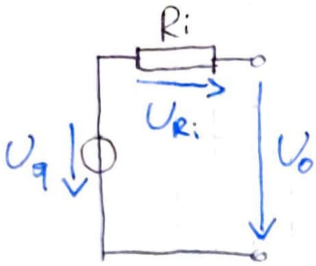
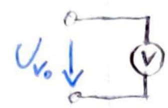
Bestimmen d. R_i einer realen Spg.quelle

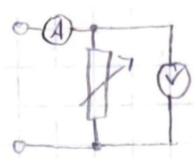


1) im Leerlauf U_0 messen



$I \approx 0 \rightarrow U_q = U_{V_0}$

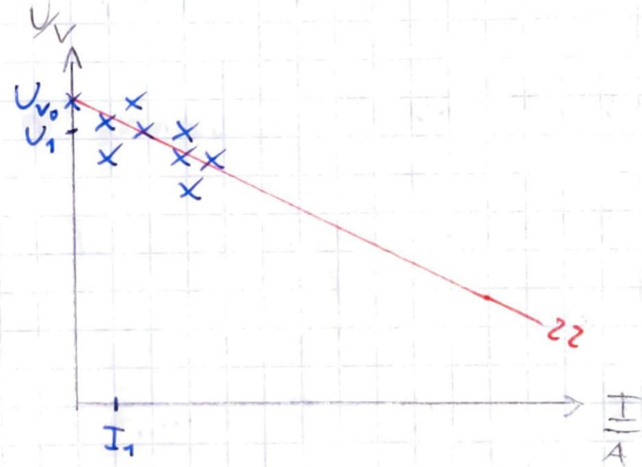
2) belasten mit vor R_L (Ω >>)



$I_1 \mid U_1$

$I_2 \mid U_2$

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_{V_0} - U_1}{I_1}$$



geg.: Motortypenschild

$U = 230\ V / 50\ Hz$

$P = 5\ kW$, $\eta = 0{,}75$, $\cos\varphi = 0{,}8$

Welchen Wert muss d. Sicherung mind. haben?

η = eta (Wirkungsgr.)

$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$

$P_{ab} = 5\ kW$

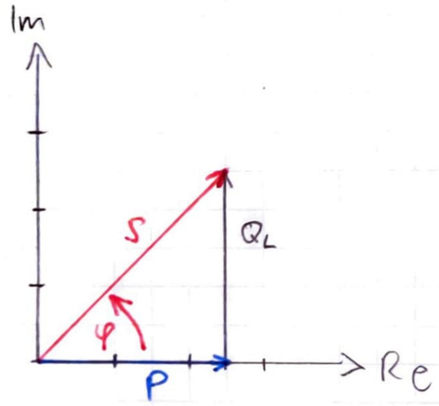
$P_{zu} = \frac{5\ kW}{0{,}75} = 6{,}\dot{6}\ kW$

$P = S \cdot \cos\varphi$

$S_{zu} = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{6{,}\dot{6}\ kW}{0{,}8} = 8{,}\dot{3}\ kVA$

$\varphi = \arccos(0{,}8) = 36{,}8°$

1cm $\triangleq$ 2 kW, 2 kVA



$Q_L = S \cdot \sin(36{,}8°) = 8{,}\dot{3} \cdot \sin(36{,}8°)$

$Q_L = 5\ kvar$

$Q_L = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{8{,}\dot{3}^2 - 6{,}\dot{6}^2}$

$Q_L = 5\ kvar$

$I = \frac{S}{U} = \frac{8333{,}3}{230} = 36\ A$

→ kaufe einen anderen Motor

→ einen 3~ Motor (3-phasen)

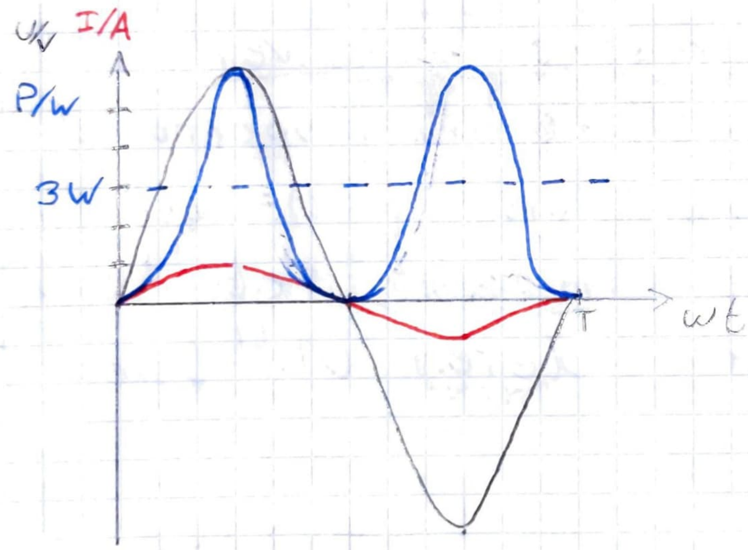
Leistung im Wechselstromkreis

Da zeitabhängige Größen $u(t)$, $i(t)$ vorliegen, ergibt die Multiplikation der beiden Größen die Augenblicksleistung. Der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung ist die Wirkleistung P.

$$P = \overline{p(t)} = \overline{u(t) \cdot i(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t)\,dt \quad [W]$$

- rein ohmsche Last



$p(t) = u(t) \cdot i(t)$

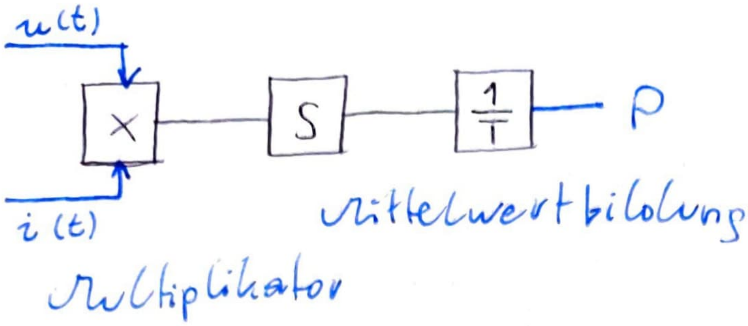
-> nur positiv

-> doppelte Frequ.

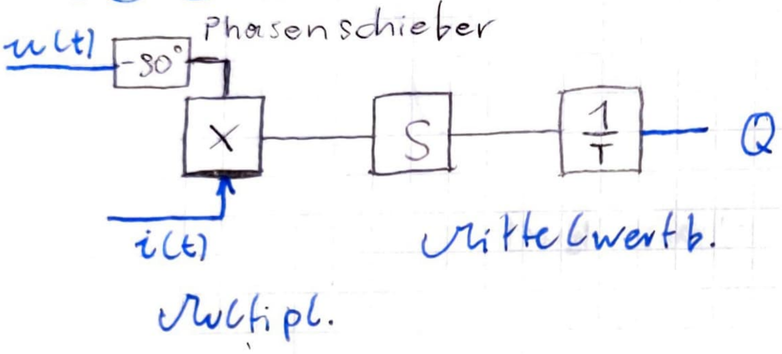
1) Leistungsmessung

Leistungsmesser für DC können als Sonderfall der AC Wirkleistungsmesser angesehen werden. Für sinusförmige Größen können allgemein folgende Messprinzipien angewendet werden:

Wirkleistungsmessung

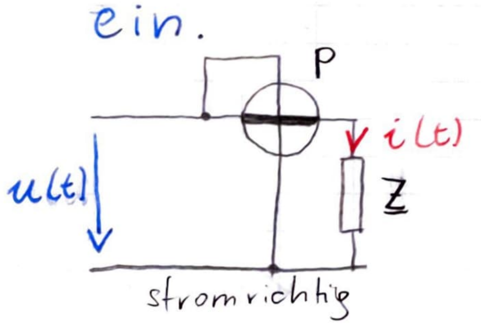


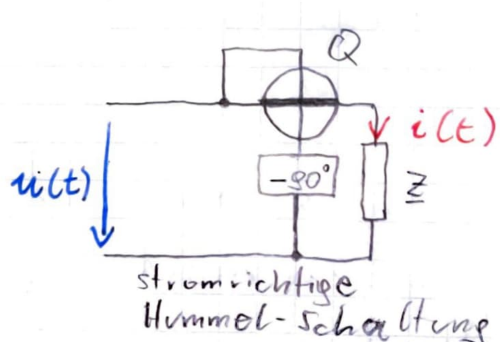
Blindleistungsmessung



1.1) Elektrodynamisches Messwerk

Der Zeigerausschlag ist proportional zur Augenblicksleistung $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Aufgrund seiner Trägheit stellt sich der Zeiger auf deren Mittelwert = P ein.



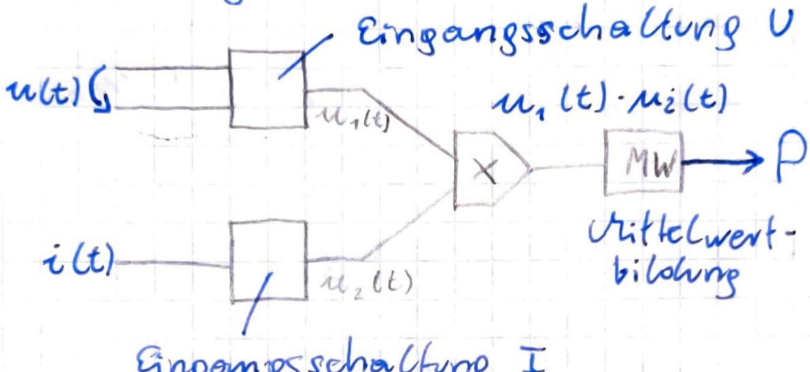


Unter Verwendung eines zusätzlichen Phasenschiebers kann auch die Blindleistung gemessen werden (z.B. Hummel-Schaltung)

1.2) Elektronische Wirkleistungsmessung

Durch Abtastung und Digitalisierung der Eingangsgrößen ($u(t)$ & $i(t)$) mit anschließender Multiplikation und Mittelwertbildung durch einen Mikroprozessor (über mind. 1 Periode) kann die Leistung ermittelt werden.

Spannungsmessbereich durch Spg. Teiler



stromproportionale Spg. durch SHUNTS

1.2.1) Abtastverfahren

Werden Strom und Spannung kontinuirlich abgetastet, so stehen n-Werte u_k & i_k $k = 1 \dots n$ zur Berechnung im μ-Prozessor zur Verfügung. Die Wirkleistung kann dann durch Multiplikation dieser Werte und anschließender Mittelung über mind. 1 volle Periode berechnet werden.

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

$$\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u(k)\, i(k) = \frac{1}{n} (u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + \ldots + u_n \cdot i_n)$$

Die Scheinleistung kann durch Ermittlung der Effektivwerte berechnet werden.

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

$$I_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} i_k^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (i_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff}$$

Leistungsfaktor $\cos \varphi = \frac{P}{S}$

Blindleistung $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$

Die Wahl des Abtastintervalls (Sampling-rate) ist auch hier prinzipiell die entscheidende Aufgabe. Einerseits soll der Aufwand möglichst gering gehalten werden, andererseits ist das Shannon'sche Abtasttheorem unbedingt einzuhalten. Liegen stark oberwellenbehaftete Signale vor, können erhebliche Fehlmessungen auftreten.

Shannon'sche Abtastverfahren: Signale mit mind. der doppelten Frequenz abtasten.

Bsp.: 1.)

Für d. folgenden Messreihen sind die Werte von U_{eff}, I_{eff}, S & P sowie Q zu ermitteln

$$U_{[V]} = \begin{matrix} 60{,}9 & 236{,}9 & 322{,}4 & 284{,}8 & 138{,}4 \\ -60{,}9 & -236{,}9 & -322{,}4 & -284{,}8 & -138{,}4 \end{matrix}$$

$$I_{[A]} = \begin{matrix} 0{,}56 & 2{,}19 & 2{,}98 & 2{,}63 & 1{,}28 \\ -0{,}56 & -2{,}19 & -2{,}98 & -2{,}63 & -1{,}28 \end{matrix}$$

$n = 10$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k^2} = \sqrt{\frac{1}{10}\left(60{,}9^2 + 236{,}9^2 + \ldots + (-138{,}4)^2\right)}$$

$$U_{eff} = 228{,}789\ V$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_k^2} = \sqrt{\frac{1}{10}\left(0{,}56^2 + 2{,}19^2 + \ldots + (-1{,}28)^2\right)}$$

$$I_{eff} = 2{,}12\ A$$

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} = 228{,}789V \cdot 2{,}12A = 487{,}97\ VA$$

$$P = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot i_k =$$

$$= \frac{1}{10}\left(60{,}9 \cdot 0{,}56 + 236{,}9 \cdot 2{,}19 + \ldots + (-138{,}4)(-1{,}28)\right)$$

$$= 487{,}97W$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 0\ \text{var}$$

2.)

$U_{[V]} = $ 60.8 236.8 322.4 284.8 138.4
-60.8 -236.8 -322.4 -284.8 -138.4

$n = 10$

$I_{[A]} = $ 2.85 2.05 0.38 -1.45 -2.71
-2.85 -2.05 -0.38 1.45 2.71

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k^2} = \sqrt{(60.8^2 + 236.8^2 + \ldots + (-138.4)^2) \frac{1}{10}}$$

$$U_{eff} = 228.788 \text{ V}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} i_k^2} = \sqrt{(2.85^2 + 2.05^2 + \ldots + 2.71^2) \frac{1}{10}}$$

$$I_{eff} = 2.12 \text{ A}$$

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} = 228.788 \text{ V} \cdot 2.12 \text{ A} = 487.87 \text{ VA}$$

$$P = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot i_k = \frac{1}{10} (60.8 \cdot 2.85 + 236.8 \cdot 2.05 + \ldots + (-138.4 \cdot 2.71))$$

$$P = 0 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 487.87 \text{ var}$$

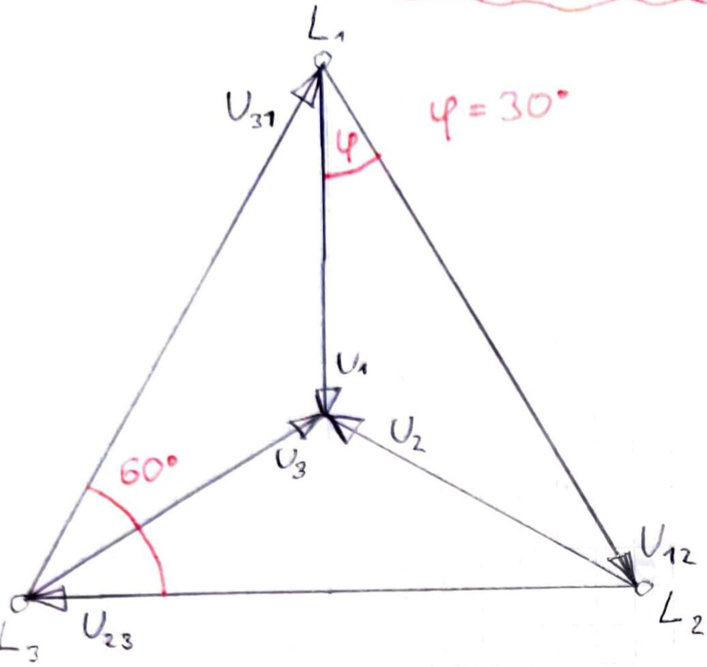
Energiemessung

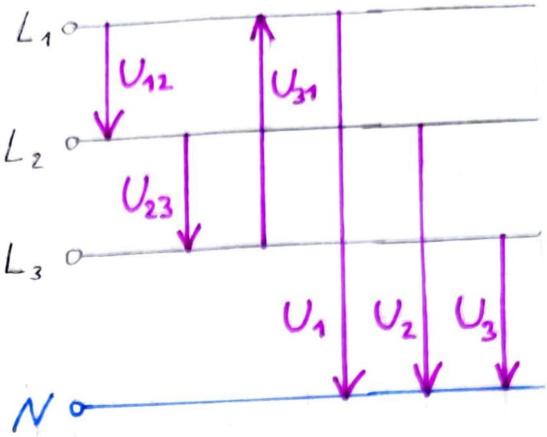
Ein Messgerät für elektrische Energie muss grundsätzlich aus einer Leistungsmesseinrichtung mit zeitlicher Integrationsmöglichkeit bestehen. Beim digital-elektronischen Messverfahren benötigt man daher neben einem dem Abtastverfahren arbeitendem Wattmeter auch eine Uhr, welche die Zeit in genaue Abtastschritte ΔT_a unterteilt.

$$E = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot i_k \cdot \Delta T_a$$

Für die Wechselstromanwendung werden die bisherigen Induktionsmesswerke nach einer EU-Richtlinie durch Smart-Meter ersetzt.

Drehstrom

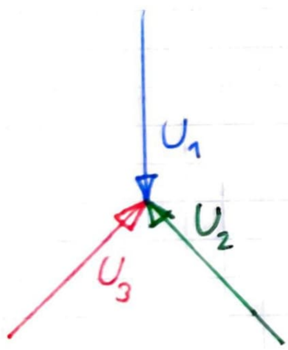




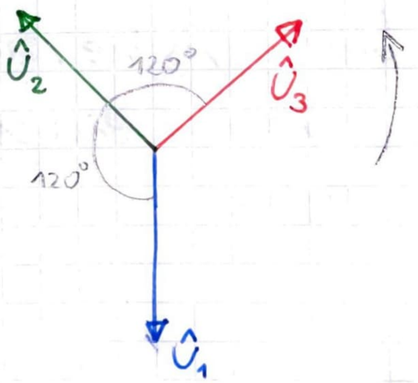
$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = 400\,V$$

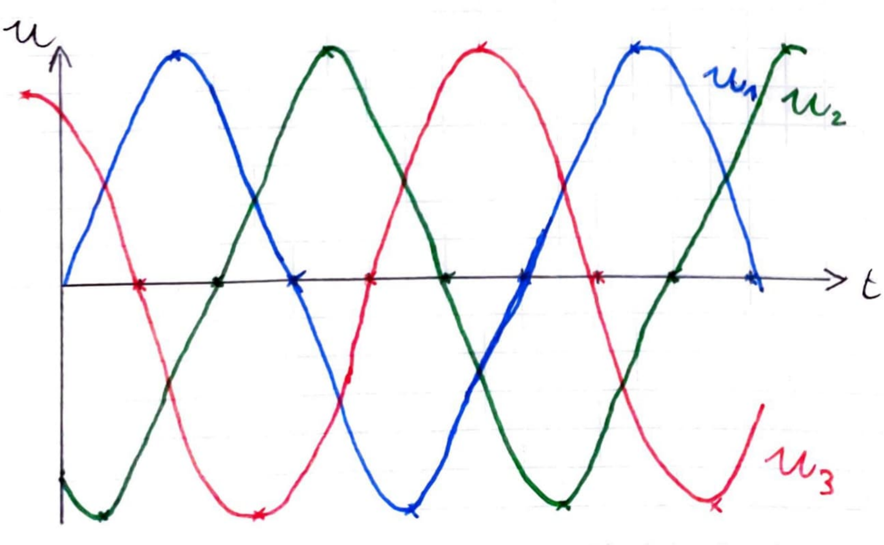
$$\cos\varphi = \frac{\frac{U_{12}}{2}}{U_1} \longrightarrow U_1 = U_2 = U_3 = \frac{\frac{U_{12}}{2}}{\cos\varphi} = \frac{U_{12}}{2\cos\varphi}$$

$$= \frac{400}{2\cos 30°} = \frac{400}{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230\,V$$



$$\hat{U}_1 = U_1\sqrt{2} \longrightarrow$$





u_2 ist 120° nacheilend zu u_1

u_3 ist 120° nacheilend zu u_2

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

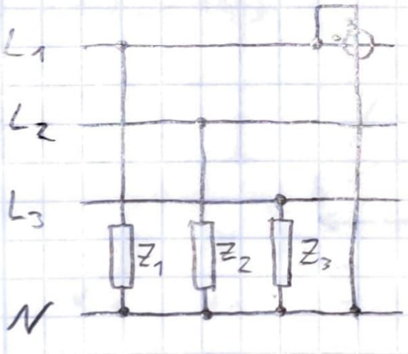
N... Neutralleiter

$U_1 = U_2 = U_3$ ... Sternspannung

$U_{12} = U_{23} = U_{31}$ ... Dreiecksspannung
verkettete Spannung
Leiterspannung

1-Wattmeter-Verfahren

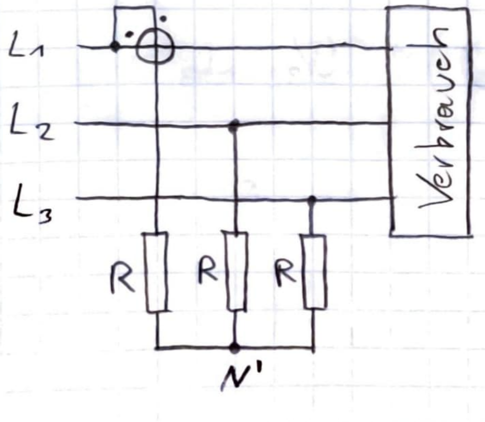
Ist die Last symmetrisch, so kann dieses Verfahren angewendet werden.



$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$

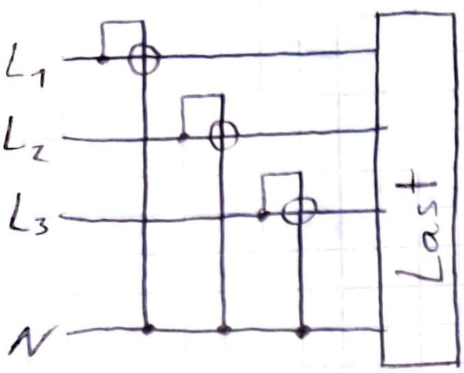
$P_{ges} = 3P$

Sind nur 3 Leiter vorhanden, so benötigt man einen künstlichen Sternpunkt N'.

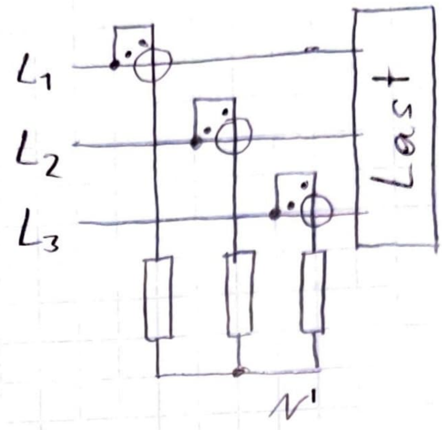


Unsymmetrische Belastung

3 Wattmeter Verfahren im 4 Leiter

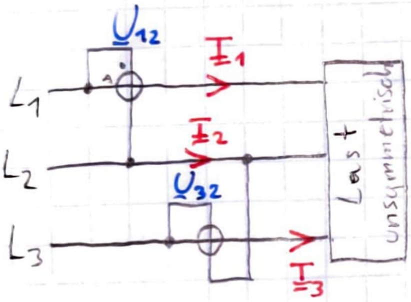


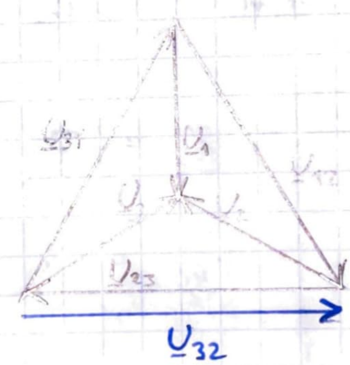
3 Wattmeter Verfahren im 3 Leiter



$$P_{ges} = P_1 + P_2 + P_3$$

Aronschaltung (Laststern)





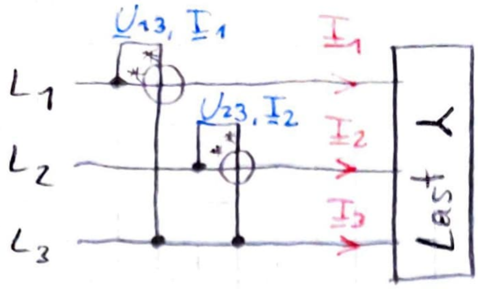
$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \cdot \underline{I}_3^*$$

$$= (\underline{U}_{12} + \underline{U}_2) \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + (\underline{U}_{32} + \underline{U}_2) \underline{I}_3^*$$

$$= \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 (\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^*$$

$$= \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^*$$

$$P = Re\{\underline{S}\} = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos a + U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos b$$



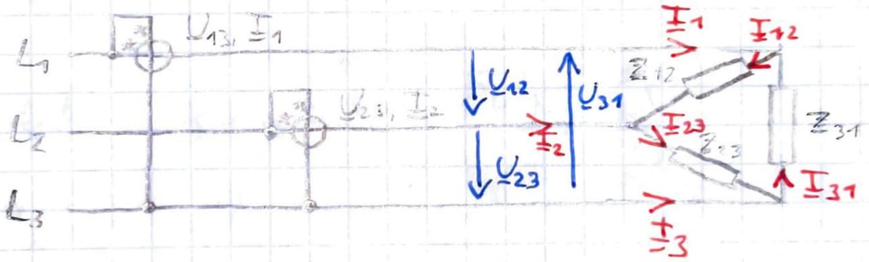
$$\underline{S} = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \cdot \underline{I}_3^*$$

$$= (\underline{U}_{13} + \underline{U}_3)\,\underline{I}_1^* + (\underline{U}_{23} + \underline{U}_3)\,\underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \cdot \underline{I}_3^*$$

$$= \underline{U}_{13} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 (\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*)$$

$$P = Re\{\underline{S}\} = U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos a + U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos b$$

Aronschaltung in Dreieckschaltung



$$K_1 \quad \underline{I}_1 - \underline{I}_{12} + \underline{I}_{31} = 0 \qquad \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$$

$$\underline{I}_2 - \underline{I}_{23} + \underline{I}_{12} = 0$$

$$\underline{I}_3 + \underline{I}_{23} - \underline{I}_{31} = 0$$

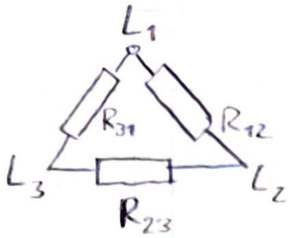
$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} \cdot \underline{I}_{31}^*$$

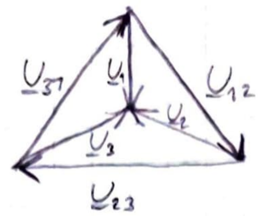
$$\vdots$$

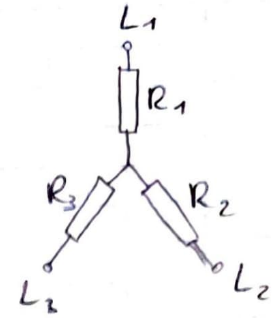
$$= \underline{U}_{13} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2^*$$

$$P = Re\{\underline{S}\}$$

Vergleich P_Δ zu P_λ







$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_1 = R_2 = R_3 = R$$

Leistung pro Strang

$$P_{s,\Delta} = \frac{U_{12}^2}{R} \qquad P_{s,\lambda} = \frac{U_1^2}{R}$$

Gesamtleistung

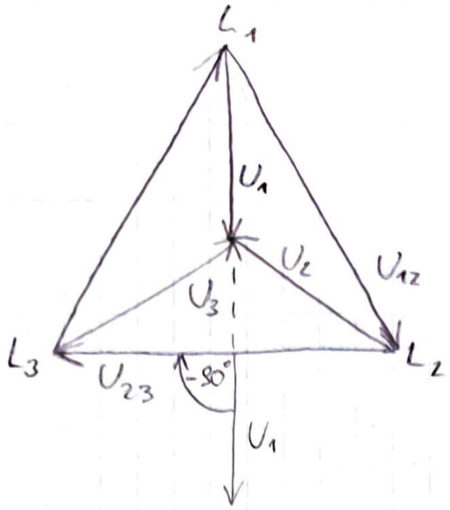
$$P_{g,\Delta} = 3\, P_{s,\Delta} \qquad P_{g,\lambda} = 3\, P_{s,\lambda}$$

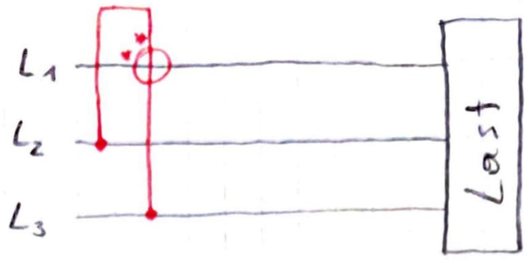
$$\frac{P_\Delta}{P_\lambda} = \frac{\frac{\cancel{3}\, U_{12}^2}{R}}{\cancel{3}\, \frac{U_1^2}{\cancel{R}}} = \frac{U_{12}^2}{U_1^2} = \frac{(\sqrt{3}\, U_1)^2}{U_1^2} = 3 \rightarrow P_{g,\Delta} = 3 \cdot P_{g,\lambda}$$

Blindleistungsmessung

Symmetrische Belastung

Zur Blindleistungsmessung muss prinzipiell im Spannungspfad eine Phasenversch. von $-90°$ erzeugt werden. Im Drehstromnetz kann glücklicherweise eine andere Leiterspannung gefunden werden, die die notwendige Phasenverschiebung hat, sodass keine zusätzliche Phasenschieberschaltung notwendig ist.





