Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры

Квантовые симметрии в алгебре тройных чисел

Выполнил студент:
211 группы
Зазовский Л.С.
Научный руководитель:
проф. Гордиенко А.С.

Москва
2025

Содержание

1 Конечно двойственная алгебра Хопфа

1.1 Структура конечного двойственного пространства

Пусть у нас задано векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$.

Известно, что если V конечномерное, тогда $V \cong V^*$ и существует канонический изоморфизм между V и V^{**}. Оказывается, что похожий результат верен в бесконечномерных пространствах.

Определение. *Конечное двойственное пространство V° — это подпространство V^* такое, что для любой линейной функции $\alpha \in V^\circ$ её ядро имеет конечную коразмерность.*

В случае конечномерных пространств $V^\circ = V^*$.

Определение. *Пусть в V выбран базис $(e_i)_{i\in\Lambda}$. Тогда двойственная система $(\varepsilon_i)_{i\in\Lambda}$ в V° — это система функций таких, что для всех $i, j \in \Lambda$ верно соотношение $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.*

В случае конечномерных пространств двойственная система окажется в точности системой координатных функций.

Теорема. *Двойственная система является базисом в V°*

Доказательство. Сначала докажем, что двойственная система полна в V°. Рассмотрим некоторую линейную функцию f из V°. Тогда существует векторное подпространство W такое, что V, раскладывается в прямую сумму $V = W \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Рассмотрим проектор π на подпространство W вдоль $\mathrm{Ker}(f)$. Нетрудно, заметить что $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Ker}(f)$ и $\mathrm{Im}(\pi) = W$. Значит $W \cong V/\mathrm{Ker}(f)$. Отсюда следует, что W имеет конечную размерность, обозначим её как m. Выберем базис $a_1, \dots, a_m$ в W. Для любого вектора v верно разложение $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + u$, где u некоторый вектор из $\mathrm{Ker}(f)$. Тогда $f(v) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + u) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_m f(a_m)$. Мы получили, что значение f на произвольном векторе является линейной комбинацией значений на $(a_i)_{i=1}^m$

Так как $(e_i)_{i\in\Lambda}$ — базис, значит все $(a_j)_{j=1}^m$ выражаются с помощью конечной линейной комбинации $(e_i)_{i\in\Lambda}$. Отсюда понятно, что значение f на произвольном векторе является конечной линейной комбинацией значений на конечном подмножестве базисных векторов $(e_i)_{i\in\Lambda}$. Обозначим это подмножество $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$. Тогда можно выразить $f = f(e_{i_1})\varepsilon_{i_1} + \dots + f(e_{i_n})\varepsilon_{i_n}$. А это значит, что двойственная система полна.

Теперь докажем линейную независимость двойственной системы. Рассмотрим линейную комбинацию некоторой конечной подсистемы $\lambda_{i_1}\varepsilon_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_n}\varepsilon_{i_n} = 0$. Подставим e_{i_k}, получим $\lambda_{i_k}\varepsilon_{i_k}(e_{i_k}) = 0$, а значит $\lambda_{i_k} = 0$. Взяв все возможные k от 1 до n получим, что все коэффициенты равны нулю, что означает линейную независимость этой подсистемы. Следовательно все конечные подсистемы линейно независимы, а значит и двойственная система линейно независима. □

Замечание. В силу доказанной выше теоремы будем называть двойственную систему — конечно двойственным базисом.

Для полного соответствия аналогичным результатам в случае конечномерных пространств остатётся доказать две нижеследующие теоремы.

Теорема. *Пусть задано векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$. Тогда $V \cong V^\circ$*

Доказательство. Выберем в V базис $(e_i)_{i\in\Lambda}$ и соответсвующий ему конечно двойственный базис $(\varepsilon_i)_{i\in\Lambda}$ Пусть $\varphi : V \to V^\circ$ — линейное отображение заданное на базисе $\varphi(e_i) := \varepsilon_i$. Очевидно, что φ сюръективно.

Докажем инъективность. Пусть $\varphi(a) = \varphi(b)$ для некоторых $a, b \in V$. Тогда $\varphi(a - b) = 0$. Разложим $a - b$ по базису V: $a - b = \lambda_{i_1}e_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n}e_{i_n}$. Тогда $\varphi(\lambda_{i_1}e_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_n}e_{i_n}) = \lambda_{i_1}\varepsilon_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_n}\varepsilon_{i_n} = 0$. В силу линейной независимости $(\varepsilon_{i_k})_{k=1}^n$, получаем $\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_n} = 0$. Значит $a - b = 0$, следовательно φ инъективно. Тогда φ изоморфизм. □

Теорема. *Существует канонический изоморфизм $\varphi : V \to V^{\circ\circ}$.*

Доказательство. Определим $\varphi : V \to V^{\circ\circ}$, как $\varphi(u)(\alpha) := \alpha(u)$, для любых $u \in V$ и $\alpha \in V^\circ$. Докажем корректность определения, а именно тот факт, что $\varphi(u) \in V^{\circ\circ}$. Ядро $\varphi(u)$ это множество линейных функций α таких, что $\alpha(u) = 0$. Выберем базис $(e_i)_{i\in\Lambda}$ в V и соответствующий ему конечно двойственный базис $(\varepsilon_i)_{i\in\Lambda}$ в V°. Пусть $u = \lambda_{i_1}e_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_m}e_{i_m}$, тогда $\varepsilon_j(u) = \lambda_j$, если для некоторого k верно $j = i_k$, и $\varepsilon_j(u) = 0$ иначе. Отсюда получаем что $V^\circ/\mathrm{Ker}(\varphi(u)) \cong \langle\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_m}\rangle$, откуда следует, что $\mathrm{Ker}(\varphi(u))$ имеет конечную коразмерность.

