# Wiederholung Wahrscheinlichkeit

$P(A) = \frac{1}{6} \begin{matrix} \leftarrow \text{günstig} \\ \leftarrow \text{mögliche} \end{matrix}$ A... Würfeln von Augenzahl 2

$P(\bar{A})$ ... Würfeln keiner 2

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P(A) = 0$ ... unmögliches Ereignis
$P(A) = 1$ ... sicheres Ereignis

Bestimmen v. Wahrscheinlichkeiten:

- Ereignisraum ermitteln & zählen
- Baumdiagramm
- Sätze

## Additionssatz (Ereignis-Ausschließend)

32 Karten $\rightarrow$ P(Herz ∨ Karo)

$P(\text{Herz}) = \frac{8}{32}$
$P(\text{Karo}) = \frac{8}{32}$

$\Rightarrow P(\text{Herz} \vee \text{Karo}) = \frac{8}{32} + \frac{8}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{P(A \vee B) = P(A) + P(B)}$$

## Nicht Ereignis-Ausschließend

32 Karten $\rightarrow$ P(Herz ∨ König)

$P(\text{Herz}) = \frac{8}{32}$
$P(\text{König}) = \frac{4}{32}$
$P(\text{Herz-K.}) = \frac{1}{32}$

$\Rightarrow P(\text{Herz} \vee \text{König}) = \frac{8}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{15}{32}$

$$\boxed{P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)}$$

## Multiplikationssatz

sowohl A als auch B

$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$

Urne: 5 Kugeln mit Nr. 1 bis 5

Bei 2x ziehen:

A... 1. Kugel gerade

B... 2. Kugel gerade

C... beide gerade

D... 1./2. gerade

## Wiederholungsaufgaben – Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

1. Lisa hat eine Tüte, in der sich (gut durchgemischt) 2 rote und 5 andersfärbige Perlen befinden. Sie zieht nun zufällig eine Perle nach der anderen aus der Tüte. Entnimmt Sie eine rote Perle aus der Tüte, so behält sie diese. Entnimmt Sie eine andersfärbige Perle, so wirft sie diese in die Tüte zurück.
   Stelle diesen Sachverhalt für 2 Ziehungen in einem Baumdiagramm dar
   Trage die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.
   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Lisa bei 2 Ziehungen genau 1 rote Perle zieht.

2. Auf einem Dorffest gibt es ein Unterhaltungsprogramm für Kinder.
   a. Lea und Ahmad treten im Bogenschießen als Team an. Zuerst schießt Ahmad und dann Lea auf eine Zielscheibe. Aus Erfahrung weiß man, dass Ahmad bei 3 von 4 Versuchen trifft. Lea trifft das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit p.
   Veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms.
   Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl Lea als auch Ahmad das Ziel treffen, beträgt 50 %.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, mit der Lea das Ziel trifft.
   b. Unter den Kindern werden einige Preise verlost.
   Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die dazu äquivalente Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. [2 zu 4]

| | |
|---|---|
| *P*(„höchstens 1 Mädchen gewinnt“) | |
| *P*(„mindestens 1 Mädchen gewinnt“) | |

| | |
|---|---|
| A | 1 – *P*(„kein Mädchen gewinnt“) |
| B | 1 – *P*(„höchstens 2 Mädchen gewinnen“) |
| C | 1 – *P*(„mindestens 2 Mädchen gewinnen“) |
| D | 1 – *P*(„genau 1 Mädchen gewinnt“) |

   c. Am Festgelände fährt ein Bummelzug. Für Kinder unter 3 Jahren ist die Fahrt kostenlos. Kinder ab 3 Jahren zahlen die Hälfte des Fahrpreises p für Erwachsene. Insgesamt wurden n Fahrgäste gezählt. Die Tageseinnahmen können mit dem Ausdruck
   $0{,}5n\frac{p}{2} + 0{,}2np$ berechnet werden.
   Ermitteln Sie mithilfe des gegebenen Ausdrucks, wie viel Prozent der Fahrgäste unter 3 Jahre alt waren.

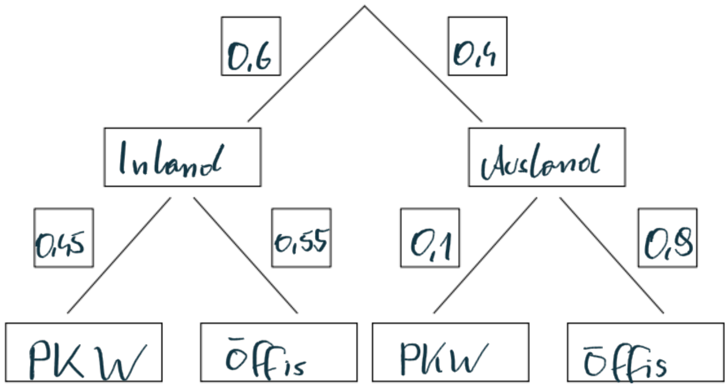
3. Eine Puzzle-Spielmatte für Kleinkinder besteht aus 47 Einzelteilen in vier verschiedenen Farben. Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Teile mit den jeweiligen Farben.

| Farbe | Gelb | Blau | Rot | Grün |
|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 11 | 9 | 12 | 15 |

   Stelle die prozentuellen Häufigkeiten der Farben in einem Kreisdiagramm dar.
   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig entnommene Puzzleteile dieselbe Farbe haben.
   Interpretiere, welche Wahrscheinlichkeit mit der nachstehenden Formel berechnet wird.
   $$P(X) = 1 - \frac{9}{47} \cdot \frac{8}{46} \cdot \frac{7}{45}$$

4. Bei einer Besucherbefragung in einem Vergnügungspark wurden folgende Daten erhoben: 60 % der Besucher sind aus dem Inland. Die Besucher aus dem Inland reisen zu 45 % mit dem PKW an, die restlichen Besucher aus dem Inland mit öffentlichen Verkehrsmitteln. 90 % der Besucher aus dem Ausland reisen mit öffentlichen Verkehrsmitteln an, die restlichen Besucher aus dem Ausland mit dem PKW.
   Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt

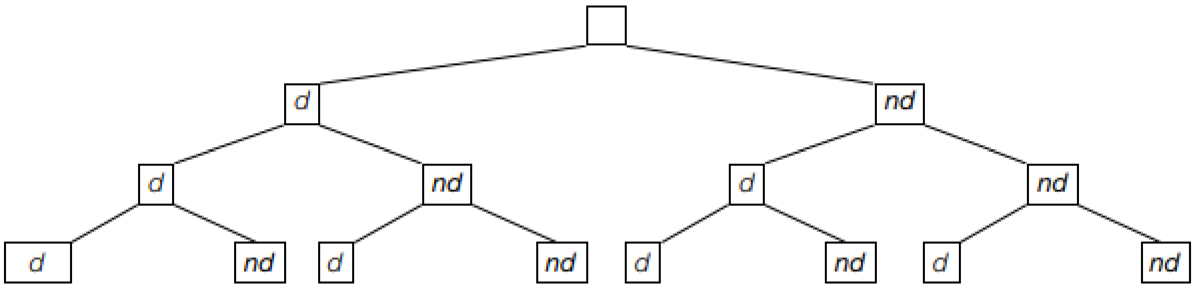
wiedergibt.




