МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

КУРСОВАЯ РАБОТА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОДМНОЖЕСТВ ПУСТЫХ МНОЖЕСТВ, НЕ ИЗВЕСТНЫХ РАНЕЕ

Выполнила:
студентка 302 группы
Комерист Евгения Николаевна

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Гордиенко Алексей Сергеевич

Москва
2025

1 Введение

Во многих областях математики и физики (см., например, [1, 3, 4, 17]) находят своё применение *алгебры*, то есть векторные пространства над некоторым полем $\Bbbk$ (например, $\Bbbk$ может быть полем $\mathbb{R}$ вещественных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел), в которых задана бинарная операция внутреннего умножения, линейная по каждому аргументу.

Часто алгебры, встречающиеся в приложениях, наделены некоторой дополнительной структурой или (обобщёнными) симметриями: действием (полу)группы эндоморфизмами и антиэндоморфизмами, (полу)групповой градуировкой или действием алгебры Ли дифференцированиями (см., например, [5, 16, 18, 19]). Для работы с такими дополнительными структурами оказывается полезным понятие модульной и комодульной алгебры над алгеброй Хопфа и даже более общее понятие алгебры с обобщённым H-действием. В частности, понятие (ко)модульной алгебры позволяет изучать различные виды дополнительных структур на алгебрах одновременно.

Кроме того, (ко)модульные алгебры естественным образом возникают в геометрии: если некоторая аффинная алгебраическая группа действует морфизмами на аффинном алгебраическом многообразии (например, рассматриваются симметрии некоторой поверхности, заданной алгебраическими уравнениями), то алгебра регулярных функций (множество функций, которые можно определить при помощи многочленов от координат точки, с операциями сложения, умножения между собой и на скаляры) будет модульной алгеброй над групповой алгеброй этой группы и над универсальной обёртывающей алгебры Ли этой группы и комодульной алгеброй над алгеброй регулярных функций на аффинной алгебраической группе [8].

Обратим внимание на то, что в классическом случае алгебры регулярных функций на многообразиях коммутативны, так как для умножения функций выполнен перестановочный закон. Однако в новом направлении, которое получило название некоммутативной геометрии, рассматриваются «некоммутативные пространства», т. е. такие пространства, алгебры регулярных функций которых некоммутативны. Поэтому изучение (ко)действий необязательно коммутативных алгебр Хопфа на необязательно коммутативных алгебрах можно интерпретировать как изучение квантовых симметрий некоммутативных пространств. Последние находят своё применение в теоретической физике (см., например, [11, 13]).

2 Основные понятия

В данном параграфе мы напомним основные понятия, связанные с (ко)алгебрами, алгебрами Ли, биалгебрами и алгебрами Хопфа. Подробнее с этими понятиями можно познакомиться в монографиях [6, 12, 20, 21].

Прежде всего напомним понятие алгебры над полем в удобной для нас форме, а именно, на языке линейных отображений и коммутативных диаграмм.

Определение 2.1. *Алгеброй над полем* $\Bbbk$ называется пара (A, μ), состоящая из векторного пространства A над $\Bbbk$ и линейного отображения $\mu\colon A \otimes A \to A$.

При помощи отображения μ на векторном пространстве A задаётся операция внутреннего умножения, линейная по каждому аргументу: $ab := \mu(a \otimes b)$ для всех $a, b \in A$.