Теперь докажем, что φ — изоморфизм. Пусть $\varphi(a)(\alpha) = \varphi(b)(\alpha)$ для любой функции $\alpha \in V^\circ$. Тогда для любого $i \in \Lambda$ верно $\varphi(a)(\varepsilon_i) = \varphi(b)(\varepsilon_i)$, иначе говоря $\varepsilon_i(a) = \varepsilon_i(b)$ для любого $i \in \Lambda$. Это значит что a и b имеют одинаковые разложения по базису $(e_i)_{i\in\Lambda}$. Получаем, что $a = b$, следовательно φ инъективен.

Пусть $f \in V^{\circ\circ}$. Выберем в $V^{\circ\circ}$ базис $(\epsilon_i)_{i\in\Lambda}$ конечно двойственный к $(\varepsilon_i)_{i\in\Lambda}$. Разложим функцию f по $(\epsilon_i)_{i\in\Lambda}$: $f = \lambda_{i_1}\epsilon_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}\epsilon_{i_k}$. Рассмотрим вектор $u \in V$, такой что $u = \lambda_{i_1}e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}e_{i_k}$ и докажем, что $\varphi(u) = f$.

$f(\varepsilon_j) = \lambda_j$, если для некоторого k верно, что $j = i_k$, иначе $f(\varepsilon_j) = 0$. $\varphi(u)(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(u) = \lambda_j$, если для некоторого k верно, что $j = i_k$, иначе $\varphi(u)(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(u) = 0$. Значит f и $\varphi(u)$ совпадают на базисе, следовательно $f = \varphi(u)$. Тем самым мы доказали, что φ сюръективен. $\square$

Для удобства рассуждений введём ещё одно понятие.

Определение. *Пусть задано векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$ и система $K \subseteq V^*$. Единицей линейной функции $\alpha \in K$ по системе K — будем называть вектор $v \in V$, такой что $\alpha(v) = 1$ и для любой линейной функции $\beta \in K$ отличной от α верно $\beta(v) = 0$*

Будем обозначать единицу линейной функции α как $\alpha^{(1)}$. Из рассуждений выше следует, что для любой функции из конечно двойственного базиса существует единица линейной функции.

1.2 Структура конечно двойственной алгебры Хопфа

Пусть задана A — алгебра с единицей над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим подмножество линейных функций $A^\circ \subseteq A^*$, такое что в ядре любой функции $\alpha \in A^\circ$ содержится идеал конечной коразмерности. Тогда $\mu^*(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$, а значит можно определить конечную двойственную коалгебру.

Определение. *Конечная двойственная коалгебра A° — это коалгебра $(A^\circ, \mu^\circ, u^\circ)$, где μ° и u° это ограничения μ^* и u^* на A° соответственно.*

Как множество A° является подпространством в конечно двойственном пространстве к векторному пространству A. Выберем в A° базис $(\varepsilon_i)_{i\in\Lambda}$ и дополним его до базиса всего конечно двойственного пространства. Рассмотрим конечно двойственный базис в A, в нём существует подсистема $(e_i)_{i\in\Lambda}$ из единиц линейных функций составляющих базис A°. Она обладает следующим свойством $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Пусть задана H — алгебра Хопфа над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим H° — конечную двойственную коалгебру. Как множество H° является подалгеброй в H^*, поэтому H° является алгеброй Хопфа.

Определение. *Пусть задана H — алгебра Хопфа над полем $\mathbb{K}$. H° называют конечной двойственной алгеброй Хопфа.*

Здесь и далее мы пользуемся обозначениями Свидлера и для удобства опускаем знак суммы: $\triangle a = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Выпишем некоторые полезные соотношения, следующие из двойственности. Для любых $\alpha, \beta \in H^\circ$ и $h, g \in H$ верно:

$$\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha \tag{1}$$

$$(\alpha\beta)(a) = \alpha(a_{(1)})\beta(a_{(2)}) \tag{2}$$

$$u^\circ(\alpha) = \alpha(1_H) \tag{3}$$

$$\triangle\alpha(a \otimes b) = \alpha(ab) \tag{4}$$

2 Характеризация H-модульной структуры

Пусть задана A — конечномерная H-модульная алгебра с 1 над полем $\mathbb{K}$, где H — алгебра Хопфа.

Отображение $\psi : H \otimes A \to A$, такое что $\psi(h \otimes a) := ha$ для всех $h \in H$ и $a \in a$, называется H-модульной структурой. Определим гомоморфизм алгебр $\zeta : H \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ равенством $\zeta(h)(a) := \psi(h \otimes a)$.