5. Eine Ölgesellschaft führt Probebohrungen in Texas und in Alaska durch. Erfahrungsgemäß findet man bei einer Bohrung in Texas mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% und bei einer Bohrung in Alaska mit einer Wahrscheinlichkeit von 65 % Öl.
   a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nur in Texas oder nur in Alaska Öl gefunden wird, wenn die beiden Bohrungen unabhängig voneinander sind.
   b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, in höchstens einem der beiden US-Bundesstaaten Öl zu finden, wenn die beiden Bohrungen unabhängig voneinander sind.
      Erkläre, welchen Vorteil eine Berechnung mittels Gegenwahrscheinlichkeit hier hat
   c. Berechne, wie viele Bohrungen in Alaska zumindest notwendig sind, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit Öl zu finden.
      Beschreibe, wie sich die gesuchte Anzahl der Bohrungen verändert, wenn eine 95%ige Wahrscheinlichkeit, Öl zu finden, ausreichend ist.

6. In einem Volksschulhort gibt es das Brettspiel Känguruhüpfen zum spielerischen Addieren im Zahlenraum 12. Am Start stehen maximal 11 Kängurus, die mit den Nummern von 2 bis 12 beschriftet sind. Jeder Spieler sucht sich ein Känguru aus. Es wird reihum mit 2 sechsseitigen Würfeln gewürfelt. Nach jedem Wurf werden die Augenzahlen addiert und das Känguru, dessen Nummer mit der Augensumme der beiden Würfel übereinstimmt, darf ein Feld vorhüpfen. Überprüfe nachweislich, ob die Chance, ein Feld vorzurücken, für alle Kängurus gleich groß ist.

7. Die Rohlinge (das sind Werkstücke, die noch weiterbearbeitet werden müssen) für eine Fräsmaschine werden in 3 Behältern geliefert. Im ersten befinden sich 6 Rohlinge, im zweiten 5 Rohlinge und im dritten 7 Rohlinge. Aufgrund von Transportschädigung befindet sich in jedem Behälter je 1 defekter Rohling.
   a. Jedem Behälter wird genau 1 Rohling entnommen. Von diesen 3 Rohlingen ist keiner defekt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.
   b. Umbauarbeiten an der Maschine erfordern eine Umstellung. Die 18 Rohlinge werden nun in einem Behälter geliefert, der 3 defekte Rohlinge enthält. Dem Behälter werden 3 Rohlinge entnommen. Von diesen 3 Rohlingen sind 2 defekt.
      d … defekt,
      nd … nicht defekt




      Beschreiben Sie, ohne die Rechnung durchzuführen, die erforderlichen Lösungsschritte, die zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses notwendig sind.
      Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Einzelziehungen in Abbildung 1.

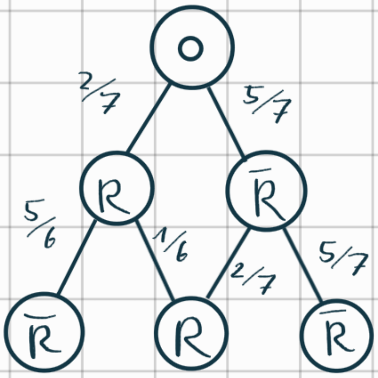
8. Gummibärchen werden in unterschiedlichen Farben hergestellt.
    a. In einer Packung mit insgesamt 132 Gummibärchen sind 27 orangefärbige Gummibärchen. Carina nimmt ohne hinzusehen ein Gummibärchen aus der Packung. Ist dieses zufällig ausgewählte Gummibärchen orangefärbig, wird es sofort gegessen. Ein andersfärbiges Gummibärchen legt sie wieder in die Packung zurück. Das macht sie 2-mal hintereinander. Veranschauliche die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperiments in einem mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.
    Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Carina 2 orangefärbige Gummibärchen zieht.
    b. Eine kleine Packung Gummibärchen enthält 5 rote Gummibärchen und je 1 grünes, 1 gelbes und 1 weißes Gummibärchen. Es wird ein Gummibärchen nach dem anderen zufällig aus der Packung genommen und nicht wieder zurückgelegt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.
    Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der benötigten Züge, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.
    Erstelle eine Tabelle, der man die möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.

9. Im Zuge einer Werbeaktion wird folgendes Gewinnspiel veranstaltet. In einer Urne liegen vier – bis auf die Beschriftung gleichartige – Kugeln: O, D, O, L. Man hat nun blind eine Kugel nach der anderen a) ohne bzw. b) mit Zurücklegen zu ziehen. Zieht man auf diese Weise das Wort ODOL, so erhält man eine Flasche Mundwasser gratis. Wie groß ist die Gewinnchance bei einem Spiel?

<u>Lösungen:</u>
1. 44,2%
2. a) 2/3; b) C,A, c) 30%
3. 24%; die Formel gibt die WSK an, beim dreimaligen Ziehen höchstens zwei blaue Puzzleteile zu bekommen.
4. 
5. a) 39,5%; b) 44,75%; man hat den Vorteil, dass man nur die WSK für ein Ereignis berechnen muss und nicht für mehrere. c) 5 Bohrungen; bei 95% iger WSK reichen weniger Bohrungen.
6. Die Augensumme 7 ist am häufigsten.
7. a) 0,57; b) Pfade ermitteln und WSK addieren
8. a) 4,06%; b) 5/8, 15/56, 5/56, 1/56
9. a) 0,083; b) 0,0156

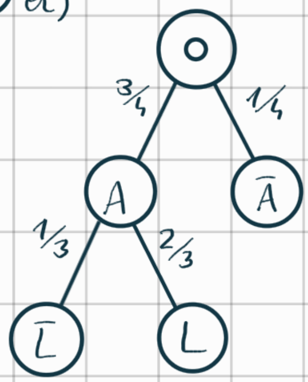
# Wiederholungsaufgaben

①




$P(1 \times R) = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{49} = 48{,}98\,\%$

② a)




$P(\text{beide}) = 50\,\% = 75\,\% \cdot p$

$p = 66{,}6\,\%$

③

$P(2 \text{ gleiche}) = \frac{15}{47} \cdot \frac{14}{46} + \frac{12}{47} \cdot \frac{11}{46} + \frac{11}{47} \cdot \frac{10}{46} + \frac{8}{47} \cdot \frac{8}{46} = 24{,}24\,\%$

$P(x) = 1 - \frac{8}{47} \cdot \frac{8}{46} \cdot \frac{7}{45} \ldots$ Mit dieser Formel wird die Gegenwahrscheinlichkeit von 3 hintereinander gezogenen blauen Karten berechnet.

