Modèles de calcul

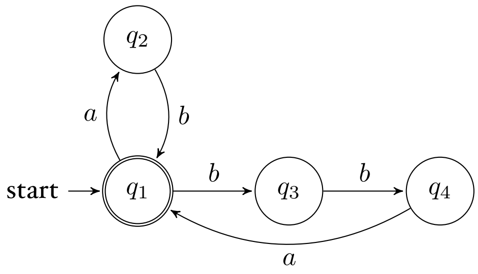
Université de Montpellier

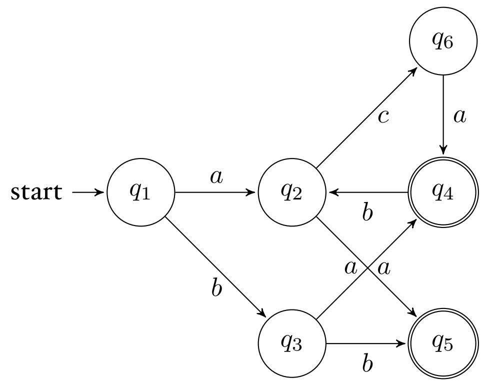
TD 2

Sauf mention contraire, on utilisera l'alphabet $\{a, b\}$.

Exercice 1 Reconnaissance

Quel est le langage reconnu par chacun des automates suivants ?





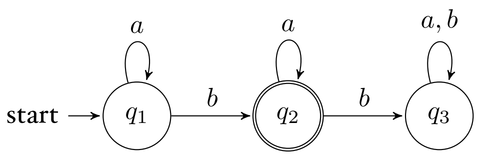
Exercice 2 Modulo

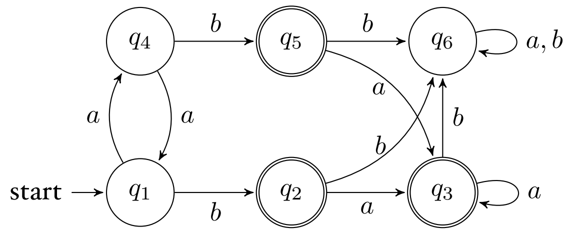
Dans cet exercice, on utilisera l'alphabet $\{a, b, c\}$. Rappel : $|u|_a$ désigne le nombre de "a" dans u.

1. Construisez un automate reconnaissant les mots u tels que : $|u|_a \equiv 1 \pmod 3$.
2. Construisez un automate reconnaissant tous les mots ayant $aacbac$ comme sous-mot.

Exercice 3 Égalité

Montrez que les deux automates suivants reconnaissent le même langage.





Exercice 4 Atteignable

Considérons un automate quelconque. Définissons F^i comme l'ensemble des états à partir desquels on peut atteindre un état final en lisant un mot d'au plus i lettres.

1. Que vaut F^0 ?
2. Montrez que $F^n \subset F^{n+1}$.
3. Montrez que si $F^n = F^{n+1}$, alors $F^n = F^{n+1} = F^{n+2}$.
4. Montrez que $\exists n\, \forall m > n,\ F^m = F^n$. On notera F^∞ cet ensemble F^n.
5. Notons e le nombre d'états de l'automate. Est-il vrai que $\forall n > e,\quad F^e = F^n$?
6. Trouvez un automate ayant un état q tel que $q \notin F^\infty$.
7. Que se passe-t-il quand $q_0 \notin F^\infty$?
8. On suppose que $q_0 \in F^\infty$ et on enlève de l'automate tous les états qui ne sont pas dans F^∞, ainsi que toutes les transitions qui partent ou arrivent de ces états. Quel langage reconnait l'automate ainsi obtenu ? (Justifiez avec soin)

Exercice 5 Produits cartésiens

Soient deux automates sur le même alphabet Σ, notés A et B, d'ensembles d'états Q_A et Q_B, d'état initiaux q_{0A} et q_{0B}, d'état finaux F_A et F_B, de fonctions de transitions δ_A et δ_B.

Construisons l'automate C sur le même alphabet dont l'ensemble des états est $Q_A \times Q_B$, l'état inital (q_{0A}, q_{0B}), vérifiant $\delta_C((x, x'), \alpha) = (y, y')$ pour $\alpha \in \Sigma$ si et seulement si $\delta_A(x, \alpha) = y$ et $\delta_B(x', \alpha) = y'$. De plus, $(x, y) \in F_C$ si et seulement si $x \in F_A$ et $y \in F_B$.

On appelle $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{R}_C$ les langages reconnus par A, B et C respectivement. Que vaut $\mathcal{R}_C$ en fonction de $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$? Prouvez soigneusement votre réponse.