Выбрав базис в A такой, что его первым элементом будет единица алгебры A, отождествим $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ с $M_n(\mathbb{K})$. Тогда существуют такие $(\alpha_{ij})_{ij} \in H^\circ$, что

$$\zeta(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon(h) & \alpha_{12}(h) & \dots & \alpha_{1n}(h) \\ 0 & \alpha_{22}(h) & \dots & \alpha_{2n}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2}(h) & \dots & \alpha_{nn}(h) \end{pmatrix}$$

Для удобства положим $\alpha_{11} = \varepsilon$ и $\alpha_{21} = \dots = \alpha_{n1} = 0$ и обозначим за K базис $\langle \varepsilon, (\alpha_{ij})_{ij} \rangle$.

Будем называть $\zeta(h)$ — матрицей модульной структуры ψ . При так заданном отображении ζ, верно $\zeta(H) = \mathrm{cosupp}\ \psi$. Кроме того, рассмотрев ранг матрицы модульной структуры, получаем $\dim \zeta(H) = \dim \langle K \rangle$.

Нетрудно заметить, что $\mathrm{Ker}(\zeta)$ совпадает с аннулятором $\langle \mathrm{K} \rangle$. Из того, что $\mathrm{Ker}(\zeta)$ — идеал конечной коразмерности, следует что в ядре любой функции из $\langle \mathrm{K} \rangle$ содержится идеал конечной коразмерности, а значит $\langle \mathrm{K} \rangle \subseteq H^\circ$.

Так как ζ гомоморфизм алгебр, для любых $a, b \in H$ верно $\zeta(ab) = \zeta(a)\zeta(b)$. Значит для всех $1 \leq i, j \leq n$ верно

$$\alpha_{ij}(ab) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(a)\alpha_{kj}(b) \qquad (*)$$

.

Дополним K до базиса $(\varepsilon_i)_{i \in \Lambda}$ в H°, тогда существует система $(e_i)_{i \in \Lambda}$ в H, такая что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Разложим $\triangle \alpha_{ij}$ по базису $(\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l)_{k,l \in \Lambda}$. Рассматривая $\triangle \alpha_{ij}$ от всех возможных $e_k \otimes e_l$ и используя (4) и $(*)$, получим

$$\triangle \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \otimes \alpha_{kj}$$

3 Классификация модульных структур

Теорема. *Пусть $\psi : H \otimes A \to A$ – структура H-модульной алгебры с 1 на $A = \mathbb{K}[x]/(x^3)$, где H — некоторая алгебра Хопфа,* $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 3$ *и в поле существует примитивный корень степени 3. Выберем базис в A : $\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$ и отождествим $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ с $M_3(\mathbb{K})$. Предположим, что коноситель действия это подалгебра верхнетреугольных матриц. Тогда ψ эквивалентно одной из следующих модульных структур над A:*

1. *действие поля $\mathbb{K}$ на алгебре A умножением на скаляры;*
2. *действие групповой алгебры $\mathbb{K}\langle c\rangle_2$, заданное равенством $c\bar{x} = -\bar{x}$;*
3. *действие групповой алгебры $\mathbb{K}\langle c\rangle_3$, заданное равенством $c\bar{x} = \xi\bar{x}$,*

   где ξ — примитивный корень из единицы степени 3;
4. *$H_9(\xi)$-действие, заданное равенствами $c\bar{x} = \xi\bar{x},\ v\bar{x} = \bar{1}$,*

   где ξ — примитивный корень из единицы степени 3.

Доказательство. Определим отображение $\zeta : H \to \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ из равенства $\zeta(h)(a) := \psi(h \otimes a)$. Выберем в A базис $\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$ и отождествим $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ с $M_3(\mathbb{K})$. Тогда $\zeta(h)$ будет матрицей модульной структуры. Из условий теоремы следует, что матрица модульной структуры верхнетреугольная. Для удобства изложения переобозначим её нижеследующим образом:

$$\zeta(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon(h) & \alpha(h) & \tau(h) \\ 0 & \beta(h) & \theta(h) \\ 0 & 0 & \varphi(h) \end{pmatrix}$$

Из того, что A — H-модульная алгебра с 1, следует

$$h(\bar{x}^3) = (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}^2) = 0$$

$$h(\bar{x}^2) = (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x})$$

Используя определение $\zeta(h)$, получаем следующее

$$h\bar{x} = \alpha(h)\bar{1} + \beta(h)\bar{x}$$

$$h\bar{x}^2 = \tau(h)\bar{1} + \theta(h)\bar{x} + \varphi(h)\bar{x}^2$$

Тогда, используя $\bar{x}^3 = 0$, получим следующие соотношения

$$(h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}) = \left(\alpha(h_{(1)})\bar{1} + \beta(h_{(1)})\right)\left(\alpha(h_{(2)})\bar{1} + \beta(h_{(2)})\right) =$$

$$= \alpha^2(h)\bar{1} + (\alpha\beta + \beta\alpha)(h)\bar{x} + \beta^2(h)\bar{x}^2$$

$$h\bar{x}^2 = (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}) = \tau(h)\bar{1}+\theta(h)\bar{x}+\varphi(h)\bar{x}^2 = \alpha^2(h)\bar{1}+(\alpha\beta+\beta\alpha)(h)\bar{x}+\beta^2(h)\bar{x}^2$$

