

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Квантовые симметрии  
в алгебре тройных чисел**

Выполнил:

студент 211 группы

Зазовский Леон Станиславович

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Гордиенко Алексей Сергеевич

Москва

2025

# Содержание

	<b>2</b>
<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Конечно двойственная алгебра Хопфа</b>	<b>4</b>
2.1 Структура конечно двойственного пространства . . . . .	4
2.2 Структура конечно двойственной алгебры Хопфа . . . . .	6
<b>3 Характеризация <math>H</math>-модульной структуры</b>	<b>7</b>
<b>4 Классификация модульных структур</b>	<b>8</b>

## 1 Введение

Ввёл

## 2 Конечно двойственная алгебра Хопфа

### 2.1 Структура конечно двойственного пространства

Пусть у нас задано векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{K}$ .

Известно, что если  $V$  конечномерное, тогда  $V \cong V^*$  и существует канонический изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$ . Оказывается, что похожий результат верен в бесконечномерных пространствах.

**Определение 2.1.** Конечно двойственное пространство  $V^\circ$  — это подпространство  $V^*$  такое, что для любой линейной функции  $\alpha \in V^\circ$  её ядро имеет конечную коразмерность.

В случае конечномерных пространств  $V^\circ = V^*$ .

**Определение 2.2.** Пусть в  $V$  выбран базис  $(e_i)_{i \in \Lambda}$ . Тогда двойственная система  $(\varepsilon_i)_{i \in \Lambda}$  в  $V^\circ$  — это система функций таких, что для всех  $i, j \in \Lambda$  верно соотношение  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

В случае конечномерных пространств двойственная система окажется в точности системой координатных функций.

**Теорема 2.3.** Двойственная система является базисом в  $V^\circ$

**Доказательство.**

Сначала докажем, что двойственная система полна в  $V^\circ$ . Рассмотрим некоторую линейную функцию  $f$  из  $V^\circ$ . Тогда существует векторное подпространство  $W$  такое, что  $V$  раскладывается в прямую сумму  $V = W \oplus \text{Ker}(f)$ .

Рассмотрим проектор  $\pi$  на подпространство  $W$  вдоль  $\text{Ker}(f)$ . Нетрудно, заметить что  $\text{Ker}(\pi) = \text{Ker}(f)$  и  $\text{Im}(\pi) = W$ . Значит  $W \cong V/\text{Ker}(f)$ . Отсюда следует, что  $W$  имеет конечную размерность, обозначим её как  $m$ . Выберем базис  $a_1, \dots, a_m$  в  $W$ . Для любого вектора  $v$  верно разложение  $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + u$ , где  $u$  некоторый вектор из  $\text{Ker}(f)$ . Тогда  $f(v) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + u) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_m f(a_m)$ . Мы получили, что значение  $f$  на произвольном векторе является линейной комбинацией значений на  $(a_i)_{i=1}^m$

Так как  $(e_i)_{i \in \Lambda}$  — базис, значит все  $(a_j)_{j=1}^m$  выражаются с помощью конечной линейной комбинации  $(e_i)_{i \in \Lambda}$ . Отсюда понятно, что значение  $f$  на произвольном векторе является конечной линейной комбинацией значений на конечном подмножестве базисных векторов  $(e_i)_{i \in \Lambda}$ . Обозначим это подмножество  $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$ . Тогда можно выразить  $f = f(e_{i_1})\varepsilon_{i_1} + \dots + f(e_{i_n})\varepsilon_{i_n}$ . А это значит, что двойственная система полна.

Теперь докажем линейную независимость двойственной системы. Рассмотрим линейную комбинацию некоторой конечной подсистемы  $\lambda_{i_1}\varepsilon_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n}\varepsilon_{i_n} = 0$ . Подставим  $e_{i_k}$ , получим  $\lambda_{i_k}\varepsilon_{i_k}(e_{i_k}) = 0$ , а значит  $\lambda_{i_k} = 0$ . Взяв все возможные  $k$  от 1 до  $n$  получим, что все коэффициенты равны нулю, что означает линейную независимость этой подсистемы. Следовательно все конечные подсистемы линейно независимы, а значит и двойственная система линейно независима. □

**Замечание 2.4.** В силу доказанной выше теоремы будем называть двойственную систему — конечно двойственным базисом.

Для полного соответствия аналогичным результатам в случае конечномерных пространств остатётся доказать две нижеследующие теоремы.

**Теорема 2.5.** Пусть задано векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{K}$ . Тогда  $V \cong V^\circ$

**Доказательство.** Выберем в  $V$  базис  $(e_i)_{i \in \Lambda}$  и соответствующий ему конечно двойственный базис  $(\varepsilon_i)_{i \in \Lambda}$ . Пусть  $\varphi : V \rightarrow V^\circ$  — линейное отображение заданное на базисе  $\varphi(e_i) := \varepsilon_i$ . Очевидно, что  $\varphi$  сюръективно.

Докажем инъективность. Пусть  $\varphi(a) = \varphi(b)$  для некоторых  $a, b \in V$ . Тогда  $\varphi(a - b) = 0$ . Разложим  $a - b$  по базису  $V$ :  $a - b = \lambda_{i_1} e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} e_{i_n}$ . Тогда  $\varphi(\lambda_{i_1} e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} e_{i_n}) = \lambda_{i_1} \varepsilon_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} \varepsilon_{i_n} = 0$ . В силу линейной независимости  $(\varepsilon_{i_k})_{k=1}^n$ , получаем  $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_n} = 0$ . Значит  $a - b = 0$ , следовательно  $\varphi$  инъективно. Тогда  $\varphi$  изоморфизм.  $\square$