⑤ a)

$P(1\ BS) = 0{,}65 \cdot 0{,}85 = 55{,}25\,\%$

b)

$P(\text{nur } 1) = 0{,}65 \cdot 0{,}15 + 0{,}85 \cdot 0{,}35 = 39{,}5\,\%$

c)

$$P(x) = 0{,}99 \geq \sum_{m=0}^{x} 0{,}65 \cdot 0{,}35^m$$
$$x \geq 4$$

$$P(x) = 0{,}95 \geq \sum_{m=0}^{x} 0{,}65 \cdot 0{,}35^m$$
$$x \geq 2$$

A.: Die benötigte Anzahl halbiert sich

(6)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$P(2) = \frac{1}{36} \triangleq 2{,}77\%$ $\quad P(3) = \frac{2}{36} \triangleq 5{,}55\%$

$P(4) = \frac{3}{36} \triangleq 8{,}33\%$ $\quad P(5) = \frac{4}{36} \triangleq 11{,}11\%$

$P(6) = \frac{5}{36} \triangleq 13{,}88\%$ $\quad P(7) = \frac{6}{36} \triangleq 16{,}67\%$

$P(8) = \frac{5}{36} \triangleq 13{,}88\%$ $\quad P(9) = \frac{4}{36} \triangleq 11{,}11\%$

$P(10) = \frac{3}{36} \triangleq 8{,}33\%$ $\quad P(11) = \frac{2}{36} \triangleq 5{,}55\%$ $\quad P(12) = \frac{1}{36} \triangleq 2{,}77\%$

(7) a)

$$P(a) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = 57{,}4\%$$

b)

Wahrscheinlichkeiten ermitteln & addieren

# Bedingte Wahrscheinlichkeit & Satz von Bayes

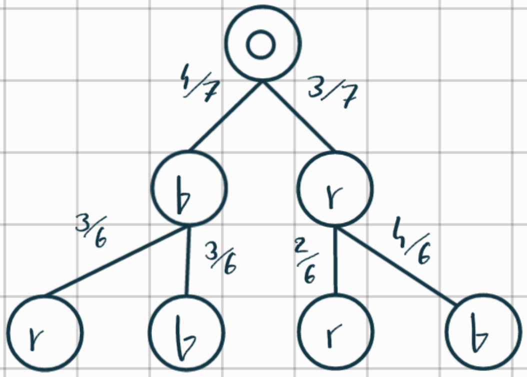
Bsp.: Werfen 2 Würfel
ges.: P für Augensumme 8 mit 1x Augenzahl 6

A ... wenigstens 1x 6er
B ... Augensumme 8

$P(B|A) = \frac{2}{11} = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}$ $\quad \rightarrow P(A \wedge B) = P(B|A) \cdot P(A)$
$P(A \wedge B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$
$P(A) = \frac{11}{36}$

für unabhängige Ereignisse: $P(B|A) = P(B)$

Bsp.: gesamt 7 Kugeln, 4 blaue, 3 rote
2x ziehen <u>ohne</u> zurücklegen

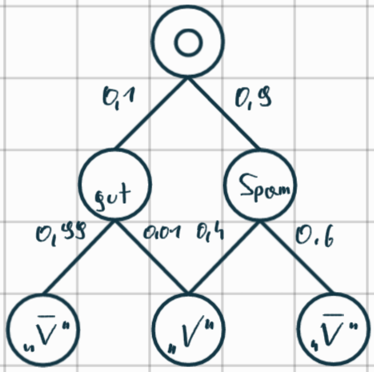



$P(r|b) = \frac{3}{6}$
$P(b|r) = \frac{4}{6}$
$P(b \wedge r) = P(b) \cdot P(r|b) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$
$P(r \wedge b) = P(r) \cdot P(b|r) = \frac{2}{7}$

$P(b) \cdot P(r|b) = P(r) \cdot P(b|r)$

$$\boxed{P(r|b) = \frac{P(r) \cdot P(b|r)}{P(b)}}$$ Satz von Bayes

Bsp.: in 1% der guten Mails „Viagra"
in 40% der Spammails „Viagra"
10% gute Mails
90% Spammails
ges.: P dass Mail Spam ist und in der „Viagra" vorkommt

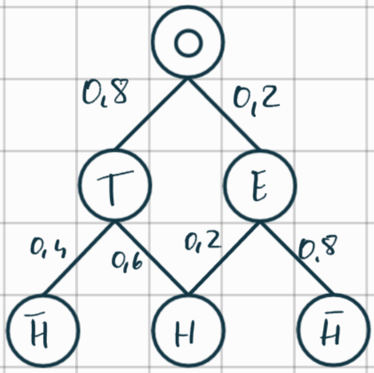



$$P(S|V) = \frac{P(V|S) \cdot P(S)}{P(V)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}9}{0{,}361} = 0{,}997$$

$$P(S) = 0{,}9$$

$$P(V) = 0{,}9 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}361$$

Bsp.: 4x so viele Touristen wie Einheimische
T: 60% mit Hut
E: 20% mit Hut




$$P(\bar{H}) = \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{32}{100} + \frac{16}{100} = 48\%$$

$$P(E|H) = \frac{P(H|E) \cdot P(E)}{P(H)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}52} = 7{,}69\%$$

$$P(H) = 0{,}52$$

$$P(E|\bar{H}) = \frac{P(\bar{H}|E) \cdot P(E)}{P(\bar{H})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}48} = 33{,}33\%$$

Variation mit WH:

Zahlenschloss mit 3 Rädern:

$\boxed{10} \cdot \boxed{10} \cdot \boxed{10} = 10^3$ Möglichkeiten

Münze wird 9x geworfen: Anzahl der Wurffolgen

$\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2} = 2^9$

- Permutation: n Personen auf n Plätze: $n!$
- Kombination / ungeordnete Stichprobe:
  - ↳ ohne WH: $\binom{N}{n}$
  - ↳ mit WH: $\binom{N+n-1}{n}$