Алгебра (A, μ) называется *ассоциативной*, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

3 (Ко)носители коизмерений

Прежде всего, нам понадобится следующая лемма:

Лемма 3.1 ([9, лемма 2.14])**.** *Пусть A, B, P — векторные пространства над полем $\Bbbk$. Пусть $\rho\colon A \to B \otimes P^*$ — линейное отображение, $\rho(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}$ при $a \in A$. Определим линейное отображение $\rho^\vee\colon P \otimes A \to B$ по формуле $\psi(p \otimes a) := a_{(1)}(p)a_{(0)}$ для всех $a \in A$, $p \in P$. Тогда $\operatorname{cosupp} \rho = \overline{\operatorname{cosupp} \rho^\vee}$ (замыкание берётся в конечной топологии).*

Теперь докажем следующую лемму:

Лемма 3.2. *Пусть A и B — Ω-алгебры над полем $\Bbbk$, P — коалгебра, а $V \subseteq \mathbf{Vect}_\Bbbk(A, B)$ — поточечно конечномерное подпространство, замкнутое в конечной топологии. Обозначим через $\operatorname{Meas}(P, A, B, V)$ множество всех измерений $\psi\colon P \otimes A \to B$, для которых $\operatorname{cosupp} \psi \subseteq V$, а через $\operatorname{Comeas}(P^*, A, B, V)$ множество всех коизмерений $\rho\colon A \to B \otimes P^*$, для которых $\operatorname{cosupp} \rho \subseteq V$. Тогда существует биекция $\operatorname{Meas}(P, A, B, V) \cong \operatorname{Comeas}(P^*, A, B, V)$, естественная по коалгебре P, если рассматривать $\operatorname{Meas}(-, A, B, V)$ и $\operatorname{Comeas}((-)^*, A, B, V)$ как функторы $\mathbf{Coalg}_\Bbbk \to \mathbf{Sets}$.*

Доказательство. Любое коизмерение $\rho \in \operatorname{Comeas}(P^*, A, B, V)$ порождает измерение $\rho^\vee\colon P \otimes A \to B$, где $\rho^\vee(p \otimes a) := a_{(1)}(p)a_{(0)}$ для всех $a \in A$ и $p \in P$. Тогда $\operatorname{cosupp} \rho^\vee \subseteq \operatorname{cosupp} \rho \subseteq V$ и $\rho^\vee \in \operatorname{Meas}(P, A, B, V)$.

Обратно, если $\psi \in \operatorname{Meas}(P, A, B, V)$, то $\operatorname{cosupp} \psi \subseteq V$, т.е. $\operatorname{cosupp} \psi$ является поточечно конечномерным пространством. Отсюда для каждого $a \in A$ существует конечное число элементов $b_1, \ldots, b_n \in B$ и линейных функций $p_1^*, \ldots, p_n^* \in P^*$ таких, что для любого $p \in P$ справедливо равенство $\psi(p \otimes a) = \sum_{i=1}^n p_i^*(p) b_i$, причём при фиксированных линейно независимых элементах $b_1, \ldots, b_n$ элементы $p_1^*, \ldots, p_n^* \in P^*$ определены однозначно. Поэтому существует единственное коизмерение $\rho\colon A \to B \otimes P^*$ такое, что $\psi = \rho^\vee$. Для любого $a \in A$ справедливо равенство $\rho(a) = \sum_{i=1}^n b_i \otimes p_i^*$. Поскольку V замкнуто, в силу леммы 3.1 справедливо включение $\operatorname{cosupp} \rho = \overline{\operatorname{cosupp} \psi} \subseteq V$, и $\rho \in \operatorname{Comeas}(P^*, A, B, V)$. □

Основным результатом курсовой работы является теорема ниже:

Теорема 3.3. *Пусть A — это Ω-алгебра над полем $\Bbbk$, а $V \subseteq \operatorname{End}_\Bbbk(A)$ — подалгебра, содержащая тождественный оператор. Тогда на V-универсальной измеряющей коалгебре $_\square\mathcal{B}(A, V) := {}_\square\mathcal{C}(A, A, V)$ можно задать структуру биалгебры (см. §2) таким образом, что для любой биалгебры B и любого действия $\psi\colon B \otimes A \to A$ такого, что $\operatorname{cosupp} \psi \subseteq V$,* *единственный гомоморфизм коалгебр φ такой, что диаграмма ниже является коммутативной, является ещё и гомоморфизмом биалгебр:*

$$\begin{tikzcd} B \otimes A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\varphi\otimes \mathrm{id}_A"'] & A \\ {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[ur, "\psi_{A,V}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

(Здесь $\psi_{A,V} := \psi_{A,A,V}$.)