**Теорема 2.6.** Существует канонический изоморфизм  $\varphi : V \rightarrow V^{\circ\circ}$ .

**Доказательство.** Определим  $\varphi : V \rightarrow V^{\circ\circ}$ , как  $\varphi(u)(\alpha) := \alpha(u)$ , для любых  $u \in V$  и  $\alpha \in V^\circ$ . Докажем корректность определения, а именно тот факт, что  $\varphi(u) \in V^{\circ\circ}$ . Ядро  $\varphi(u)$  это множество линейных функций  $\alpha$  таких, что  $\alpha(u) = 0$ . Выберем базис  $(e_i)_{i \in \Lambda}$  в  $V$  и соответствующий ему конечно двойственный базис  $(\varepsilon_i)_{i \in \Lambda}$  в  $V^\circ$ . Пусть  $u = \lambda_{i_1} e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_m} e_{i_m}$ , тогда  $\varepsilon_j(u) = \lambda_j$ , если для некоторого  $k$  верно  $j = i_k$ , и  $\varepsilon_j(u) = 0$  иначе. Отсюда получаем что  $V^\circ / \text{Ker}(\varphi(u)) \cong \langle \varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_m} \rangle$ , откуда следует, что  $\text{Ker}(\varphi(u))$  имеет конечную коразмерность.

Теперь докажем, что  $\varphi$  — изоморфизм. Пусть  $\varphi(a)(\alpha) = \varphi(b)(\alpha)$  для любой функции  $\alpha \in V^\circ$ . Тогда для любого  $i \in \Lambda$  верно  $\varphi(a)(\varepsilon_i) = \varphi(b)(\varepsilon_i)$ , иначе говоря  $\varepsilon_i(a) = \varepsilon_i(b)$  для любого  $i \in \Lambda$ . Это значит что  $a$  и  $b$  имеют одинаковые разложения по базису  $(e_i)_{i \in \Lambda}$ . Получаем, что  $a = b$ , следовательно  $\varphi$  инъективен.

Пусть  $f \in V^{\circ\circ}$ . Выберем в  $V^{\circ\circ}$  базис  $(\epsilon_i)_{i \in \Lambda}$  конечно двойственный к  $(\varepsilon_i)_{i \in \Lambda}$ . Разложим функцию  $f$  по  $(\epsilon_i)_{i \in \Lambda}$ :  $f = \lambda_{i_1} \epsilon_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} \epsilon_{i_k}$ . Рассмотрим вектор  $u \in V$ , такой что  $u = \lambda_{i_1} e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} e_{i_k}$  и докажем, что  $\varphi(u) = f$ .

$f(\varepsilon_j) = \lambda_j$ , если для некоторого  $k$  верно, что  $j = i_k$ , иначе  $f(\varepsilon_j) = 0$ .  $\varphi(u)(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(u) = \lambda_j$ , если для некоторого  $k$  верно, что  $j = i_k$ , иначе  $\varphi(u)(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(u) = 0$ . Значит  $f$  и  $\varphi(u)$  совпадают на базисе, следовательно  $f = \varphi(u)$ . Тем самым мы доказали, что  $\varphi$  сюръективен.  $\square$

Для удобства рассуждений введём ещё одно понятие.

**Определение 2.7.** Пусть задано векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{K}$  и система  $K \subseteq V^*$ . Единицей линейной функции  $\alpha \in K$  по системе  $K$  — будем называть вектор  $v \in V$ , такой что  $\alpha(v) = 1$  и для любой линейной функции  $\beta \in K$  отличной от  $\alpha$  верно  $\beta(v) = 0$

Будем обозначать единицу линейной функции  $\alpha$  как  $\alpha^{(1)}$ . Из рассуждений выше следует, что для любой функции из конечно двойственного базиса существует единица линейной функции.

## 2.2 Структура конечно двойственной алгебры Хопфа

Пусть задана  $A$  — алгебра с единицей над полем  $\mathbb{K}$ . Рассмотрим подмножество линейных функций  $A^\circ \subseteq A^*$ , такое что в ядре любой функции  $\alpha \in A^\circ$  содержится идеал конечной коразмерности. Тогда  $\mu^*(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$ , а значит можно определить конечную двойственную коалгебру.

**Определение 2.8.** Конечная двойственная коалгебра  $A^\circ$  — это коалгебра  $(A^\circ, \mu^\circ, u^\circ)$ , где  $\mu^\circ$  и  $u^\circ$  это ограничения  $\mu^*$  и  $u^*$  на  $A^\circ$  соответственно.

Как множество  $A^\circ$  является подпространством в конечно двойственном пространстве к векторному пространству  $A$ . Выберем в  $A^\circ$  базис  $(\varepsilon_i)_{i \in \Lambda}$  и дополним его до базиса всего конечно двойственного пространства. Рассмотрим конечно двойственный базис в  $A$ , в нём существует подсистема  $(e_i)_{i \in \Lambda}$  из единиц линейных функций составляющих базис  $A^\circ$ . Она обладает следующим свойством  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Пусть задана  $H$  — алгебра Хопфа над полем  $\mathbb{K}$ . Рассмотрим  $H^\circ$  — конечную двойственную коалгебру. Как множество  $H^\circ$  является подалгеброй в  $H^*$ , поэтому  $H^\circ$  является алгеброй Хопфа.

**Определение 2.9.** Пусть задана  $H$  — алгебра Хопфа над полем  $\mathbb{K}$ .  $H^\circ$  называют конечной двойственной алгеброй Хопфа.

Здесь и далее мы пользуемся обозначениями Свидлера и для удобства опускаем знак суммы:  $\Delta a = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ . Выпишем некоторые полезные соотношения, следующие из двойственности. Для любых  $\alpha, \beta \in H^\circ$  и  $h, g \in H$  верно:

$$\varepsilon \alpha = \alpha \varepsilon = \alpha \tag{2.1}$$

$$(\alpha \beta)(a) = \alpha(a_{(1)})\beta(a_{(2)}) \tag{2.2}$$

$$u^\circ(\alpha) = \alpha(1_H) \tag{2.3}$$

$$\Delta \alpha(a \otimes b) = \alpha(ab) \tag{2.4}$$

### 3 Характеризация $H$ -модульной структуры

Пусть задана  $A$  — конечномерная  $H$ -модульная алгебра с 1 над полем  $\mathbb{K}$ , где  $H$  — алгебра Хопфа.