  } ohne Reihenfolge
- Variation / geordnete Stichprobe:
  - ↳ ohne WH: $\binom{N}{n} n!$
  - ↳ mit WH: $N^n$

  } Reihenfolge wichtig

**7.20)**

$2^6 = 64$

**7.21)**

$4^{10} = 1\,048\,576$

**7.23)**

$\frac{4!}{2} = 12$

**7.24)**

$\binom{N}{n} \cdot n! = \binom{5}{3} \cdot 3! = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} \cdot 6 = 60$

**7.25** a)

$$\binom{N}{n} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

b)

$$\binom{N}{n} \cdot n! = \binom{10}{4} \cdot 4! = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 24 = 5040$$

**7.27**

Gruppenph:
$8 \cdot \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 8 = 48$

8el Finale:
8

4el Finale:
4

Halbfin.:
2

Finale:
1

$$Sum = 48 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$$

**7.28** a)

$$5! = 120$$

b)

$$3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$$

**7.31** a)

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 4845$$

b)

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{17}{3} = 3 \cdot \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 680 = 2040$$

7.33)

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 6\cdot 10 = 60$$

7.34)

$$\binom{50}{5}\cdot\binom{11}{2} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{11\cdot 10}{2\cdot 1} = 2\,118\,760\cdot 55 = 116\,531\,800$$

7.36)

$$\binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2} = 495$$

## Zufallsvariable

... Funktion, die jedem Ereignis eine reelle Zahl zuordnet.

D: Ereignisraum
W: reelle Zahl

diskrete Zv.: nur endlich viele Zahlen
stetige Zv.: in einem Intervall aller reellen Zahlen

Bezeichnung mit Großbuchstaben $(X, Y, \ldots)$

Bsp.: Würfeln mit 2 Würfeln

$D = \{(1,1); (1,2); \ldots (6,6)\}$

Zv. $X$ ... Augensumme
$W = \{2, 3, \ldots, 12\}$

Zv. $X$ ... Anzahl der 6er
$W = \{0, 1, 2\}$

Zv. X ... Produkt der Augensumme

$W = \{1, 2, \ldots, 13, 15, \ldots, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

## Wahrscheinlichkeitsfunktion

Ordnet der Zv. einen Wahrscheinlichkeitswert zu

Bsp.: Würfeln mit 2 Würfeln

X... Augensumme

$P(X=2)$ ... Wahrsch., dass Zv. Wert 2 annimmt

$P(X=x_1)$

Bsp.: Roulette : Jemand spielt 3x

? : Wahrsch. für die # des Auftretens von Rot

X... # der roten Ergebnissen

$W = \{0, 1, 2, 3\}$

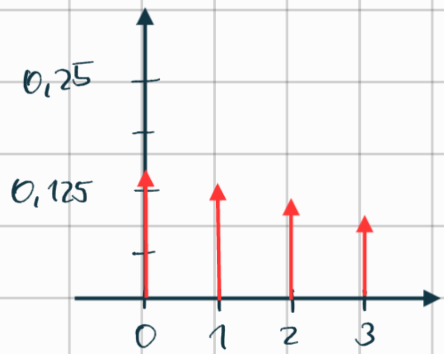
$P(X=0) = \frac{19}{37} \cdot \frac{19}{37} \cdot \frac{19}{37} = 13,5\,\%$

$P(X=1) = \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37} \cdot \frac{19}{37} = 12,83\,\%$

$P(X=2) = \frac{18}{37} \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37} = 12,15\,\%$

$P(X=3) = \frac{18}{37} \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{18}{37} = 11,5\,\%$

## Graphische Darstellung




Stabdiagramm

## Häufigkeitsverteilung – Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zv. kann Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ annehmen
führe n-mal Zufallsversuch durch
→ Liste mit Werten, die Zv. angenommen hat
↳ Stichprobe
→ Werte können mehrfach vorkommen
→ Häufigkeiten können abgelesen werden
↳ Häufigkeitsverteilung

n sehr groß machen:
relative Häufigkeit → Wahrsch. für Wert

## Erwartungswert einer (diskreten) Zufallszahl

· Mittelwert einer Stichprobe
n … Stichprobenumfang
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ … k verschiedene Werte
$H_i$ … absolute Häufigkeit
$h_i = \frac{H_i}{n}$ … rel. Häufigkeit
$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (H_1 \cdot x_1 + H_2 \cdot x_2 + \ldots + H_k \cdot x_k) = h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2 + \ldots + h_k \cdot x_k$
↳ Stichprobenmittelwert
für große Stichproben: $h_i \approx p_i = P(x = x_i)$
→ Erwartungswert einer diskreten Zv

$E(x) = \mu = \sum_i p_i \cdot x_i$

x … Zufallsvariable mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit den dazugehörigen Wahrsch. $p_1, p_2, \ldots, p_k$

$E(x) = \mu \approx \bar{x}$

Erwartungswert enspricht für große Stichproben näherungsweise d. Stichprobenmittelwert

10.4 / 10.5 $X \ldots$ Gewinn bei einem Spiel

$$x_1 = -2 \qquad p_1 = P(x=-2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$
$$x_2 = 2 \qquad p_2 = P(x=2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$
$$x_3 = 4 \qquad p_3 = P(x=4) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$
$$x_4 = 6 \qquad p_4 = P(x=6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$E(x) = \mu = \sum_i p_i \cdot x_i = -2\cdot\frac{125}{216} + 2\cdot\frac{25}{216} + 4\cdot\frac{5}{216} + 6\cdot\frac{1}{216}$$

10.14 $X \ldots$ Augenzahl

$$p_1 = P(x=1) = \frac{1}{9}$$
$$p_2 = P(x=2) = \frac{2}{9}$$
$$p_3 = P(x=3) = \frac{2}{9}$$
$$p_4 = P(x=4) = \frac{1}{9}$$
$$p_5 = P(x=5) = \frac{1}{9}$$
$$p_6 = P(x=6) = \frac{2}{9}$$

$$E(x) = \sum_i x_i \cdot p_i = 1\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{2}{9} + 4\cdot\frac{1}{9} + 5\cdot\frac{1}{9} + 6\cdot\frac{2}{9}$$
$$E(x) = \frac{32}{9} = 3{,}\dot{5}$$

## Streuungsmass

aus Statistik: $\bar{x}$ & $s \ldots$ Standardabweichung bei Stichprobe

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (\bar{x} - x_i)^2}$$

$x_i \ldots$ Werte, die Zv. annimmt

$p_i \ldots$ zugehörige Wahrsch.

$$\sigma = \sqrt{\sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$$

↳ Standardabweichung einer diskreten Zv.

