# Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- **La sémantique de la LP**
  - **Interprétation, Modèle**
  - **Satisfiabilité, Validité**
  - **Table de vérité**
- Équivalence logique et Substitution
- Conséquence logique
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode des tableaux
- Méthode de Davis et Putnam
- Initiation à la logique des prédicats

# Sémantique formelle

- On oppose la sémantique formelle à la sémantique intuitive
  - La sémantique formelle consiste à associer des structures particulières prises dans une théorie mathématiques (le plus souvent celle des ensembles) à chaque élément de syntaxe : on parle d'interprétation
  - La sémantique intuitive consiste à associer une notion du monde réel à chaque élément de syntaxe
- La logique des propositions est une logique bivalente
  - Donner un « sens formel » aux propositions c'est leur associer une valeur prise dans un ensemble à deux éléments Bool={0,1} (ou {f,v}…) : la « **valeur de vérité** »
  - La sémantique formelle de la logique des propositions se limite donc aux opérations réalisables sur cet ensemble Bool : le **calcul booléen**

# Sémantique formelle (suite)

- La valeur de vérité d'une fbf est calculée à partir de l'interprétation de ces composants : on parle de sémantique compositionnelle
- On **interprète** les connecteurs et constantes logiques toujours de la même façon (sinon on change de logique !)
- Choisir une **interprétation I** consiste donc uniquement à spécifier **une application de S dans Bool** (qui d'un point de vue sémantique intuitive modélise un monde possible)
  - L'interprétation des connecteurs et des symboles constants étant la même dans toutes les interprétations

# Quelle interprétation pour les connecteurs en logique classique ?

- Il s'agit de <u>fixer</u> les fonctions sur les valeurs de vérité qui vont interpréter les connecteurs de la logique

$f : B^n \rightarrow B$ (où n est l'arité du connecteur)

- Des fonctions d'arité 0 pour les constantes parmi les 2 possibles

  $f1_0()=0$ ou $f2_0()=1$

- Une fonction d'arité 1 pour la négation parmi les 4 possibles

  $f1_1(0)=0$ ou $f2_1(0)=0$ ou $f3_1(0)=1$ ou $f4_1(0)=1$
  $f1_1(1)=0$ ou $f2_1(1)=1$ ou $f3_1(1)=0$ ou $f4_1(1)=1$

- Des fonctions d'arité 2 pour les autres connecteurs parmi les 16 possibles

$f1_2(0,0)=0$ ou $f2_2(0,0)=0$ ou $f3_2(0,0)=0$ ou … ou $f16_2(0,0)=1$
$f1_2(0,1)=0$ ou $f2_2(0,1)=0$ ou $f3_2(0,1)=0$ ou … ou $f16_2(0,1)=1$
$f1_2(1,0)=0$ ou $f2_2(1,0)=0$ ou $f3_2(1,0)=1$ ou … ou $f16_2(1,0)=1$
$f1_2(1,1)=0$ ou $f2_2(1,1)=1$ ou $f3_2(1,1)=0$ ou … ou $f16_2(1,1)=1$

# Interprétation (partie fixe)

- Définir une logique c'est choisir une interprétation des connecteurs (qui « correspond » à nos intuitions)

- Les constantes sont interprétées par chacune des 2 valeurs de Bool :

  $I(\perp) = 0$

  $I(T) = 1$

- Les connecteurs sont interprétés par des fonctions de $Bool^n \rightarrow Bool$ (où n est l'arité du connecteur)

  $I(\neg)$ = *NON : Bool→Bool t.q. NON(0)=1et NON(1)=0*

  $I(\wedge)$ = *ET : $Bool^2$→Bool t.q. ET(a,b) = 1 ssi a=b=1*

  $I(\vee)$ = OU : *$Bool^2$→Bool t.q. OU(a,b) = 0 ssi a=b=0*

  $I(\rightarrow)$ = SIALORS : *$Bool^2$→Bool t.q. SIALORS(a,b)=0 ssi a=1 et b=0*

  $I(\leftrightarrow)$ = SSI :*$Bool^2$→Bool t.q. SSI(a,b)=1 ssi a=b*

  – *Exercice : proposez une « interprétation » pour un connecteur binaire de « ou exclusif* ».

