S de sommets de G tel que $o(S) - |S| = n - 2|M|$.

a. Montrer que tout couplage M' de G et tout ensemble S' de sommets de G, on a $o(S') - |S'| \leq n - 2|M'|$ (on pourra considérer l'ensemble de sommets non couverts par M').

b. En déduire que si G admet une barrière pour un couplage M, alors M est un couplage maximum de G.

c. Montrer que l'ensemble des sommets bleus retourné par l'algorithme d'Edmonds constitue une barrière pour le couplage correspondant.

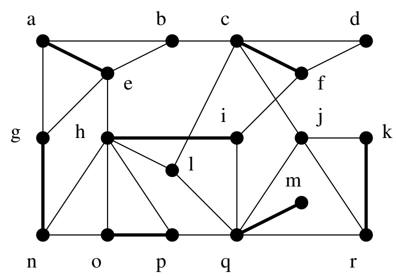
- Exercice 12 - Algo de couplage max - Part II -

Dans le graphe suivant, appliquer l'algo d'Edmonds pour calculer un couplage maximum, en sachant que le couplage $\{ae, cf, gn, hi, op, qm, kr\}$ a déjà été précalculé. Indiquer un couplage maximum et l'ensemble barrière correspondant.

- Exercice 13 - Théorème de structure de Gallai (1964) -

Soit G un graphe et B l'ensemble des sommets bleus retournés par l'algorithme d'Edmonds. Par l'exercice 11, On sait que B forme une barrière.

a. Montrer que toute composante paire de $G \setminus B$ contient un couplage parfait.



b. Un ensemble X de sommets de G est *facteur-critique* si $G[X]$ n'admet pas de couplage parfait mais que pour tout $x \in X$, $G[X \setminus x]$ admet un couplage parfait. Montrer que toute composante impaire de $G \setminus B$ est facteur-critique.

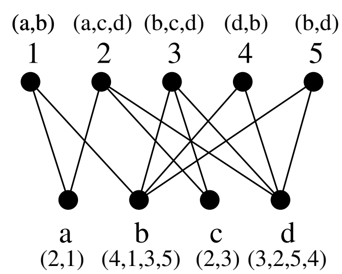
c. Un sommet de G est *essentiel* si il est saturé par tout couplage maximum de G. Dans le cas contraire, il est dit *non-essentiel*. Montrer qu'un sommet de G est non-essentiel si, et seulement si, il appartient à une composante impaire de $G \setminus B$.

d. Montrer que B est l'ensemble des sommets essentiels ayant au moins un voisin non-essentiel.

e. Déduire le Théorème de Tutte des résultats précédents.

- Exercice 14 - Couplage stable -

Le graphe biparti G suivant est muni d'un ensemble de préférences indiquées par ordre décroissant à chaque sommet. Calculer un couplage stable pour G.



- Exercice 15 - Célibat forever -

Donner un exemple de graphe muni d'un ensemble de préférences sur ses sommets et qui n'admet pas de couplage stable.