А значит можно выразить

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha^2 \\ \theta &= \alpha\beta + \beta\alpha \\ \varphi &= \beta^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того

$$\begin{aligned} (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}^2) = \left(\alpha(h_{(1)})\bar{1} + \beta(h_{(1)})\bar{x}\right)\left(\tau(h_{(2)})\bar{1} + \theta(h_{(2)})\bar{x} + \varphi(h_{(2)})\bar{x}^2\right) = \\ = (\alpha\tau)(h)\bar{1} + (\alpha\theta + \beta\tau)(h)\bar{x} + (\alpha\varphi + \beta\theta)(h)\bar{x}^2 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \alpha\tau &= 0 \\ \alpha\theta + \beta\tau &= 0 \\ \alpha\varphi + \beta\theta &= 0 \end{aligned}$$

Воспользовавшись (5) получим

$$\alpha^3 = 0 \tag{6}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 = 0 \tag{7}$$

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha\beta + \beta^2\alpha = 0 \tag{8}$$

Из соотношений (5) выразим τ, θ, φ и перепишем матрицу модульной структуры, используя эти выражения:

$$\zeta(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon(h) & \alpha(h) & \alpha^2(h) \\ 0 & \beta(h) & (\alpha\beta + \beta\alpha)(h) \\ 0 & 0 & \beta^2(h) \end{pmatrix}$$

Из доказанного в предыдущем разделе

$$\dim\, \zeta(H) = \dim\langle \varepsilon,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha^2,\ \alpha\beta + \beta\alpha,\ \beta^2 \rangle \leq 6$$

Если $\dim\, \zeta(H) = 6$, тогда $\zeta(H)$ – подалгебра всех верхнетреугольных матриц. Докажем, что в таком случае модульная структура ψ эквивалентна модульной структуре 4.

Пусть $\psi_1 : H_9(\xi)\otimes A \to A$ — модульная структура 4. Определим гоморфизм алгебр $\zeta_1 : H_9(\xi) \to M_3(\mathbb{K})$ с помощью соотношения $\zeta_1(h)(a) = \psi_1(h \otimes a)$. Тогда мы получим

$$\zeta_1(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}, \ \zeta_1(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выпишем образ базиса $(c^k v^l)_{0\le k,l\le 2}$ в $\zeta(H)$:

$$\zeta(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \zeta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}, \ \zeta(c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

$$\zeta(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \zeta(cv) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi+\xi^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta(c^2v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta(v^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+\xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \zeta(cv^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+\xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta(c^2v^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+\xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим эти матрицы как вектора в базисе из матричных единиц и запишем их координаты построчно в матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \xi^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi+\xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно, проверить, что $\mathrm{rank}\ M = 6$, а значит $\dim \mathrm{cosupp}\ \psi_1 = 6$, откуда $\mathrm{cosupp}\ \psi_1$ совпадает с алгеброй верхнетреугольных матриц.
Пусть теперь $\dim\ \zeta(H) \le 5$

В предыдущем разделе были доказаны разложения для результатов коумножения на элементах матрицы модульной структуры. Выпишем их для наших функций:

$$\begin{aligned}
\triangle\varepsilon &= \varepsilon\otimes\varepsilon\\
\triangle\alpha &= \varepsilon\otimes\alpha+\alpha\otimes\beta\\
\triangle\beta &= \beta\otimes\beta\\
\triangle\alpha^2 &= \varepsilon\otimes\alpha^2+\alpha\otimes(\alpha\beta+\beta\alpha)+\alpha^2\otimes\beta^2\\
\triangle(\alpha\beta+\beta\alpha) &= \beta\otimes(\alpha\beta+\beta\alpha)+(\alpha\beta+\beta\alpha)\otimes\beta^2\\
\triangle\beta^2 &= \beta^2\otimes\beta^2
\end{aligned}$$

Значит функции $\varepsilon,\ \beta,\beta^2$ являются группоподобными.

Если ε и β линейно зависимы, тогда из того, что $\varepsilon\neq 0$, следует, что $\beta=\lambda\varepsilon$, при этом $1=\beta(1_H)=\lambda\varepsilon(1_H)=\lambda$, значит $\beta=\varepsilon$. Отсюда $\beta^2=\varepsilon^2=\varepsilon$. Подставим это в (8).

$$\alpha\varepsilon+\varepsilon\alpha\varepsilon+\varepsilon\alpha=3\alpha=0$$

Из этого тождества и того, что $\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 3$, следует что $\alpha=0$. Тогда наша матриц модульной структуры выглядит следующим образом:

$$\zeta(h)=\begin{pmatrix}\varepsilon(h)&0&0\\0&\varepsilon(h)&0\\0&0&\varepsilon(h)\end{pmatrix}$$

Значит $\zeta(H)$ - подалгебра скалярных матриц. Такая модульная структура эквивалентна структуре 1.

Далее будем полагать линейные функции $\varepsilon,\ \beta$ линейно независимыми.