# Interprétation des symboles (partie variable)

- Choix d'une application de $S \rightarrow B$
  - Soit $S = \{p,q,r\}$ on peut choisir entre 8 applications

    $I_1: S \rightarrow B$

    $I_1(p)=0, I_1(q)=0, I_1(r)=0$

    $I_2: S \rightarrow B$

    $I_2(p)=0, I_2(q)=0, I_2(r)=1$

    …

    $I_8: S \rightarrow B$

- Si card(S)=n, il y a $2^n$ interprétations différentes
  ($2^n$ applications différentes de S dans B)

# Valeur de vérité d'une proposition

- La valeur de vérité d'une proposition P dépend
  - de la logique utilisée (i.e. l'interprétation des connecteurs) et,
  - de l'application des symboles propositionnels dans B choisie (i.e. l'interprétation I des symboles)
- On note v(P,I) la valeur de vérité de P dans l'interprétation I
- La définition de v se fait par induction

# Valeur de vérité d'une proposition

- Soit I une interprétation des symboles propositionnels d'une fbf P, on définit la valeur de vérité de P dans l'interprétation I notée v(P,I) :

  (base) $P \in S \cup \{T, \perp\}$, $v(P,I) = I(P)$

  (cons)

  r1 : $P = \neg Q$, $v(P,I) = v(\neg Q,I) = I(\neg)(v(Q,I)) = NON(v(Q,I))$

  r2 : $P = (Q \wedge R)$, $v(P,I) = ET(v(Q,I),v(R,I))$

  r3 : $P = (Q \vee R)$, $v(P,I) = OU(v(Q,I),v(R,I))$

  r4 : $P = (Q \rightarrow R)$, $v(P,I) = SIALORS(v(Q,I),v(R,I))$

  r5 : $P = (Q \leftrightarrow R)$, $v(P,I) = SSI(v(Q,I),v(R,I))$

- *Exercice : soit I(p)=0 et I(q)=1, calculer la valeur de vérité de* $\neg((\neg q \wedge ((p \vee (q \vee p)) \rightarrow q)) \rightarrow \neg p)$

# Table de vérité d'une proposition

- Une table de vérité d'une fbf P est un tableau ayant
  - pour indice de ligne les $2^n$ interprétations possibles des n symboles propositionnels de P
  - pour indice de colonne les sous-fbf de P (la dernière colonne étant P)
  - dans une case de ligne I et de colonne Q la valeur v(Q,I)
- Ainsi la dernière colonne d'une table de vérité d'une fbf contient les valeurs de P pour toute les interprétations possibles des symboles de P

# Table de vérité d'un ensemble de propositions

- Soit E un ensemble de fbf, on construit le tableau
  - Dont les lignes correspondent aux $2^n$ interprétations des n symboles apparaissant dans les fbf de E
  - Dont les colonnes sont les fbf (et sous-fbf) de E
- Intérêt : la comparaison de fbf
  - Égalité sémantique : on parle d'équivalence logique
  - Déduction
- Exemple

  $E = \{\neg\bot, (p\vee\neg p), \neg(p\rightarrow q)\}$

| p | q | $\neg\bot$ | $(p\vee\neg p)$ | $\neg(p\rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | **1** | **1** | **0** |
| 0 | 1 | **1** | **1** | **0** |
| 1 | 0 | **1** | **1** | **1** |
| 1 | 1 | **1** | **1** | **0** |

# Définitions

- Modèle et contre-modèle
  - Une interprétation I t.q. v(P,I) = 1 est appelée un modèle de P
    - on dit qu'elle satisfait P (et l'on note parfois I |= P)
  - Une interprétation I t.q. v(P,I) = 0 est appelée un contre-modèle de P
- Caractérisation des propositions
  - Une fbf est satisfiable si elle possède au moins un modèle
  - Une fbf est contingente si elle possède au moins un modèle et un contre-modèle
  - Une fbf est valide si toute interprétation est un modèle
  - Une fbf est insatisfiable si elle ne possède pas de modèle

# Propriétés

- P est satisfiable ssi $\neg$P n'est pas valide
- P est insatisfiable ssi $\neg$P est valide
- P est contingente ssi $\neg$P est contingente

- PROP(S) est partitionné en :
  - Les propositions insatisfiables
  - Les propositions contingentes
  - Les propositions valides

# Consistance / Contradiction

- On étend la satisfiabilité à un ensemble de fbf :
  - $\{P_1,P_2,\ldots P_n\}$ est dit consistant ssi il existe un modèle commun aux n propositions
  - sinon $\{P_1,P_2,\ldots P_n\}$ est dit contradictoire (ou inconsistant)

- Propriété :
  - $\{P_1,P_2,\ldots P_n\}$ est consistant ssi $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ est satisfiable
  - $\{P_1,P_2,\ldots P_n\}$ est contradictoire ssi $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ est insatisfiable