Untersuchung der Skalierbarkeit von parallelem Sortieren auf einem Multicore-Prozessor

Verteidigung der Bachelorarbeit

Leon Zoerner

Informatik

15. Februar 2026

Agenda

Motivation & Zielsetzung

Grundlagen der Parallelisierung

Messumgebung und Implementierung

Implementierungsvarianten Code

Laufzeitmessungen (sequenziell)

Analyse der Threading-Methoden

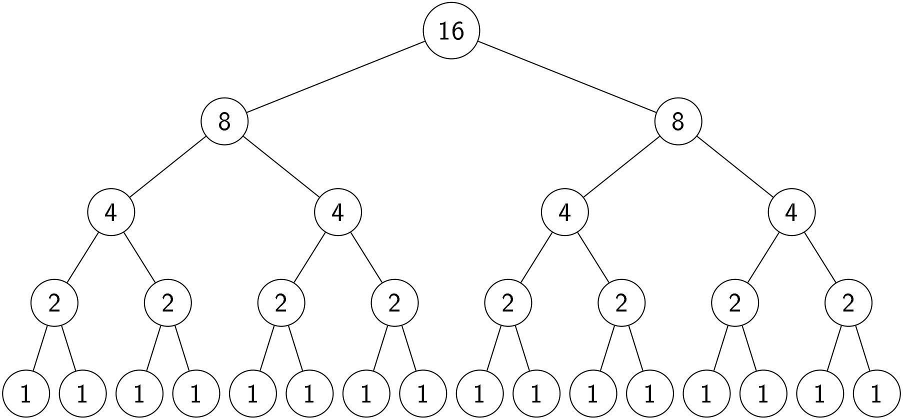
Beantwortung der Forschungsfrage

Zusammenfassung und Ausblick

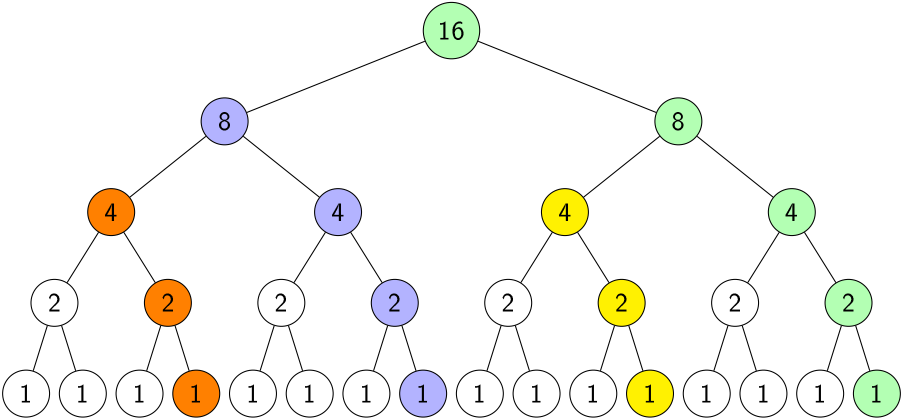
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Fragen und Diskussion