Предположим, что функции $\alpha,\ \varepsilon,\ \beta$ линейно зависимы, тогда существуют λ,μ такие, что $\alpha=\lambda\varepsilon+\mu\beta$. Подставив в равенство $h=1_H$, получим $0=\lambda+\mu$. Значит

$$\alpha=\lambda(\varepsilon-\beta)$$

В таком случае α коммутирует с β, а значит, с учётом (8)

$$3\alpha\beta^2=3\lambda(\varepsilon-\beta)\beta^2=3\lambda(\beta^2-\beta^3)=0$$

Тогда, с учётом $\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 3$, получаем, что

$$\lambda(\beta^2-\beta^3)=0$$

Так как β группоподобный, значит существует обратный. Домножив это равенство на квадрат обратного к β:

$$\lambda(\varepsilon - \beta) = 0$$

А значит $\alpha = 0$. Значит $\alpha^2 = \alpha\beta + \beta\alpha = 0$.

Случай 1.1

Если $\varepsilon, \beta, \beta^2$ - линейно независимы, тогда $\zeta(H)$ — это алгебра диагональных матриц. Докажем, что тогда модульная структуре ψ эквивалентна структуре 3. Пусть $\psi_1 : \mathbb{K}\langle c\rangle_3 \otimes A \to A$ — модульная структура 3. Определим гоморфизм алгебр $\zeta_1 : \mathbb{K}\langle c\rangle_3 \to M_3(\mathbb{K})$ с помощью соотношения $\zeta_1(h)(a) = \psi_1(h \otimes a)$. Тогда получаем

$$\zeta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}$$

Выберем в $\mathbb{K}\langle c\rangle_3$ базис $(c^k)_{0\leq k\leq 2}$ и выпишем образ этого базиса:

$$\zeta_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \zeta_1(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix},\ \zeta_1(c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

Рассмотрим эти матрицы как вектора в базисе из матричных единиц и запишем их координаты построчно в матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \xi^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{rank} M = 3$, а значит $\dim \operatorname{cosupp} \psi_1 = \dim \zeta(H) = 3$, следовательно $\operatorname{cosupp} \psi_1$ — алгебра диагональных матриц.

Случай 1.2

β^2 линейно зависим с ε и β. Тогда существуют λ, μ такие, что $\beta^2 = \lambda\varepsilon + \mu\beta$. Подставим $h = 1_H$ и получим $1 = \lambda + \mu$, а значит $\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\beta$

Из группоподобности $\varepsilon,\ \beta$ и β^2 получаем

$$\varepsilon(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = 0,\ \beta(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = 0,\ \beta^2(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}) = \lambda(1-\lambda)$$

Используя эти результаты, подставим в разложение функции $\beta^2\,\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}$, где $\varepsilon^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$ — это единицы соответствующих линейных функций. Получим

$$\lambda(1-\lambda) = \lambda * 0 + (1-\lambda) * 0 = 0$$

Если $\lambda = 0$, значит $\beta^2 = \beta$. Домножим это равенство на обратный к β и получим $\beta = \varepsilon$, что противоречит линейной независимости ε и β.

Следовательно $\lambda = 1$ и $\beta^2 = \beta$. Докажем, что в таком случае модульная структура ψ эквивалентна структуре 2.

Пусть $\psi_1 : \mathbb{K}\langle c\rangle_2 \otimes A \to A$ — модульная структура 2. Определим гоморфизм алгебр $\zeta_1 : \mathbb{K}\langle c\rangle_2 \to M_3(\mathbb{K})$ с помощью соотношения $\zeta_1(h)(a) = \psi_1(h \otimes a)$. Тогда получаем

$$\zeta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Выберем в $\mathbb{K}\langle c\rangle_3$ базис $(c^k)_{0\leq k\leq 1}$ и выпишем образ этого базиса:

$$\zeta_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \zeta_1(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим эти матрицы как вектора в базисе из матричных единиц и запишем их координаты построчно в матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{rank} M = 2$, а значит $\dim \operatorname{cosupp} \psi_1 = \dim \zeta(H) = 2$, следовательно $\operatorname{cosupp} \psi_1$ — подалгебра диагональных матриц, такая что для любой матрицы B, содержащейся в ней, верно $b_{11} = b_{33}$.

Далее будем полагать ε, β и α линейно независимыми.

Случай 2.1

Предположим, что $\alpha^2 = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\beta + \lambda_3\alpha$, тогда подставив $h = 1_H$, получим $0 = \lambda_1 + \lambda_2$. Обозначим $\lambda = \lambda_1,\ \mu = \lambda_3$ и перепишем разложение α^2 с учётом этого.

$$\alpha^2 = \lambda(\varepsilon - \beta) + \mu\alpha$$

Домножив слева и справа на α, получим

$$\lambda(\alpha - \alpha\beta) + \mu\alpha^2 = 0$$
$$\lambda(\alpha - \beta\alpha) + \mu\alpha^2 = 0$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $\alpha\beta = \beta\alpha$, иначе говоря α и β коммутируют. С учётом этого и (8) получаем

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha\beta + \beta^2\alpha = 3\alpha\beta^2 = 0$$

Тогда домножим это тождество на β^{-2} и, учитывая что $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 3$ выведем, что $\alpha = 0$. Это противоречит линейной независимости ε, α и β.

Значит $\lambda = 0$, иначе говоря $\alpha^2 = \mu\alpha$. Тогда из (6) следует

$$\alpha^3 = \mu\alpha^2 = \mu^2\alpha = 0$$

Значит $\mu = 0$.