Das Wattmeter zeigt folgende Blindleistung an:

$$U_{23} = \sqrt{3}\, U_1$$

$$Q_a = U_{23} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi - 90°) = U_{23} \cdot I_1 \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$= \sqrt{3}\, U_1 \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 = \sqrt{3}\, Q_1 \qquad Q_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1$$

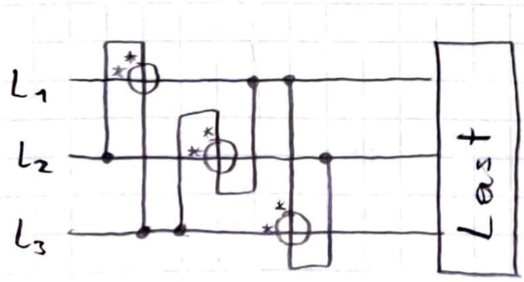
$$Q_1 = \frac{Q_a}{3}$$

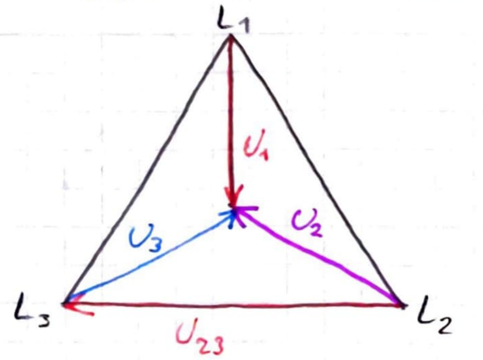
z.B. Zeiger bei 90 W -> $Q_1 = 51{,}96$ var

$$Q_g = 3\,Q_1 = 3\,\frac{Q_a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,\cancel{\sqrt{3}}\,\frac{Q_a}{\cancel{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}\,Q_a$$

Unsymmetrische Belastung

Ist die Belastung nicht symmetrisch, so müssen 3 Wattmeter verwendet werden.





Frequenzmessung

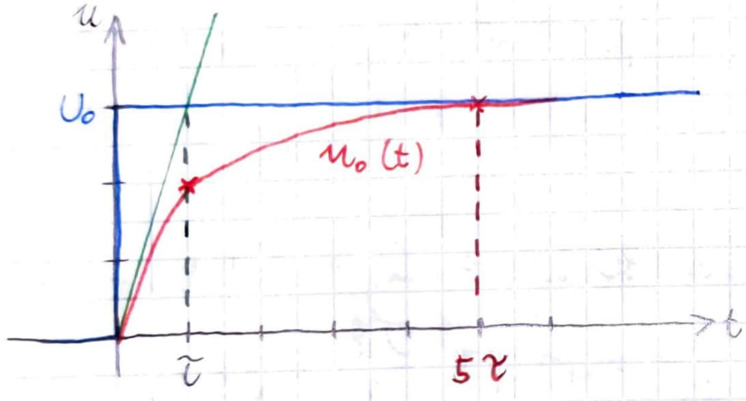
Frequenzspannungsumsetzung

Die Information des gemessenen Signals steckt in der Dauer t_x eines Signals mit der Periodendauer T.

Mittelung an einen RC-Tiefpass

Wdhlg Laden eines C $\quad u_e(t) = \sigma(t)$

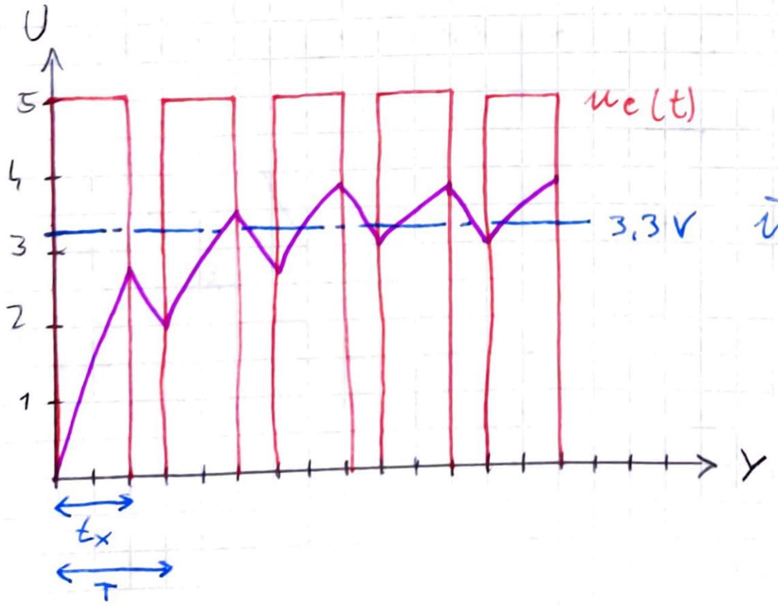
$\tau = RC \qquad \sigma$ ... Einheitssprung $\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$



$$u_c(t) = U_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$t=\tau: \; u_c(t) = U_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U_0\left(1-e^{-1}\right) \approx 0{,}63\,U_0$$

$$t = 5\tau: \; u_c(t) = U_0$$



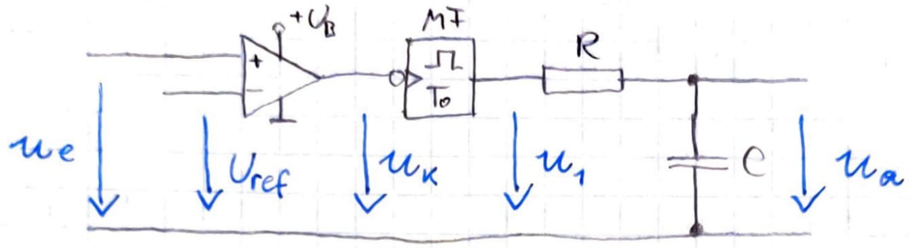
$$\bar{u}_a = U_0 \cdot \frac{t_x}{T}$$

$\bar{u}_a$ kann als Maß für d. gesuchte Gr-öße t_x verwendet werden.

Die Welligkeit ist umso größer, je kleiner die Zeitkonstante $T = RC$ ist.

Analoge Messung e. Frequenz / Impulsrate

f/U Umformer

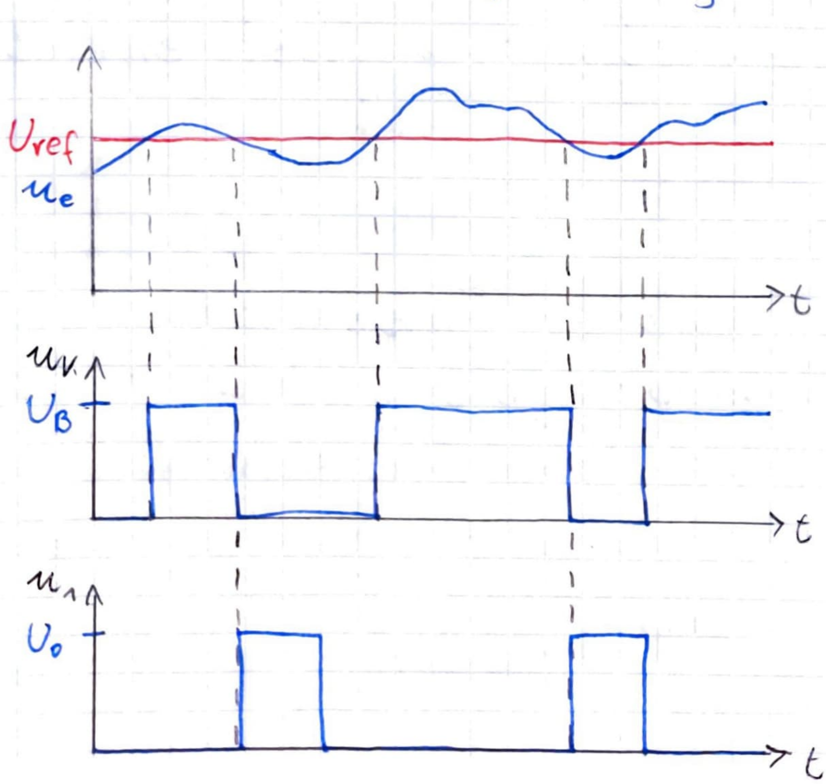


Komperator ... vergleicht die Eingänge u_e und U_{ref}

$$u_e > U_{ref} \rightarrow u_K = U_B$$
$$u_e < U_{ref} \rightarrow u_K = 0$$

MF (Monoflop) ... Monostabile Kippstufe (hat nur einen stabilen Ausgangszustand) und liefert Impulse gleicher Höhe u. Breite.

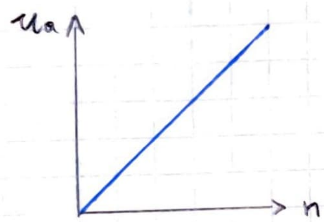
Nicht nachtriggerbar.



Ist
- n, die Anzahl d. Impulse / sek (Frequenz)
- U_0, die Höhe
- T_0, die Dauer

dann ist die gemittelte Spannung
$\bar{u}_1 = n \cdot U_0 \cdot T_0 = \bar{u}_a$

→ Die Ausgangsspannung $\bar{u}_a$ eines derartigen Zählratenmessers steigt proportional zur Impulsrate n



Die Welligkeit der Ausgangsspannung ist umso stärker, je kleiner die Zeitkonstante des RC-Tiefpasses ist. τ kann aber nicht beliebig vergrößert werden, da ansonsten bei einer Zählratenänderung der neue Mittelwert zu spät erreicht wird.

Anwendung:
- Drehzahlmessung / Tachometer
- Drehzahlmotorregelung bzw. -überwachung (Anhand des Spannungsverlaufs kann der Verschleiß bei z.B. Schiffsdieseln erkannt werden)

siehe S. 280

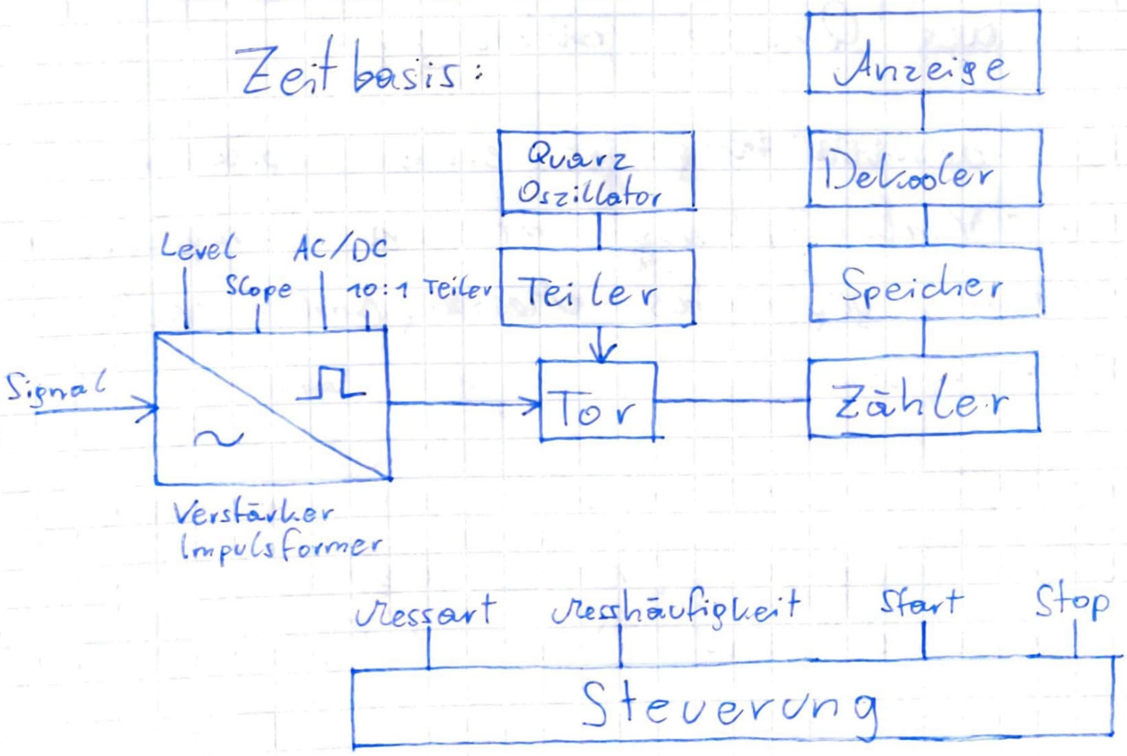
Universalzähler

S. 252 GET 2

Zeit- und Frequenzmessung sind einander sehr ähnlich. Eine Impulsfolge mit der Frequenz f läuft jeweils während eines Zeitintervalls T in einen Zähler und führt dort zu einem Zählerstand
$z = f \cdot T$.

- Bei der Zeitmessung ist die Frequenz bekannt und der Zählerstand somit ein Maß für die Zeit T.
- Bei der Frequenzmessung ist die Messzeit bekannt und der Zählerstand somit ein Maß für die Frequenz f.

Blockschaltbild e. Universalzählers



Mit dem Universalzähler kann:

- Frequenzmessung
- Periodendauer, Zeitintervall und Impuls-breitenmessung

durchgeführt werden.

Zeitbasis: Besteht aus einem Quarz-rechteckgenerator mit dek. Teiler. Der Quarz stellt Impulse mit genauer Länge und Frequenz zur Verfügung. Der Teiler ermöglicht unterschiedliche Zeiteinteilungen. Die Frequenzstabilität ist von der Temperatur und der Alterung des Quarzes abhängig.

Tor: Die Torschaltung ist eine logische Und-Verknüpfung mit den Eingängen Zeitbasis, geformtes Messsignal und Steuersignal.

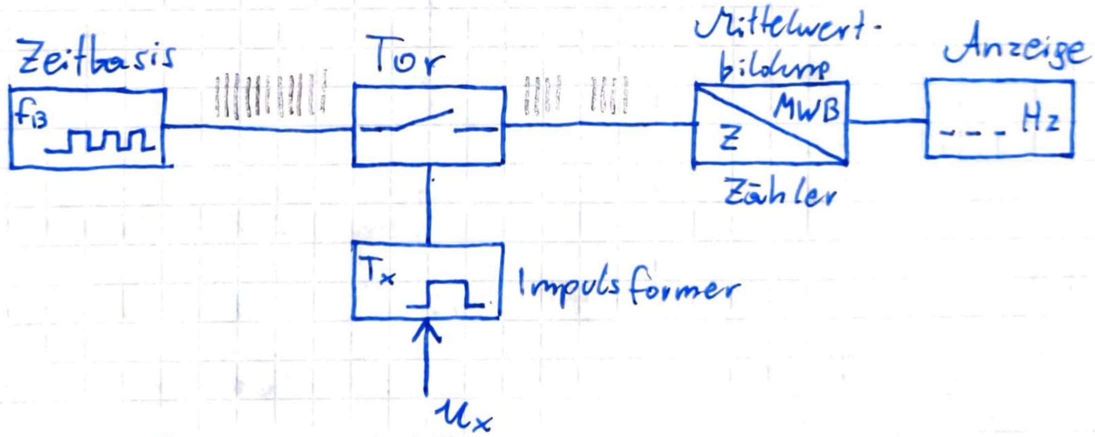
Verstärker/Impulsformer: Dient zur Erzeugung eines Rechtecksignals. Level (Trigger-schwelle) und Slope (Flanke, auf-steigend oder abfallend) können eingestellt werden. AC/DC Umschaltung wie beim Oszilloskop.

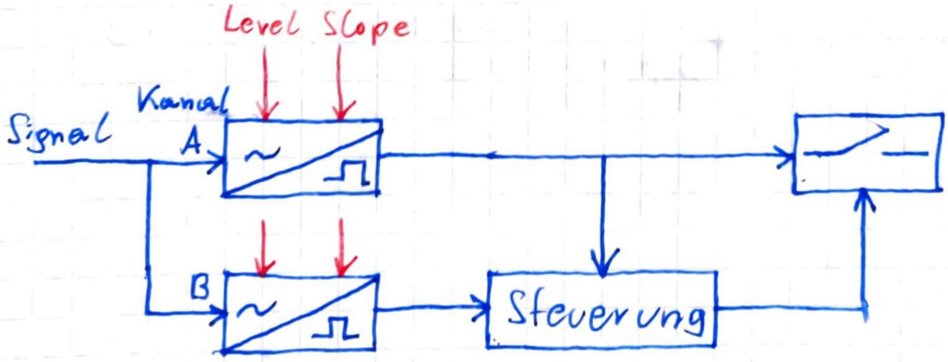
Zähler: Hexadezimalzähler

Zeitintervallmessung

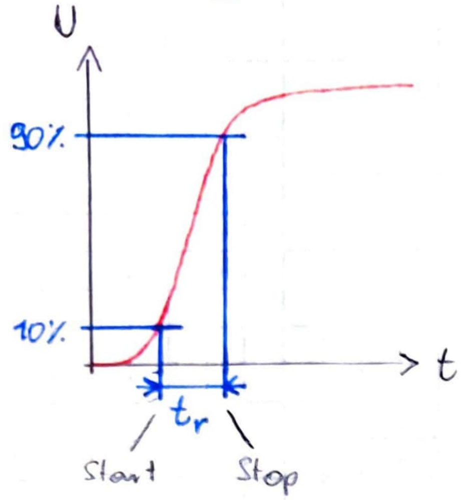
Das Eingangs-/Messsignal bildet die Toröffnungszeit und die Zeitbasisimpulse werden gezählt.
Die Impulse der internen Zeitbasis (z. B. Quarzoszillator) haben eine bekannte und konstante Frequenz f_B.
Es gelangen somit während der Zeit T_x z Impulse zum Zählwert.

$$z = f_B \cdot T_x$$





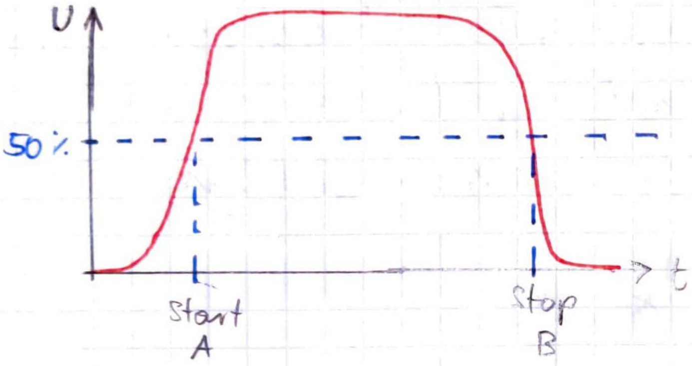
- Anstiegszeit t_r rise time



Beide Kanäle auf gleiche Flanke aber unterschiedliche Triggerlevel

Kanal A ... Start bei 10%
Kanal B ... Stop bei 90%

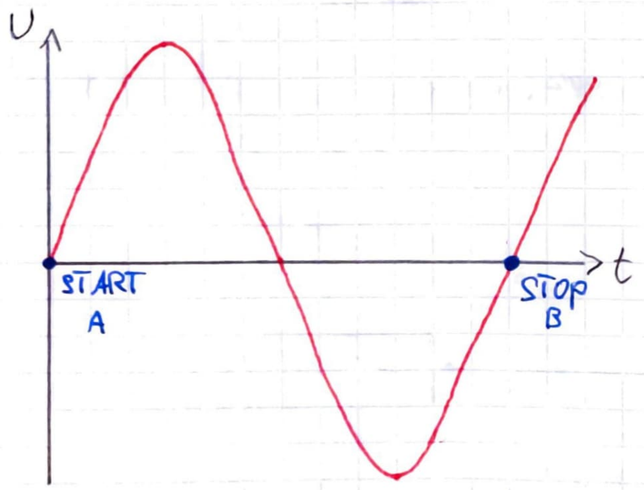
- Pulsdauermessung



Beide Eingänge auf gleichem Triggerpegel 50% aber unterschiedliche Flanke

A ... pos. Flanke
B ... neg. Flanke

- Periodendauer



Nur ein Eingang nötig, da Triggerpegel und Flanke gleich sind. (0V, steig. Flanke)

Bsp.: T_x soll bestimmt werden.
Bei der Messung werden 4400 Impulse gezählt und Frequenz der Zeitbasis beträgt 50,000 kHz.

$$z = f_B \cdot T_x$$

$$T_x = \frac{z}{f_B} = \frac{4400}{50{,}000} = 88 \text{ ms}$$

$$f_x = \frac{1}{T_x} = 11{,}3636 \text{ Hz}$$

Bsp.: Mit d. Messschaltung der Periodendauermessung werden 7999 Impulse gezählt. Die Frequenz der Zeitbasis beträgt 5 MHz.

a) Wie groß ist T_x & f_x d. Messgröße

b) Wie groß ist d. rel. Messabweichung, wenn ein Impuls gerade nicht mitgemessen worden wäre?

a) $$T_x = \frac{z}{f_B} = \frac{7999}{5 \cdot 10^6} = 1{,}6 \text{ ms}$$

$$f_x = \frac{1}{T_x} = 625{,}078 \text{ Hz}$$

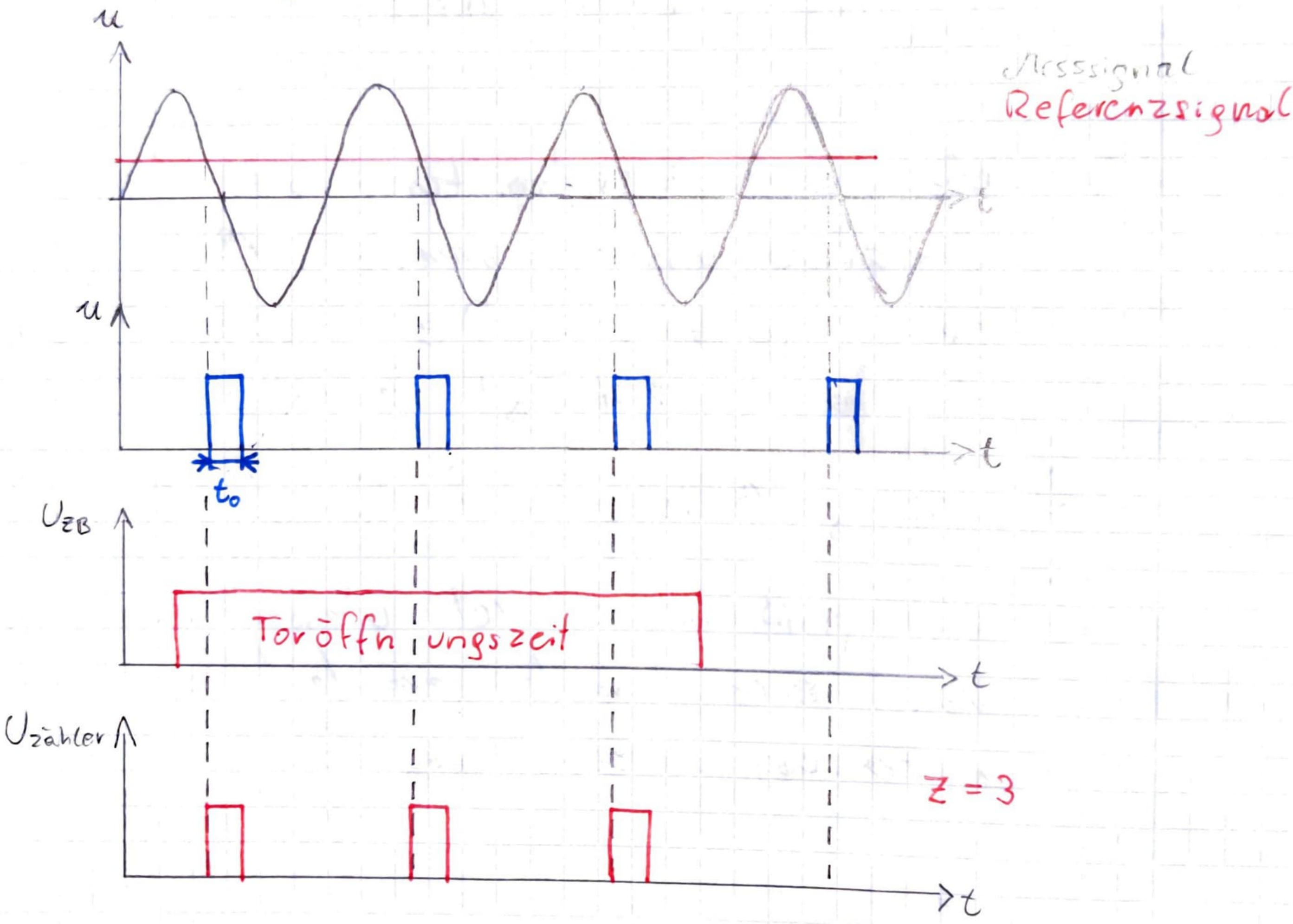
b) $$\frac{7999}{8000} = 0{,}0125 \text{ \%}$$

Die Messzeit sollte größer als 1000-mal der Periodendauer des Messsignals sein.