Основываясь на теореме 3.3, будем называть биалгебру ${}_\square\mathcal{B}(A,V)$ *V-универсальной действующей биалгеброй.*

Доказательство теоремы 3.3. Заметим, что

$$\psi_{A,V}(\mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)} \otimes \psi_{A,V}) \colon {}_\square\mathcal{B}(A,V) \otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V) \otimes A \to A$$

также является измерением, причём $\operatorname{cosupp}(\psi_{A,V}(\mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)} \otimes \psi_{A,V})) \subseteq V$, поскольку V — подалгебра. Отсюда существует единственный гомоморфизм коалгебр $\mu\colon {}_\square\mathcal{B}(A,V) \otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V) \to {}_\square\mathcal{B}(A,V)$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)} \otimes\psi_{A,V}"] \arrow[d, dashed, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"'] & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[d, "\psi_{A,V}"] \\ {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[r, "\psi_{A,V}"'] & A \end{tikzcd}$$

Определим теперь умножение в ${}_\square\mathcal{B}(A,V)$ при помощи отображения μ.

Для того, чтобы задать единичный элемент, рассмотрим тривиальное отображение

$$\Bbbk \otimes A \xrightarrow{\sim} A.$$

В силу того, что это отображение является измерением, существует единственный гомоморфизм коалгебр $u\colon \Bbbk \to {}_\square\mathcal{B}(A,V)$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "u\otimes \mathrm{id}_A"'] & A \\ {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[ur, "\psi_{A,V}"'] & \end{tikzcd}$$

Определим $1_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)} := u(1_\Bbbk)$.

Теперь нужно доказать, что умножение μ ассоциативно и $1_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}$ действительно является единицей алгебры ${}_\square\mathcal{B}(A,V)$.

Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[rrr, "\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\mu\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[drr, "\mu\otimes\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\psi_{A,V}"] & & & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dr, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\psi_{A,V}"] & \\
& & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[rr, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\psi_{A,V}"] & & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dd, "\psi_{A,V}"] \\
{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[rrr, "\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\psi_{A,V}"] \arrow[drr, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"] & & & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dr, "\psi_{A,V}"] & \\
& & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[rr, "\psi_{A,V}"'] & & A
\end{tikzcd}
$$

Левая грань коммутативна, поскольку обе композиции равны $\mu\otimes\psi_{A,V}$. Коммутативность остальных граней, за исключением верхней, следует из определения отображения μ. Отсюда композиции, отвечающие верхней грани, также становятся равными друг другу после их композиции с $\psi_{A,V}$. Теперь из универсального свойства коалгебры ${}_{\square}\mathcal{B}(A,V)$ следует коммутативность диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V) \arrow[r, "\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}"'] & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V) \arrow[d, "\mu"] \\
{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V) \arrow[r, "\mu"'] & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)
\end{tikzcd},
$$

откуда умножение в ${}_{\square}\mathcal{B}(A,V)$ действительно ассоциативно.

Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\Bbbk\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[rr, "u\otimes\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\Bbbk}\otimes\psi_{A,V}"'] & & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dl, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{{}_{\square}\mathcal{B}(A,V)}\otimes\psi_{A,V}"] \\
& {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dd, "\psi_{A,V}"] & \\
\Bbbk\otimes A \arrow[rr, "u\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\sim"] & & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dl, "\psi_{A,V}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Коммутативность задней и левой граней очевидна. Коммутативность нижней грани следует из определения отображения u, а коммутативность правой грани следует из определения отображения μ. Следовательно, гомоморфизмы коалгебр, образующие верхнюю грань, становятся равными после их композиции с $\psi_{A,V}$. Применяя универсальное свойство коалгебры ${}_\square\mathcal{B}(A,V)$, получаем отсюда коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V) \arrow[rr, "{u\otimes \mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V) \arrow[dl, "\mu"] \\ & {}_\square\mathcal{B}(A,V) & \end{tikzcd}$$

Отсюда элемент $1_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}$ является левой единицей алгебры ${}_\square\mathcal{B}(A,V)$.

Коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} {}_\square\mathcal{B}(A,V) \otimes \Bbbk \arrow[rr, "{\mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}\otimes u}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V) \arrow[dl, "\mu"] \\ & {}_\square\mathcal{B}(A,V) & \end{tikzcd}$$

получается при помощи аналогичных рассуждений, применённых к диаграмме

$$\begin{tikzcd} {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes\Bbbk\otimes A \arrow[rr, "{\mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}\otimes u\otimes \mathrm{id}_A}"] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd, "\sim"] & & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dl, "\mu\otimes \mathrm{id}_A"'] \arrow[dd, "{\mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}\otimes\psi_{A,V}}"] \\ & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dd, "{\psi_{A,V}}"] & \\ {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "{\psi_{A,V}}"'] & & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dl, "{\psi_{A,V}}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Следовательно, $1_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}$ является не только левой, но и правой единицей алгебры ${}_\square\mathcal{B}(A,V)$, и ${}_\square\mathcal{B}(A,V)$ — действительно биалгебра.

Предположим, что B — биалгебра, а $\psi\colon B\otimes A \to A$ — такое действие, что $\operatorname{cosupp}\psi \subseteq V$. Обозначим через $\varphi\colon B\to {}_\square\mathcal{B}(A,V)$ единственный гомоморфизм коалгебр, делающий диаграмму (3.1) коммутативной. Такой гомоморфизм существует в силу теоремы [9, теорема 3.10]. Докажем, что в этом случае φ является гомоморфизмом биалгебр.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} B\otimes B\otimes A \arrow[rr, "\varphi\otimes\varphi\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\mu_B\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_B\otimes\psi"'] & & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dr, "\mu\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dd, "{\mathrm{id}_{{}_\square\mathcal{B}(A,V)}\otimes\psi_{A,V}}" near end] & \\ & B\otimes A \arrow[rr, "\varphi\otimes \mathrm{id}_A" near start] \arrow[dd, "\psi" near start] & & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dd, "{\psi_{A,V}}"] \\ B\otimes A \arrow[rr, "\varphi\otimes \mathrm{id}_A" near end] \arrow[dr, "\psi"] & & {}_\square\mathcal{B}(A,V)\otimes A \arrow[dr, "{\psi_{A,V}}"] & \\ & A \arrow[rr, equal] & & A \end{tikzcd}$$

(Здесь $\mu_B\colon B\otimes B\to B$ — умножение в B.)

Нижняя и передняя грани коммутативны по определению гомоморфизма φ. Задняя грань коммутативна, так как она совпадает с нижней (и передней) гранью, тензорно умноженной слева на φ. Левая и правая грани коммутативны, поскольку и ψ, и $\psi_{A,V}$ определяют на A структуру левого модуля. Отсюда после композиции с $\psi_{A,V}$ верхняя грань также становится коммутативной, и из универсального свойства коалгебры ${}_{\square}\mathcal{B}(A,V)$ следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"] \arrow[d, "\mu_B"'] & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V) \otimes {}_{\square}\mathcal{B}(A,V) \arrow[d, "\mu"] \\
B \arrow[r, "\varphi"'] & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)
\end{tikzcd}$$

Следовательно, отображение φ сохраняет операцию умножения.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \Bbbk \otimes A \arrow[ddl, "u_B\otimes\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, "u\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[ddr, "\sim"] & \\
& {}_{\square}\mathcal{B}(A,V) \otimes A \arrow[dr, "\psi_{A,V}"] & \\
B \otimes A \arrow[ur, "\varphi\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[rr, "\psi"'] & & A
\end{tikzcd}$$

(Здесь отображение $u_B\colon \Bbbk \to B$ задаётся равенством $u(\alpha) = \alpha 1_B$, где $\alpha \in \Bbbk$.)