Случай 2.1.1

Функции $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta$ линейно независимы, $\alpha^2 = 0$ и функция $\alpha\beta + \beta\alpha$ линейна независима с $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta$. Тогда

$$\alpha^2\left(\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)\right) = \alpha(\alpha^{(1)})(\alpha\beta+\beta\alpha)\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) = 1$$

что невозможно.

Случай 2.1.2

Функции $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta$ линейно независимы, $\alpha^2 = 0$ и функция $\alpha\beta + \beta\alpha$ линейно выражается через $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta$.

Пусть $\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\beta + \mu\alpha$. Подставим $h = 1_H$ и получим, что $0 = \lambda_1 + \lambda_2$. Тогда обозначим $\lambda = \lambda_1,\ \mu = \lambda_3$ и перепишем разложение $\alpha\beta + \beta\alpha$ с помощью этого:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda(\varepsilon - \beta) + \mu\alpha$$

С учётом $\alpha^2 = 0$ и (7) получим

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 = \alpha\beta\alpha = 0$$

Домножим разложение $\alpha\beta + \beta\alpha$ на α с обеих сторон

$$\lambda(\alpha - \alpha\beta) = 0$$
$$\lambda(\alpha - \beta\alpha) = 0$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$. Из (8) и того, что $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 3$, получаем $\alpha = 0$, что невозможно. Значит $\lambda = 0$, иначе говоря $\alpha\beta + \beta\alpha = \mu\alpha$.

Тогда

$$(\alpha\beta+\beta\alpha)(\varepsilon^{(1)}\alpha^{(1)}) = \alpha(\varepsilon^{(1)})(\alpha\beta+\beta\alpha)(\alpha^{(1)}) = 0$$
$$\alpha(\varepsilon^{(1)}\alpha^{(1)}) = \varepsilon(\varepsilon^{(1)})\alpha(\alpha^{(1)}) = 1$$

Подставим в разложение $\alpha\beta+\beta\alpha$ $\varepsilon^{(1)}\alpha^{(1)}$ и, воспользовавшись результатами выше, получим $0 = \mu$, иначе говоря $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$

Тогда из (8) следует

$$\alpha\beta^2 + \beta(\alpha\beta + \beta\alpha) = \alpha\beta^2 = 0$$

Так как β группоподобный, значит существует β^{-1}. Домножим на квадрат обратного справа и получим $\alpha = 0$, что противоречит линейной независимости $\varepsilon,\ \beta,\ \alpha$.

Случай 2.2

Далее полагаем, что $\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha^2$ линейно независимы.

Случай 2.2.1

Функции $\varepsilon,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \beta$ линейно независимы и функция $\alpha\beta + \beta\alpha$ линейно выражается через $\varepsilon,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \beta$. Тогда существуют λ_i такие, что

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\beta + \lambda_3\alpha + \lambda_4\alpha^2$$

Подставим $h = 1_H$, получим $0 = \lambda_1 + \lambda_2$. Тогда обозначим $\lambda = \lambda_1,\ \mu_1 = \lambda_3$, $\mu_2 = \lambda_4$ и перепишем разложение $\alpha\beta + \beta\alpha$ с помощью этого:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \lambda(\varepsilon - \beta) + \mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2$$

Рассмотрим (7):

$$\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha) + \beta\alpha^2 = 0$$

Значит с учётом $\alpha^3 = 0$:

$$\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha = (-\beta\alpha^2)\alpha = 0$$

Тогда домножим разложение $\alpha\beta + \beta\alpha$ на α с обеих сторон:

$$0 = \lambda(\alpha^2 - \alpha\beta\alpha)$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $\alpha^2 = \alpha\beta\alpha$. Домножим $\alpha\beta + \beta\alpha$ на α^2 слева и выпишем, что получится:

$$\begin{aligned} \alpha^2(\alpha\beta + \beta\alpha) &= \alpha^2\beta\alpha = \alpha^3 = 0 \\ (\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha^2 &= \alpha\beta\alpha^2 = \alpha^3 = 0 \\ \alpha^2(\alpha\beta + \beta\alpha) &= \lambda(\alpha^2 - \alpha^2\beta) \\ (\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha^2 &= \lambda(\alpha^2 - \beta\alpha^2) \end{aligned}$$

Отсюда, с учётом предположения, что $\lambda \neq 0$, следует, что $\alpha^2 = \alpha^2\beta = \beta\alpha^2$. Подставим это в (7), используя $\alpha^2 = \alpha\beta\alpha$, тогда

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 = 3\alpha^2 = 0$$

Что невозможно, так как $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 3$ и функция α^2 линейно независима с $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta$. Значит $\lambda = 0$, иначе говоря:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2$$

Подставим разложение $\alpha\beta + \beta\alpha$ в (7)

$$\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha) + \beta\alpha^2 = \mu_1\alpha^2 + \beta\alpha^2 = 0$$
$$\alpha^2\beta + (\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha = \alpha^2\beta + \mu_1\alpha^2 = 0$$