↳ Herantasten an T_b, $z_{min} = 2$

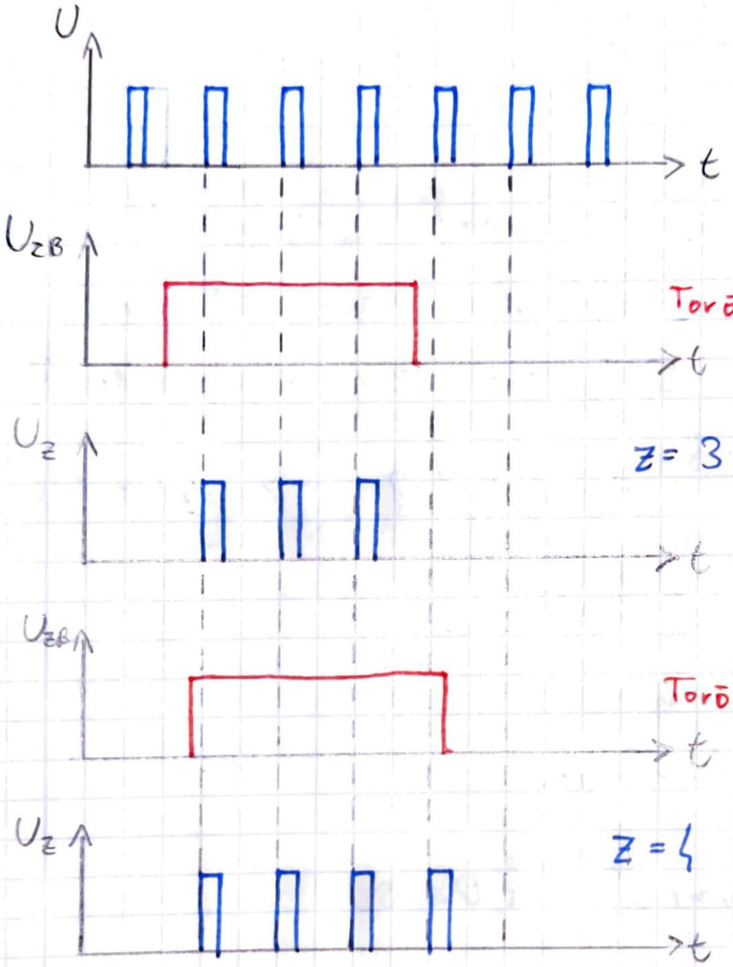
Frequenzmessung

Das Zeitbasissignal bildet die Toröffnungszeit. Die Impulse des geformten Messsignals werden gezählt.



Messunsicherheit bei f-Messung

Da die Toröffnungszeit und die Mess-frequenz nicht synchron sind, kann die letzte Stelle der Anzeige um ± 1 digit schwanken.



Bsp.: Mit der Messschaltung für Frequenzmessung werden 2448 Impulse gezählt. Die Messzeit betrug 10 sek. Wie groß ist f_x?

$$z = f_x \cdot T_B$$

$$f_x = \frac{z}{T_B} = \frac{2448}{10} = 244{,}8 \text{ Hz}$$

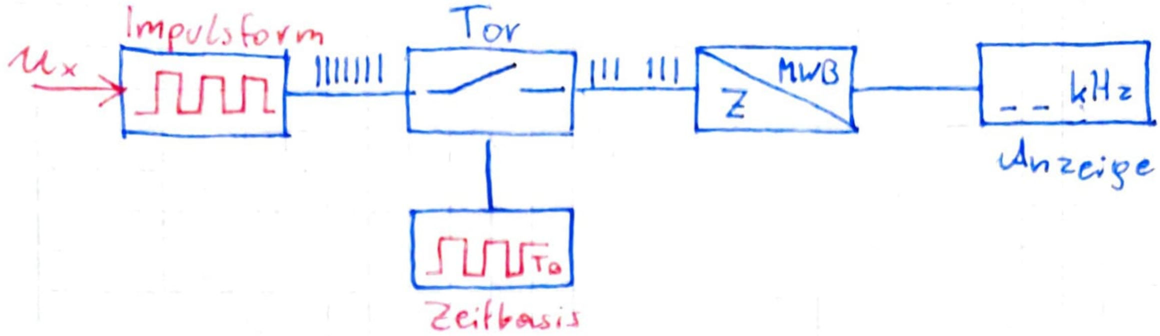
Welcher Frequenzwert wäre bei dem gleichen Signal und einer Messzeit von 0,1 sek zu erwarten?

$$z' = \frac{0{,}1 \cdot 2448}{10} = 24{,}48 \rightarrow z' = 24$$

$$f_x' = \frac{z'}{T'} = \frac{24}{0{,}1} = 240 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{f_x} = \frac{1}{244{,}8} = 4{,}08 \text{ ms}$$

↳ Messzeit mind. 4,08 s



Welche Messzeit soll für die folgenden Messsignale gewählt werden?

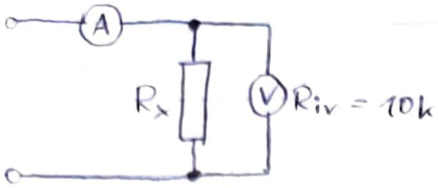
a) Messsignal von 5 kHz

b) Messsignal mit Periodendauer von ~ 20 ms

a) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5000} = 0{,}2\ ms \rightarrow T_{mess} \geq 1000T = 0{,}2s$

b) $T = 20\ ms \rightarrow T_{mess} \geq 1000T = 20s$

Fehler / Fehlerfortpflanzung



$I = 1A \pm 0{,}01\ A \qquad f_i = \pm 1\%$

$U = 10V \pm 0{,}1\ V \qquad f_u = \pm 1\%$

$$R_x = \frac{U}{I} = \frac{10V}{1A} = 10\ \Omega$$

system. Fehler korrigieren:

$$R_{x,korr} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_{iv}}} = \frac{10}{1 - \frac{10}{10k}} = 10{,}01\ \Omega$$

$f_r = \pm 2\%$

Bsp.: Gegeben ist folgende Messreihe:

7,084	7,213
6,837	6,504
6,658	7,342
7,241	7,496
6,759	6,806
6,787	7,063
6,509	6,636
7,364	7,491
6,562	7,438
7,452	6,548

Ω-Werte

ges.: $\bar{x}$, s, v für $p = 95\%$

$n = 20$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20} (7{,}084 + 6{,}837 + \ldots + 6{,}548)$$

$\bar{x} = 7\ \Omega$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{19} ([7{,}084 - 7)^2 + \ldots + \ldots)}$$

$s = 0{,}36259$

TR: Menü, 6, 1 $\rightarrow$ Werte eingeben
nach letztem $\rightarrow$ AC

OPTN, 2

t aus Tabelle:

$$v = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s = \frac{2{,}15}{\sqrt{20}} \cdot 0{,}36259 = 0{,}1743\ \Omega$$

Der wahre Wert liegt mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit im Bereich $7 \pm 0{,}1743$

Bsp.: Größe eines Widerstandes R soll mit der Kennzeichnung 150 Ω mit einem Ohmmeter der Kl. 1 im Messbereich 200 Ω direkt gemessen werden

150,14	149,99
150,04	150,04
149,97	150,02
150,06	149,94
149,93	150,19
149,99	149,93
150,13	150,09
150,09	149,83
149,89	150,03
150,01	150,07

$$\overline{R_x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_{x_i} = \frac{1}{20} (150,14 + \ldots + 150,07)$$

$$\overline{R_x} = 150,019\ \Omega$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (R_{x_i} - \overline{R_x})^2} = \sqrt{\frac{1}{19}\left[(150,14 - 150,019)^2 + \ldots\right.}$$

$$s = 0,0889\ \Omega$$

für $P = 95\% \rightarrow t = 2,15$

$$v = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s = \frac{2,15}{\sqrt{20}} \cdot 0,0889 = 0,0428\ \Omega$$

Der wahre Wert liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit im Bereich von $(150,019 \pm 0,0428)\ \Omega$

Einbeziehung des Klassenfehlers (Messunsicherheit d. Messgerätes)

- 1% von 200 Ω = 2 Ω
  $\rightarrow R_w = (150,019 \pm 2,0428)\ \Omega$

- 1 % von 150,019 = 1,50019

$\rightarrow R_w = (150{,}019 \pm 1{,}54299)\,\Omega$

oder 1,5 % von 150 Ω

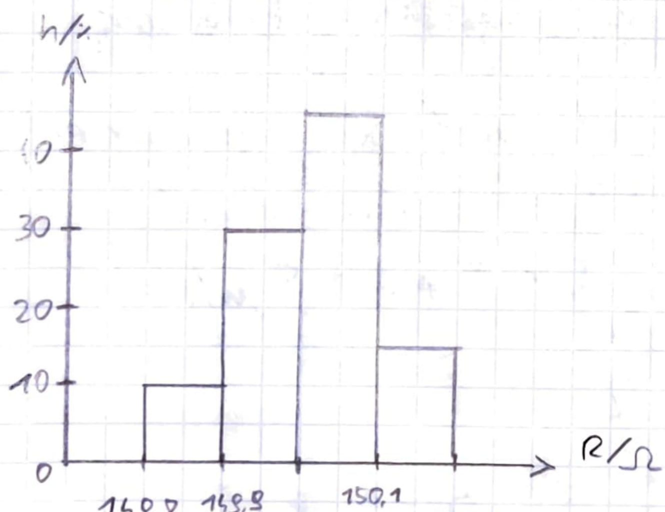
Überprüfen der Einzelmesswerte auf Normalverteilung.

Kl. breite = 0,1 S.

abs. Häufigkeit ... H

rel. Häufigkeit ... h

Klasse	H	h	Summenhäufigkeit S nach Klasse
149,8 - 149,9	2	10%	$\frac{2}{20} = 10\%$
149,9 - 150,0	6	30%	$\frac{8}{20} = 40\%$
150,0 - 150,1	9	45%	$\frac{17}{20} = 85\%$
150,1 - 150,2	3	15%	$\frac{20}{20} = 100\%$



$y_1 = \text{Fkt}(x) = x^2$

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx} = 2x$$

$y_2 = \text{Fkt}(x) = \frac{1}{t}$

$$y_2' = \frac{dy_2}{dt} = -\frac{1}{t^2}$$

$y_3 = \text{Fkt}(x, t) = \frac{x^2}{t}$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x} = 2\frac{x}{t}$$ $\frac{\partial}{\partial x}$ ... partielle Ableitung

$$\frac{\partial y_3}{\partial t} = -\frac{x^2}{t^2}$$

Bsp. zu Skript 2.2 System. Fehler

Wdst. wird mit U und I bestimmt.

Gemessen wurde: $U = 10\,V + 10\,mV$

$I = 5\,mA + 5\,\mu A$

$$R = \frac{10}{5 \cdot 10^{-3}} = 2\,k\Omega$$

$$R = \frac{10 + 0{,}01}{(5 + 0.005)\,10^{-3}} = 2\,k\Omega$$

$$R = \frac{10 - 0{,}01}{(5 - 0.005)\,10^{-3}} = 2\,k\Omega \quad \rightarrow \quad \Delta R = 0$$

$$\Delta R = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)$$

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial U} \cdot \Delta U + \frac{\partial R}{\partial I} \cdot \Delta I$$

$$\Delta R = \frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial U} \cdot \Delta U + \frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial I} \cdot \Delta I$$

$$= \frac{1}{I} \cdot \Delta U + \left(- \frac{U}{I^2}\right) \Delta I$$

$$= \frac{1}{5 \cdot \cancel{10^{-3}}} \cdot 10 \cdot \cancel{10^{-3}} - \frac{10}{(5 \cdot 10^{-3})^2} \cdot 5 \cdot 10^{-6}$$

$$= \frac{10}{5} - \frac{10}{5^2 \cdot \cancel{10^{-6}}} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{10^{-6}} = \frac{10}{5} - \frac{10}{5} = 0$$

Bsp. zu zufälligen Fehler

Strom und Spannung werden am Wdst. gemessen:

$U = 10\,V \pm 10\,mV$

$I = 5\,mA \pm 5\,\mu A$

$$\Delta R = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right|$$

$$= \left| \frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial U} \cdot \Delta U \right| + \left| \frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial I} \cdot \Delta I \right|$$

$$= \left| \frac{1}{I} \cdot \Delta U \right| + \left| - \frac{U}{I^2} \cdot \Delta I \right|$$

$$= \frac{1}{I} \Delta U + \frac{U}{I^2} \Delta I$$

$$= \frac{1}{5 \cdot \cancel{10^{-3}}} \cdot 10 \cdot \cancel{10^{-3}} + \frac{10}{(5 \cdot 10^{-3})^2} \cdot 5 \cdot 10^{-6}$$

$$= \frac{10}{5} + \frac{10}{5^{\cancel{2}} \cdot \cancel{10^{-6}}} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{10^{-6}} = \frac{10}{5} + \frac{10}{5} = 4\,\Omega$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10}{5 \cdot 10^{-3}} = 2\,k\Omega$$

$$R = (2000 \pm 4)\,\Omega$$

- $P = U \cdot I$

$$\Delta P = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right|$$

$$= \left| \frac{\partial U \cdot I}{\partial U} \cdot \Delta U \right| + \left| \frac{\partial U \cdot I}{\partial I} \cdot \Delta I \right|$$

$$= I \cdot \Delta U + U \cdot \Delta I$$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 5 \cdot 10^{-6}$$

$$= 50 \cdot 10^{-6} + 50 \cdot 10^{-6} = 100 \cdot 10^{-6}\,W$$

$$P = U \cdot I = 10\,V \cdot 5\,mA = 50\,mW$$

$$P = (50\,m \pm 100\,\mu)\,W$$

rel. Fehler $\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = \pm\left(\frac{0{,}01}{10} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5}\right)$

$\frac{\Delta P}{P} = \pm 2 \cdot 10^{-3} \mathrel{\hat{=}} \pm 0{,}2\,\%$

abs. Fehler $\Delta P = \pm P \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \pm 50 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}$

$\Delta P = \pm 100 \cdot 10^{-6} = \pm 0{,}1\,W$

Die Messung ergab folgende Werte:

$$U_{eff} = 17{,}5\ V \pm 0{,}65\ V$$

$$I_{eff} = 23\ mA \pm 950\ \mu A$$

$$f = 2387\ Hz \pm 45\ Hz$$

ges.: abs., rel. Fehler d. Induktt. L

$$U_{eff} = I_{eff} \cdot \omega L = I_{eff} \cdot 2\pi f \cdot L$$

$$\hookrightarrow\ L = \frac{U_{eff}}{2\pi f \cdot I_{eff}}$$

$$L = \frac{17{,}5}{2\pi \cdot 2387 \cdot 23 \cdot 10^{-3}} = 50{,}73\ mH$$

$$\Delta L = \left|\frac{\partial L}{\partial U_{eff}} \cdot \Delta U_{eff}\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial I_{eff}} \cdot \Delta I_{eff}\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial f} \cdot \Delta f\right|$$

$$= \left|\frac{\partial \frac{U}{2\pi f I}}{U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial \frac{U}{2\pi f \cdot I}}{I} \cdot \Delta I\right| + \left|\frac{\partial \frac{U}{2\pi f \cdot I}}{f} \Delta f\right|$$

$$= \left|\frac{\partial \frac{U}{2\pi f I}}{U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial \frac{U \cdot I^{-1}}{2\pi f}}{I} \cdot \Delta I\right| + \left|\frac{\partial \frac{U \cdot f^{-1}}{2\pi I}}{f} \cdot \Delta f\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi I f} \cdot \Delta U\right| + \left|-\frac{U \cdot I^{-2}}{2\pi f} \cdot \Delta I\right| + \left|-\frac{U \cdot f^{-2}}{2\pi I} \cdot \Delta f\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi f I} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{-U}{2\pi f I^2} \cdot \Delta I\right| + \left|\frac{-U}{2\pi f^2 I} \cdot \Delta f\right|$$

Version 1: einsetzen

$$\Delta L = \frac{1}{2\pi \cdot 2387 \cdot 23 \cdot 10^{-3}} \cdot 0{,}65 + \frac{17{,}5}{2\pi \cdot 2387 \cdot (23 \cdot 10^{-3})^2} \cdot 950 \cdot 10^{-6}$$

$$+ \frac{17{,}5}{2\pi \cdot 2387^2 \cdot 23 \cdot 10^{-3}} \cdot 45 = \pm 4{,}94\ mH$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \pm \frac{4{,}94}{50{,}73} = \pm 0{,}097 \mathrel{\hat{=}} \pm 9{,}7\ \%$$

Version 2:

$$\Delta L = \frac{1}{2\pi f \cdot I} \cdot \Delta U + \frac{U}{2\pi f I^2} \cdot \Delta I + \frac{U}{2\pi f^2 I} \cdot \Delta f$$

$$= \frac{U}{2\pi f I} \cdot \frac{\Delta U}{U} + \frac{U}{2\pi f I} \cdot \frac{\Delta I}{I} + \frac{U}{2\pi f I} \cdot \frac{\Delta f}{f}$$

$$= L \cdot \frac{\Delta U}{U} + L \cdot \frac{\Delta I}{I} + L \cdot \frac{\Delta f}{f}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta f}{f} = \frac{0{,}65}{17{,}5} + \frac{0{,}85}{23} + \frac{45}{2387}$$

$$= \pm 0{,}087 = \pm 9{,}7\,\%$$

$$\rightarrow \Delta L = \pm L \cdot 0{,}087 = \pm 50{,}73 \cdot 0{,}097 = \pm 4{,}94\,mH$$

Gemessen wurden:

$I = 15\,A \pm 200\,mA$

$r = 1{,}5\,mm \pm 80\,\mu A$

ges.: rel., abs. Stromdichte

$$J = \frac{I}{A} \qquad \frac{[A]}{[mm^2]}$$

$$J = \frac{I}{r^2 \pi} = \frac{15}{1{,}5^2 \pi} = 2{,}122\,\frac{A}{mm^2}$$

$$\Delta J = \left| \frac{\partial J}{\partial I} \cdot \Delta I \right| + \left| \frac{\partial J}{\partial r} \cdot \Delta r \right|$$

$$= \left| \frac{\partial \frac{I}{r^2 \pi}}{\partial I} \cdot \Delta I \right| + \left| \frac{\partial \frac{I}{r^2 \pi}}{\partial r} \cdot \Delta r \right|$$

$$= \left| \frac{\partial 1}{\partial r^2 \pi} \cdot \Delta I \right| + \left| \frac{\partial I}{\partial r^3 \pi} \cdot \Delta r \right|$$

Die Messung ergab:

$r = 8\,cm \pm 2{,}3\,mm$

$d = 0{,}2\,mm \pm 7\,\mu m$

$\varepsilon_r = 81 \pm 3{,}24$

ges.: rel. u. abs. Fehler der Kap. C

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \pi}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot D^2 \pi}{4d}$$

$r = \frac{D}{2}$

$r^2 = \frac{D^2}{4}$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

$$\Delta C = \left| \frac{\partial C}{\partial \varepsilon_r} \cdot \Delta \varepsilon_r \right| + \left| \frac{\partial C}{\partial r} \cdot \Delta r \right| + \left| \frac{\partial C}{\partial d} \cdot \Delta d \right|$$

$$= \left| \frac{\partial\, \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d^{-1}}{\partial\, \varepsilon_r} \cdot \Delta \varepsilon_r \right|$$

$$+ \left| \frac{\partial\, \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d^{-1}}{\partial\, r} \cdot \Delta r \right|$$

$$+ \left| \frac{\partial\, \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d^{-1}}{\partial\, d} \cdot \Delta d \right|$$

$$= \left| \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d^{-1} \cdot \Delta \varepsilon_r \right|$$

$$+ \left| \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot 2r \cdot \pi \cdot d^{-1} \cdot \Delta r \right|$$

$$+ \left| \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \cdot \pi \cdot (-1)\, d^{-2} \cdot \Delta d \right|$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \cdot r^2 \pi}{d} \cdot \Delta \varepsilon_r + 2 \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r \cdot \pi}{d} \cdot \Delta r$$

$$+ \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \pi}{d^2} \cdot \Delta d$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \pi}{d} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon_r} + 2 \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \cdot \pi}{d} \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

$$+ \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \pi}{d} \cdot \frac{\Delta d}{d}$$

$$= C \cdot \frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon_r} + 2 C \cdot \frac{\Delta r}{r} + C \cdot \frac{\Delta d}{d}$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon_r} + 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta d}{d}$$

$$= \frac{3{,}24}{81} + 2 \frac{2{,}3 \cdot 10^{-1}}{8 \cdot 10^{-2}} + \frac{7 \cdot 10^{-3}}{0{,}2 \cdot 10^{-3}}$$

$$= \frac{3{,}24}{81} + 2 \frac{0{,}23}{8} + \frac{7 \cdot 10^{-3}}{0{,}2}$$

$$= 0{,}1325 \triangleq 13{,}25\ \%$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2 \pi}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 81 \, (8 \cdot 10^{-2})^2 \pi}{0{,}2 \cdot 10^{-3}}$$

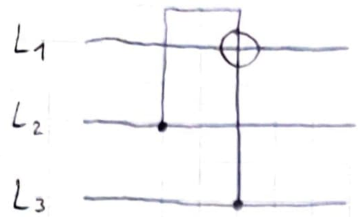
$$= \frac{8{,}85 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 10^{-16}}{0{,}2 \cdot 10^{-3}} = 7{,}2 \cdot 10^{-8} = 72 \text{ nF}$$

$$\Delta C = C \cdot 0{,}1325 = 9{,}6 \text{ nF}$$

$$C = (72 \pm 9{,}6) \text{ nF}$$

Test - Verbesserung

①



$$Q_a = U_{23} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi - 90°) = U_1 \cdot \sqrt{3} \cdot I_1 \cdot \sin(\varphi)$$

$$Q_a = \sqrt{3} \cdot Q_1$$

$$Q_g = 3 \cdot Q_1 = \sqrt{3} \cdot Q_a = \underline{\underline{173 \text{ var}}}$$

②

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[60{,}8^2 + 322{,}4^2 + \ldots + (-284{,}8)^2\right]}$$

$$U_{eff} = 229{,}79 \text{ V}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i_i^2} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[0{,}56^2 + 2{,}98^2 + \ldots + (-2{,}63)^2\right]}$$

$$I_{eff} = 2{,}12 \text{ A}$$

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} = 229{,}79 \text{ V} \cdot 2{,}12 \text{ A} = \underline{\underline{487{,}9 \text{ VA}}}$$

③

$$z = f_B \cdot T_x \rightarrow T_x = \frac{z}{f_B} = 2 \text{ ms}$$

$$f_B = 10^6 \text{ Hz} = \frac{1}{T_B}$$

$$T = 2 \cdot T_x = 4 \text{ ms}$$

Messzeit $1000 \cdot T = 4 \text{ s}$

(4)

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{5}(6{,}7 + 6{,}3 + \dots + 6{,}6) = 6{,}52 \text{ nF}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (c_i - \bar{c})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left[(6{,}7-6{,}52)^2 + (6{,}3-6{,}52)^2 + \dots + (6{,}6-6{,}52)^2\right]}$$

$$s = 0{,}148 \text{ nF}$$

$$t = 1{,}15$$

$$v = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s = 0{,}076 \text{ nF}$$

$$C = (6{,}52 \pm 0{,}076) \text{ nF}$$

(5)

$$Q = \frac{U^2}{X_L} = \frac{U^2}{2\pi f L}$$

$$\Delta Q = \left|\frac{\partial Q}{\partial U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \Delta L\right|$$

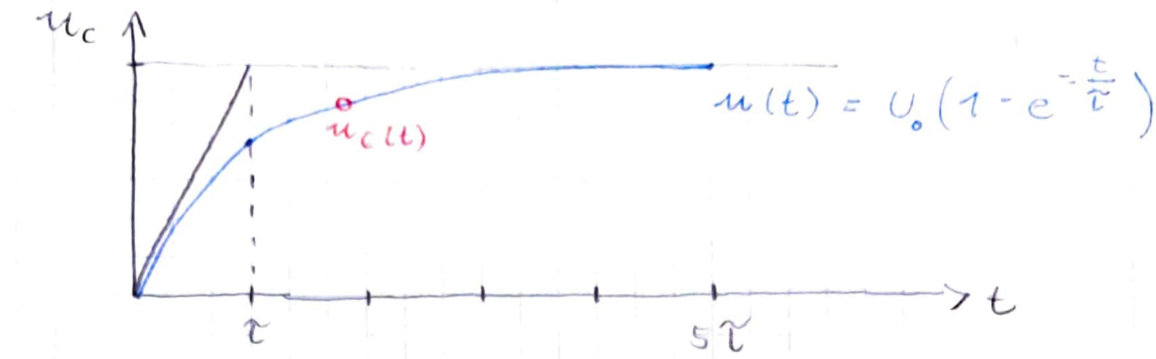
$\vdots$

$$= \left|(-1)\frac{U^2}{2\pi f L^2} \cdot \Delta L\right| + \left|2\frac{U}{2\pi f L} \cdot \Delta U\right|$$

$$= \frac{U^2}{2\pi f L} \cdot \frac{\Delta L}{L} + \frac{U^2}{2\pi f L} \cdot \frac{\Delta U}{U}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \pm\left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta U}{U} \cdot 2\right) = \pm 15\,\%$$

Ladevorgang am Kondensator



$U_0 = (25{,}5 \pm 0{,}65)\,V$
$t = (5 \pm 0{,}22)\,s$
$\tau = (3{,}3 \pm 0{,}074)\,s$

ges: rel., abs. Fehler in u_c

$$\Delta u_c(t) = \left|\frac{\partial u_c}{\partial U_0} \cdot \Delta U_0\right| + \left|\frac{\partial u_c}{\partial t} \cdot \Delta t\right| + \left|\frac{\partial u_c}{\partial \tau} \cdot \Delta \tau\right|$$

$$= \left|\frac{\partial U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{\partial U_0} \cdot \Delta U_0\right| + \left|\frac{\partial U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{\partial t} \cdot \Delta t\right|$$

$$+ \left|\frac{\partial U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{\partial \tau} \cdot \Delta \tau\right|$$

$$= \left|(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\,\Delta U_0\right| + \left|U_0\left(-\frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Delta t\right|$$

$$+ \left|U_0\left(\frac{1}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Delta \tau\right|$$

$$= (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\,\Delta U_0 + U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau}\,\Delta t + U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{t}{\tau^2} \cdot \Delta\tau$$

$$= (1 - e^{-\frac{5}{3,3}}) \cdot 0{,}65 + 25{,}5 \cdot e^{-\frac{5}{3,3}} \cdot \frac{1}{3{,}3} \cdot 0{,}22 + 25{,}5 \cdot e^{-\frac{5}{3,3}} \cdot \frac{5}{3{,}3^2} \cdot 0{,}074$$

$$= \pm 1{,}07\,V$$

$$u_c(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 25{,}5(1 - e^{-\frac{5}{3,3}}) = 19{,}89\,V$$

$$\longrightarrow u_c(t) = (19{,}89 \pm 1{,}07)\,V$$

Gemessen wurde:

$U = 5V \pm 70\,mV$

quadr. Plattenkondensator mit $a = 3\,cm \pm 1\,mm$
Plattenabstand $d = 0{,}15\,mm \pm 5\,\mu m$

$\varepsilon_r = 1, \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}$

ges.: Ladung $Q = C \cdot U$

$$Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d} \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \cdot 1 \cdot a^2}{d} \cdot U$$

$$\Delta Q = \left|\frac{\partial Q}{\partial U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial Q}{\partial d} \cdot \Delta d\right| + \left|\frac{\partial Q}{\partial a} \cdot \Delta a\right|$$

$$= \left|\frac{\partial \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{d} \cdot U}{\partial U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{d} \cdot U}{\partial d} \cdot \Delta d\right| + \left|\frac{\partial \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{d} \cdot U}{\partial a} \cdot \Delta a\right|$$

$$= \left|\frac{\partial \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{d} \cdot U}{\partial U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot d^{-1}}{1} \cdot U}{\partial d}\right| + \left|\frac{\partial \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{d} \cdot U}{\partial a} \cdot \Delta a\right|$$

Δd

$$= \left|1 \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{d} \cdot \Delta U\right| + \left|(-1) U \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot d^{-2}\right| + \left|2 \frac{\varepsilon_0 \cdot a}{d} \cdot U \cdot \Delta a\right|$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{d} \cdot \Delta U + \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot U}{d^2} \Delta d + 2 \frac{\varepsilon_0 \cdot a}{d} \cdot U \cdot \Delta a$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot U}{d} \cdot \frac{\Delta U}{U} + \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot U}{d} \cdot \frac{\Delta d}{d} + 2 \frac{\varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot U}{d} \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

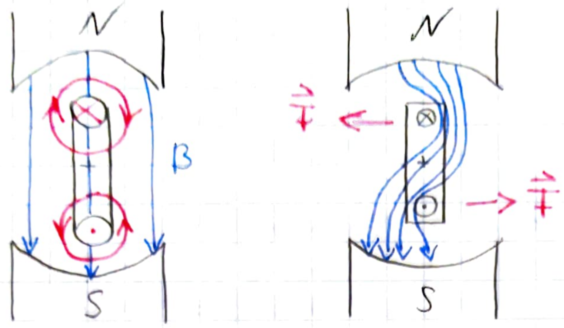
$$= Q \cdot \frac{\Delta U}{U} + Q \cdot \frac{\Delta d}{d} + 2 Q \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta d}{d} + 2 \frac{\Delta a}{a} = 2 \cdot \frac{1\,\cancel{mm}}{30\,\cancel{mm}} + \frac{5\,\cancel{\mu m}}{150\,\cancel{\mu m}} + \frac{70\,\cancel{mV}}{5000\,\cancel{mV}}$$

$$= \pm 11{,}4\,\%$$

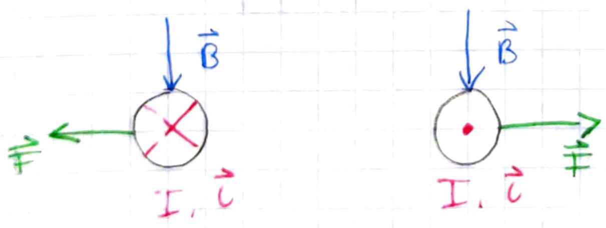
$$Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot b^2}{d} \cdot U = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,(30 \cdot 10^{-3})^2}{0{,}15 \cdot 10^{-3}} \cdot 5 = 2{,}66\,pAs$$

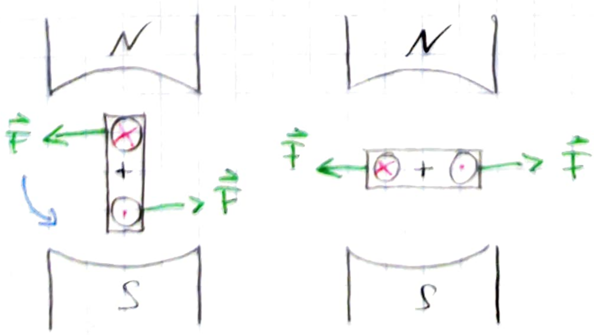
DC - Motor



oder $\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$

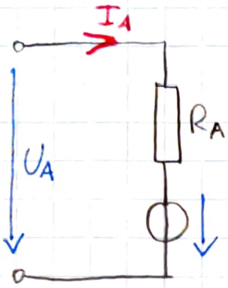
Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) wird folgender Weise angewandt:
Man dreht den ersten Vektor auf kürzestem Weg in Richtung des zweiten Vektor. Die Drehrichtung angewandt auf eine Rechtsschraube ergibt die Kraftrichtung.
l ist in Richtung des Stromes I.





keine Kraftwirkung mehr für die Drehrichtung vorhanden; muss die I-Richtung umdrehen.

ESB des Ankers



I_A ... Ankerstrom
U_A ... Ankerspannung
R_A ... Ankerwiderstand
n ... Drehzahl

$$U_q \sim \frac{d\phi}{dA} \sim B\,n \sim c \cdot n$$

c ... Maschinenkonstante

$$I_A = \frac{U_{RA}}{R_A} = \frac{U_A - U_q}{R_A} = \frac{U_A - c \cdot n}{R_A}$$

Drehmoment bei Motor

$$M = z \cdot B \cdot l \cdot I \cdot \frac{D}{2}$$

z ... jene Anzahl von Leitern die sich im Magnetfeld (unter den Polen) befinden

B ... Magnetische Flussdichte

l ... wirksame Länge

D ... Durchmesser

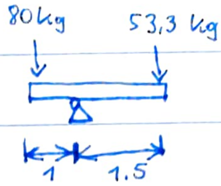
Bsp.: Mit welcher Kraft wird ein stromdurchflossener Leiter ($I = 50\,A$), wirksame Länge $l = 20\,cm$, in einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion $B = 1{,}3$ Tesla abgelenkt.

$$F = z \cdot B \cdot l \cdot I$$

$$F = 1 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 50 = 13\,N$$

$$F = m \cdot g \quad \rightarrow \quad m = \frac{F}{g} = \frac{13\,N}{9{,}81} = 1{,}33\,kg$$

$\hat{=}$ 1,3 Liter Wasser



$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

$80 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 53{,}3 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5$

$1\ Nm = 1\ Ws = 1\ J$ ($\approx 0{,}2$ cal)

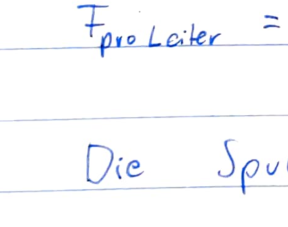
70 PS $\hat{=}$ 51 kW (Föhn: 2 kW)

Bsp.: Eine Spule mit dem Durchmesser $D = 12$ cm, der wirksamen Leiterlänge $l = 18$ cm befindet sich in einem homogenen Magnetfeld mit $B = 0{,}8$ Tesla. Mit welchem Drehmoment wird die Spule aus der Ruhelage gedreht, sobald ein Strom von 16 A hindurchfließt?

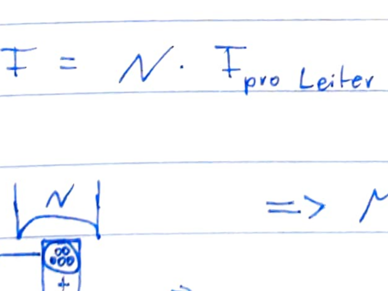
$F_{\text{pro Leiter}} = 1 \cdot B \cdot l \cdot I = 1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}18 \cdot 16 = 2{,}304\ N$

Die Spule hat 5 Windungen

$F = N \cdot F_{\text{pro Leiter}} = 5 \cdot 2{,}304 = 11{,}52\ N$



$\Rightarrow M = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 Hin- \&} \\ \text{1 Rückleiter}}}{2} \cdot F \cdot \frac{D}{2} = 2 \cdot 11{,}52 \cdot \frac{0{,}12}{2} = 1{,}382\ Nm$



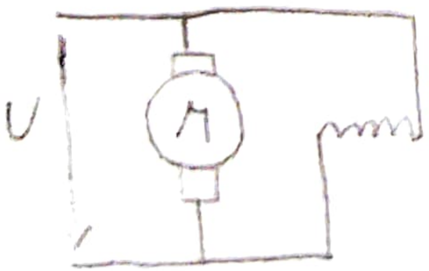
Ein Drehspulinstrument mit einer Luftspaltinduktion $B = 0{,}35$ Tesla, einen Spulendurchmesser $D = 20$ mm, einer wirksamen Spulenlänge von $l = 30$ mm und einer Windungszahl $n = 300$ wird von $0{,}2$ mA durchflossen

$$F_{/Leiter} = B \cdot l \cdot I = 0{,}35 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\ N$$

$$F = n \cdot F = 300 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6} = 630 \cdot 10^{-6}\ N$$

$$M = 2 \cdot F \cdot \frac{D}{2} = \cancel{2} \cdot 630 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-3}}{\cancel{2}} = 12{,}6 \cdot 10^{-6}\ Nm$$

Drehzahlverstellung bei der Reihenschaltung

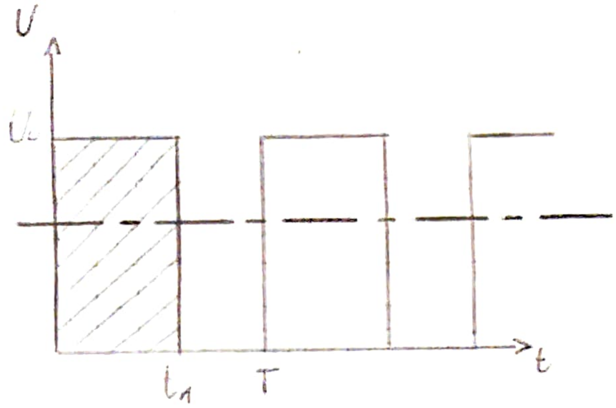


Nebenschlussmaschine

$$I_A = \frac{U_A - C_A \cdot n}{R_A}$$

$F \sim I_A \rightarrow M \sim I_A$

Erklärung PWM: Veränderung des Puls - Pausenverhältnisses



$$\bar{U} = \frac{U_0 \cdot t_1}{T}$$

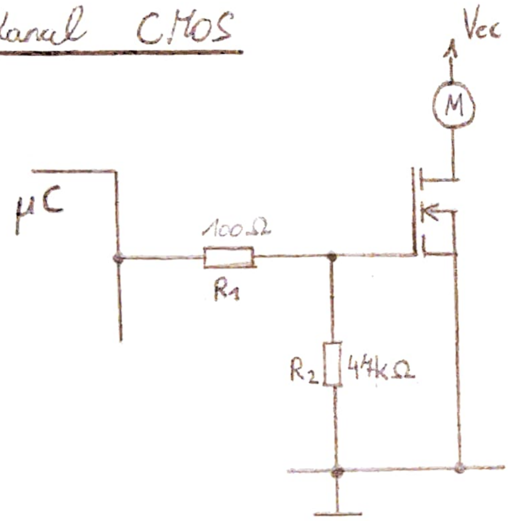
t_1 ... Pulsdauer

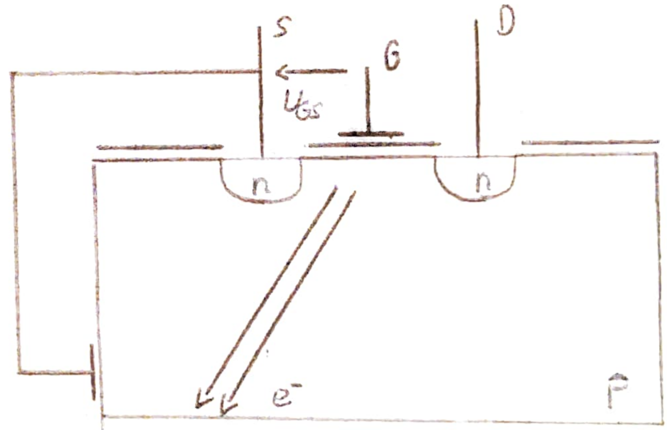
$T - t_1$ ... Pausendauer

T ... Periodendauer

- $t_1 = T \rightarrow \bar{U} = U_0$
- $t_1 = \frac{T}{2}$ (Puls zu Pause = 1) $\rightarrow \bar{U} = \frac{U_0}{2}$
- $t_1 = 0 \rightarrow \bar{U} = 0V$

<u>n-Kanal CMOS</u>





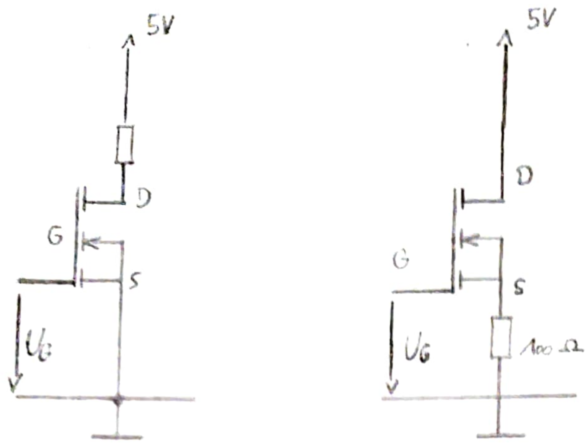
R_2 ... Pull-Down Widerstand

R_1 mit C_{GS} bildet einen Tiefpass

$U = E \cdot d \rightarrow E = \frac{U}{d}$

<u>Annahme:</u> Damit der MOSFET leitend ist, wird eine Spannung $U_{GS} = 5V$ benötigt

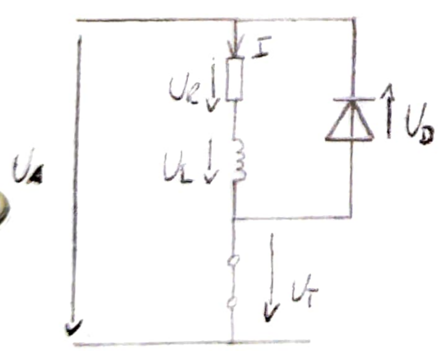
Im leitenden Zustand ist U_{DS} gleich 0V



damit $U_{GS} = 5V$ muss

$U_B = 5V$ $\qquad$ $U_B = 10V$

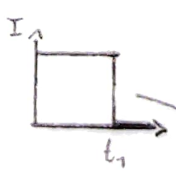
Freilaufdiode



Einschalten: $U_T = 0V$

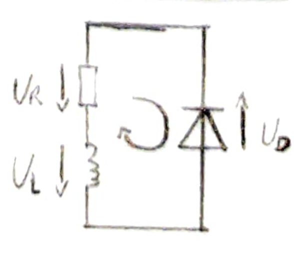
nach 5τ $\quad U_L = 0V \rightarrow U_R = U_A \quad I_{max} = \frac{U_R}{R} = \frac{U_A}{R}$

Ausschalten: • zum Zeitpunkt t_1 ohne Diode



$U_L = L \cdot \frac{di}{dt} = -\infty$ $\quad$ U in andere Richtung

• mit Diode

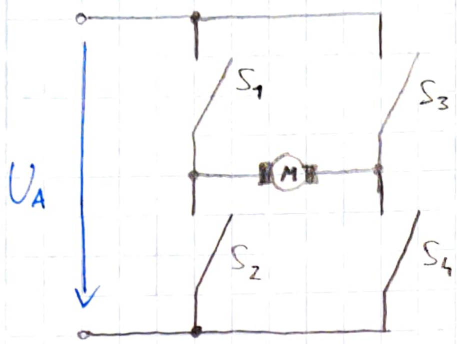


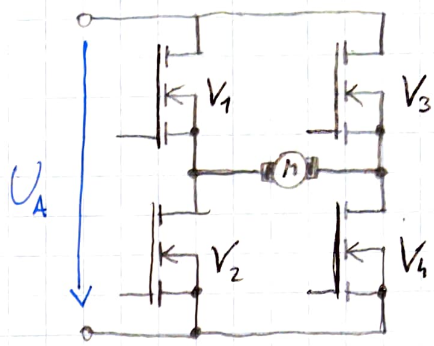
$M_1 = U_D - U_L - U_R = 0$

$\hookrightarrow U_L = -U_R - U_D$

$= -U_A - U_D$

Ansteuerung eines DC-Motors mittels H-Brücke

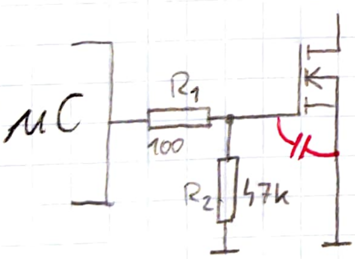




Wenn... S_1 & S_4 zu -> Rechtslauf
S_2 & S_3 zu -> Linkslauf

V_1 & V_3 sind sogenannte High-Side Trans.
V_2 & V_4 sind sogenannte Low-Side Trans.

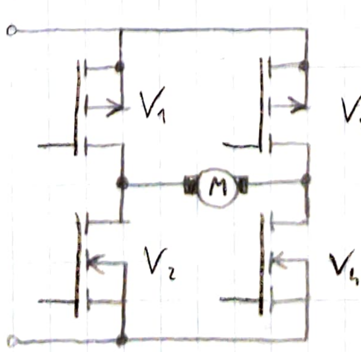
Annahme: Damit der Transistor leitet, muss $U_{GS} = 5\,V$, dies bedeutet, dass U_G um $5V$ größer sein muss als an Source. Weiters wird angenommen, dass im leitenden Zustand $U_{DS} = 0V$ (idealer Trans.) ist.



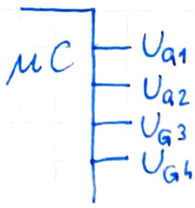
R_2 ... Pull-Down
R_1 mit C_{GS} = TP

- $U_G = 5V$, dann V_2 od. V_4 leitend
- $U_G = U_A + 5V$, damit V_1 od. V_3 leitet

Abhilfe Version 1: V_1 & V_3 als P-Channel



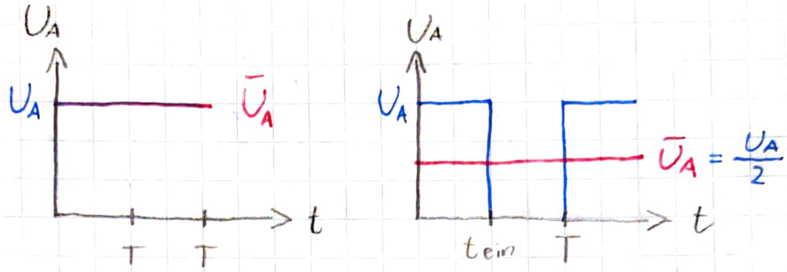
$U_G = 5\,V$ damit leitend



z.B. Rechtslauf

$V_4 - U_{G4} = 5V$

$V_1 - U_{G1} = PWM \quad \bar{U}_A$ einstellbar



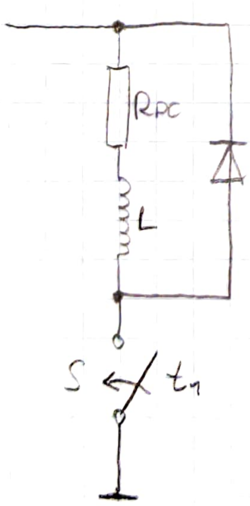
$t_{ein} = \frac{T}{2}$

Nachteil von Version 1: 2 MOSFET Typen

Version 2 Bootstrap Schaltung mit IR 2109

Für High-Side Trans. -> 4 n-Channel verwenden

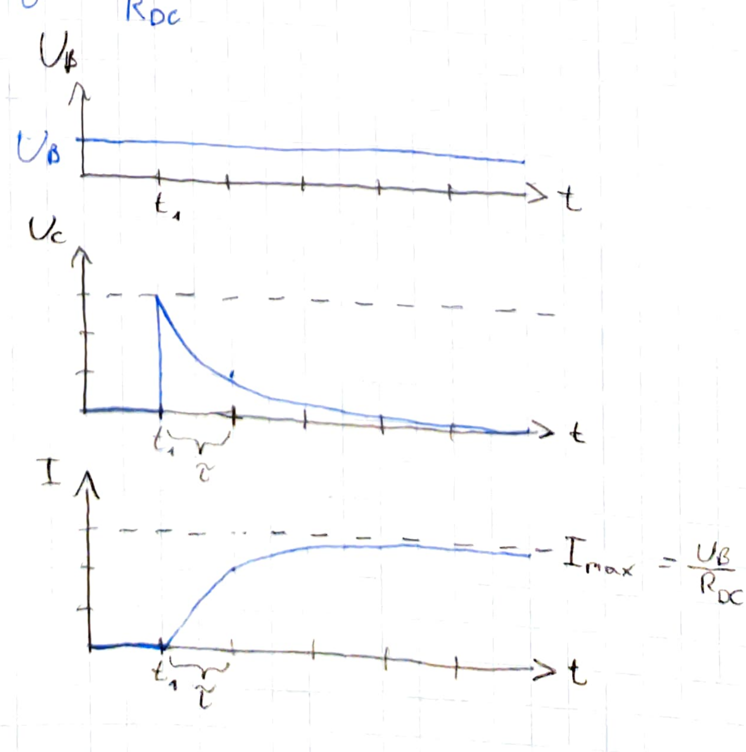
Schaltverhalten eines



zum Zeitpunkt $t = t_1$ wird der Schalter geschlossen

- Strom im 1. Moment = 0 A
- max. Strom nach $t = t_1 + 5\tau$

$\tau = \frac{L}{R_{DC}}$



$$I = \frac{U_R}{R_{DC}} = \frac{U_B - U_C}{R_{DC}}$$

$t = t_1 \rightarrow I = 0 \rightarrow U_C = U_B$

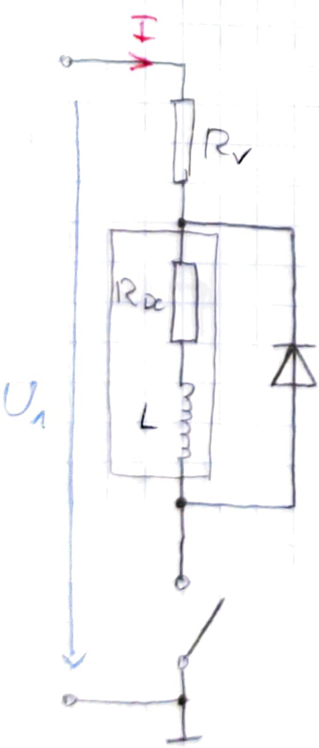
$$t = t_1 + \tau \rightarrow I = \frac{U_B - U_C}{R_{DC}}$$

$$= \frac{U_B - U_B \cdot e^{-\frac{T}{\tau}}}{R_{DC}}$$

$$= \frac{U_B(1 - 0{,}367)}{R_{DC}}$$

Es kann vorkommen, dass d. Schaltfrequenz so hoch ist, dass d. Strom seinen Maximalwert nicht erreichen kann und der Schrittmotor seine max. Kraft bzw. Leistung nicht entfalten kann. Eine mögliche Lösung ist, mit Hilfe eines Vorwiderstandes R_v die Zeitkonstante zu verkleinern, allerdings muss auch die Versorgungsspannung dementsprechend angepasst werden.

Wunsch $\tau_1 = \frac{\tau}{n}$



$$\tau_1 = \frac{L}{R_{DC}+R_v} = \frac{\tau}{n} = \frac{\frac{L}{R_{DC}}}{n} = \frac{L}{n \cdot R_{DC}}$$

$$R_{DC} + R_v = n \cdot R_{DC}$$

$$R_v = (n-1)\, R_{DC}$$

damit weiterhin I_{max} erreicht wird muss gelten:

$$\frac{U_B}{R_{DC}} = \frac{U_1}{R_{DC}+R_v} = \frac{U_1}{R_{DC}+(n-1)R_{DC}} = \frac{U_1}{n \cdot R_{DC}}$$

$$\frac{U_B}{\cancel{R_{DC}}} = \frac{U_1}{n \cdot \cancel{R_{DC}}}$$

$$n \cdot U_B = U_1$$

Bsp. lt. Datenblatt

$L = 40\ mH$ / Phase

$R_{DC} = 30\ \Omega$ / Phase

$U_1 = 5 \cdot U_B$ ges.: τ_1 & R_V

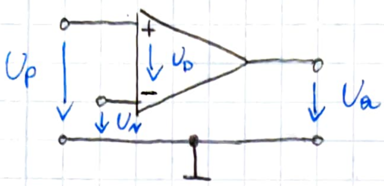
$\rightarrow n = 5$

$$\tau = \frac{L}{R_{DC}} = \frac{40m}{30} = 1{,}\dot{3}\ ms$$

$$\tau_1 = \frac{\tau}{5} = \frac{1{,}\dot{3}\ ms}{5} = 260\ \mu s$$

$$R_V = (n-1)\,R_{DC} = (5-1) \cdot 30 = 120\ \Omega$$

OPV



U_p ... Spg. am nicht inv. Eingang

U_N ... Spg. am inv. Eingang

$U_D = U_p - U_N$ ... Differenzspg.