$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$

↳ Varianz einer diskreten Zv.

kleine Varianz: Werte liegen nahe bei $\mu$ bzw. Werte die weiter weg liegen, treten mit kleinerer Wahrsch. auf

bei sehr großen Stichproben: $s \approx \sigma$

10.17 | X... Reingewinn

$x_1 = -1 \qquad p_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \ldots = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{30}{36}$

$x_2 = 2 \qquad p_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \ldots = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$x_3 = 14 \qquad p_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$E(x) = \mu = \sum_i p_i \cdot x_i = \frac{30}{36} \cdot (-1) + \frac{5}{36} \cdot 2 + \frac{1}{36} \cdot 14$
$= -\frac{1}{6}$

$\sigma^2 = (-1-\mu)^2 \cdot \frac{30}{36} + (2-\mu)^2 \cdot \frac{5}{36} + (14-\mu)^2 \cdot \frac{1}{36}$
$= 6{,}92$

$\sqrt{\sigma^2} = \sigma = 2{,}63$ €

$E(x) = 0 = (-1)\frac{30}{36} + 2 \cdot \frac{5}{36} + a \cdot \frac{1}{36}$

$\frac{20}{36} = a \cdot \frac{1}{36}$

$a = 20$ somit müsste man 21 € bei den richtigen gleichen haben

## Wahrsch. funktion einer Zv.

Die Funktion f ordnet jeder reellen Zahl x eine Wahrsch. zu $f(x) = P(X = x)$

Bsp.: X ... Augensumme beim Werfen zweier fairer Würfel
$P(X=2) = f(2)$

häufige Fragestellung: Wahrsch., dass eine Zv. höchstens den Wert x annimmt. $P(X \leq x)$

Verteilungsfkt.: $F(x) = P(X \leq x)$

10.18

a) X ... gesamte Wartezeit

$x_1$ 0 min. $\quad p_1 = \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{32}{100} = 32\,\%$

$x_2 = 1$ min. $\quad p_2 = \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{48}{100} = 48\,\%$

$x_3 = 3$ min. $\quad p_3 = \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{100} = 8\,\%$

$x_4 = 4$ min. $\quad p_4 = \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{12}{100} = 12\,\%$

$100\,\%$ ✓

b) $E(X) = \frac{32}{100} \cdot 0 + \frac{48}{100} \cdot 1 + \frac{8}{100} \cdot 3 + \frac{12}{100} \cdot 4 = 1{,}2$ min.

$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i - E(x))^2 \cdot p_i} = 1{,}296$ min.

# Binominalverteilung

Voraussetzung:

- nur 2 Ausgänge → Erfolg & Misserfolg
- Versuche unabhängig; immer gleiche Wahrsch. für Erfolg & Misserfolg (Ziehen mit zurücklegen)

10.24 | fairer Würfel wird $n=8$ und geworfen
$X$... Anzahl d. 6er

Erfolg: 6er; Misserfolg: kein 6er

allgemein:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\,(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\dots,n$$

$$E(X)=n\cdot p$$

$$V(X)=\sigma^2=n\cdot p(1-p)$$

$$P(X=0)=\binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^8=1\cdot1\cdot0{,}2326=0{,}2326$$

$$P(X=1)=\binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^7=\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7=0{,}3721$$

$$P(X=2)=\binom{8}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^6=$$

$$P(X=3)=\binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^5=$$

$$P(X=4)=\binom{8}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^4=$$

$$P(X=5)=\binom{8}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^3=$$

$$P(X=6)=\binom{8}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=$$

$$P(X=7)=\binom{8}{7}\left(\frac{1}{6}\right)^7\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^1=$$

$$P(X=8)=\binom{8}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^0=$$

Wahrsch. $P(X \leq k)$ und $P(X \geq k)$

Bsp.: fairer Würfel ; $n = 8$ mal

X... # der 6er

- Wahrsch. höchstens 2x 6er

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= 0{,}23 + 0{,}37 + 0{,}26 = 0{,}87 = 87\%$$

- Wahrsch. mind. 2x 6er

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=1) + P(X=0))$$
$$= 1 - (0{,}23 + 0{,}37) = 0{,}4$$

10.39 | 37% mit Blutgruppe 0

X... Anzahl d. Personen mit Blutgr. 0

a)

$$P(X \geq 3) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right)$$
$$= 1 - (0{,}0098 + 0{,}0578 + 0{,}1529) = 0{,}779$$

$$P(X=0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}37^0 \cdot 0{,}63^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}63^{10} = 0{,}0098$$
$$P(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}37^1 \cdot 0{,}63^9 = 10 \cdot 0{,}37 \cdot 0{,}63^9 = 0{,}0578$$
$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}37^2 \cdot 0{,}63^8 = 45 \cdot 0{,}37^2 \cdot 0{,}63^8 = 0{,}1529$$

b)

$$1 - P(X=0) \geq 0{,}9$$
$$1 - \left(\binom{n}{0} \cdot 0{,}37^0 \cdot 0{,}63^n\right) \geq 0{,}9$$
$$1 - 0{,}63^n \geq 0{,}9$$
$$0{,}1 \geq 0{,}63^n \quad | \ln$$
$$\ln(0{,}1) \geq n \cdot \ln(0{,}63)$$
$$n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}63)}$$

$$n \geq 4{,}9$$

10.45 | 5 % Wahrsch., dass jemand nicht kommt
X ... Anzahl d. Fluggäste, die tatsächlich erscheinen
$p = 95\%$

$E(x) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}95 = 95$
$P(X=100) = \binom{100}{100} \cdot 0{,}95^{100} \cdot 0{,}05^{0} = 0{,}59\,\%$

103 Buchungen ; 100 Plätze
$P(X > 100) = p(101) + p(102) + p(103) = 10{,}64\,\%$

## Ziehen mit/ohne Zurücklegen

① mit:

Behälter mit $n = 2000$ Kugeln
↗
Grundgesamtheit bzw. Prüflos
davon $M = 80$ rote Kugeln
↳ teilen ein bestimmtes Merkmal
„Merkmalsträger"
<u>zufällige</u> Entnahme einer <u>Stichprobe</u>
von z.B. $n = 50$ Kugeln
X ... Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe

Stelle mir das ziehen d. Stichprobe folgendermaßen vor:
→ Ziehe zufällig eine Kugel → prüfe ob rot oder nicht → lege sie wieder zurück
Somit: Grundvoraussetzung wiederhergestellt