Отображение  $\psi : H \otimes A \rightarrow A$ , такое что  $\psi(h \otimes a) := ha$  для всех  $h \in H$  и  $a \in A$ , называется  $H$ -модульной структурой. Определим гомоморфизм алгебр  $\zeta : H \rightarrow \text{End}(A)$  равенством  $\zeta(h)(a) := \psi(h \otimes a)$ .

Выбрав базис в  $A$  такой, что его первым элементом будет единица алгебры  $A$ , отождествим  $\text{End}(A)$  с  $M_n(\mathbb{K})$ . Тогда существуют такие  $(\alpha_{ij})_{ij} \in H^\circ$ , что

$$\zeta(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon(h) & \alpha_{12}(h) & \dots & \alpha_{1n}(h) \\ 0 & \alpha_{22}(h) & \dots & \alpha_{2n}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2}(h) & \dots & \alpha_{nn}(h) \end{pmatrix}$$

Для удобства положим  $\alpha_{11} = \varepsilon$  и  $\alpha_{21} = \dots = \alpha_{n1} = 0$  и обозначим за  $K$  базис  $\langle \varepsilon, (\alpha_{ij})_{ij} \rangle$ .

Будем называть  $\zeta(h)$  — матрицей модульной структуры  $\psi$ . При так заданном отображении  $\zeta$ , верно  $\zeta(H) = \text{cosupp } \psi$ . Кроме того, рассмотрев ранг матрицы модульной структуры, получаем  $\dim \zeta(H) = \dim \langle K \rangle$ .

Нетрудно заметить, что  $\text{Ker}(\zeta)$  совпадает с аннулятором  $\langle K \rangle$ . Из того, что  $\text{Ker}(\zeta)$  — идеал конечной коразмерности, следует что в ядре любой функции из  $\langle K \rangle$  содержится идеал конечной коразмерности, а значит  $\langle K \rangle \subseteq H^\circ$ .

Так как  $\zeta$  гомоморфизм алгебр, для любых  $a, b \in H$  верно  $\zeta(ab) = \zeta(a)\zeta(b)$ . Значит для всех  $1 \leq i, j \leq n$  верно

$$\alpha_{ij}(ab) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}(a)\alpha_{kj}(b) \quad (*)$$

Дополним  $K$  до базиса  $(\varepsilon_i)_{i \in \Lambda}$  в  $H^\circ$ , тогда существует система  $(e_i)_{i \in \Lambda}$  в  $H$ , такая что  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Разложим  $\Delta\alpha_{ij}$  по базису  $(\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l)_{k,l \in \Lambda}$ . Рассматривая  $\Delta\alpha_{ij}$  от всех возможных  $e_k \otimes e_l$  и используя (2.4) и (\*), получим

$$\Delta\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \otimes \alpha_{kj}$$

## 4 Классификация модульных структур

**Теорема 4.1.** Пусть  $\psi : H \otimes A \rightarrow A$  – структура  $H$ -модульной алгебры с 1 на  $A = \mathbb{K}[x]/(x^3)$ , где  $H$  – некоторая алгебра Хопфа,  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$  и в поле существует примитивный корень степени 3. Выберем базис в  $A : \bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$  и отождествим  $\text{End}(A)$  с  $M_3(\mathbb{K})$ . Предположим, что коноситель действия это подалгебра верхнетреугольных матриц. Тогда  $\psi$  эквивалентно одной из следующих модульных структур над  $A$ :

- (1) действие поля  $\mathbb{K}$  на алгебре  $A$  умножением на скаляры;
- (2) действие групповой алгебры  $\mathbb{K}\langle c \rangle_2$ , заданное равенством  $s\bar{x} = -\bar{x}$ ;
- (3) действие групповой алгебры  $\mathbb{K}\langle c \rangle_3$ , заданное равенством  $s\bar{x} = \xi\bar{x}$ ,  
где  $\xi$  – примитивный корень из единицы степени 3;
- (4)  $H_9(\xi)$ -действие, заданное равенствами  $s\bar{x} = \xi\bar{x}$ ,  $v\bar{x} = \bar{1}$ ,  
где  $\xi$  – примитивный корень из единицы степени 3.

**Доказательство.** Определим отображение  $\zeta : H \rightarrow \text{End}(A)$  из равенства  $\zeta(h)(a) := \psi(h \otimes a)$ . Выберем в  $A$  базис  $\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$  и отождествим  $\text{End}(A)$  с  $M_3(\mathbb{K})$ . Тогда  $\zeta(h)$  будет матрицей модульной структуры. Из условий теоремы следует, что матрица модульной структуры верхнетреугольная. Для удобства изложения переобозначим её нижеследующим образом:

$$\zeta(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon(h) & \alpha(h) & \tau(h) \\ 0 & \beta(h) & \theta(h) \\ 0 & 0 & \varphi(h) \end{pmatrix}$$

Из того, что  $A$  –  $H$ -модульная алгебра с 1, следует

$$h(\bar{x}^3) = (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}^2) = 0$$

$$h(\bar{x}^2) = (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x})$$

Используя определение  $\zeta(h)$ , получаем следующее

$$h\bar{x} = \alpha(h)\bar{1} + \beta(h)\bar{x}$$

$$h\bar{x}^2 = \tau(h)\bar{1} + \theta(h)\bar{x} + \varphi(h)\bar{x}^2$$

Тогда, используя  $\bar{x}^3 = 0$ , получим следующие соотношения

$$(h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}) = (\alpha(h_{(1)})\bar{1} + \beta(h_{(1)}))(\alpha(h_{(2)})\bar{1} + \beta(h_{(2)})) =$$

$$= \alpha^2(h)\bar{1} + (\alpha\beta + \beta\alpha)(h)\bar{x} + \beta^2(h)\bar{x}^2$$

$$h\bar{x}^2 = (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}) = \tau(h)\bar{1} + \theta(h)\bar{x} + \varphi(h)\bar{x}^2 = \alpha^2(h)\bar{1} + (\alpha\beta + \beta\alpha)(h)\bar{x} + \beta^2(h)\bar{x}^2$$