$U_a = U_D \cdot V_D$ $\quad V_D$ ... Differenzverstärkung (z.B. 10^5

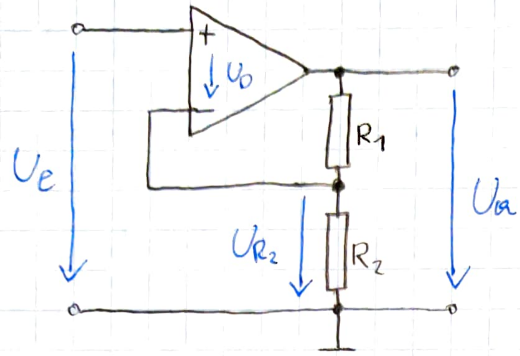
Merksatz:

- Es fließt kein Strom in oder aus den Eingängen des OPV
- Sobald der Ausgang auf einen Eingang rückgekoppelt ist, versucht der OPV die Differenzspg. zu 0 zu bringen.
  ↳ Wir sagen: $U_D = U_p - U_N \stackrel{!}{=} 0$

Der OPV ist kein Wunderwutzi; soll heißen, U_a kann zw. $U_{a_{min}}$ und $U_{a_{max}}$ variiert werden und es gibt auch einen $I_{a_{max}}$

Bsp.: $U_B = \pm 12V \rightarrow U_{a_{max}} = -U_{a_{min}} = 11V$

1) Nicht invertierender Verstärker



$$\frac{U_a}{U_{R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$U_a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_{R_2}$$

$$U_D = U_P - U_N = 0$$

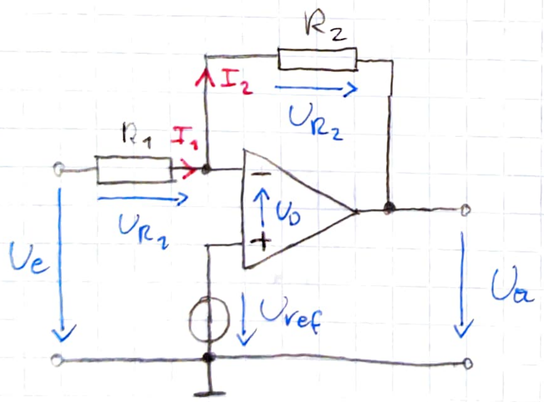
$$U_P = U_N$$

$$U_e = U_{R_2}$$

$$\rightarrow U_a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_e$$

$$= \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) U_e$$

2) Invertierender Verstärker



$$U_D = U_P - U_N = 0$$

$$U_P = U_N$$

$$U_{ref} = U_N$$

Da kein Strom in oder aus den Eingängen fließt, gilt der Ansatz: $I_1 = I_2$

$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

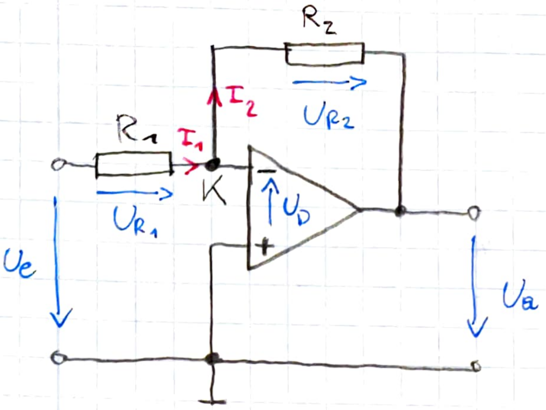
$$\frac{U_e - U_{ref}}{R_1} = \frac{U_{ref} - U_a}{R_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} \cdot U_e - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_{ref} = U_{ref} - U_a$$

$$-\frac{R_2}{R_1} U_e + \frac{R_2}{R_1} \cdot U_{ref} + U_{ref} = U_a$$

$$U_a = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_{ref} - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_e$$

$$U_a = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot U_{ref} - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_e$$



$$U_D = U_p - U_N = 0$$
$$\rightarrow \quad U_p = U_N = 0$$

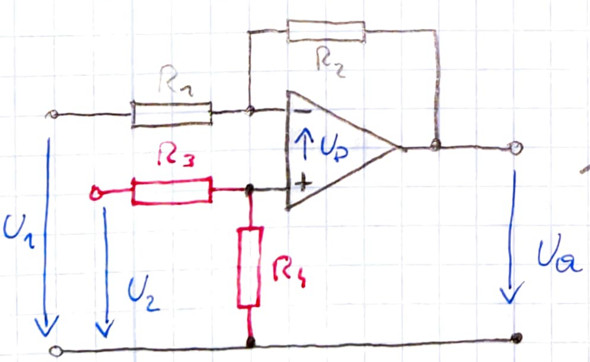
$\rightarrow$ Knoten K = virtueller Nullpunkt

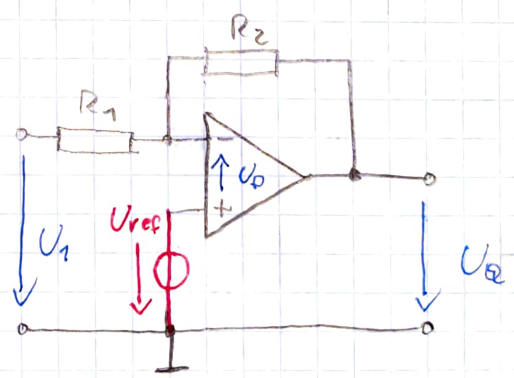
$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

$$\frac{U_e - 0}{R_1} = \frac{0 - U_a}{R_2}$$

3) Subtrahierverstärker





$$U_{ref} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot U_2$$

$$U_D = U_p - U_N = 0$$
$$U_p = U_N = U_{ref}$$

$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

$$\frac{U_1 - U_{ref}}{R_1} = \frac{U_{ref} - U_a}{R_2}$$

$$-\frac{R_2}{R_1} U_1 + \frac{R_2}{R_1} U_{ref} + U_{ref} = +U_a$$

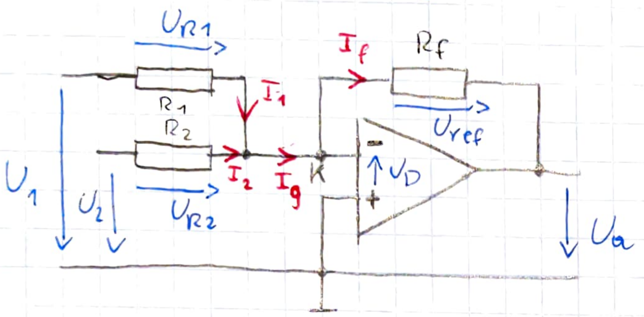
$$U_a = U_{ref}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} U_1$$

$$U_a = U_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} U_1$$

Für $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$

$$U_a = U_2 \frac{R}{R+R} \cdot \frac{R+R}{R} - \frac{R}{R} U_1 = U_2 - U_1$$

4) Umkehrsummierer



kein I in oder aus +/-

$U_D = U_P - U_N = 0$ weil Ausgang mit Eingang verb.

$U_P = U_N$ → am Knoten ist d. Potential = 0 V

Ansatz $I_g = I_f$

$$I_1 + I_2 = I_f$$

$$\frac{U_{R1}}{R_1} + \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{U_{Rf}}{R_f}$$

$$\frac{U_1 - U_n}{R_1} + \frac{U_2 - U_n}{R_2} = \frac{U_n - U_a}{R_f}$$

$$\frac{U_1 - 0}{R_1} + \frac{U_2 - 0}{R_2} = \frac{0 - U_a}{R_f}$$

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = -\frac{U_a}{R_f} \rightarrow U_a = -\left(\frac{R_f}{R_1} U_1 + \frac{R_f}{R_2} U_2\right)$$

Bsp.: $U_a = -(3U_1 + 2U_2)$ ges: R_1, R_2, R_f

jeder $\geq 10k$

$$3 = \frac{R_f}{R_1} \qquad 3R_1 = R_f$$

$$2 = \frac{R_f}{R_2} \qquad 2R_2 = R_f$$

$R_{1,\,gew} = 10k$

$\hookrightarrow R_f = 3R_1 = 30k$

$\hookrightarrow R_2 = \frac{R_f}{2} = 15k$

LT-Spice - Sim.:

$U_B = \pm 12\,V$

$U_1 = 1V, 3V, 5V$

$U_2 = 1\,V_{pp}$ (sinus) $50\,Hz$

Subtrahierverstärker

$$U_a = 2U_2 - 3U_1 = \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_2+R_1}{R_1} U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1$$

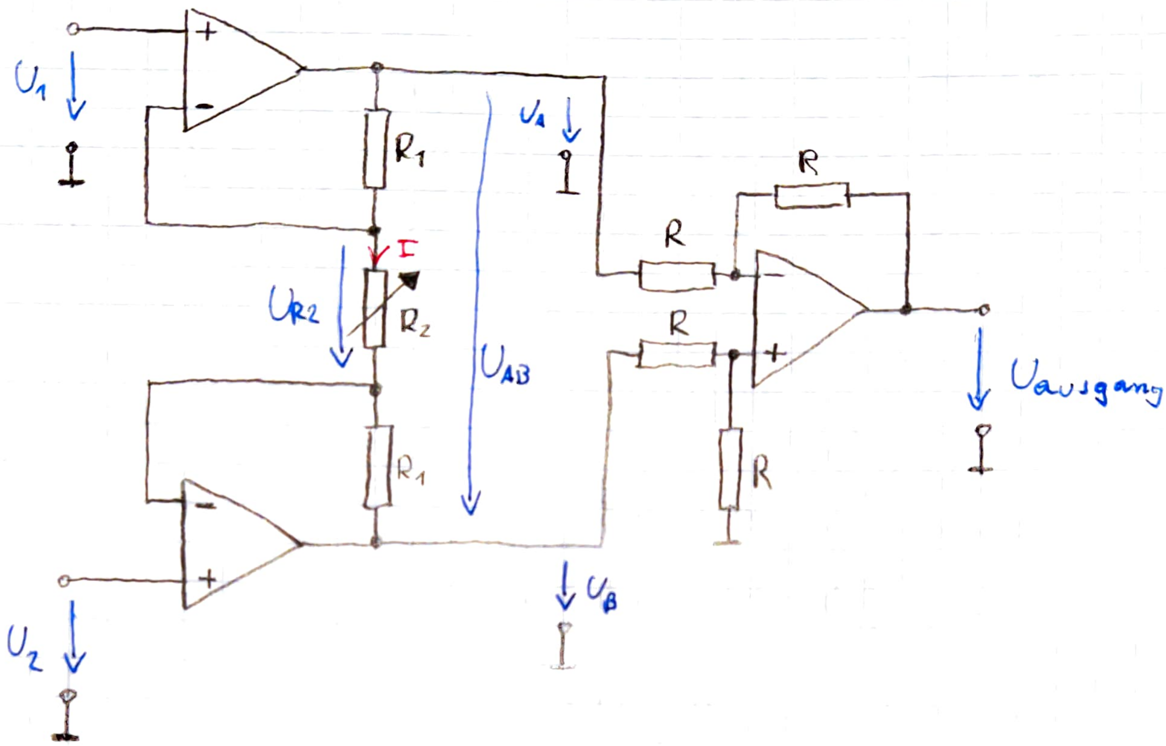
$$\frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{4}{1} = 2 \qquad \frac{R_2}{R_1} = 3$$

$$4R_4 = 2R_3 + 2R_4 \qquad R_2 = R_1 \cdot 3$$

$$2R_4 = 2R_3$$

$$R_4 = R_3$$

5) Instrumentenverstärker



Subtrahierverstärker

$$U_{ausgang} = U_B - U_A = U_{BA} = -U_{AB}$$

$$U_{R2} = U_1 - U_2$$

$$I = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

$$U_{AB} = I(2R_1 + R_2) = \frac{U_{R2}}{R_2}(2R_1 + R_2) = U_{R2}\frac{2R_1 + R_2}{R_2}$$

$$= (U_1 - U_2)\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$U_{ausgang} = -U_{AB} = -(U_1 - U_2)\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$= (U_2 - U_1)\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Bsp.: Mit Hilfe eines PT 100 - Sensors soll die Temp. unter Anwendung einer Viertelmessbrücke gemessen werden. Zur Anpassung der Differenzspannung an die im Anschluss noch folgende Vorgabe ist ein Instrumentenverstärker zu dimensionieren (und über LTSpice zu simulieren)

Vorgabe: $\vartheta = 0°C \rightarrow U_{ausgang} = 0V$

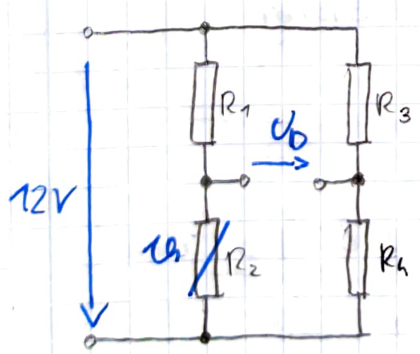
je $\Delta T = 1°C \rightarrow \Delta U_{ausgang} = 0{,}1V$

$P_{t100} = 100\ \Omega$ bei $0°C$

$U_B = \pm 12V$

$$U_0 = U_q \left(\frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_2} \right)$$

$$= U_q \left(\frac{R_2}{R_2+R_1} - \frac{R_4}{R_4+R_3} \right)$$



$R_1 = R_3 = R_4 = 100\,\Omega$

Aus P_{t100} - Tabelle

$R_{10°} = 103{,}903\ \Omega \rightarrow R_{1°} = \frac{103.903 - 100}{10} = 0{,}39\ \Omega$

Suchen: $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$R_{\vartheta} = R_{\vartheta_0} \left(1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2 + \gamma \Delta T^3\right)$$

$$U_D \text{ für } 1°C = U_q \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4} \right)$$

$$= 12 \left(\frac{100{,}39}{200{,}39} - \frac{100}{200} \right) = 11{,}67 \text{ mV}$$

$$V = \frac{\Delta U_{D,soll}}{\Delta U_{D,1°C}} = \frac{0{,}1}{0{,}01167} = 8{,}5689 \Rightarrow V = 8{,}6$$

$$\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right) = 8{,}6$$

$$2\frac{R_1}{R_2} = 7{,}6$$

$$2R_1 = 7{,}6 R_2$$

$$R_1 = 3{,}8 R_2 \qquad R_{2,gew} = 10k$$

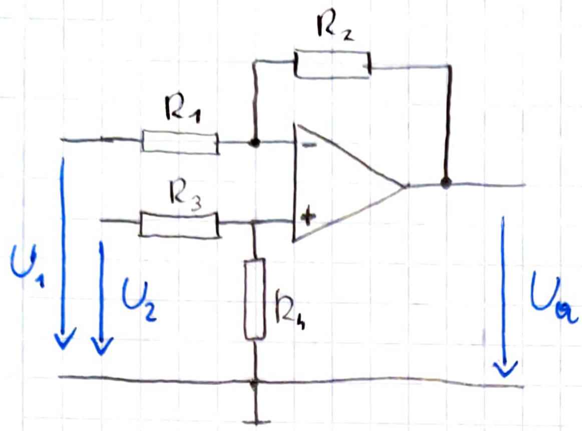
$$R_1 = 38k$$

Sind die Werte α, β, γ nicht gegeben, sondern liegen z.B. in Tabellenform vor, so macht man eine Linearisierung.

z.B. $$\Delta R = \frac{R_{30} - R_{-30}}{60} \frac{\Omega}{°C}$$

Sollte die Temp. zwischen +20°C und +40°C überwacht werden und die Auswertelogik bei +30°C 0V liefern, so sind die Brückenwiderstände derart zu dimensionieren, dass gilt: $R_1 = R_3 = R_4 = R_{Pt100}\big|_{\vartheta = 30°C}$

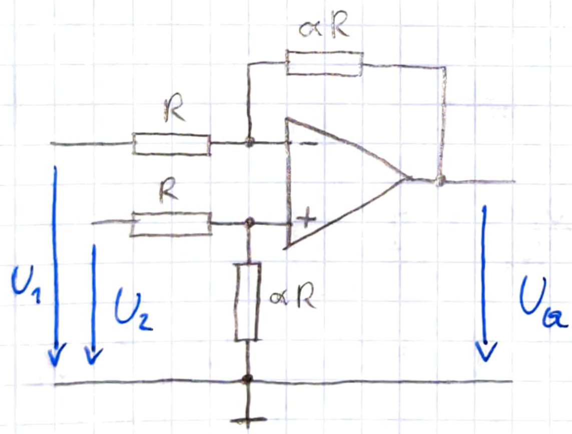
Wiederholung: Subtrahierverstärker



$$U_a = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1$$

$R_1 = R_3 = R$

$R_2 = R_4 = \alpha \cdot R$



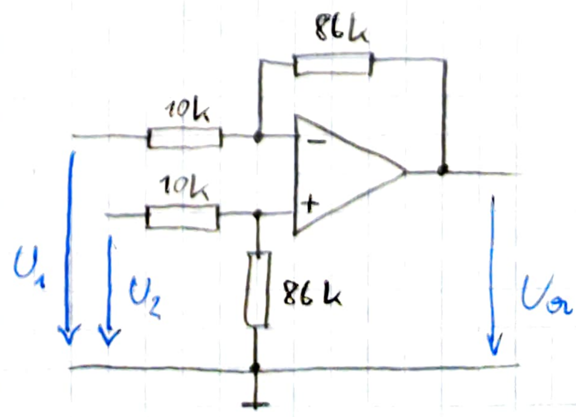
$$U_a = \frac{\alpha R}{\cancel{R + \alpha R}} \cdot \frac{\cancel{R + \alpha R}}{R} U_2 - \frac{\alpha \cancel{R}}{\cancel{R}} U_1$$

$$U_a = \frac{\alpha \cancel{R}}{\cancel{R}} U_2 - \alpha U_1 = \alpha U_2 - \alpha U_1 = \alpha (U_2 - U_1)$$

$\alpha = V$

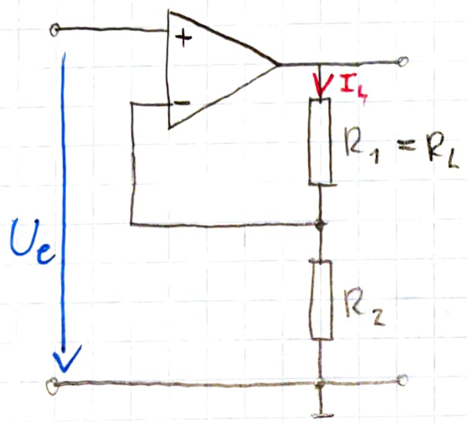
z.B. $V = 8{,}6$

$R_{gew} = 10k$



Spannungs- Stromwandler

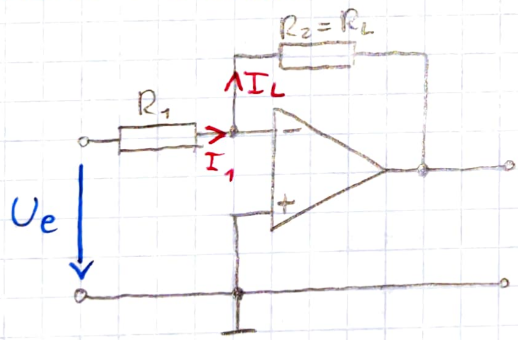
Variante 1 (Nicht invertierende)



$$I_L = I_{R_2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{U_e}{R_2}$$

$$\boxed{I_L = \frac{U_e}{R_2}}$$

Variante 2 (invertierende)



$$I_1 = I_L$$

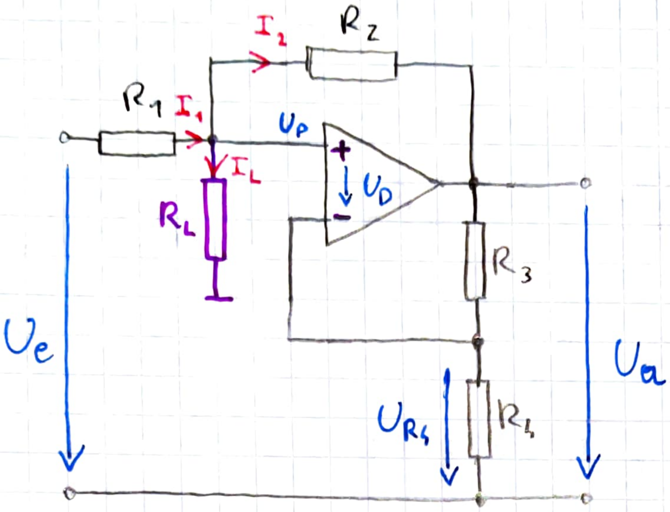
$$\frac{U_{R1}}{R_1} = I_L$$

da $U_D = 0$ $\quad U_{R_1} = U_e$

$$\boxed{I_L = \frac{U_e}{R_1}}$$

Nachteil von Variante 1 & 2 ist der fehlende Masse-Bezug.

Variante 3 (Massebezogener U-I-Wandler; Howland's Strompumpe)



$$I_1 - I_2 - I_L = 0$$

$$I_L = I_1 - I_2 = \frac{U_{R_1}}{R_1} - \frac{U_{R_2}}{R_2}$$

$$= \frac{U_e - U_p}{R_1} - \frac{U_p - U_a}{R_2}$$

$$= \frac{U_e}{R_1} - \frac{U_p}{R_1} - \frac{U_p}{R_2} + \frac{U_a}{R_2}$$

$$= \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_a}{R_2} - U_p \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$I_L = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_a}{R_2} - U_p \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

Weil $U_D = 0$, gilt $U_p = U_{R_4}$

$$\frac{U_{R_4}}{U_a} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$I_L = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_a}{R_2} - U_p \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

$$I_L = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_a}{R_2} - U_a \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

$$I_L = \frac{U_e}{R_1} + U_a \underbrace{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \right)}$$

$$I_L = \frac{U_e}{R_1} \quad \longleftarrow \quad \text{if } () = 0$$

$$\frac{1}{R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_1+R_2}{R_1 \cdot R_2} = 0$$

$$\frac{R_4 \, (R_1+R_2)}{(R_3+R_4) \cdot R_1 \cdot R_2} = \frac{1}{R_2}$$

$$\cancel{R_4 \cdot R_1} + R_4 \cdot R_2 = \frac{(R_3+R_4) \, R_1 \cdot \cancel{R_2}}{\cancel{R_2}} = R_3 \cdot R_1 + \cancel{R_4 \cdot R_1}$$

$$R_4 \cdot R_2 = R_3 \cdot R_1$$

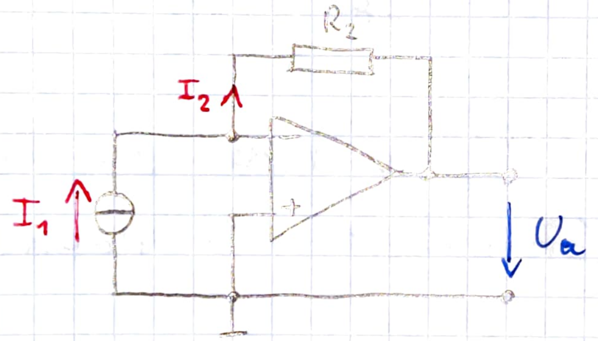
$$\boxed{\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}}$$

Für d. Praxis soll R_1 sehr viel größer R_2 gewählt werden, damit eine gute Aussteuerbarkeit gewährleistet ist.

Strom- Spannungswandler

(Transimpedanzverstärker)

Liegt als Messgröße ein Strom vor und kann durch die Messeinrichtung nur eine Spg. gemessen und ausgewertet werden, so muss der Strom in eine proportionale Spannung umgewandelt werden. (Stromgesteuerte Spannungsquelle)



Ansatz: $I_1 = I_2 = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{U_n - U_a}{R_2} = -\frac{U_a}{R_2}$

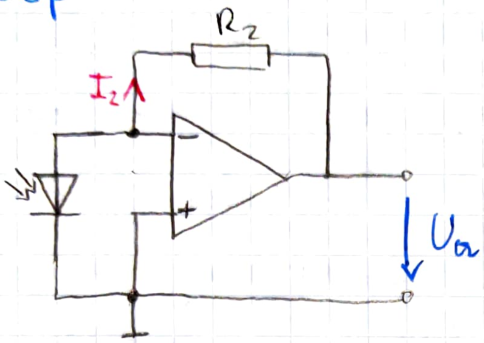
$$U_a = -I_1 \cdot R_2$$

Vorteil dieser Schaltung ist, dass durch die virt. Masse die Stromquelle immer im Kurzschluss betrieben wird. Mit Hilfe großer Widerstände können kleine Ströme in große Spannungen umgewandelt werden. z.B. Umwandlung von Fotoströmen von Fotodioden (μA) in Spannungen (V) umwandeln.

Als Transimpedanz bezeichnet man:

$$Z = \left| \frac{U_a}{I_1} \right| = R_2$$

Bsp.:



$I_g = 2mA$

$U_a = -5V$

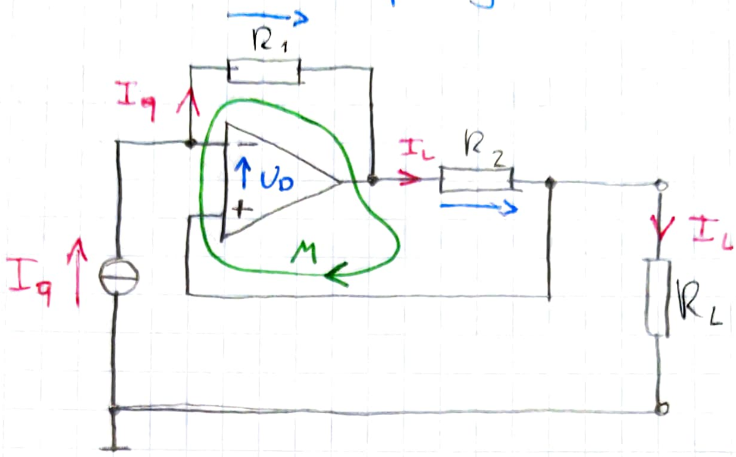
ges.: R_2

$$U_a = -I_g \cdot R_2 \rightarrow R_2 = -\frac{U_a}{I_g} = \frac{5V}{2mA} = 2{,}5\,k\Omega$$

Möchte man $U_a = 5V$, so muss ein Inv-ertierer mit d. Verstärkung -1 nachgeschalten werden.

Strom - Strom wandler

(Stromspiegel)



M: $U_D + U_{R_1} + U_{R_2} = 0 \qquad (U_D = 0)$

$$U_{R_2} = -U_{R_1}$$

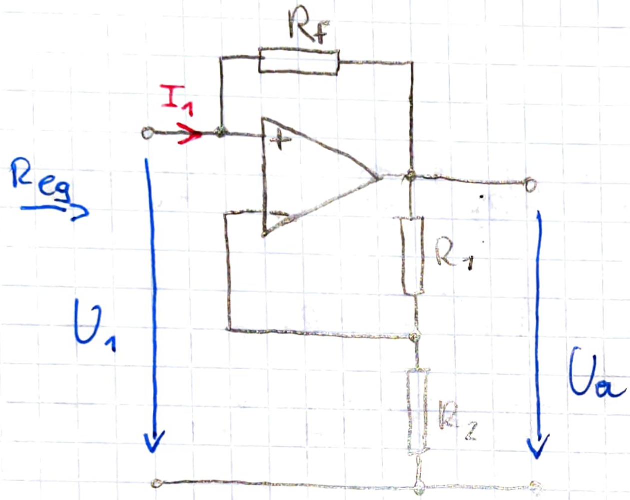
$$R_2 \cdot I_L = -I_q \cdot R_1$$

$$I_L = -I_q \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_i = \frac{I_L}{I_q} = -\frac{R_1}{R_2}$$

NIC - Negative-Impedance-Converter

Der NIC stellt einen reellen negativen Widerstand dar. Man benutzt die Schaltung hauptsächlich, um parasitäre reelle Widerstände zu kompensieren.



$$R_{eg} = \frac{U_1}{I_1}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U_n - U_a}{R_f} = \frac{U_1 - U_a}{R_f} = \frac{U_1}{R_f} - \frac{U_a}{R_f}$$

$$= \frac{U_1 \frac{R_1 + R_2}{R_2}}{R_f} = \frac{U_1}{R_f} - \frac{U_1}{R_f}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$I_1 = \cancel{\frac{U_1}{R_f}} - \cancel{\frac{U_1}{R_f}} - \frac{U_1}{R_f}\frac{R_1}{R_2} = -\frac{U_1}{R_f}\frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{U_1}{I_1} = -R_f \cdot \frac{R_2}{R_1} = R_{eg}$$

Kann z. B. dort eingesetzt werden, wo Spulen durch Kapazitäten ersetzt werden sollten. (Aktive Filter) Bei kleinen Frequenzen sind sehr große L-Werte nötig. :(sad

→ Die Impedanz wird invertiert

für $R_1 = R_2 = R$, $R_f \rightarrow \underline{Z}_f = \frac{1}{j\omega C}$

$$\underline{Z}_{eq} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \underline{Z} = -\underline{Z} = -\frac{1}{j\omega C} = -\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\underline{Z}_{eq} = +j\frac{1}{\omega C}$$

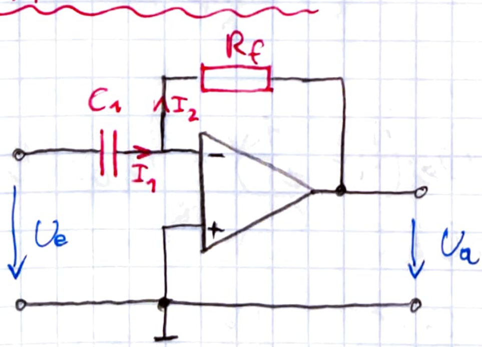
↓

Entspricht Induktivität

Die Schaltung enthält eine Mit- und eine Gegenkopplung und für Stabilität muss die Gegenk. > Mitkopplung

Sollte d. Frequenzgang ganz einer Induktivität entsprechen, so muss die Schaltung erweitert werden zu einem Gyrator

Differenzierer



$$I_1 = I_2$$

$$C_1 \cdot \frac{dU_c}{dt} = \frac{U_{Rf}}{R_f} = \frac{U_n - U_a}{R_f}$$

$U_n = 0$

$$C_1 \cdot \frac{dU_e}{dt} = \frac{-U_a}{R_f}$$

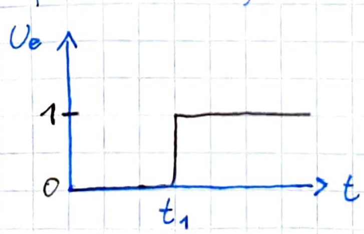
$U_c = U_e - U_n$

$U_{Rf} = U_n - U_a$

$$U_a = -R_f \cdot C_1 \cdot \frac{dU_e}{dt}$$

für $U_e(t)$

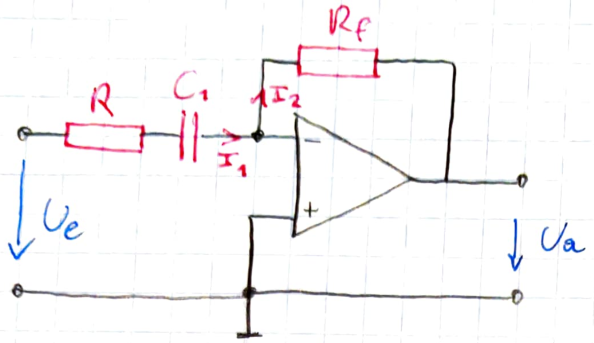
$$U_e \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_1 \\ 1 & \text{für } t \geq t_1 \end{cases}$$



$\rightarrow U_a = -\infty$

Technisch nicht möglich!