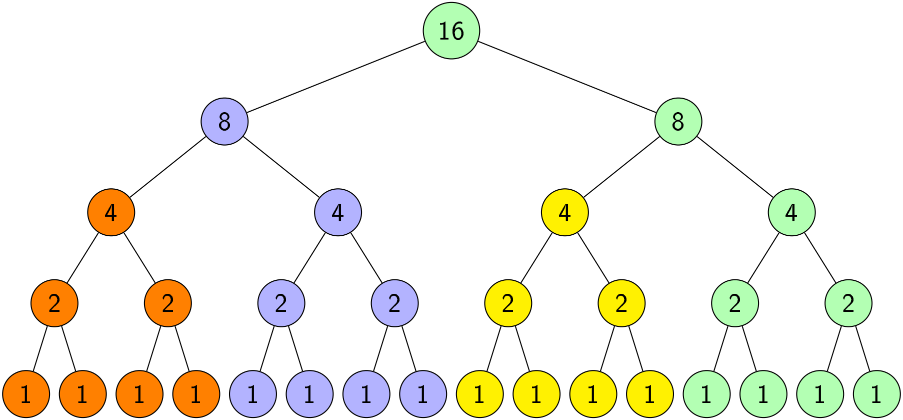
Balancierter Binärbaum für $n = 16$



Balancierter Binärbaum für $n = 16$, $p = 4$, $e = 2$



Balancierter Binärbaum für $n = 16$, $p = 4$, $e = 2$



Formeln: Mergesort

$$
\begin{aligned}
T(n) &= m_1 + m_2 + n \\
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \\
T(n) &= 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \\
T(n) &= n \cdot \log_2(n) + n, \\
O(T(n)) &= O(n \log n).
\end{aligned}
$$

Formeln: Quicksort

Best-Case von Quicksort:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= q1 + q2 + n \\
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \\
T(n) &= 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \\
T(n) &= n \cdot \log_2(n) + n, \\
O(T(n)) &= O(n \log n).
\end{aligned}
$$

Formeln: Quicksort

Der **Worst-Case** von Quicksort ist:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= q_1 + q_2 + n \\
T(n) &= T(n-1) + 1 + n, \\
T(n) &= \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) + n, \\
O(T(n)) &= O(n^2).
\end{aligned}
$$

Der **heuristisch betrachtete Average-Case** von Quicksort ist:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= q_1 + q_2 + n \\
q_1 &= T\left(\frac{1 + \cdots + (n-1)}{n-1}\right) = T\left(n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{n-1}\right) = T\left(\frac{n}{2}\right) = q_2 \\
T(n) &= 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
T(n) &= n \cdot \log_2(n) + n \\
O(T(n)) &= O(n \log n).
\end{aligned}
$$

Formeln: parallel Mergesort

$$
\begin{aligned}
p &= \text{Thread-Anzahl} \\
e &= \log_2(p) \\
T(n,e) &= \begin{cases} 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}, 0\right) + n & \text{, wenn } e = 0 \\ 1 \cdot T\left(\frac{n}{2}, e-1\right) + n & \text{, wenn } e > 0 \end{cases} \\
T(n,p) &= 2n\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{n}{p} \cdot \log_2\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{n}{p} \\
O(T(n,p)) &= O\left(\frac{n}{p} \cdot \log_2(n) + n\right) \\
e_{\max} &= \log_2(n) \\
p_{\max} &= n
\end{aligned}
$$

Formeln: parallel Quicksort

Der **Best-Case** und **heuristisch betrachtete Average-Case** von Quicksort ist:

$$
\begin{aligned}
p &= \text{Thread-Anzahl} \\
e &= \log_2(p) \\
T(n,e) &= \begin{cases} 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}, 0\right) + n & \text{, wenn } e = 0 \\ 1 \cdot T\left(\frac{n}{2}, e-1\right) + n & \text{, wenn } e > 0 \end{cases} \\
T(n,p) &= 2n\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{n}{p} \cdot \log_2\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{n}{p} \\
O(T(n,p)) &= O\left(\frac{n}{p} \cdot \log_2(n) + n\right) \\
e_{\max} &= \log_2(n) \\
p_{\max} &= n
\end{aligned}
$$

Formeln: parallel Quicksort

Der **Worst-Case** von Quicksort (Worker-Thread-Variante) bei $p > 1$ ist:

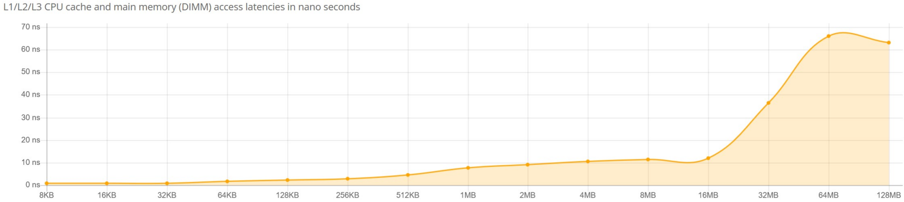
$$
\begin{aligned}
T(n) &= q_2 + n, \\
T(n) &= T(n-1) + n, \\
T(n) &= \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n), \\
O(T(n)) &= O(n^2).
\end{aligned}
$$