Сложим эти два равенства с учётом (7) получим

$$2\mu_1\alpha^2 = \alpha\beta\alpha$$

Теперь домножим $\alpha\beta + \beta\alpha$ на $\alpha\beta$ слева :

$$\alpha\beta(\alpha\beta + \beta\alpha) = \alpha(-\alpha\beta^2) = -\alpha^2\beta^2 = -\mu_1^2\alpha^2$$

$$\alpha\beta(\mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2) = \mu_1\alpha\beta\alpha + \mu_2\alpha\beta\alpha^2 = \mu_1\alpha\beta\alpha - \mu_1\mu_2\alpha^3 = \mu_1\alpha\beta\alpha$$

А значит

$$\mu_1\alpha\beta\alpha = -\mu_1^2\alpha^2$$

С учётом полученного выше соотношения приходит к выводу, что

$$\begin{aligned} 2\mu_1^2\alpha^2 &= -\mu_1^2\alpha^2 \\ 3\mu_1^2\alpha^2 &= 0 \end{aligned}$$

Тогда, так как $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 3$ и функция α^2 линейно независима с $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta$, а значит $\alpha^2 \neq 0$, получаем, что $\mu_1 = 0$. Тогда

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \mu_2\alpha^2$$

Но если мы рассмотрим

$$\alpha^2\left(\varepsilon^{(1)}\left(\alpha^2\right)^{(1)}\right) = \varepsilon(\varepsilon^{(1)})\alpha^2\left(\left(\alpha^2\right)^{(1)}\right) + \\ + \alpha(\varepsilon^{(1)})(\alpha\beta + \beta\alpha)\left(\left(\alpha^2\right)^{(1)}\right) + \alpha^2(\varepsilon^{(1)})\beta^2\left(\left(\alpha^2\right)^{(1)}\right) = 1$$

$$(\alpha\beta + \beta\alpha)\left(\varepsilon^{(1)}\left(\alpha^2\right)^{(1)}\right) = \beta(\varepsilon^{(1)})(\alpha\beta + \beta\alpha)\left(\left(\alpha^2\right)^{(1)}\right) + \\ + (\alpha\beta + \beta\alpha)(\varepsilon^{(1)})\beta^2\left(\left(\alpha^2\right)^{(1)}\right) = 0$$

Тогда, если мы подставим в разложение $\alpha\beta + \beta\alpha$ $\varepsilon^{(1)}\left(\alpha^2\right)^{(1)}$, получим

$$0 = \mu_2 * 1$$

Значит $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. Отсюда с учётом (8) получаем

$$\beta(\alpha\beta + \beta\alpha) + \alpha\beta^2 = \alpha\beta^2 = 0$$

Но тогда домножив на обратный к β^2 получим $\alpha = 0$, что противоречит линейной независимости α с $\varepsilon,\ \alpha^2,\ \beta$.

Случай 2.2.2

Далее полагаем Функции $\varepsilon,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \beta,\ \alpha\beta+\beta\alpha$ **линейно независимыми.**

Случай 2.2.2.1

Функции $\varepsilon,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \beta,\ \alpha\beta+\beta\alpha$ линейно независимы и функция β^2 линейно выражается через $\varepsilon,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \beta$. Тогда существуют λ_i такие, что

$$\beta^2 = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\beta + \lambda_3\alpha + \lambda_4\alpha^2 + \lambda_5(\alpha\beta+\beta\alpha)$$

Подставим $h = 1_H$, получим $1 = \lambda_1 + \lambda_2$. Тогда обозначим $\lambda = \lambda_1,\ \mu_1 = \lambda_3$, $\mu_2 = \lambda_4,\ \mu_3 = \lambda_5$ и перепишем разложение $\alpha\beta+\beta\alpha$ с помощью этого:

$$\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\beta + \mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2 + \mu_3(\alpha\beta+\beta\alpha)$$

Рассмотрим значения наших функций от $\left(\alpha^{(1)}\right)^2$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\left(\alpha^{(1)}\right)^2\right) &= \varepsilon\left(\alpha^{(1)}\right)\varepsilon\left(\alpha^{(1)}\right) = 0\\
\alpha\left(\left(\alpha^{(1)}\right)^2\right) &= \varepsilon\left(\alpha^{(1)}\right)\alpha\left(\alpha^{(1)}\right) + \alpha\left(\alpha^{(1)}\right)\beta\left(\alpha^{(1)}\right) = 0\\
\beta\left(\left(\alpha^{(1)}\right)^2\right) &= \beta\left(\alpha^{(1)}\right)\beta\left(\alpha^{(1)}\right) = 0\\
\alpha^2\left(\left(\alpha^{(1)}\right)^2\right) &= \varepsilon\left(\alpha^{(1)}\right)\alpha^2\left(\alpha^{(1)}\right) + \alpha\left(\alpha^{(1)}\right)(\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\alpha^{(1)}\right) +\\
&+ \alpha^2\left(\alpha^{(1)}\right)\beta\left(\alpha^{(1)}\right) = 0\\
(\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\left(\alpha^{(1)}\right)^2\right) &= \beta\left(\alpha^{(1)}\right)(\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\alpha^{(1)}\right) +\\
&+ (\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\alpha^{(1)}\right)\beta^2\left(\alpha^{(1)}\right) = 0\\
\beta^2\left(\left(\alpha^{(1)}\right)^2\right) &= \beta^2\left(\alpha^{(1)}\right)\beta^2\left(\alpha^{(1)}\right) = \mu_1^2
\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\beta^2\left(\left(\alpha^{(1)}\right)^2\right) = \mu_1^2 = 0$$