Realer Differenzierer



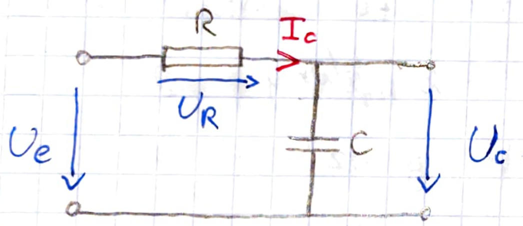
Ansatz:

$$I_1 = I_2$$

$$I_1 = \frac{U_{Rf}}{R_f} = -\frac{U_a}{R_f}$$

$$U_a = -I_1 \cdot R_f$$

Wdhg. Laden eines Kondensators



$$U_c = U_e\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad I_c = \frac{U_R}{R} = \frac{U_e - U_c}{R}$$

$$\tau = R \cdot C$$

zum Zeitpunkt $t=0$ wird U_e eingeschaltet

$t=0 \qquad U_c = 0$

$t=\tau \qquad U_c = U_e\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63\, U_e$

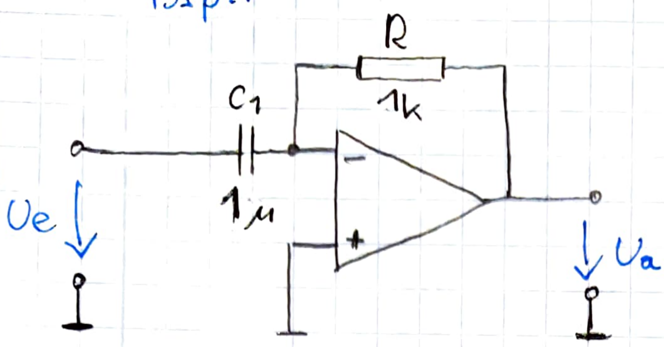
$t = 5\tau \qquad U_c = U_e$

$t=0 \qquad I_c = \frac{U_e - 0}{R} = \frac{U_e}{R} = I_{c,max}$

$t=\tau \qquad I_c = \frac{U_e - 0{,}63\, U_e}{R} = 0{,}37\, I_{c,max}$

$t=5\tau \qquad I_c = 0$

Bsp.:



$$I_1 = I_2 \qquad\qquad Q = C \cdot U$$

$$C \cdot \frac{d\,u_e}{dt} = -\frac{U_a}{R_2} \qquad\qquad \Delta Q = C \cdot \Delta U$$

$$u_a(t) = -R_2\, C \cdot \frac{d\,u_e}{dt} \qquad\qquad I\,\Delta t = C \cdot \Delta U$$

$$I = C \cdot \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$u_e = 1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$u_a(t) = -R_2\, C\, \frac{d\, 1 \cdot \sin(\omega t)}{dt} = -R_2 \cdot C \cdot 1 \cdot \cos(\omega t)$$

$f = 50\ \text{Hz}$

$$C = 1\mu$$

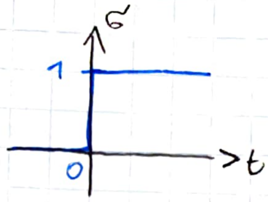
$$u_e(t = 1 \cdot \sin(2\pi f\, t) \qquad\qquad R_2 = 1k$$

$$u_a(t) = -R_2\, C \cdot 2\pi f \cdot 1 \cdot \cos(2\pi f t)$$

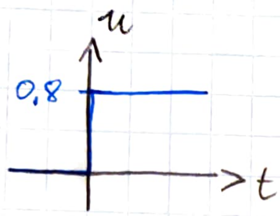
$$= -\cancel{10^3} \cdot 10^{-\cancel{6}\,3} \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1 \cdot \cos(100\pi t)$$

$$= -10^{-1}\pi \cdot \cos(100\pi t) = -0{,}31415 \cos(100\pi t)$$

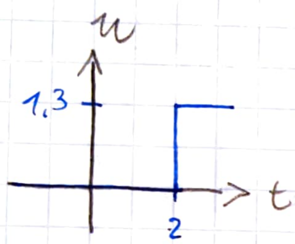
Sprungfunktion $\sigma(t)$



$$\sigma(t) = \begin{cases} t < 0 & 0 \\ t \geq 0 & 1 \end{cases}$$

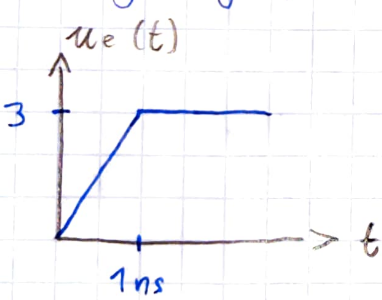


$$u(t) = 0{,}8 \cdot \sigma(t)$$



$$u(t) = 1{,}3 \cdot \sigma(t-2)$$

Wird am Eingang eine reale Sprungfunktion angelegt, z. B.:

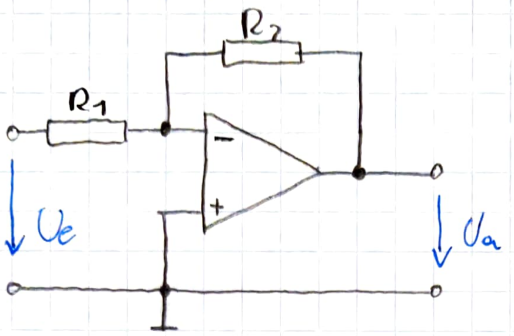


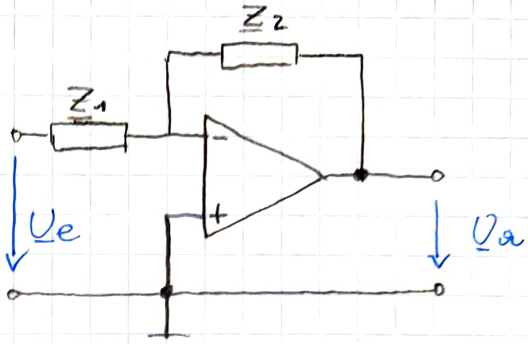
$$\rightarrow \quad u_a = -RC_1 \cdot \frac{d\,u_e}{d\,t}$$

$$= -10^3 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3V}{1 \cdot 10^{-9}}$$

$$= -10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^9 = -3 \cdot 10^6 \ V$$

Realer Differenzierer im Frequenzbereich

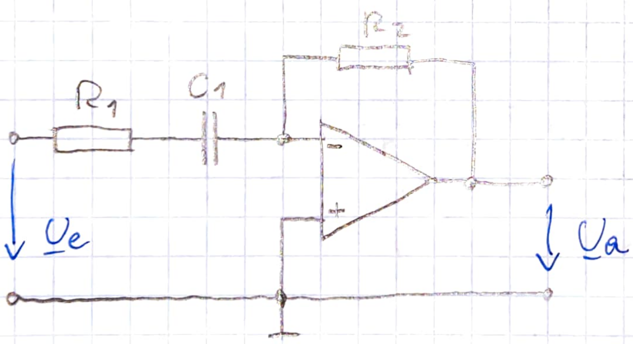




$$I_1 = I_2 \qquad \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

$$\frac{U_e}{R_1} = - \frac{U_a}{R_2}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = - \frac{R_2}{R_1}$$



$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{-R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{-R_2}{R_1\left(1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_1}\right)}$$

$$= \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{j\omega C_1 R_1}}$$

$$G(j\omega) = \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega C_1 R_1}} \qquad \left|\frac{1}{a - jb}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

↑

Übertragungsfkt.

$$|G(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1 R_1}\right)^2}}$$

$\omega = 0 \qquad G_0 = 0$

$\omega = \infty \qquad G_\infty = \frac{R_2}{R_1}$

$\rightarrow$ aktiver HP

für $\omega = \omega_g \qquad |G(j\omega_g)| = G_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \mathrel{\hat{=}} -3\,dB$

$$\cancel{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega_g C_1 R_1}\right)^2}} = \cancel{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega_g C_1 R_1}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\omega_g C_1 R_1}\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow \omega_g = \frac{1}{C_1 R_1}$$

Bsp.: $f_g = 100 \text{ Hz}$, $C_1 = 220 \text{ nF}$, $G_\infty = 20 \text{ dB}$

ges.: $R_1 \rightarrow R_2$

$$\omega_g = \frac{1}{C_1 \, R_1}$$

$$2\pi \, f_g = \frac{1}{C_1 R_1}$$

$$R_1 = \frac{1}{C_1 \cdot 2\pi f_g} = \frac{1}{220 \text{ nF} \cdot 2\pi \cdot 100 \text{ Hz}} = \underline{\underline{7234{,}3 \, \Omega}}$$

$$G_\infty = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow R_2 = G_\infty \cdot R_1 = 7234{,}3 \, \Omega \cdot 10^{\frac{20 \text{dB}}{20}}$$

$$= \underline{\underline{72\,343 \, \Omega}}$$

aus Sinus für $\hat{U}_e = 1 \text{V}$ 100 Hz

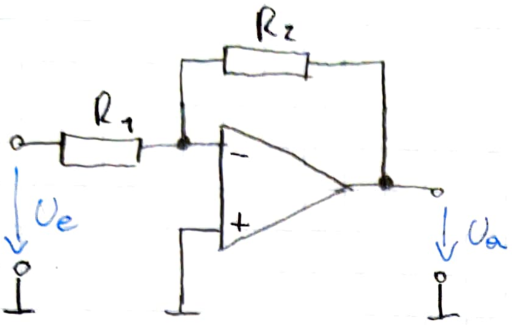
$$2{,}5 \text{ E} \ \ldots \ 180°$$

$$-1{,}8 \text{ E} \ \ldots \ \varphi$$

$\downarrow$

$$\varphi = \frac{-1{,}8 \cdot 180°}{2{,}5} = \underline{\underline{-129{,}6°}}$$

Integrierer



$$I_1 = I_2$$

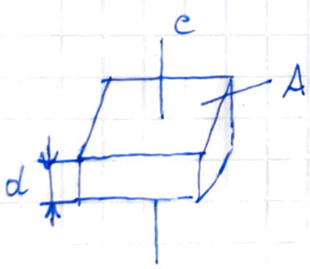
$$\frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

$$\frac{U_e - U_n}{R_1} = \frac{U_n - U_a}{R_2} \qquad U_n = U_D = 0$$

$$\frac{U_e}{R_1} = -\frac{U_a}{R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Bei öffnendem Schalter entlädt der Kondensator auch ohne geschlossenem Stromkreis -> Leckströme

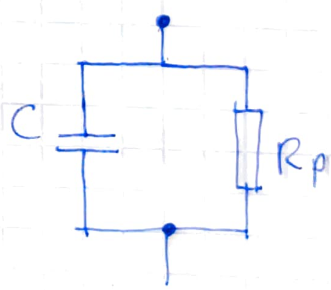
realer C



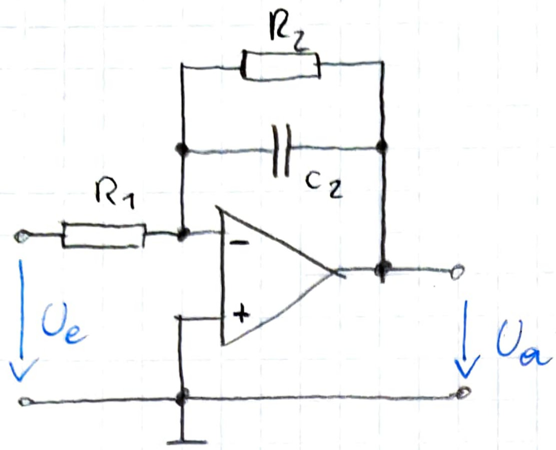
Dielektrikum

$$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

$$R = \frac{\rho \cdot d}{A}$$



guter C hat großen Rp



$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + 1/j\omega C_2}}{R_1} = -\frac{\dfrac{\frac{R_2}{j\omega C_2}}{R_2 + 1/j\omega C_2}}{R_1}$$

$$= -\frac{\dfrac{\frac{R_2}{j\omega C_2}}{\frac{j\omega C_2 R_2 + 1}{j\omega C_2}}}{R_1} = -\frac{\dfrac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}}{R_1} = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{G}(j\omega) = \underline{F}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_2)^2}}$$

$\omega = 0$ $\qquad H_0 = \frac{R_2}{R_1}$

$\omega \to \infty$ $\qquad H_\infty = 0$

$$|H_{\omega_g}| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_g = \frac{1}{C_2 R_2}$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot C_2 \cdot R_2}$$

Bsp.: $f_g = 1\,kHz$ $\quad v = 8 \rightarrow v = 10 \cdot \lg 8 = 18{,}06\ dB$

bei f_g: $v = 15{,}06\ dB$

$C_2 = 330\ nF$

ges.: $R_2 \rightarrow R_1$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi \cdot C_2 \cdot f_g} = \frac{1}{2\pi \cdot 330n \cdot 1k} = \underline{\underline{482{,}28\ \Omega}}$$

gew.: $\underline{\underline{470\ \Omega}}$

$$v = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow R_1 = \frac{R_2}{v} = \frac{482}{8} = 60{,}2\ \Omega$$

$$\frac{470}{8} = 58{,}75\ \Omega$$

$$\rightarrow (56 + 2{,}7)\ \Omega = \underline{\underline{58{,}7\ \Omega}}$$

$$v = \frac{470}{58{,}7} = \underline{\underline{8}}$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot 330n \cdot 470} = \underline{\underline{1026\ Hz}}$$

AC-Analyse 15,06 dB für $f = 1023\ Hz$

$$15{,}06\ dB \mathrel{\hat=} 10^{\frac{15{,}06}{20}} = \underline{\underline{5{,}66}}$$

$\hat{U}_e = 1\ V$

$$\hat{U}_a = 5{,}45\ V \rightarrow v = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \underline{\underline{5{,}45\ V}}$$

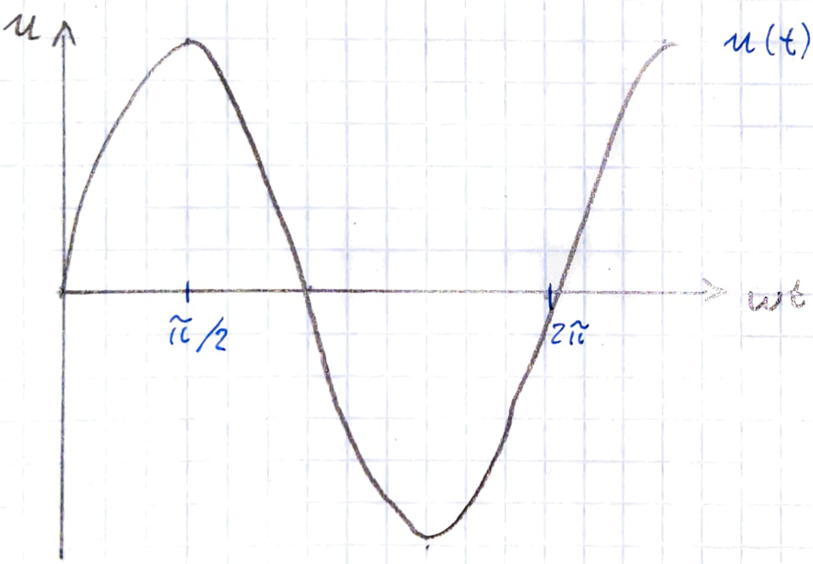
Diff: $494{,}28\,\mu s \quad 180°$

$-612{,}75\,\mu s \quad \varphi$

$$\varphi = -\frac{612{,}75 \cdot 180}{494{,}28} = \underline{\underline{-223°}}$$

$$-225 = -180° - 45°$$

Wdhg. Kennwerte einer sinusförmigen Wechselgröße



$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$$

Mittelwert $\bar{U} = 0$

Gleichrichtwert $|\bar{U}| = \frac{\hat{U}}{\frac{\pi}{2}} = 0{,}636 \cdot \hat{U}$

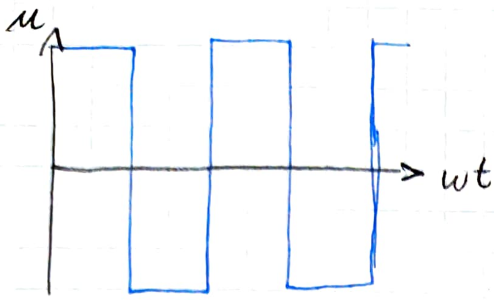
$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \rightarrow \hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{eff}$$

eingesetzt: $|\bar{U}| = 0{,}636 \cdot \sqrt{2} \cdot U_{eff}$

$$U_{eff} = \frac{1}{0{,}636\sqrt{2}} \cdot |\bar{U}| = 1{,}11 \cdot |\bar{U}|$$

Formfaktor $F_{\sim} = 1{,}11$

Übung

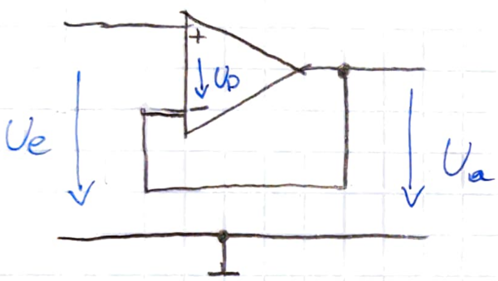


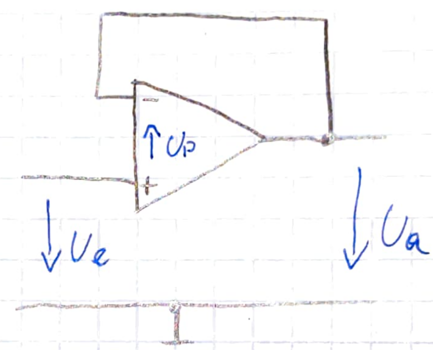
$\bar{U} = 0$

$|\bar{U}| = \hat{U}$

$U_{eff} = \hat{U}$

$F_{\sqcap\sqcup} = 1$



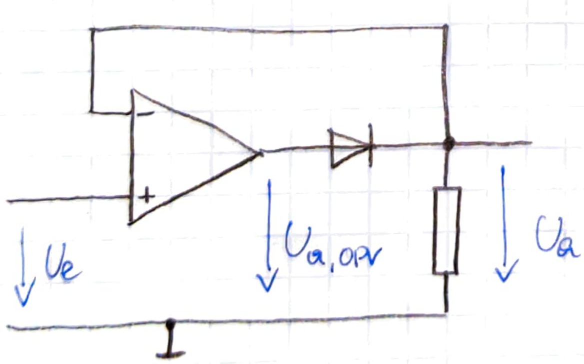


$U_a = U_e$ $\qquad\qquad$ $U_a = U_e$

$$U_D = U_p - U_n = 0$$

$$U_n = U_p$$

Einweggleichrichter



$U_B = \pm\ 15\ V$

$\hat{U}_e = 5V$

$f = 5\ Hz$

$U_{a,opv}$ um U_D größer als U_a

für neg. HW von U_e ist $U_{a,opv}$ in Begrenzung $U_{a,opv} \approx -13{,}5V$ $\quad U_a = 0V$

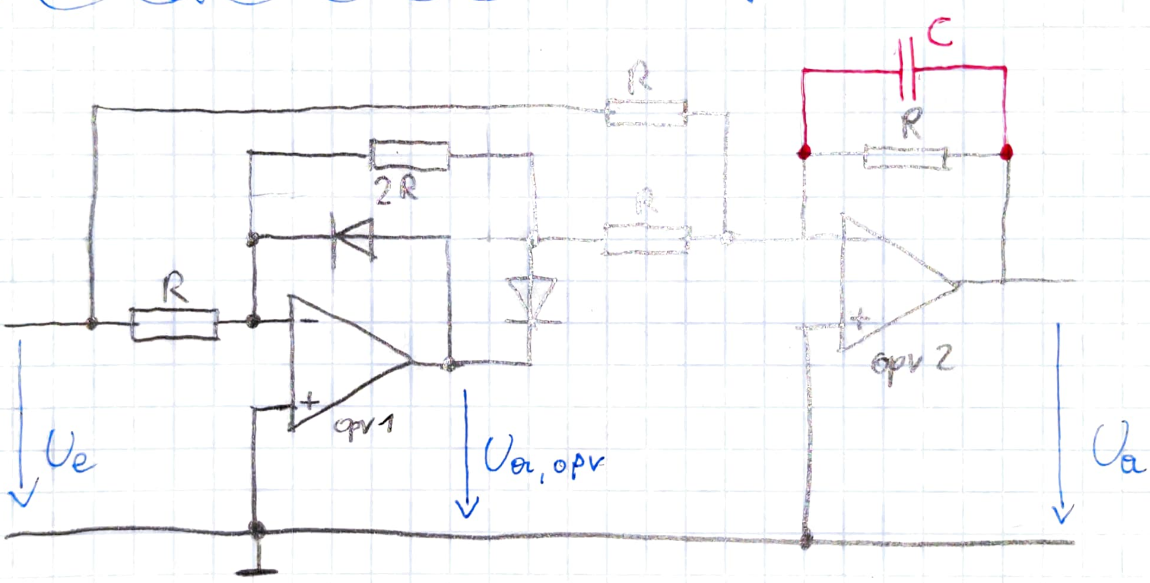
HÜ - Verbesserung

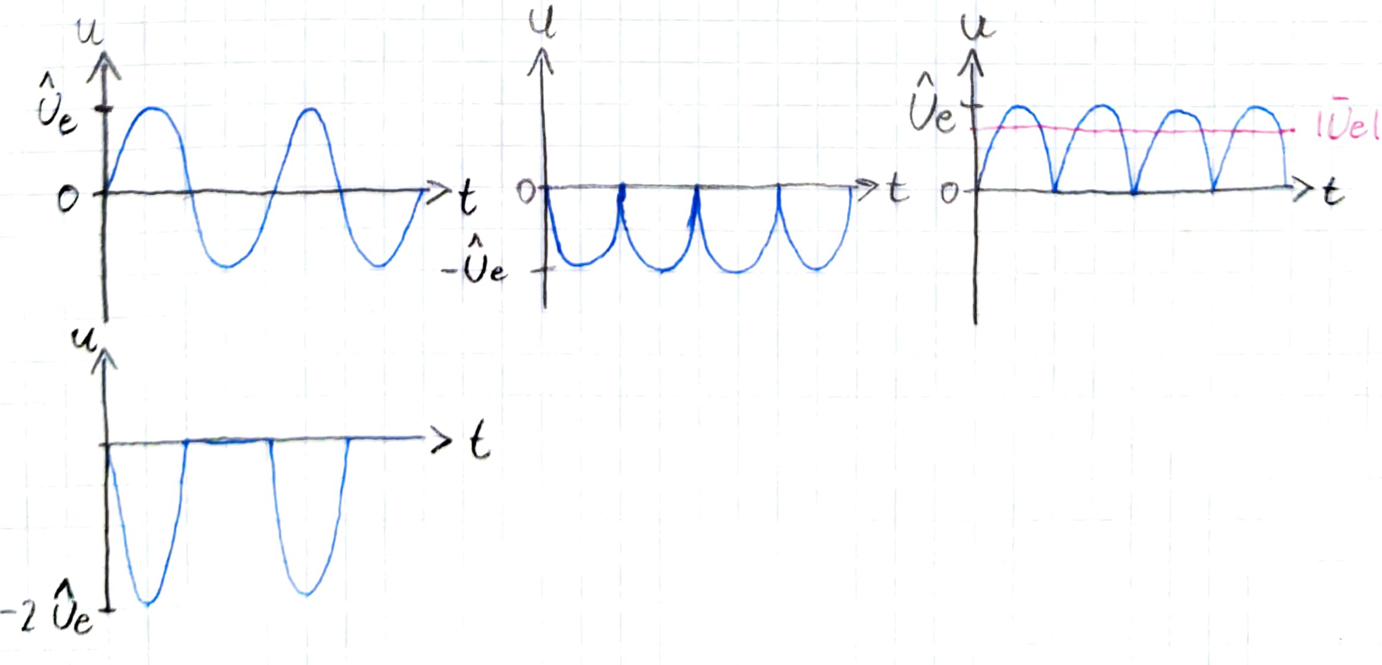
69,04 ms $\quad$ 180°

-85,89 ms $\quad$ φ

$$\varphi = \frac{-85{,}89 \cdot 180°}{69{,}04} = -324°$$

Zweiweggleichrichter (Präzisionsgleichrichterschaltung)





$R = 1\,k\Omega$ $C = 1\,mF$ $\hat{U}_e = 5\,V$ $f = 5\,Hz$

Ergebnis: $U_a = \frac{\hat{U}_e}{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{\frac{\pi}{2}} = 3{,}183\,V$

Der Effektivwert hängt über den Formfaktor $F = 1{,}11$ (für Sinussignale) mit dem Gleichrichtwert zusammen

$U_{eff} = F \cdot |\bar{U}| = 1{,}11 \cdot |\bar{U}|$

Der Rückkoppelwiderstand von OPV 2 muss den Wert $1{,}11\,R$ haben.