-> immer gleiche Wahrsch. / unabhängige Ziehungen
-> Erfolg (rot) oder Misserfolg ($\overline{\text{rot}}$)
-> X ist binomialverteilt

② ohne:
Praxis: N... Grundgesamtheit; M... Merkmalsträger
n... Stichprobenumfang

Unterschied: Nach Ziehung wird nicht zurückgelegt
-> Wahrsch. ändern sich nach jedem Zug
-> Gegenseitige Beeinflussung
-> X nicht binomialverteilt

Aber: in Praxis ändert sich Zustand nur geringfügig
-> binomiale Annäherung $p \approx \frac{M}{N}$

Approximationsregel
Wenn Stichprobenumfang $n \leq 5\% \cdot N$

10.29 | $N = 100$ Stanzteile
davon $M = 8$ Fehlerhaft
$n = 3$ Stanzteile als Stichprobe
X ... Anzahl der fehlerhaften Teile
$X = \{0, 1, 2, 3\}$

a) ohne zurücklegen
$$P(X=0) = \frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} = 0{,}7766$$
$$P(X=1) = \frac{8}{100} \cdot \frac{92}{99} \cdot \frac{91}{98} + \frac{92}{100} \cdot \frac{8}{99} \cdot \frac{91}{98} + \frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{8}{98} = 0{,}2071$$
$$P(X=2) = 0{,}0159$$
$$P(X=3) = 0{,}0003$$

b) mit zurücklegen → binomialverteilt

10.54 a)

$\frac{200}{5000} = 0{,}04 < 0{,}05$

Stichprobe klein genug → annähernd binomialverteilt

$n = 200$

$p = \frac{100}{5000} = 0{,}02$

b) $E(x) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}2 = 4$

10.53 X… Anzahl d. mangelhaften Trinkgläser

$p = 0{,}2$

Annähernd binomialverteilt, weil 4 Gläser eine kleine Stichprobe sind.

$n = 4$

a) (1) $P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$

(2) $P(X \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 - f(0)$

$= 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904$

(3) $P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = 0{,}5904 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^3$

$= 0{,}8182$

(4) $P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0{,}9728$

b) $E(x) = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$

10.50) X… Anzahl d. ausgefallenen Schalter

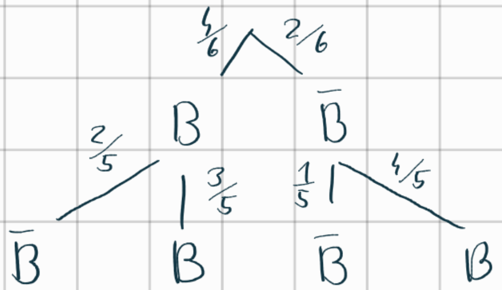
a) $P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^5 = 0{,}8154$

b) $P(X>2) = f(3) + f(4) + f(5) = 0{,}0006$

10.48) X… Anzahl d. unbrauchbaren Batterien

a) $n = 2$ Stichprobe

große Stichprobe $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33{,}3\dot{3} > 0{,}05$




$X = \{0, 1, 2\}$

$P(X=0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}4000$

$P(X=1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}5333$

$P(X=2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}0667$

1

b) mit zurücklegen

→ binomialverteilt

$P(X=0) = \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$P(X=1) = \ldots = \frac{4}{9}$

$P(X=2) = \ldots = \frac{1}{9}$

1

# Normalverteilung

... stetige Verteilung → Zufallsvariable

Wahrsch., dass ein bestimmter Wert angenommen wird ist 0.

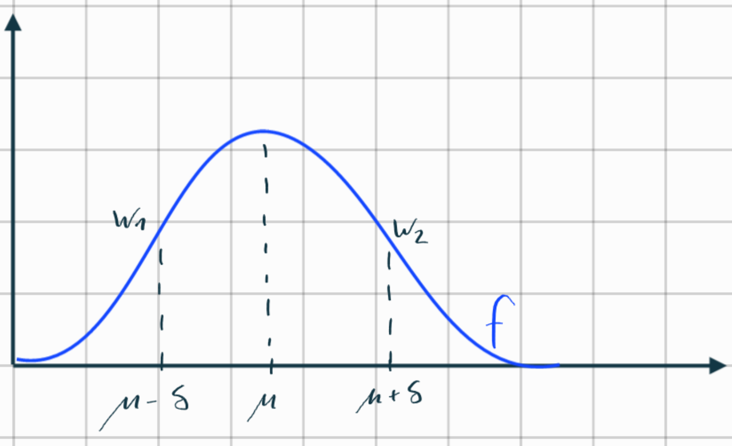
→ Begründung/Bsp.:

Abfüllmengen eines bestimmten Produkts liegen zw. 745 g & 755 g. In diesem Bereich liegen unendlich viele Werte wäre Wahrsch. eines Werts auch nur eine sehr kleine positive Zahl → Wahrsch. aller Gewichte geht gegen ∞

Werte liegen sehr dicht auf der Zahlengerade. Dichte der Werte wird durch Gauß'sche Glockenkurve dargestellt.

→ Dichtefunktion f einer normalverteilten ZV

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$




- glockenförmiger Verlauf
- Symmetrie auf beiden Seiten von $\mu$

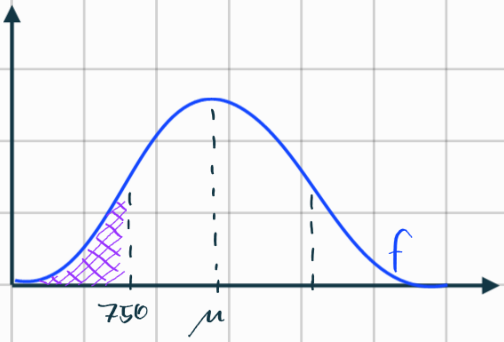
- Maximum an Stelle $\mu$
  $\mu$... Erwartungswert
- Wendepunkte an den Stellen $\mu \pm \sigma$
- Fkt.-werte sind stets positiv & für $x \to \pm\infty$ nähern sich die Werte asymptotisch 0
- Flächeninhalt unter Glockenkurv. = 1

→ Einfluss von $\delta$ auf die Gestalt der Glockenkurve

$\delta$ klein → hohe, schmale Glocke

$\delta$ groß → niedrige, breite Glocke

Fragestellung: Wie wahrsch. liegt ein gewisser Wert in einem bestimmten Intervall?