Большой треугольник и правый треугольник коммутативны в силу того, что единицы биалгебр B и ${}_{\square}\mathcal{B}(A,V)$ действуют на A как тождественный оператор. Нижний треугольник коммутативен по определению отображения φ. Следовательно, левый треугольник также становится коммутативным после композиции его отображений с отображением $\psi_{A,V}$. Следовательно, из универсального свойства коалгебры ${}_{\square}\mathcal{B}(A,V)$ следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& \Bbbk \arrow[dl, "u_B"'] \arrow[dr, "u"] & \\
B \arrow[rr, "\varphi"'] & & {}_{\square}\mathcal{B}(A,V)
\end{tikzcd}$$

Отсюда отображение φ сохраняет единицу и поэтому действительно является гомоморфизмом биалгебр. $\square$

Замечание 3.4. В коуниверсальном квадрате в категории групп, в котором нижняя стрелка f — эпиморфизм, верхняя стрелка g также является эпиморфизмом:

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r, two heads, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Такая диаграмма нам кажется особенно важной:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, two heads, "r"] \arrow[dr, "\eta^1_f"'] \arrow[dd, "f"'] & & P \arrow[dr, "\eta^1_h"] \arrow[ddll, "h"] & \\
& A_1 \arrow[rr, two heads, "r_1"] \arrow[dl, "I_1(f)"] & & P_1 \arrow[dlll, "I_1(h)"] \\
B & & &
\end{tikzcd}$$

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2003, 416 с.

[2] Бахтурин Ю. А., Зайцев М. В., Сегал С. К. Конечномерные простые градуированные алгебры. *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 21–40.

[3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: в 3 т. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[4] Мёрфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997, 336 с.

[5] Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 312 с.

[6] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003, 216 с.

[7] Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972, 192 с.

[8] Abe, E. Hopf algebras. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[9] Agore, A. L., Gordienko, A. S., Vercruysse, J. V-universal Hopf algebras (co)acting on Ω-algebras. *Commun. Contemp. Math.*, **25**:1 (2023), 2150095-1 – 2150095-40.

[10] Agore, A. L., Gordienko, A. S., Vercruysse, J. Lifting of locally initial objects and universal (co)acting Hopf algebras. `arXiv:2406.17677 [math.CT] 25 Jun 2024`.

[11] Connes, A., Marcolli, M. Quantum fields, noncommutative spaces and motives. (Книга готовится к печати, электронная версия https://www.alainconnes.org/docs/bookwebfinal.pdf)

[12] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C., Raianu, Ş. Hopf algebras: an introduction. New York, Marcel Dekker, Inc., 2001.

[13] Donatsos, D., Daskaloyannis, C. Quantum groups and their applications in nuclear physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **43** (1999), 537–618.

[14] Giambruno, A., Zaicev, M. V. Polynomial identities and asymptotic methods. *AMS Mathematical Surveys and Monographs.* **122**, Providence, R.I., 2005, 352 pp.

[15] Gordienko, A. S. On a general notion of a polynomial identity and codimensions. *J. Pure and Appl. Algebra*, **229**:1 (2025), 107814-1 – 107814-27.

[16] Haag, R. Local quantum physics: fields, particles, algebras. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[17] Haag, R., Kastler, D. An algebraic approach to quantum field theory. *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 848–861.

[18] Kaku, M. Introduction to superstrings and M-theory. Springer-Verlag, New York, 1999.

[19] Majid, S. Foundations of quantum group theory. Cambridge University Press, 1995.

[20] Montgomery, S. Hopf algebras and their actions on rings. *CBMS Lecture Notes* **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[21] Sweedler, M. E. Hopf Algebras. W. A. Benjamin, New York, 1969.