Damit die Welligkeit der Ausgangsspg. kleiner ist, muss man C größer machen.

Nachteil: τ wird vergrößert → es dauert länger, bis sich der C eingestellt hat.

z.B. alle $R = 10\,k$ ($20\,k$ & $11{,}1\,k$)

$U_B = \pm 30\,V$

$\hat{U}_e = 14{,}14\,V$ 50 Hz

$R = 10\,k$

$C = 100\,\mu F$

$\rightarrow U_a = \frac{14{,}14}{\sqrt{2}} = 10\,V$ Kontrolle

Nicht-Invertierender Schmitt-Trigger

die Ausgangsspg. kann nur die Werte

- $U_{a,max}$
- $U_{a,min}$

annehmen.

Der Ausgang toggled / springt zwischen den beiden Werten.

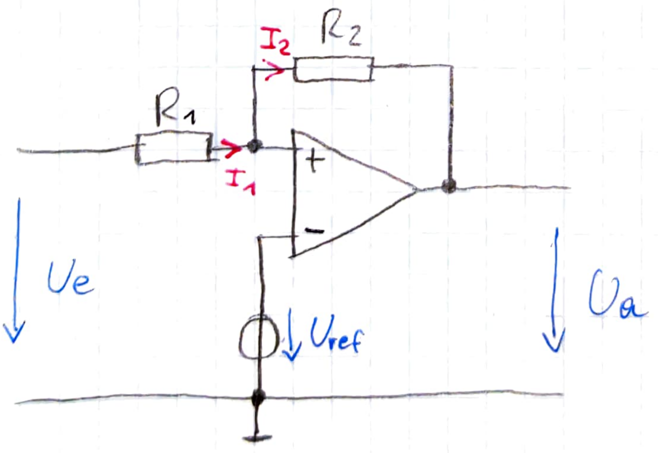
- Rail-to-Rail OPV $U_a = \pm U_B$
- TL084 $U_{a,max} \approx +U_B - 1V$ $\quad 12-1 = \underline{\underline{11V}}$

  $U_{a,min} \approx -U_B + 1V$ $\quad 0+1 = \underline{\underline{1V}}$

$$U_{a,max} = +11\,V$$

$$U_{a,min} = +1\,V$$

1) Schaltung



Ansatz:

$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

$$\frac{U_e - U_p}{R_1} = \frac{U_p - U_a}{R_2}$$

$$U_D = U_p - U_n = 0$$

$$U_p = U_n = U_{ref}$$

$$\frac{U_e - U_{ref}}{R_1} = \frac{U_{ref} - U_a}{R_2}$$

$$U_e \cdot U_{ref} = \frac{R_1}{R_2} \cdot U_{ref} - U_a \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

$$U_e = U_{ref}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2} \cdot U_a$$

$$U_{e,ein} = U_{ref}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2}\cdot U_{a,min}$$

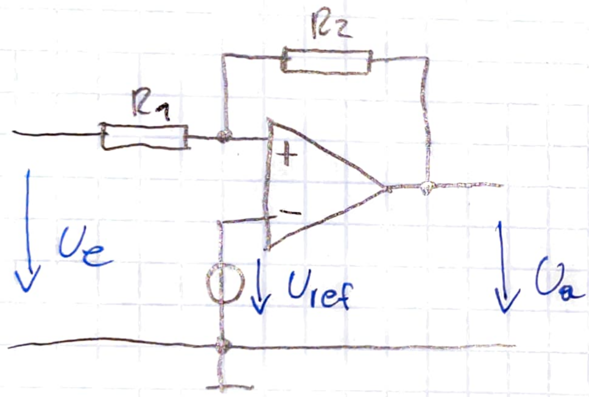
$$U_{e,aus} = U_{ref}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2}\cdot U_{a,max}$$

ist die Verschiebespg. $U_{ref} = 0$

$$U_{e,ein} = -\frac{R_1}{R_2}\cdot U_{a,min}$$

$$U_{e,aus} = -\frac{R_1}{R_2}\cdot U_{a,max}$$

Bsp.:



$R_2 = 2k2$

$R_1 = 220\,\Omega$

$U_{ref} = 5V$

$U_a = \pm 10{,}7V$

ges.: $U_{e,ein}$ / $U_{e,aus}$

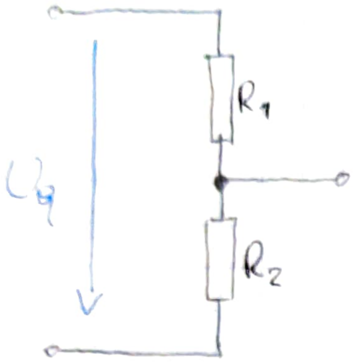
$$U_{e,ein} = 5V\cdot\left(1+\frac{220}{2k2}\right) - \frac{220}{2k2}\cdot(-10{,}7V)$$

$$U_{e,ein} = \underline{\underline{6{,}57\ V}}$$

$$U_{e,aus} = 5V\cdot\left(1+\frac{220}{2k2}\right) - \frac{220}{2k2}\cdot 10{,}7V$$

$$U_{e,aus} = \underline{\underline{4{,}43\ V}}$$

Lüftersteuerung: bei 30° einschalten
bei 20° ausschalten



$U_B = \pm 12\,V$

OPV TL084 $\longrightarrow$ $U_{a,min} = -10{,}477\,V$

$U_{a,max} = 10{,}477\,V$

$U_q = 5\,V$

$R_1 = 100\,\Omega$

$R_2 = PT_{100}$

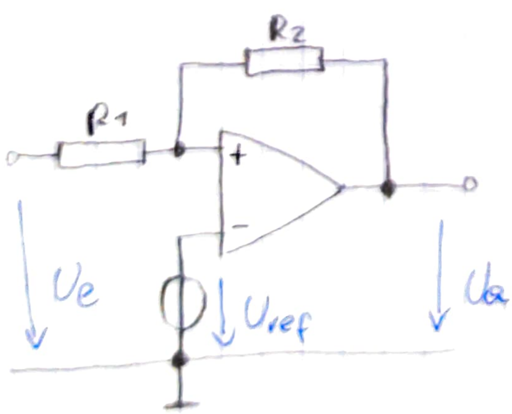
$R_{2,20°} = 107{,}794\,\Omega$

$R_{2,30°} = 111{,}673\,\Omega$

$\vartheta = 20°$ $\quad U_{R_2} = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = 5 \cdot \frac{107{,}794}{207{,}794} = 2{,}594\,V$

$\vartheta = 30°$ $\quad U_{R_2} = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = 5 \cdot \frac{111{,}673}{211{,}673} = 2{,}638\,V$

$\Delta U = 44\,mV$



$U_{e,ein} = \left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)U_{ref} - \frac{R_1}{R_2}\,U_{a,min}$

$U_{e,aus} = \left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)U_{ref} - \frac{R_1}{R_2}\,U_{a,max}$

$U_{e,ein} = 2{,}638\,V$

$U_{e,aus} = 2{,}594\,V$

I - II: $U_{e,ein} - U_{e,aus} = -\frac{R_1}{R_2} U_{a,min} - \left[-\frac{R_1}{R_2} U_{a,max}\right]$

$$2{,}638 - 2{,}594 = -\frac{R_1}{R_2} \cdot (-10{,}477) + \frac{R_1}{R_2} \cdot 10{,}477$$

$$0{,}044 = 20{,}954 \frac{R_1}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{20{,}954}{0{,}044} R_1 = 476{,}22\, R_1$$

gewählt $R_1 = 1\,k\Omega$

$R_2 = 476{,}22\,k\Omega$

in I od. II einsetzen:

I: $2{,}638 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) U_{ref} - \frac{R_1}{R_2} U_{a,min}$

$$2{,}638 = \left(1 + \frac{1}{476{,}22}\right) U_{ref} - \frac{1}{476{,}22} \cdot (-10{,}477)$$

$$2{,}638 = 1{,}0021 \cdot U_{ref} + 0{,}022$$

$$\frac{2{,}616}{1{,}0021} = U_{ref} = 2{,}61\,V$$

Schaltung:

→ R_e vom ST = 1k

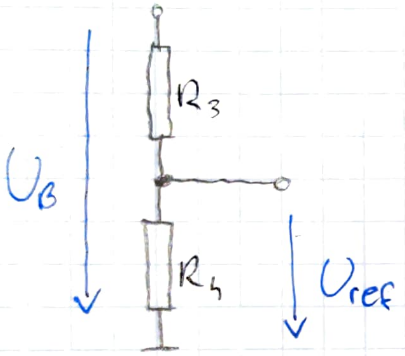
Somit $R_2' = \frac{1}{\frac{1}{111{,}673} + 10^{-3}} = 100{,}45\,\Omega$

Dimensionierung umsonst

Abhilfe: zusätzlicher Impedanzwandler

Besser: Brückenschaltung zur Sensorauswertung mit angeschlossenem Verstärker (Instrumenten-verst.) und dann den Schmitt-Trigger

U_{ref} mittels Spg. Teiler



$$\frac{U_{ref}}{U_B} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

R_4 wählen -> R_3 berechnen

z.B. $U_{ref} = 2V$
$U_B = \pm 12V$

$$\frac{2}{12} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_3 \frac{2}{12} = \left(1 - \frac{2}{12}\right) R_4 = \frac{10}{12} R_4$$

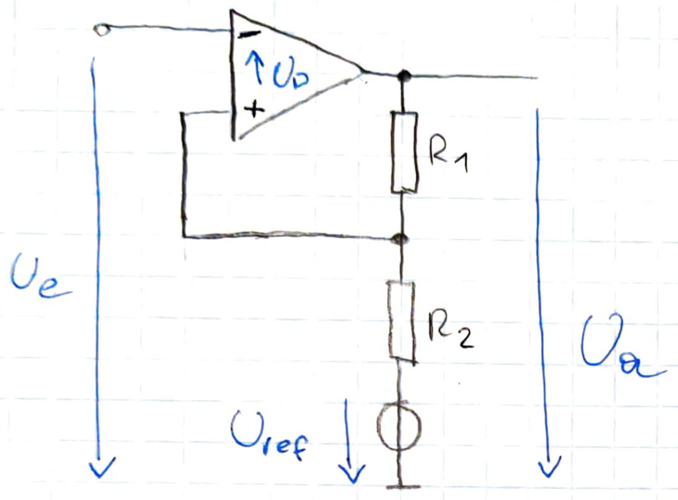
$$R_3 = 5\,R_4 \qquad R_4 \text{ z.B. } 1k$$

-> $R_3 = 5k$

Hysterese

$$U_H = U_{e,ein} - U_{e,aus} = U_T^+ - U_T^-$$

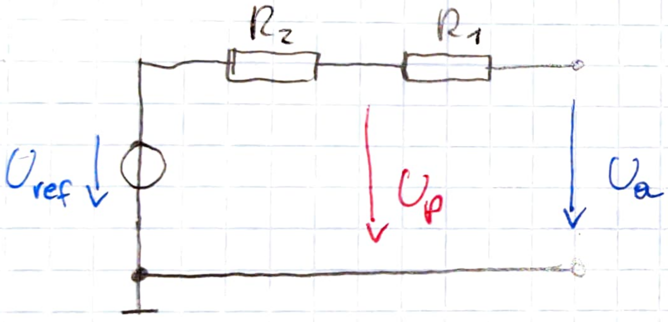
Invertierenden Schmitt-Trigger



$$U_D = U_p - U_n \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \quad U_n = U_p$$

$$U_e = U_p$$



U_p mit Helmholtz

$$U_p = U_p' + U_p'' = U_{ref} \frac{R_1}{R_1+R_2} + U_a \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$U_e = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{ref} + U_a \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$U_{e,ein} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{ref} + \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{a,min}$$

$$U_{e,aus} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{ref} + \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{a,max}$$

$$U_T^{+/-} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{ref} + \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{sat}^{-/+}$$

Bsp.: $U_{a,max} = -U_{a,min} = 10V$

$U_{e,ein} = 1V \qquad U_{e,aus} = 3V$

ges.: Dimensionierung

$$\text{I}: \quad U_{e,ein} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{ref} + \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{a,min}$$

$$\text{II}: \quad U_{e,aus} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{ref} + \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{a,max}$$

$$\text{II} - \text{I}: \quad U_{e,aus} - U_{e,ein} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(U_{a,max} - U_{a,min}\right)$$

$$3 - 1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(10-(-10)\right)$$

$$2R_1 + 2R_2 = 20 R_2 \quad \rightarrow \quad R_1 = 9 R_2$$

z.B. $R_2 = 1k$

$\rightarrow R_1 = 9k$

aus I v II:

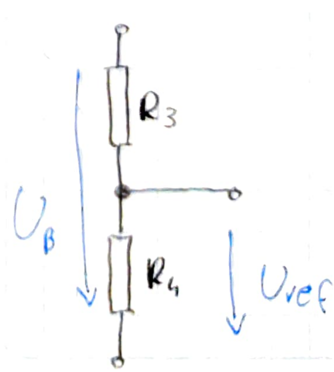
$$U_{e,aus} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{ref} + \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{a,max}$$

$$3 = \frac{9}{10} U_{ref} + \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10}$$

$$2 = \frac{9}{10} U_{ref} \quad \rightarrow \quad \frac{20}{9} = 2{,}\dot{2}\,V = U_{ref}$$

$\rightarrow$ Simulation in LTspice TL084 $U_B \approx \pm 11V$

U_{ref} durch Spg. Teiler ersetzen:



1)

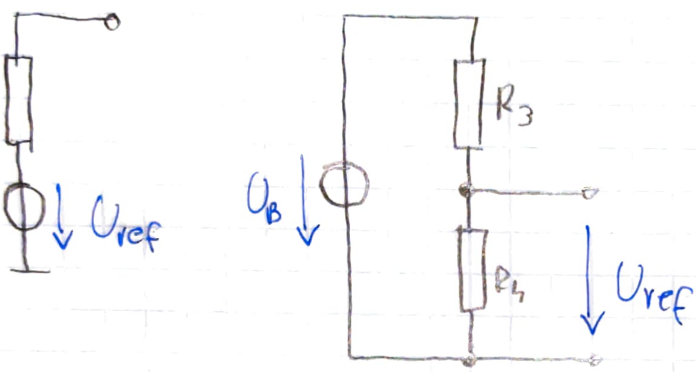
$$\frac{U_{ref}}{U_B} = \frac{R_4}{R_3+R_4}$$

$$R_4 = (R_3+R_4)\,\frac{2{,}22}{11{,}5}$$

$$\frac{2,22}{11,5} R_3 = \frac{11,5-2,22}{11,5} R_4 = \frac{9,28}{11,5} R_4$$

$$R_3 = \frac{9,28}{2,22} R_4 = 4,18\ R_4$$

2)



$$R_i = R_2 \qquad\qquad R_i = R_3 \,||\, R_4$$

$$R_2 = \frac{R_3 R_4}{R_3+R_4} = \frac{4,18\ R_4^{\cancel{2}}}{5,18\ \cancel{R_4}}$$

$$\frac{5,18}{4,18} R_2 = R_4$$

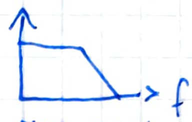
$$R_4 = 1239\ \Omega \quad \rightarrow \quad R_3 = 4,18 \cdot R_4 = 5,18\ k\Omega$$

Messkette

Temp. messung im Raum

Pt 100

0.1 Hz
alle 10 sek



TP Filter

$f_g = 1\,Hz$

wäre $f_g = 0{,}1\,Hz$ dann hätte man bei einem passiven TP Filter am Ausgang nur noch $-3\,dB \mathrel{\hat{=}} 70{,}7\,\%$ vom Eingangssign.
TP Filter außerdem dazu Störsignale zu unterdrücken.
z.B. auch der sog. Netzbrumm (50 Hz)

Abtastfrequenz AD-Wandler

$f_A > 2 \cdot f_g$

in der Praxis 5 - 10 ×

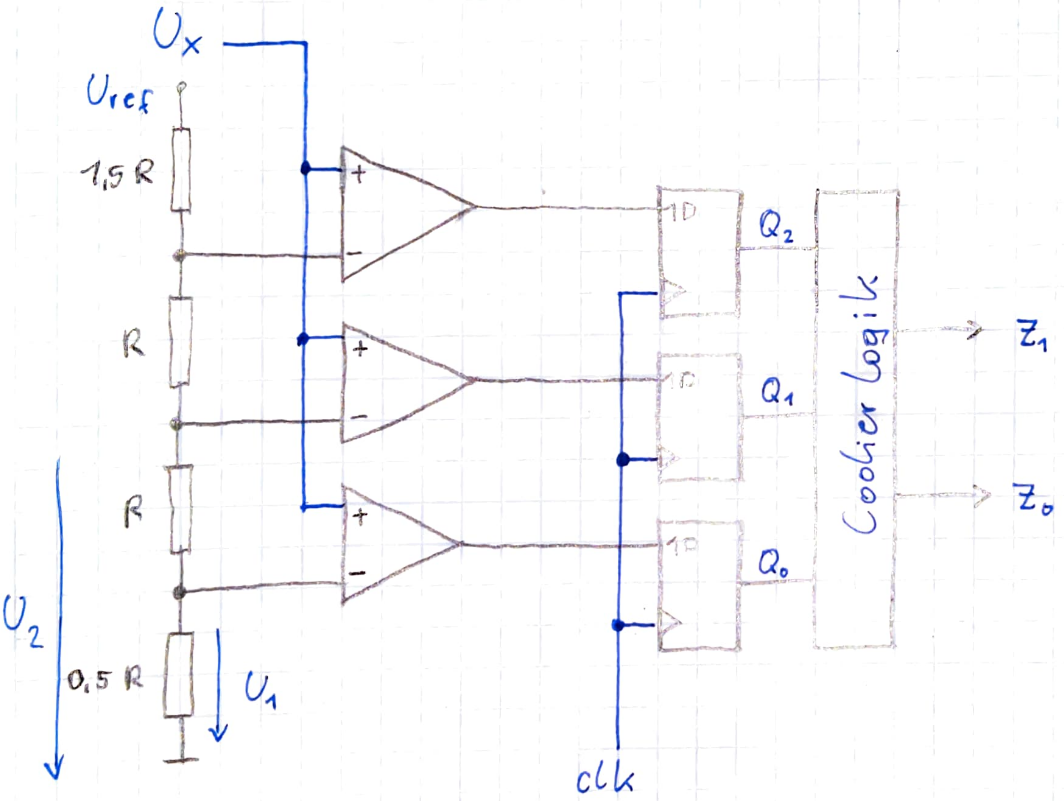
$f_A = 10\,Hz$

Bsp.: 2-Bit-Flash Konverter:

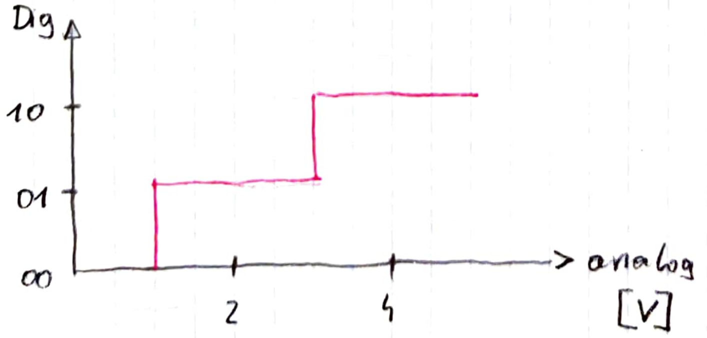
Spannungsbereich / Messbereich / Wertebereich 0...8V

$$U_{LSB} = \frac{WB}{2^n} = \frac{8}{2^2} = \frac{8}{4} = 2V$$

benötigte Komperatoren $2^n - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$



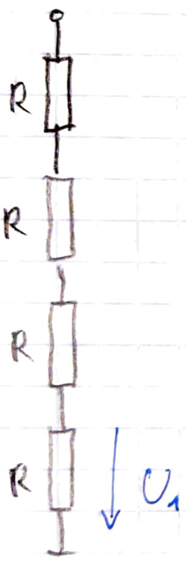
$$\frac{U_1}{U_{ref}} = \frac{0{,}5\,R}{4\,R} \rightarrow U_1 = U_{ref} \cdot \frac{0{,}5}{4} = 8 \cdot \frac{0{,}5}{4} = 1V$$



Wie viele Komperatoren werden bei einem 8-Bit-FC benötigt? $2^n - 1 = 2^8 - 1 = 255$

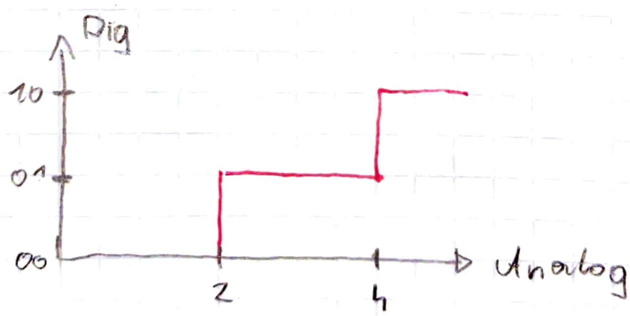
Eingangsspannungsbereich U_x	Q_2	Q_1	Q_0	Z_1	Z_0
0V … ≤ 1V	0	0	0	0	0
> 1V … ≤ 3V	0	0	1	0	1
> 3V … ≤ 5V	0	1	1	1	0
> 5V	1	1	1	1	1

Was wäre, wenn alle Wdst. gleich groß wären

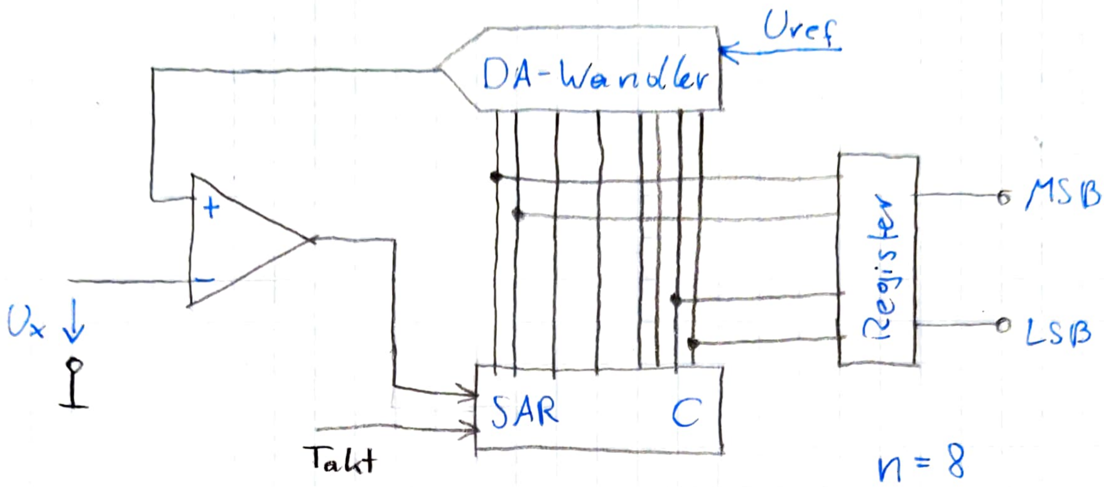


$$U_1 = U_{ref} \cdot \frac{1}{4} = 2V$$

0V … ≤ 2V	000	00
> 2V … ≤ 4V	001	01
> 4V … ≤ 6V	011	10
> 6V	111	11



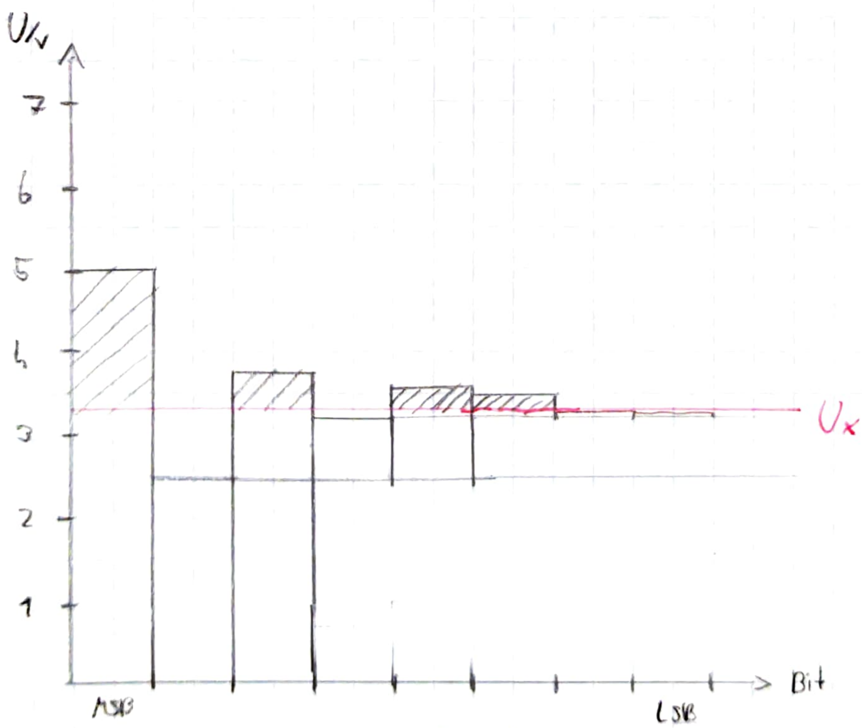
Sukzessive Approximation



$n = 8$

Bsp.: $U_{ref} = 10\,V$ $\quad U_x = 3{,}25\,V$

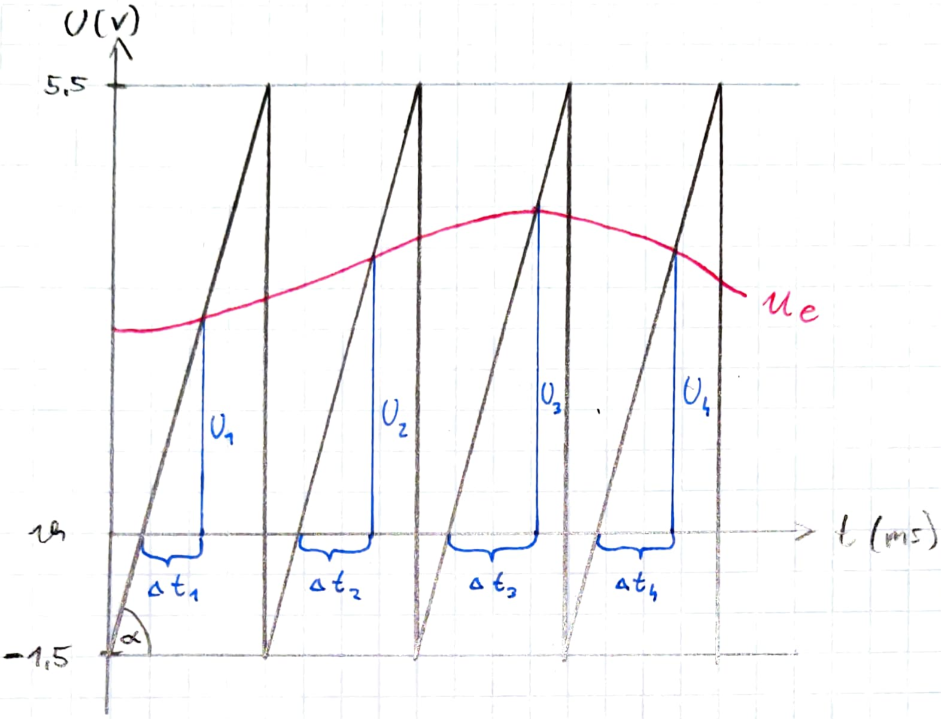
U_{MSB}	U_6	U_5	U_4	U_3	U_2	U_1	U_{LSB}
$\frac{U_{ref}}{2}$	$\frac{U_{ref}}{2^2}$	$\frac{U_{ref}}{2^3}$	$\frac{U_{ref}}{2^4}$	$\frac{U_{ref}}{2^5}$	$\frac{U_{ref}}{2^6}$	$\frac{U_{ref}}{2^7}$	$\frac{U_{ref}}{2^8}$
5 V	2,5 V	1,25 V	625 m	312,5 m	156,25 m	78,125 m	39,06 m