→ Verteilungsfunktion

$F(x_0) = P(X \leq x_0)$

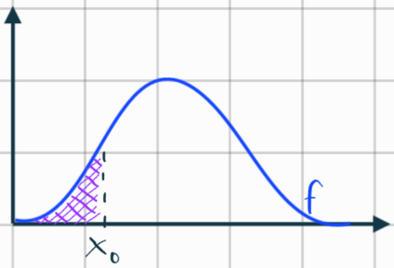
Bei diskreter Zv.: Summe von Einzelwahrsch. $f(0)+f(1)+\ldots$

Bei stetiger Zv.: Integral über die Dichtefunktion

Wahrsch. & Fläche unter der Glockenkurve

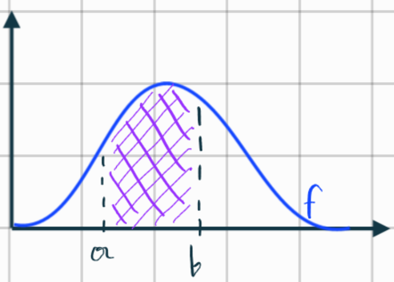
Wahrsch., dass normalverteilte Zv. einen Wert annimmt...

• ... $\leq x_0$ = Fläche unter der Glockenkurve von $-\infty$ bis $x_0$




$$P(X \leq x_0) = \underset{\text{Verteilungsfkt.}}{F(x_0)} = \int_{-\infty}^{x_0} \underset{\text{Dichtefkt.}}{f(x)}\, dx$$

• ... $a < x < b$ = Fläche unter der Glockenkurv. von a bis b




$$P(a < X < b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

da $P(X = x_0) = 0$

$$P(X \leq x_0) = P(X < x_0)$$

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

$$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

## Verteilungsfunktion F graphisch


- streng monoton
- s-förmig
- an der Stelle u hat F den Wert 0,5 und einen Wendepunkt

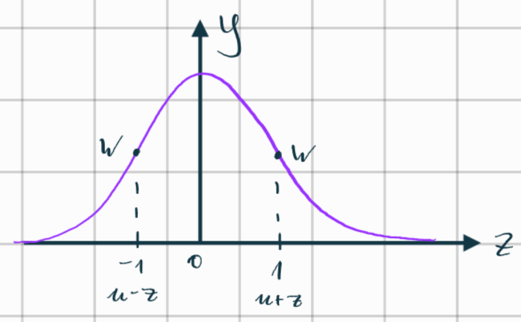
- F nimmt Werte zw. 0 & 1 an
- $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx$

## Standardisierte Normalverteilung

Überlegung: alle Normalverteilungen können durch eine einzige, standardisierte Normalverteilung ausgedrückt werden mit $u = 0$ & $\sigma = 1$

-> Kennzeichnung: standardisierte Normalverteilung statt mit „x" mit „z" bezeichnet.

(-> „z"-Verteilung)




$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

vgl.

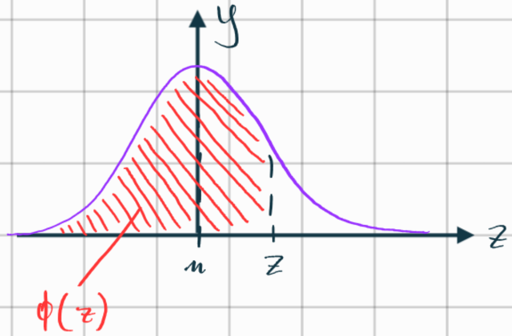
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-u)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

$$\phi(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz$$

vgl.

$$F(x_0) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

Überführen einer Verteilungsfunktion $F(x)$ einer beliebigen Normalverteilung in die Verteilungsfkt. $\phi(z)$ einer standardisierten Normalverteilung


Flächengleichheit!

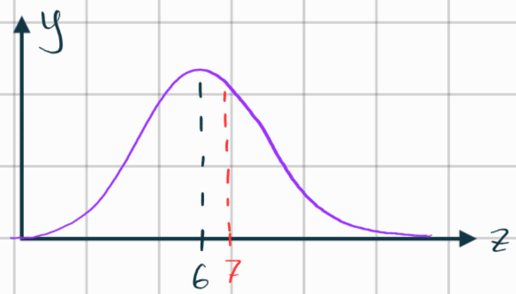
Umrechnung

$F(x) = \phi(z)$ wenn $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

**10.56**

$X$... normalverteilte Zv.

$\mu = 6$ & $\sigma = 2$




a) $P(X \leq 7) = F(7)$

$F(7) = \phi(z) \rightarrow z = \frac{7-6}{2} = 0{,}5 \rightarrow \phi(0{,}5) = 0{,}6915$

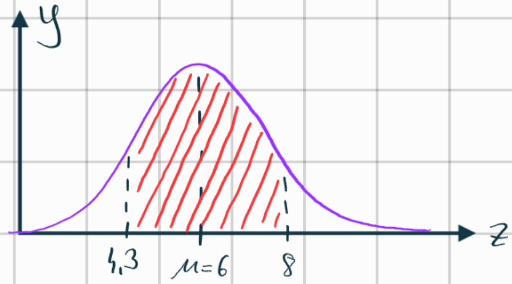
Wichtiger Zusammenhang

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

$X$ ... normalverteilte Zv.

$\mu = 6$, $\sigma = 2$


$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$
$= 1 - F(3) = 1 - \phi\left(\frac{3-6}{2}\right)$
$= 1 - \phi(-1{,}5) = \phi(1{,}5) = 0{,}9332$




$P(4{,}3 \leq X \leq 8) = F(8) - F(4{,}3)$
$= \phi\left(\frac{8-6}{2}\right) - \phi\left(\frac{4{,}3-6}{2}\right) = \phi(1) - \phi(-0{,}85)$
$= \phi(1) - (1 - \phi(0{,}85)) = 1 - \phi(1) + \phi(0{,}85)$
$= 1 - 0{,}8413 + 0{,}8023 = 0{,}961$

10.66

a) Wahrsch., dass Inhalt d. Packung unter 1 kg liegt.
b) Wahrsch., dass Inhalt zw. 1 & 1,06 kg liegt.