Formeln: Einheiten und Skalierung

$$x \cdot T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + x \cdot n$$
$$x \cdot T(n) = x \cdot n \cdot \log_2(n) + x \cdot n$$
$$x \cdot T(n) = x \cdot (n \cdot \log_2(n) + n)$$

Aufgrund von Overheads wie z. B. erhöhte Speicherlatenzen durch Cache-Misses:

$$x = f(n, p)$$
$$f(n, p) \leq f(n+1, p)$$
$$f(n, p) \leq f(n, p+1)$$



Nebeneffekt des Skalierens mit dem Faktor x

Sollte die Standard-Formel

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

falsch sein und stattdessen diese Formel gelten

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + (n-1)$$

kann man diese auch schreiben als

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{x} \cdot n$$

Dabei ist $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ implizit auch durch unser x repräsentiert. Durch diesen Nebeneffekt korrigiert der Faktor x auch gleich implizit die Formel. Dies macht die Formel nach dem Hochskalieren auf die sequentielle Laufzeit so präzise und sorgt damit dafür, dass die T(n,p)-Formel so exakt die untere Grenze der Laufzeitverbesserung vorhersagen kann.

Herleitung T(n,p): Ausgangsdefinition

Gegeben ist die Rekursion:

$$T(n,e) = \begin{cases} 2\,T\left(\frac{n}{2}, 0\right) + n & \text{falls } e = 0 \\ T\left(\frac{n}{2}, e-1\right) + n & \text{falls } e > 0 \end{cases}$$

Zusätzlich gilt:

$$p = 2^e$$

Herleitung T(n,p): Entfaltung der Rekursion (1. Schritt)

Für $e > 0$ gilt:

$$T(n, e) = T\left(\frac{n}{2}, e - 1\right) + n$$

Ein Einsetzen ergibt:

$$T(n, e) = T\left(\frac{n}{4}, e - 2\right) + \frac{n}{2} + n$$

Noch ein weiteres Einsetzen:

$$T(n, e) = T\left(\frac{n}{8}, e - 3\right) + \frac{n}{4} + \frac{n}{2} + n$$

Nach e Schritten ergibt sich:

$$T(n, e) = T\left(\frac{n}{2^e}, 0\right) + n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{e-1}}\right)$$

Herleitung T(n,p): Auswertung der geometrischen Reihe

Die Summe

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{e-1}}\right) = \sum_{i=0}^{e-1} \frac{1}{2^i}$$

ist eine geometrische Reihe mit Quotient $\frac{1}{2}$.
Sie ergibt:

$$\sum_{i=0}^{e-1} \frac{1}{2^i} = 2\left(1 - \frac{1}{2^e}\right)$$

Damit folgt:

$$T(n, e) = T\left(\frac{n}{2^e}, 0\right) + 2n\left(1 - \frac{1}{2^e}\right)$$

Herleitung T(n,p): Einsetzen des Basisfalls

Für $e = 0$ gilt:

$$T(n, 0) = 2T\left(\frac{n}{2}, 0\right) + n$$

Dies entspricht der Rekursion von sequenziellem Mergesort.
Bekannt ist:

$$T(n, 0) = n \log_2 n + n$$

Ersetzen von n durch $\frac{n}{2^e}$ ergibt:

$$T\left(\frac{n}{2^e}, 0\right) = \frac{n}{2^e} \log_2\left(\frac{n}{2^e}\right) + \frac{n}{2^e}$$

Einsetzen in $T(n, e)$ liefert:

$$T(n, e) = \frac{n}{2^e} \log_2\left(\frac{n}{2^e}\right) + \frac{n}{2^e} + 2n\left(1 - \frac{1}{2^e}\right)$$

Herleitung T(n,p): Substitution $p = 2^e$

Da gilt:

$$p = 2^e$$

folgt:

$$\frac{n}{2^e} = \frac{n}{p}$$

Damit ergibt sich:

$$T(n,p) = \frac{n}{p}\log_2\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{n}{p} + 2n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Umsortiert erhält man:

$$T(n,p) = 2n\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{n}{p}\log_2\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{n}{p}$$