А значит можно выразить

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha^2 \\ \theta &= \alpha\beta + \beta\alpha \\ \varphi &= \beta^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$



Кроме того

$$\begin{aligned} (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}^2) &= (\alpha(h_{(1)})\bar{1} + \beta(h_{(1)})\bar{x}) (\tau(h_{(2)})\bar{1} + \theta(h_{(2)})\bar{x} + \varphi(h_{(2)})\bar{x}^2) = \\ &= (\alpha\tau)(h)\bar{1} + (\alpha\theta + \beta\tau)(h)\bar{x} + (\alpha\varphi + \beta\theta)(h)\bar{x}^2 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\alpha\tau = 0$$

$$\alpha\theta + \beta\tau = 0$$

$$\alpha\varphi + \beta\theta = 0$$

Воспользовавшись (4.1) получим

$$\alpha^3 = 0 \tag{4.2}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 = 0 \tag{4.3}$$

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha\beta + \beta^2\alpha = 0 \tag{4.4}$$

Из соотношений (4.1) выразим  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и перепишем матрицу модульной структуры, используя эти выражения:

$$\zeta(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon(h) & \alpha(h) & \alpha^2(h) \\ 0 & \beta(h) & (\alpha\beta + \beta\alpha)(h) \\ 0 & 0 & \beta^2(h) \end{pmatrix}$$

Из доказанного в предыдущем разделе

$$\dim \zeta(H) = \dim \langle \varepsilon, \alpha, \beta, \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha, \beta^2 \rangle \leq 6$$

Если  $\dim \zeta(H) = 6$ , тогда  $\zeta(H)$  – подалгебра всех верхнетреугольных матриц. Докажем, что в таком случае модульная структура  $\psi$  эквивалентна модульной структуре 4.

Пусть  $\psi_1 : H_9(\xi) \otimes A \rightarrow A$  – модульная структура 4. Определим гоморфизм алгебр  $\zeta_1 : H_9(\xi) \rightarrow M_3(\mathbb{K})$  с помощью соотношения  $\zeta_1(h)(a) = \psi_1(h \otimes a)$ . Тогда мы получим

$$\zeta_1(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \zeta_1(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выпишем образ базиса  $(c^k v^l)_{0 \leq k, l \leq 2}$  в  $\zeta(H)$ :

$$\begin{aligned} \zeta(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \zeta(c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix} \\ \zeta(v) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta(cv) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi + \xi^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta(c^2v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \zeta(v^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 + \xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta(cv^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 + \xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta(c^2v^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 + \xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рассмотрим эти матрицы как вектора в базисе из матричных единиц и запишем их координаты построчно в матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \xi^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi + \xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно, проверить, что  $\text{rank } M = 6$ , а значит  $\dim \text{cosupp } \psi_1 = 6$ , откуда  $\text{cosupp } \psi_1$  совпадает с алгеброй верхнетреугольных матриц.

Пусть теперь  $\dim \zeta(H) \leq 5$

В предыдущем разделе были доказаны разложения для результатов коумножения на элементах матрицы модульной структуры. Выпишем их для наших функций:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \varepsilon \otimes \varepsilon \\ \Delta \alpha &= \varepsilon \otimes \alpha + \alpha \otimes \beta \\ \Delta \beta &= \beta \otimes \beta \\ \Delta \alpha^2 &= \varepsilon \otimes \alpha^2 + \alpha \otimes (\alpha\beta + \beta\alpha) + \alpha^2 \otimes \beta^2 \\ \Delta(\alpha\beta + \beta\alpha) &= \beta \otimes (\alpha\beta + \beta\alpha) + (\alpha\beta + \beta\alpha) \otimes \beta^2 \\ \Delta \beta^2 &= \beta^2 \otimes \beta^2 \end{aligned}$$

Значит функции  $\varepsilon, \beta, \beta^2$  являются группоподобными.

Если  $\varepsilon$  и  $\beta$  линейно зависимы, тогда из того, что  $\varepsilon \neq 0$ , следует, что  $\beta = \lambda\varepsilon$ , при этом  $1 = \beta(1_H) = \lambda\varepsilon(1_H) = \lambda$ , значит  $\beta = \varepsilon$ . Отсюда  $\beta^2 = \varepsilon^2 = \varepsilon$ . Подставим это в (4.4).

$$\alpha\varepsilon + \varepsilon\alpha\varepsilon + \varepsilon\alpha = 3\alpha = 0$$

Из этого тождества и того, что  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$ , следует что  $\alpha = 0$ . Тогда наша матриц модульной структуры выглядит следующим образом:

$$\zeta(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon(h) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(h) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon(h) \end{pmatrix}$$

Значит  $\zeta(H)$  - подалгебра скалярных матриц. Такая модульная структура эквивалентна структуре 1.

**Далее будем полагать линейные функции  $\varepsilon, \beta$  линейно независимыми.**

Предположим, что функции  $\alpha, \varepsilon, \beta$  линейно зависимы, тогда существуют  $\lambda, \mu$  такие, что  $\alpha = \lambda\varepsilon + \mu\beta$ . Подставив в равенство  $h = 1_H$ , получим  $0 = \lambda + \mu$ . Значит

$$\alpha = \lambda(\varepsilon - \beta)$$

В таком случае  $\alpha$  коммутирует с  $\beta$ , а значит, с учётом (4.4)

$$3\alpha\beta^2 = 3\lambda(\varepsilon - \beta)\beta^2 = 3\lambda(\beta^2 - \beta^3) = 0$$

Тогда, с учётом  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$ , получаем, что

$$\lambda(\beta^2 - \beta^3) = 0$$

Так как  $\beta$  группоподобный, значит существует обратный. Домножив это равенство на квадрат обратного к  $\beta$ :

$$\lambda(\varepsilon - \beta) = 0$$

А значит  $\alpha = 0$ . Значит  $\alpha^2 = \alpha\beta + \beta\alpha = 0$ .