Значит $\mu_1 = 0$, иначе говоря

$$\beta^2 = \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\beta + \mu_2\alpha^2 + \mu_3(\alpha\beta+\beta\alpha)$$

Рассмотрим значения наших функций от $\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \varepsilon\left(\alpha^{(1)}\right)\varepsilon\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\alpha\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \varepsilon\left(\alpha^{(1)}\right)\alpha\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+\alpha\left(\alpha^{(1)}\right)\beta\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\beta\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \beta\left(\alpha^{(1)}\right)\beta\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\alpha^2\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \varepsilon\left(\alpha^{(1)}\right)\alpha^2\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+\alpha\left(\alpha^{(1)}\right)(\alpha\beta+\beta\alpha)\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+\alpha^2\left(\alpha^{(1)}\right)\beta\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=1\\
(\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \beta\left(\alpha^{(1)}\right)(\alpha\beta+\beta\alpha)\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+(\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\alpha^{(1)}\right)\beta^2\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\beta^2\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \beta^2\left(\alpha^{(1)}\right)\beta^2\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0
\end{aligned}$$

Значит $\beta^2\left(\alpha^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=\mu_2=0$ Тогда разложения выглядит таким образом:

$$\beta^2=\lambda\varepsilon+(1-\lambda)\beta+\mu_3(\alpha\beta+\alpha\beta)$$

Рассмотрим значения наших функций от $\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \varepsilon\left(\varepsilon^{(1)}\right)\varepsilon\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\alpha\left(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \varepsilon\left(\varepsilon^{(1)}\right)\alpha\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+\alpha\left(\varepsilon^{(1)}\right)\beta\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\beta\left(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \beta\left(\varepsilon^{(1)}\right)\beta\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\alpha^2\left(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \varepsilon\left(\varepsilon^{(1)}\right)\alpha^2\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+\alpha\left(\varepsilon^{(1)}\right)(\alpha\beta+\beta\alpha)\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+\alpha^2\left(\varepsilon^{(1)}\right)\beta\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
(\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \beta\left(\varepsilon^{(1)}\right)(\alpha\beta+\beta\alpha)\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)+\\
&+(\alpha\beta+\beta\alpha)\left(\varepsilon^{(1)}\right)\beta^2\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=0\\
\beta^2\left(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right) &= \beta^2\left(\varepsilon^{(1)}\right)\beta^2\left((\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=\lambda\mu_3
\end{aligned}$$

Значит $\beta^2\left(\varepsilon^{(1)}(\alpha\beta+\beta\alpha)^{(1)}\right)=\lambda\mu_3=0$.

Пусть $\mu_3\neq 0$, тогда $\lambda=0$ и $\beta^2=\beta+\mu_3(\alpha\beta+\beta\alpha)$. Домножим на β слева и справа и с учётом (8) сложим

$$\begin{aligned}\beta^3 &= \beta^2+\mu_3\beta(\alpha\beta+\beta\alpha)\\ \beta^3 &= \beta^2+\mu_3(\alpha\beta+\beta\alpha)\beta\\ 2\beta^3 &= 2\beta^2+\mu_3\beta\alpha\beta\end{aligned}$$

Домножив последнее равенство на обратный к β с обеих сторон и получим

$$2\beta=2\varepsilon+\mu_2\alpha$$

Так как $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta$ линейно независимы значит $\mu_3=0$. Получаем противоречие с нашим предположением $\mu_3\neq 0$. Значит $\mu_3=0$.

Тогда $\beta^2=\lambda\varepsilon+(1-\lambda)\beta$.

Из группоподобности $\varepsilon,\ \beta$ и β^2 получаем

$$\varepsilon(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)})=0,\ \beta(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)})=0,\ \beta^2(\varepsilon^{(1)}\beta^{(1)})=\lambda(1-\lambda)$$

Используя эти результаты, подставим в разложение функции $\beta^2\ \varepsilon^{(1)}\beta^{(1)}$, где $\varepsilon^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$ — это единицы соответствующих линейных функций. Получим

$$\lambda(1-\lambda)=\lambda*0+(1-\lambda)*0=0$$

Если $\lambda=0$, значит $\beta^2=\beta$. Домножим это равенство на обратный к β и получим $\beta=\varepsilon$, что противоречит линейной независимости ε и β.

Если $\lambda=1$, тогда $\beta^2=\varepsilon$. Рассмотрим (8)

$$\beta^2\alpha+\beta\alpha\beta+\alpha\beta^2=2\alpha+\beta\alpha\beta=0 \qquad (*)$$

Домножим на α с обеих сторон

$$2\beta\alpha\beta+\beta^2\alpha\beta^2=2\beta\alpha\beta+\alpha=0$$

Выразим из $(*)$ $\beta\alpha\beta$ через α и подставим в соотношение выше, получим

$$-4\alpha+\alpha=-3\alpha=0$$

Так как $\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 3$, получаем $\alpha=0$, что невозможно ввиду линейной независимости $\varepsilon,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha^2,\ \alpha\beta+\beta\alpha$.