10.68

a) D  c) A
b) C  d) B

10.73

$\mu = 12$ ; $\sigma = 1{,}5$

a) $F(14) = \phi\left(\frac{14-12}{1{,}5}\right) = \phi(1{,}33) = 0{,}9082$
b) $P(X \leq 15) = F(15) = \phi\left(\frac{15-12}{1{,}5}\right) = \phi(2) = 0{,}9772$
c) $F(10) = \phi\left(\frac{10-12}{1{,}5}\right) = \phi(-1{,}33) = 1 - \phi(1{,}33) = 0{,}0918$
d) $F(8) = \phi\left(\frac{8-12}{1{,}5}\right) = \phi(-2{,}67) = 1 - \phi(2{,}67) = 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038$

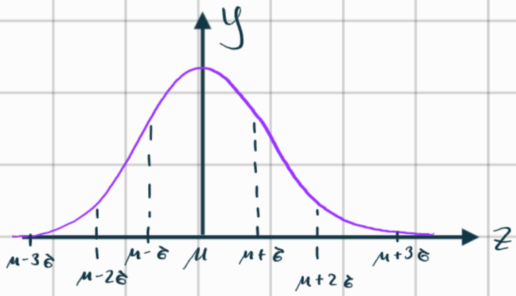
10.57) $k \cdot \sigma$ - Bereiche um $\mu$

Wahrsch., dass Zv. einen Wert zw.

$\mu \pm \sigma$ bzw.

$\mu \pm 2\sigma$ bzw.

$\mu \pm 3\sigma$




in standardisierte Normalverteilung bringen

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$F(\mu+2\sigma) - F(\mu-2\sigma)$$
$$= \phi\left(\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \phi(2) - \phi(-2) = \phi(2) - (1-\phi(2))$$
$$= \phi(2) - 1 + \phi(2) = 2\phi(2) - 1$$
$$= 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}95$$

$$F(\mu+3\sigma) - F(\mu-3\sigma)$$
$$= \phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \phi(3) - \phi(-3) = \phi(3) - (1-\phi(3))$$
$$= \phi(3) - 1 + \phi(3) = 2\phi(3) - 1$$
$$= 2 \cdot 0{,}99865 - 1 = 0{,}997$$

$$F(\mu+\sigma) - F(\mu-\sigma)$$
$$\vdots$$
$$= 2\phi(1) - 1$$
$$= 0{,}68$$

Berechnete Wahrsch. hängen nicht von $\mu$ oder $\sigma$ ab.
-> Diese gelten somit für jede beliebige Normalverteil.

Quantile der Standardnormalverteilung


$\phi(z_p) = p$

$\phi(z) = 0,9$

ablesen in Tabelle

$z \sim 1,28$

Eine Untersuchung hat ergeben, dass 20% der Berufstätigen einer bestimmten Großstadt auf der Fahrt zum Arbeitsplatz den privaten PKW benutzen.

A) Letzten Mittwoch sind in einem Betrieb mit 200 Mitarbeitern nur 30 mit dem PKW gekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für so eine starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert?

B) Ein Betrieb mit 110 Mitarbeitern stellt 25 Parkplätze zur Verfügung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die Parkplätze nicht aus?

a) X... Personen, die mit priv. PKW zur Arbeit fahren

$\left.\begin{array}{l} n = 200 \text{ Mitarbeiter} \\ p = 0,2 \end{array}\right\}$ binomialverteilt

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,2 = 40$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p\,(1-p)} = \sqrt{32}$

Approximation mit Normalverteilung zulässig?: $n \cdot p \cdot (1-p) = 32 > 9$ ✓

$P(X \leq 30) \hat{=} P(X \leq 30,5) = F(30,5) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$= \phi\left(\frac{30,5-40}{\sqrt{32}}\right) = 4,6\ \%$

b) $n \cdot p \cdot (1-p) = 110 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 17,6 > 9$ ✓

$\mu = n \cdot p = 22$

$1 - F(25,5) = 0,202$

# Beurteilende Statistik

## Begriffe

Grundgesamtheit: bestimmte Menge von Einheiten, bei denen mich ein Merkmal interessiert.
Vollerhebung: 100% Prüfung der Grundgesamtheit
Stichprobe: der Grundgesamtheit

## Auswahl der Stichproble

Jedes Element der Grundgesamtheit muss mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden -> Zufallsstichprobe

## Einführungsbeispiel

→ S. 329

11.11

$\bar{x} = 99,82$

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Konfidenzniveau 0.95

Stichprobe

Mittelwert 99.82

σ 2

N 6

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

| | | |
|---|---|---|
| Ergebnis | Mittelwert | 99.82 |
| | σ | 2 |
| | SE | 0.8165 |
| | N | 6 |
| | Limes inferior | 98.2197 |
| | Limes superior | 101.4203 |
| | Intervall | 99.82 ± 1.6003 |

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Konfidenzniveau 0.99

Stichprobe

Mittelwert 99.82

σ 2

N 6

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

| | | |
|---|---|---|
| Ergebnis | Mittelwert | 99.82 |
| | σ | 2 |
| | SE | 0.8165 |
| | N | 6 |
| | Limes inferior | 97.7168 |
| | Limes superior | 101.9232 |
| | Intervall | 99.82 ± 2.1032 |

11.13

$\bar{x} = 9,244$ mm

$s = 0,025288$

T Schätzung eines Mittelwerts

Konfidenzniveau 0.95

Stichprobe

Mittelwert 9.244

s 0.0253

N 15

T Schätzung eines Mittelwerts

| | | |
|---|---|---|
| Ergebnis | Mittelwert | 9.244 |
| | s | 0.0253 |
| | SE | 0.0065 |
| | N | 15 |
| | Freiheitsgrade | 14 |
| | Limes inferior | 9.23 |
| | Limes superior | 9.258 |
| | Intervall | 9.244 ± 0.014 |

11.15 a)

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Konfidenzniveau 0.9

Stichprobe

Mittelwert 98.4

σ 5.8

N 36

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Ergebnis

| | |
|---|---|
| Mittelwert | 98.4 |
| σ | 5.8 |
| SE | 0.9667 |
| N | 36 |
| Limes inferior | 96.81 |
| Limes superior | 99.99 |
| Intervall | 98.4 ± 1.59 |

b)

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Konfidenzniveau 0.95

Stichprobe

Mittelwert 98.4

σ 5.8

N 36

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Ergebnis

| | |
|---|---|
| Mittelwert | 98.4 |
| σ | 5.8 |
| SE | 0.9667 |
| N | 36 |
| Limes inferior | 96.5054 |
| Limes superior | 100.2946 |
| Intervall | 98.4 ± 1.8946 |

c)

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Konfidenzniveau 0.99

Stichprobe

Mittelwert 98.4

σ 5.8

N 36

Gauß-Schätzer des Mittelwerts

Ergebnis

| | |
|---|---|
| Mittelwert | 98.4 |
| σ | 5.8 |
| SE | 0.9667 |
| N | 36 |
| Limes inferior | 95.91 |
| Limes superior | 100.89 |
| Intervall | 98.4 ± 2.49 |