### Случай 1.1

Если  $\varepsilon, \beta, \beta^2$  - линейно независимы, тогда  $\zeta(H)$  — это алгебра диагональных матриц. Докажем, что тогда модульная структура  $\psi$  эквивалентна структуре 3. Пусть  $\psi_1 : \mathbb{K}\langle c \rangle_3 \otimes A \rightarrow A$  — модульная структура 3. Определим гоморфизм алгебр  $\zeta_1 : \mathbb{K}\langle c \rangle_3 \rightarrow M_3(\mathbb{K})$  с помощью соотношения  $\zeta_1(h)(a) = \psi_1(h \otimes a)$ . Тогда получаем

$$\zeta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}$$

Выберем в  $\mathbb{K}\langle c \rangle_3$  базис  $(c^k)_{0 \leq k \leq 2}$  и выпишем образ этого базиса:

$$\zeta_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_1(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \zeta_1(c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

Рассмотрим эти матрицы как вектора в базисе из матричных единиц и запишем их координаты построчно в матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \xi^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что  $\text{rank } M = 3$ , а значит  $\dim \text{cosupp } \psi_1 = \dim \zeta(H) = 3$ , следовательно  $\text{cosupp } \psi_1$  — алгебра диагональных матриц.

### Случай 1.2

$\beta^2$  линейно зависим с  $\varepsilon$  и  $\beta$ . Тогда существуют  $\lambda, \mu$  такие, что  $\beta^2 = \lambda\varepsilon + \mu\beta$ . Подставим  $h = 1_H$  и получим  $1 = \lambda + \mu$ , а значит  $\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\beta$

Из группоподобности  $\varepsilon, \beta$  и  $\beta^2$  получаем

$$\varepsilon(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = 0, \quad \beta(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = 0, \quad \beta^2(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = \lambda(1 - \lambda)$$

Используя эти результаты, подставим в разложение функции  $\beta^2 \varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}$ , где  $\varepsilon^{(1)}$  и  $\beta^{(1)}$  — это единицы соответствующих линейных функций. Получим

$$\lambda(1 - \lambda) = \lambda * 0 + (1 - \lambda) * 0 = 0$$

Если  $\lambda = 0$ , значит  $\beta^2 = \beta$ . Домножим это равенство на обратный к  $\beta$  и получим  $\beta = \varepsilon$ , что противоречит линейной независимости  $\varepsilon$  и  $\beta$ .

Следовательно  $\lambda = 1$  и  $\beta^2 = \beta$ . Докажем, что в таком случае модульная структура  $\psi$  эквивалентна структуре 2.

Пусть  $\psi_1 : \mathbb{K}\langle c \rangle_2 \otimes A \rightarrow A$  — модульная структура 2. Определим гомоморфизм алгебр  $\zeta_1 : \mathbb{K}\langle c \rangle_2 \rightarrow M_3(\mathbb{K})$  с помощью соотношения  $\zeta_1(h)(a) = \psi_1(h \otimes a)$ . Тогда получаем

$$\zeta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Выберем в  $\mathbb{K}\langle c \rangle_3$  базис  $(c^k)_{0 \leq k \leq 1}$  и выпишем образ этого базиса:

$$\zeta_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_1(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим эти матрицы как вектора в базисе из матричных единиц и запишем их координаты построчно в матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что  $\text{rank } M = 2$ , а значит  $\dim \text{cosupp } \psi_1 = \dim \zeta(H) = 2$ , следовательно  $\text{cosupp } \psi_1$  — подалгебра диагональных матриц, такая что для любой матрицы  $B$ , содержащейся в ней, верно  $b_{11} = b_{33}$ .

**Далее будем полагать  $\varepsilon, \beta$  и  $\alpha$  линейно независимыми.**

### Случай 2.1

Предположим, что  $\alpha^2 = \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \alpha$ , тогда подставив  $h = 1_H$ , получим  $0 = \lambda_1 + \lambda_2$ . Обозначим  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\mu = \lambda_3$  и перепишем разложение  $\alpha^2$  с учётом этого.

$$\alpha^2 = \lambda(\varepsilon - \beta) + \mu\alpha$$

Домножив слева и справа на  $\alpha$ , получим

$$\lambda(\alpha - \alpha\beta) + \mu\alpha^2 = 0$$

$$\lambda(\alpha - \beta\alpha) + \mu\alpha^2 = 0$$

Пусть  $\lambda \neq 0$ , тогда  $\alpha\beta = \beta\alpha$ , иначе говоря  $\alpha$  и  $\beta$  коммутируют. С учётом этого и (4.4) получаем

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha\beta + \beta^2\alpha = 3\alpha\beta^2 = 0$$

Тогда домножим это тождество на  $\beta^{-2}$  и, учитывая что  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$  выведем, что  $\alpha = 0$ . Это противоречит линейной независимости  $\varepsilon, \alpha$  и  $\beta$ .

Значит  $\lambda = 0$ , иначе говоря  $\alpha^2 = \mu\alpha$ . Тогда из (4.2) следует

$$\alpha^3 = \mu\alpha^2 = \mu^2\alpha = 0$$

Значит  $\mu = 0$ .

### Случай 2.1.1

Функции  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  линейно независимы,  $\alpha^2 = 0$  и функция  $\alpha\beta + \beta\alpha$  линейна независима с  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Тогда

$$\alpha^2 ((\alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)})) = \alpha(\alpha^{(1)})(\alpha\beta + \beta\alpha) ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 1$$

что невозможно.

### Случай 2.1.2

Функции  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  линейно независимы,  $\alpha^2 = 0$  и функция  $\alpha\beta + \beta\alpha$  линейно выражается через  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Пусть  $\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\beta + \mu\alpha$ . Подставим  $h = 1_H$  и получим, что  $0 = \lambda_1 + \lambda_2$ . Тогда обозначим  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\mu = \lambda_3$  и перепишем разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha$  с помощью этого:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda(\varepsilon - \beta) + \mu\alpha$$

С учётом  $\alpha^2 = 0$  и (4.3) получим

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 = \alpha\beta\alpha = 0$$

Домножим разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha$  на  $\alpha$  с обеих сторон

$$\lambda(\alpha - \alpha\beta) = 0$$

$$\lambda(\alpha - \beta\alpha) = 0$$

Пусть  $\lambda \neq 0$ , тогда  $\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$ . Из (4.4) и того, что  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$ , получаем  $\alpha = 0$ , что невозможно. Значит  $\lambda = 0$ , иначе говоря  $\alpha\beta + \beta\alpha = \mu\alpha$ .

Тогда

$$(\alpha\beta + \beta\alpha)(\varepsilon^{(1)}\alpha^{(1)}) = \alpha(\varepsilon^{(1)})(\alpha\beta + \beta\alpha)(\alpha^{(1)}) = 0$$

$$\alpha(\varepsilon^{(1)}\alpha^{(1)}) = \varepsilon(\varepsilon^{(1)})\alpha(\alpha^{(1)}) = 1$$

Подставим в разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha$   $\varepsilon^{(1)}\alpha^{(1)}$  и, воспользовавшись результатами выше, получим  $0 = \mu$ , иначе говоря  $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$

Тогда из (4.4) следует

$$\alpha\beta^2 + \beta(\alpha\beta + \beta\alpha) = \alpha\beta^2 = 0$$

Так как  $\beta$  группоподобный, значит существует  $\beta^{-1}$ . Домножим на квадрат обратного справа и получим  $\alpha = 0$ , что противоречит линейной независимости  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ .

### Случай 2.2

Далее полагаем, что  $\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha^2$  линейно независимы.

#### Случай 2.2.1

Функции  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta$  линейно независимы и функция  $\alpha\beta + \beta\alpha$  линейно выражается через  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta$ . Тогда существуют  $\lambda_i$  такие, что

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\beta + \lambda_3\alpha + \lambda_4\alpha^2$$

Подставим  $h = 1_H$ , получим  $0 = \lambda_1 + \lambda_2$ . Тогда обозначим  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\mu_1 = \lambda_3$ ,  $\mu_2 = \lambda_4$  и перепишем разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha$  с помощью этого:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda(\varepsilon - \beta) + \mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2$$

Рассмотрим (4.3):

$$\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha) + \beta\alpha^2 = 0$$

Значит с учётом  $\alpha^3 = 0$ :

$$\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha = (-\beta\alpha^2)\alpha = 0$$

Тогда домножим разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha$  на  $\alpha$  с обеих сторон:

$$0 = \lambda(\alpha^2 - \alpha\beta\alpha)$$

Пусть  $\lambda \neq 0$ , тогда  $\alpha^2 = \alpha\beta\alpha$ . Домножим  $\alpha\beta + \beta\alpha$  на  $\alpha^2$  слева и выпишем, что получится:

$$\alpha^2(\alpha\beta + \beta\alpha) = \alpha^2\beta\alpha = \alpha^3 = 0$$

$$(\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha^2 = \alpha\beta\alpha^2 = \alpha^3 = 0$$

$$\alpha^2(\alpha\beta + \beta\alpha) = \lambda(\alpha^2 - \alpha^2\beta)$$

$$(\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha^2 = \lambda(\alpha^2 - \beta\alpha^2)$$

Отсюда, с учётом предположения, что  $\lambda \neq 0$ , следует, что  $\alpha^2 = \alpha^2\beta = \beta\alpha^2$ . Подставим это в (4.3), используя  $\alpha^2 = \alpha\beta\alpha$ , тогда

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 = 3\alpha^2 = 0$$

Что невозможно, так как  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$  и функция  $\alpha^2$  линейно независима с  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Значит  $\lambda = 0$ , иначе говоря:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2$$

Подставим разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha$  в (4.3)

$$\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha) + \beta\alpha^2 = \mu_1\alpha^2 + \beta\alpha^2 = 0$$

$$\alpha^2\beta + (\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha = \alpha^2\beta + \mu_1\alpha^2 = 0$$

Сложим эти два равенства с учётом (4.3) получим

$$2\mu_1\alpha^2 = \alpha\beta\alpha$$

Теперь домножим  $\alpha\beta + \beta\alpha$  на  $\alpha\beta$  слева :

$$\alpha\beta(\alpha\beta + \beta\alpha) = \alpha(-\alpha\beta^2) = -\alpha^2\beta^2 = -\mu_1^2\alpha^2$$

$$\alpha\beta(\mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2) = \mu_1\alpha\beta\alpha + \mu_2\alpha\beta\alpha^2 = \mu_1\alpha\beta\alpha - \mu_1\mu_2\alpha^3 = \mu_1\alpha\beta\alpha$$

А значит

$$\mu_1\alpha\beta\alpha = -\mu_1^2\alpha^2$$

С учётом полученного выше соотношения приходит к выводу, что

$$2\mu_1^2\alpha^2 = -\mu_1^2\alpha^2$$

$$3\mu_1^2\alpha^2 = 0$$

Тогда, так как  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$  и функция  $\alpha^2$  линейно независима с  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , а значит  $\alpha^2 \neq 0$ , получаем, что  $\mu_1 = 0$ . Тогда

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \mu_2\alpha^2$$

Но если мы рассмотрим

$$\begin{aligned} \alpha^2 \left( \varepsilon^{(1)} (\alpha^2)^{(1)} \right) &= \varepsilon(\varepsilon^{(1)})\alpha^2 \left( (\alpha^2)^{(1)} \right) + \\ &+ \alpha(\varepsilon^{(1)})(\alpha\beta + \beta\alpha) \left( (\alpha^2)^{(1)} \right) + \alpha^2(\varepsilon^{(1)})\beta^2 \left( (\alpha^2)^{(1)} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\beta + \beta\alpha) \left( \varepsilon^{(1)} (\alpha^2)^{(1)} \right) &= \beta(\varepsilon^{(1)})(\alpha\beta + \beta\alpha) \left( (\alpha^2)^{(1)} \right) + \\ &+ (\alpha\beta + \beta\alpha)(\varepsilon^{(1)})\beta^2 \left( (\alpha^2)^{(1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Тогда, если мы подставим в разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha \varepsilon^{(1)} (\alpha^2)^{(1)}$ , получим

$$0 = \mu_2 * 1$$

Значит  $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ . Отсюда с учётом (4.4) получаем

$$\beta(\alpha\beta + \beta\alpha) + \alpha\beta^2 = \alpha\beta^2 = 0$$

Но тогда домножив на обратный к  $\beta^2$  получим  $\alpha = 0$ , что противоречит линейной независимости  $\alpha$  с  $\varepsilon$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta$ .

### **Случай 2.2.2**

Далее полагаем **Функции  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta$ ,  $\alpha\beta + \beta\alpha$  линейно независимыми.**

#### **Случай 2.2.2.1**

Функции  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta$ ,  $\alpha\beta + \beta\alpha$  линейно независимы и функция  $\beta^2$  линейно выражается через  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta$ . Тогда существуют  $\lambda_i$  такие, что

$$\beta^2 = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\beta + \lambda_3\alpha + \lambda_4\alpha^2 + \lambda_5(\alpha\beta + \beta\alpha)$$

Подставим  $h = 1_H$ , получим  $1 = \lambda_1 + \lambda_2$ . Тогда обозначим  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\mu_1 = \lambda_3$ ,  $\mu_2 = \lambda_4$ ,  $\mu_3 = \lambda_5$  и перепишем разложение  $\alpha\beta + \beta\alpha$  с помощью этого:

$$\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\beta + \mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2 + \mu_3(\alpha\beta + \beta\alpha)$$

Рассмотрим значения наших функций от  $(\alpha^{(1)})^2$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left( (\alpha^{(1)})^2 \right) &= \varepsilon (\alpha^{(1)}) \varepsilon (\alpha^{(1)}) = 0 \\
\alpha \left( (\alpha^{(1)})^2 \right) &= \varepsilon (\alpha^{(1)}) \alpha (\alpha^{(1)}) + \alpha (\alpha^{(1)}) \beta (\alpha^{(1)}) = 0 \\
\beta \left( (\alpha^{(1)})^2 \right) &= \beta (\alpha^{(1)}) \beta (\alpha^{(1)}) = 0 \\
\alpha^2 \left( (\alpha^{(1)})^2 \right) &= \varepsilon (\alpha^{(1)}) \alpha^2 (\alpha^{(1)}) + \alpha (\alpha^{(1)}) (\alpha\beta + \beta\alpha) (\alpha^{(1)}) + \\
&\quad + \alpha^2 (\alpha^{(1)}) \beta (\alpha^{(1)}) = 0 \\
(\alpha\beta + \beta\alpha) \left( (\alpha^{(1)})^2 \right) &= \beta (\alpha^{(1)}) (\alpha\beta + \beta\alpha) (\alpha^{(1)}) + \\
&\quad + (\alpha\beta + \beta\alpha) (\alpha^{(1)}) \beta^2 (\alpha^{(1)}) = 0 \\
\beta^2 \left( (\alpha^{(1)})^2 \right) &= \beta^2 (\alpha^{(1)}) \beta^2 (\alpha^{(1)}) = \mu_1^2
\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\beta^2 \left( (\alpha^{(1)})^2 \right) = \mu_1^2 = 0$$

Значит  $\mu_1 = 0$ , иначе говоря

$$\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\beta + \mu_2\alpha^2 + \mu_3(\alpha\beta + \beta\alpha)$$

Рассмотрим значения наших функций от  $\alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left( \alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)} \right) &= \varepsilon (\alpha^{(1)}) \varepsilon ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\alpha \left( \alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)} \right) &= \varepsilon (\alpha^{(1)}) \alpha ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + \alpha (\alpha^{(1)}) \beta ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\beta \left( \alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)} \right) &= \beta (\alpha^{(1)}) \beta ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\alpha^2 \left( \alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)} \right) &= \varepsilon (\alpha^{(1)}) \alpha^2 ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + \alpha (\alpha^{(1)}) (\alpha\beta + \beta\alpha) ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + \alpha^2 (\alpha^{(1)}) \beta ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 1 \\
(\alpha\beta + \beta\alpha) \left( \alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)} \right) &= \beta (\alpha^{(1)}) (\alpha\beta + \beta\alpha) ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + (\alpha\beta + \beta\alpha) (\alpha^{(1)}) \beta^2 ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\beta^2 \left( \alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)} \right) &= \beta^2 (\alpha^{(1)}) \beta^2 ((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0
\end{aligned}$$

Значит  $\beta^2 \left( \alpha^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)} \right) = \mu_2 = 0$  Тогда разложения выглядит таким образом:

$$\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\beta + \mu_3(\alpha\beta + \alpha\beta)$$



Рассмотрим значения наших функций от  $\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) &= \varepsilon(\varepsilon^{(1)})\varepsilon((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\alpha(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) &= \varepsilon(\varepsilon^{(1)})\alpha((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + \alpha(\varepsilon^{(1)})\beta((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\beta(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) &= \beta(\varepsilon^{(1)})\beta((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\alpha^2(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) &= \varepsilon(\varepsilon^{(1)})\alpha^2((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + \alpha(\varepsilon^{(1)})\alpha(\beta + \beta\alpha)((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + \alpha^2(\varepsilon^{(1)})\beta((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
(\alpha\beta + \beta\alpha)(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) &= \beta(\varepsilon^{(1)})\alpha(\beta + \beta\alpha)((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) + \\
&\quad + (\alpha\beta + \beta\alpha)(\varepsilon^{(1)})\beta^2((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = 0 \\
\beta^2(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) &= \beta^2(\varepsilon^{(1)})\beta^2((\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = \lambda\mu_3
\end{aligned}$$

Значит  $\beta^2(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta + \beta\alpha)^{(1)}) = \lambda\mu_3 = 0$ .

Пусть  $\mu_3 \neq 0$ , тогда  $\lambda = 0$  и  $\beta^2 = \beta + \mu_3(\alpha\beta + \beta\alpha)$ . Домножим на  $\beta$  слева и справа и с учётом (4.4) сложим

$$\begin{aligned}
\beta^3 &= \beta^2 + \mu_3\beta(\alpha\beta + \beta\alpha) \\
\beta^3 &= \beta^2 + \mu_3(\alpha\beta + \beta\alpha)\beta \\
2\beta^3 &= 2\beta^2 + \mu_3\beta\alpha\beta
\end{aligned}$$

Домножив последнее равенство на обратный к  $\beta$  с обеих сторон и получим

$$2\beta = 2\varepsilon + \mu_2\alpha$$

Так как  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  линейно независимы значит  $\mu_3 = 0$ . Получаем противоречие с нашим предположением  $\mu_3 \neq 0$ . Значит  $\mu_3 = 0$ .

Тогда  $\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\beta$ .

Из группоподобности  $\varepsilon$ ,  $\beta$  и  $\beta^2$  получаем

$$\varepsilon(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = 0, \quad \beta(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = 0, \quad \beta^2(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = \lambda(1 - \lambda)$$

Используя эти результаты, подставим в разложение функции  $\beta^2 \varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}$ , где  $\varepsilon^{(1)}$  и  $\beta^{(1)}$  — это единицы соответствующих линейных функций. Получим

$$\lambda(1 - \lambda) = \lambda * 0 + (1 - \lambda) * 0 = 0$$

Если  $\lambda = 0$ , значит  $\beta^2 = \beta$ . Домножим это равенство на обратный к  $\beta$  и получим  $\beta = \varepsilon$ , что противоречит линейной независимости  $\varepsilon$  и  $\beta$ .

Если  $\lambda = 1$ , тогда  $\beta^2 = \varepsilon$ . Рассмотрим (4.4)

$$\beta^2\alpha + \beta\alpha\beta + \alpha\beta^2 = 2\alpha + \beta\alpha\beta = 0 \quad (*)$$

Домножим на  $\alpha$  с обеих сторон

$$2\beta\alpha\beta + \beta^2\alpha\beta^2 = 2\beta\alpha\beta + \alpha = 0$$

Выразим из (\*)  $\beta\alpha\beta$  через  $\alpha$  и подставим в соотношение выше, получим

$$-4\alpha + \alpha = -3\alpha = 0$$

Так как  $\text{char } \mathbb{K} \neq 3$ , получаем  $\alpha = 0$ , что невозможно ввиду линейной независимости  $\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha$ . □

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2003, 416 с.
- [2] Бахтурин Ю. А., Зайцев М. В., Сегал С. К. Конечномерные простые градуированные алгебры. *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 21–40.
- [3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: в 3 т. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [4] Мёрфи Дж.  $C^*$ -алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997, 336 с.
- [5] Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 312 с.
- [6] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003, 216 с.
- [7] Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972, 192 с.
- [8] Abe, E. Hopf algebras. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [9] Agore, A. L., Gordienko, A. S., Vercruysse, J.  $V$ -universal Hopf algebras (co)acting on  $\Omega$ -algebras. *Commun. Contemp. Math.*, **25**:1 (2023), 2150095-1 – 2150095-40.
- [10] Agore, A. L., Gordienko, A. S., Vercruysse, J. Lifting of locally initial objects and universal (co)acting Hopf algebras. [arXiv:2406.17677 \[math.CT\]](https://arxiv.org/abs/2406.17677) 25 Jun 2024.
- [11] Connes, A., Marcolli, M. Quantum fields, noncommutative spaces and motives. (Книга готовится к печати, электронная версия <https://www.alainconnes.org/docs/bookwebfinal.pdf>)
- [12] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C., Raianu, Ş. Hopf algebras: an introduction. New York, Marcel Dekker, Inc., 2001.
- [13] Donatsos, D., Daskaloyannis, C. Quantum groups and their applications in nuclear physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **43** (1999), 537–618.
- [14] Giambruno, A., Zaicev, M. V. Polynomial identities and asymptotic methods. *AMS Mathematical Surveys and Monographs*. **122**, Providence, R.I., 2005, 352 pp.
- [15] Gordienko, A. S. On a general notion of a polynomial identity and codimensions. *J. Pure and Appl. Algebra*, **229**:1 (2025), 107814-1 – 107814-27.
- [16] Haag, R. Local quantum physics: fields, particles, algebras. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [17] Haag, R., Kastler, D. An algebraic approach to quantum field theory. *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 848–861.
- [18] Kaku, M. Introduction to superstrings and M-theory. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [19] Majid, S. Foundations of quantum group theory. Cambridge University Press, 1995.
- [20] Montgomery, S. Hopf algebras and their actions on rings. *CBMS Lecture Notes* **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [21] Sweedler, M. E. Hopf Algebras. W. A. Benjamin, New York, 1969.