0 1 0 1 0 0 1 1

$$U_x = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 2{,}5 + 0 \cdot 1{,}25 + 1 \cdot 0{,}625 + 0 \cdot 0{,}3125 +$$
$$0 \cdot 0{,}15625 + 1 \cdot 0{,}078125 + 1 \cdot 0{,}03906$$

Sägezahngenerator



α bzw. $\tan(\alpha)$ ist durch d. Sägezahngen. vorgegeben.

$$\tan\alpha = \frac{GK}{AnK} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

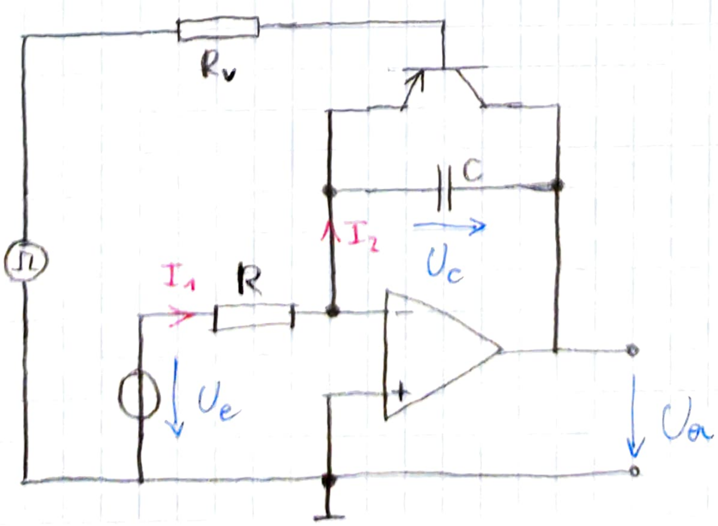
Δt ... wird durch Zähler bestimmt/ermittelt

↳ $U_1 = \Delta t_1 \cdot \tan(\alpha)$

$U_2 = \Delta t_2 \cdot \tan(\alpha)$

$\vdots$

Schaltung



wenn der Trans. schaltet

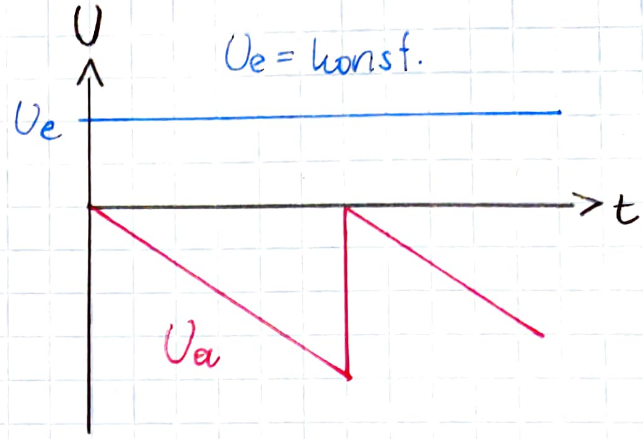
↳ Kondensator wird kurzgeschlossen und entladen

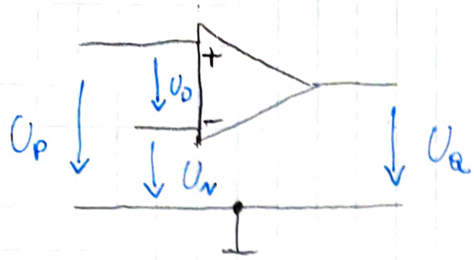
$I_1 = I_2$

$$\frac{U_e}{R} = -C \cdot \frac{dU_a}{dt}$$

$$U_a = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_e \, dt$$

$\frac{1}{RC}$ ... Steigung

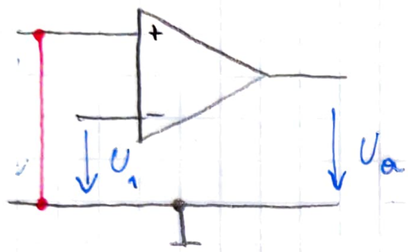




$U_a = V_D \cdot U_D$

U_a ist pos. wenn U_D = pos.

$U_D = U_P - U_N$



Welches Vorzeichen muss U_1 haben, damit $U_D > 0$?

$U_D = U_P - U_N > 0$

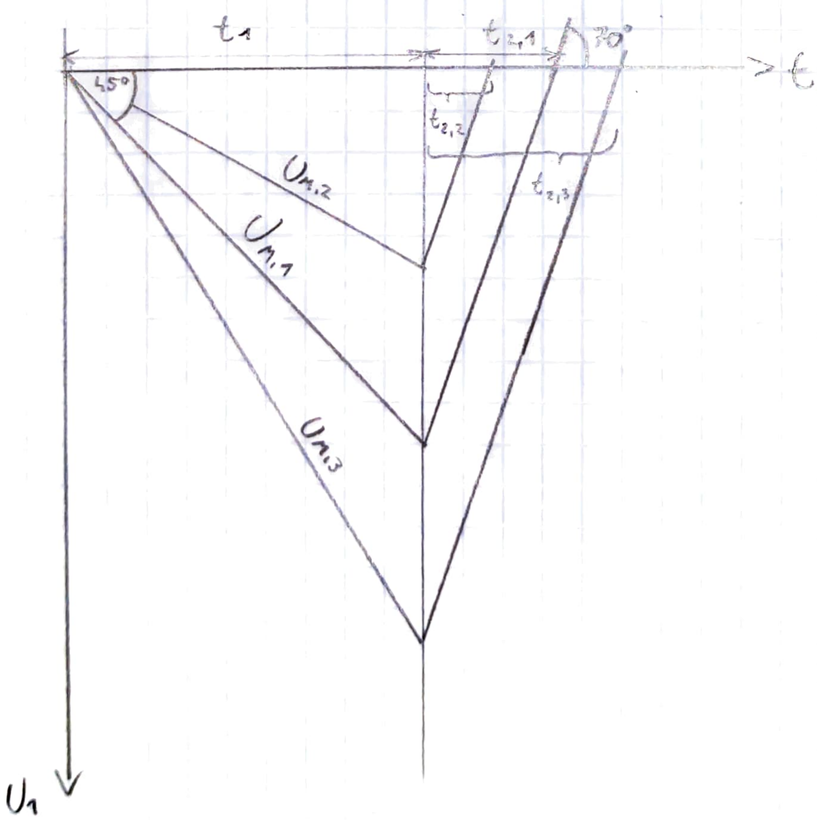
$0 - U_1 > 0$

$-U_1 > 0$

$\underline{\underline{0 > U_1}}$

$-U_1 > 0 \quad | \cdot (-1)$

$\underline{\underline{U_1 < 0}}$



$U_{M,1} > U_{M,2}$

$U_{M,1} < U_{M,3}$

Die rel. Abweichung infolge der Quantisierung

Mit n-Bit kann ein diskreter Wertebereich von $0 - (2^n - 1) \cdot 1\,LSB = (2^n - 1) \cdot \frac{MB}{2^n}$ dargestellt werden.

Bsp.: 3-Bit AD-Wandler

MB 0 ... 8 V

$$1LSB = \frac{MB}{2^n} = \frac{8}{2^3} = 1V$$

$$U_a = 0 \; \ldots \; (2^n - 1) \cdot 1LSB$$

$$0 \; \ldots \; (2^3 - 1) \cdot 1V = 7V$$

Relativer Fehler ist dann der absolute Fehler bezogen auf diesen Wertebereich

$$F_{rel} = \frac{F_{abs}}{(2^n - 1) \cdot 1LSB} = \frac{1\,LSB}{(2^n - 1) \cdot 1LSB} = \frac{1}{2^n - 1} \quad \left(\approx \frac{1}{2^n}\right)$$

Bsp.: Für einen AD-Wandler mit 8-Bit ist der rel. Fehler infolge der Quantisierung anzugeben.

$$F_{rel} = \frac{1}{2^n - 1} = \frac{1}{2^8 - 1} = \frac{1}{256 - 1} = \frac{1}{255} = 0{,}0039$$

$$\hat{=} \; 0{,}39\ \%$$

Bsp.: Die rel. Abweichung infolge der Quantisierung soll kleiner 0,02 % betragen. Welche Auflösung muss mind. verwendet werden?

$$F_{rel} = \frac{1}{2^n - 1} < 0,0002$$

$$2^n - 1 > \frac{1}{F_{rel}}$$

$$n \cdot \ln(2) > \ln\left(\frac{1}{F_{rel}} + 1\right)$$

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{F_{rel}} + 1\right)}{\ln(2)}$$

$$n > 12,29$$

Es müssen mehr als 12-Bit verwendet werden.

Messauflösung unter dem Einfluss von Rauschen

Analoge Sensoren liefern theoretisch für jeden physikalischen Messwert die zugehörige elektrische Größe. Dennoch ist es nicht möglich beliebig genau zu messen, da das zu messende Signal mit Rauschen behaftet ist. Der Rauschpegel ist meist höher als die Auflösung des AD-Wandlers, wodurch die hohe Auflösung des AD-Wandlers bei weitem nicht genutzt werden kann.

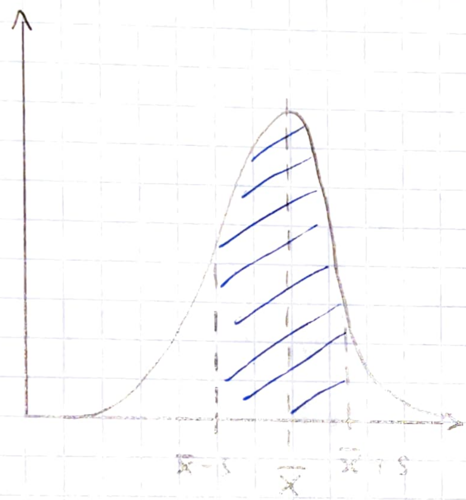
Bsp.: $n = 16$ - Bit

$MB = 10\,V$

Rauschen: $U_{eff} = 1\,mV$

$$1\,LSB = \frac{MB}{2^n} = \frac{10\,V}{2^{16}} = 152\,\mu V$$

empirische Standardabweichung s entspricht U_{eff}



68,3 % im Bereich $\bar{x} \pm s$

99 % aller Messwerte sind in $6{,}6 \cdot s$ enthalten.

$\rightarrow U_{pp} = 6{,}6 \cdot U_{eff}$

k - Spannungsstufen, welche durch das Rauschen verloren gehen

$$k = \frac{U_{pp}}{LSB} = \frac{6{,}6 \cdot U_{eff}}{152\,\mu V} = \frac{6{,}6\,\cancel{mV}}{0{,}152\,\cancel{mV}} = 43{,}42$$

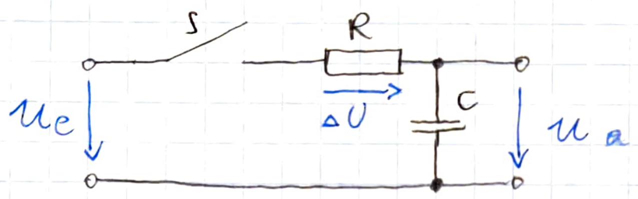
$k = 2^{rb}$ rb … verrauschten Bits

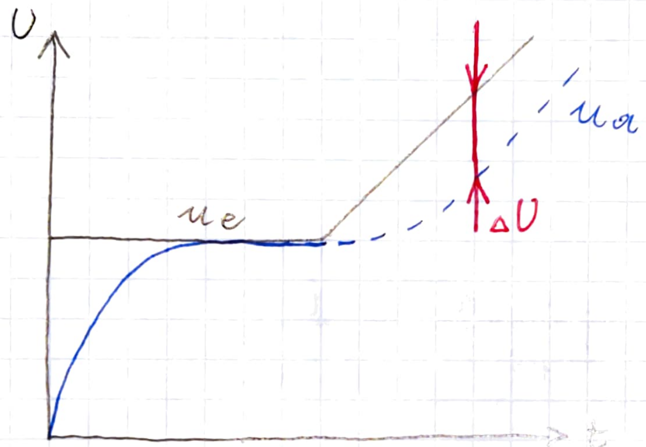
$$rb = \log_2(k) = \log_{10}\left(\frac{k}{\log_{10}(2)}\right)$$

$$= \frac{\lg(43{,}4)}{\lg(2)} = 5{,}44$$

Es bleiben somit $rfb = n - rb = 16 - 5{,}44 = 10{,}56$
10 rauschfreie Bits übrig.

Nachziehfehler





$$\Delta U = R \cdot i = R \cdot C \cdot \frac{du_a}{dt}$$

$$[As] \; \overset{KU}{Q} = C \cdot U$$

$$I \cdot t = C \cdot U$$

$$I = C \cdot \frac{U}{t}$$

$$U_a = U_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$\Delta U = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} U_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = R \cdot C \cdot \frac{dU_e}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Ist die Abtastzeit (Schalter s geschlossen) sehr viel größer als die Zeitkonst. $\tau = R \cdot C$ des Wandlereingangs, dann wächst der Nachziehfehler auf dem statischen Maximalwert von $\Delta U = R \cdot C \cdot \frac{dU_e}{dt}$

Bsp.: Ein A/D-Wandler hat eine Eingangskap. von 10 pF und einen Eingangswiderstand von 100 Ω. a) Wie groß ist der max. Nachziehfehler bei einem rampenförmigem Eingangssig mit $\frac{dU_e}{dt} = \frac{0{,}2\,V}{\mu s}$

$$\Delta U = R \cdot C \cdot \frac{dU_e}{dt} = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}2}{10^{-6}}$$

$$= 10^{3} \cdot 10^{-12} \cdot 10^{6} \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0{,}2\ mV}}$$

Einschub

$$\log_2(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(2)} = \frac{\lg(a)}{\lg(2)}$$

$$-\ln(a) = -1 \cdot \ln(a) = \ln(a^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

---

b) Nach welcher Abtastdauer ist dieser Maximalwert bis auf 1% erreicht?

$$\Delta U = R \cdot C \cdot \frac{dU_e}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}01$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0{,}01) \rightarrow t = -\tau \cdot \ln(0{,}01)$$

$$= -\tau \cdot \ln\left(\frac{1}{0{,}01}\right)$$

$$= \tau \cdot \ln(100)$$

$$= 100 \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot \ln(100)$$

$$= 4{,}6\ ns$$

c) Welcher Nachziehfehler ergibt sich bei der Abtastung eines sinusförmigen Wechselsignals mit einer Amplitude 2,5 V und einer Frequenz von 8 kHz, wenn die Abtastung im Nulldurchgang erfolgt und 10 ns dauert?

$u(t) = U_p \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$ ... besitzt im Nulldurchgang den größten Anstieg mit

$$\frac{du(t)}{dt} = U_p \cdot 2\pi f \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$$

$$= 2{,}5 \cdot 2\pi \cdot 8000 \cdot \cos(2\pi \cdot 8000 \cdot 0)$$

$$= 2{,}5 \cdot 2\pi \cdot 8000 \cdot 1 = 5\pi \cdot 8000$$

$$= 125663 \ \frac{V}{s} \triangleq 0{,}125 \ \frac{V}{\mu s}$$

Mit $t_a = 10$ ns ergibt sich

$$\Delta U = R \cdot C \cdot \frac{dU_e}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

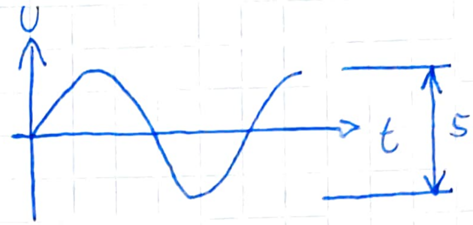
$$= \underbrace{100 \cdot 10 \cdot 10^{-12}} \cdot 125663 \left(1 - e^{-\frac{10 \cdot \cancel{10^{-9}}}{\cancel{10^{-9}}}}\right)$$

$$= 10^{-9} \cdot 125663 \left(1 - e^{-10}\right)$$

$$= 0{,}125 \text{ mV}$$

Der Nachziehfehler sollte kleiner $0{,}5 \cdot LSB$ sein

$$0{,}5 \cdot U_{LSB} < \Delta U$$



$\rightarrow U_{ref} = 6V$ gewählt

$$0{,}5 \cdot \frac{U_{ref}}{2^n} < \Delta U$$

$$0{,}5 \cdot \frac{U_{ref}}{\Delta U} < 2^n$$

$$\log_2\left(0{,}5 \cdot \frac{U_{ref}}{\Delta U}\right) < n$$

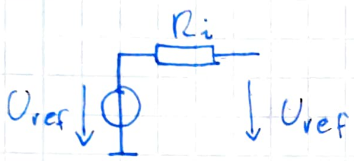
$$\log_2\left(0{,}5 \cdot \frac{6}{0{,}125 \cdot 10^{-3}}\right) = \log_2\left(\frac{3000}{0{,}125}\right) = \frac{\lg\left(\frac{3000}{0{,}125}\right)}{\lg(2)}$$

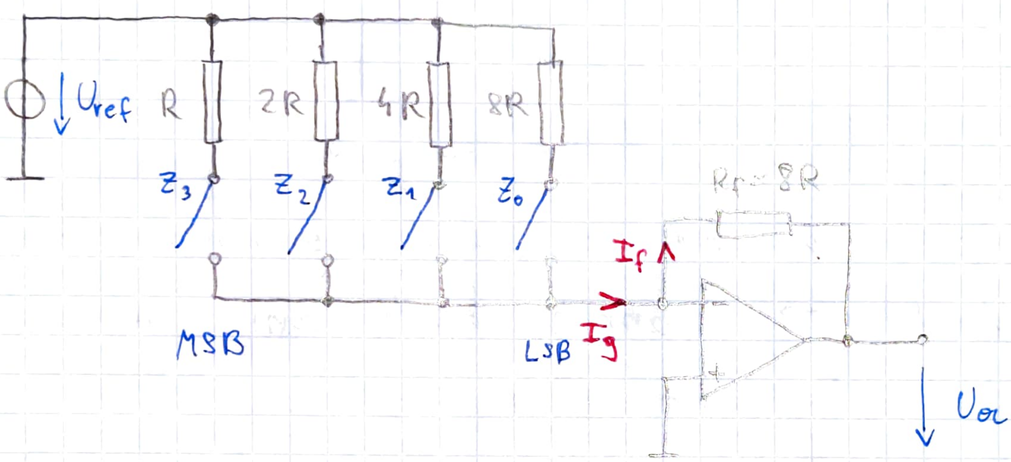
$$= 14{,}5 < n \rightarrow$$ z.B. 15-Bit A/D-Wandler

Digital - Analog - Wandler

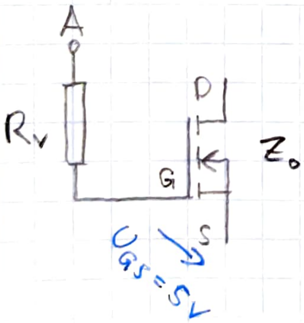
DAC mit gewichteten Strömen

(gewichtetes Widerst. netzwerk)





anstelle Schalter:



$$I_g = I_f$$

$$Z_3 \cdot \frac{U_{ref}}{R} + Z_2 \frac{U_{ref}}{2R} + Z_1 \frac{U_{ref}}{4R} + Z_0 \frac{U_{ref}}{8R} = -\frac{U_a}{8R}$$

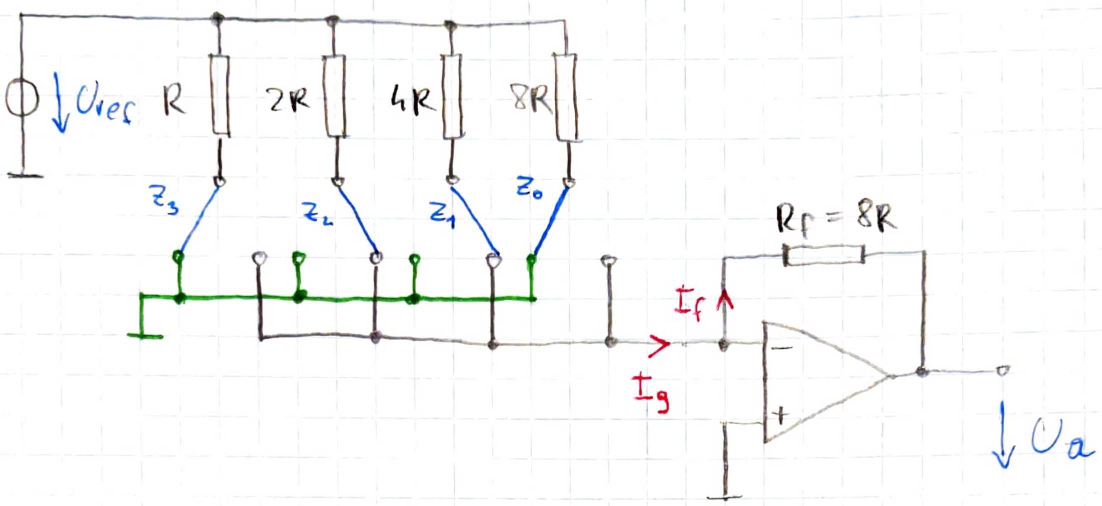
$$Z_3 \cdot 8 \cdot U_{ref} + Z_2 \cdot 4 \cdot U_{ref} + Z_1 \cdot 2 \cdot U_{ref} + Z_0 \cdot U_{ref} = -U_a$$

$$U_a = -(Z_3 \cdot 8 + Z_2 \cdot 4 + Z_1 \cdot 2 + Z_0) U_{ref} = D \cdot U_{ref}$$

$$D = -[8 z_3 + 4 z_2 + 2 z_1 + z_0]$$

Ein Nachteil dieser Schaltung ist, dass die Belastung der Spannungsquelle je nach Wert der Zahl (Kombination v. z_0, z_1, z_2, z_3) variiert → Spannungsabfall am Innenwid. R_i ist je nach Bel. untersch. und daher auch U_{ref}

Abhilfe: Umschalten zwischen Masse und Summationspunkt des OPV.



U_{ref} wird immer mit dem gleichen Widerstand belastet → Spannungsabfall am Innenwid. R_i ist somit immer gleich groß.
Zur Realisierung hoher Auflösung müssen Widerstände mit stark unterschiedlichen Werten verwendet werden.

z.B. $n = 16$ Bit, $R_0 = 10k$

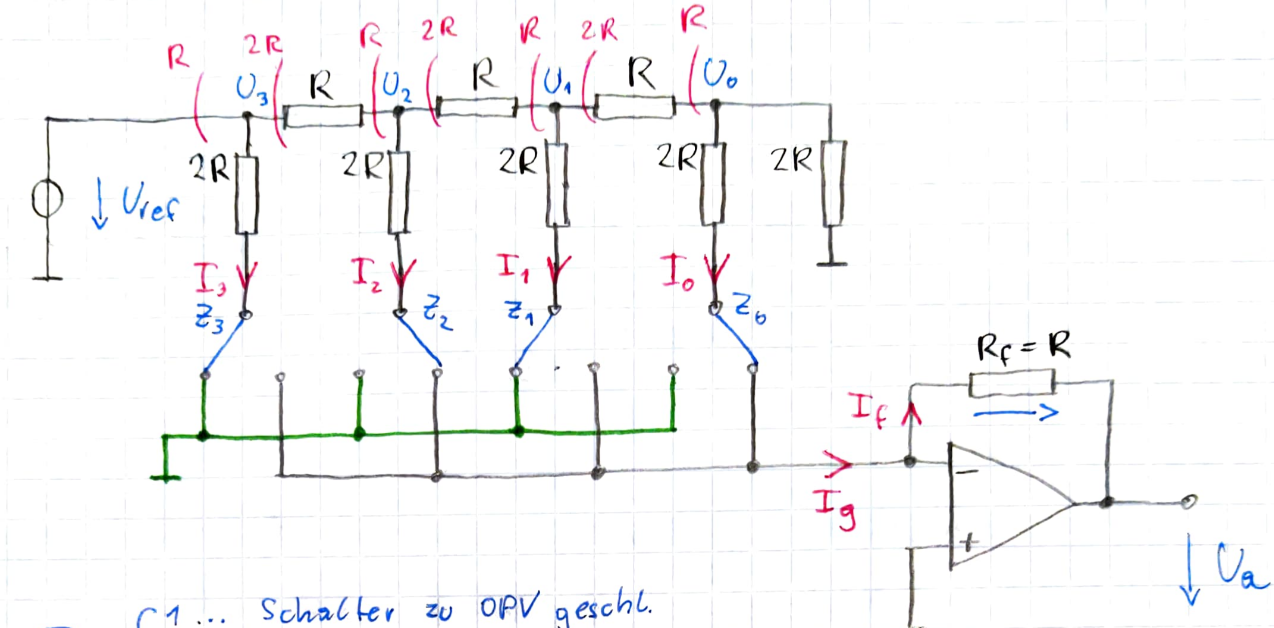
$$R_{min} = R = 2^0 \cdot R_0 = R_0 = 10\,k\Omega$$

$$R_{max} = 2^{n-1} \cdot R_0 = 2^{15} \cdot 10k = 327\ M\Omega$$

→ Dies führt zu Schwierigkeiten

Abhilfe schafft das sogenannte R-2R-Netzwerk

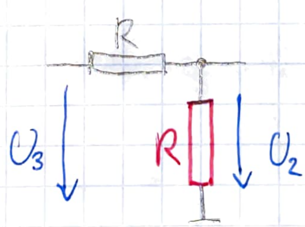
DAC mit R-2R-Netzwerk



$$Z = \begin{cases} 1 \ldots \text{ Schalter zu OPV geschl.} \\ 0 \end{cases}$$

Zur Realisierung ist nur ein Widerstandswert nötig (2R durch Seriensch. von R)

$U_3 = U_{ref}$



$$U_2 = \frac{U_3}{2} = \frac{U_{ref}}{2}$$

$$U_1 = \frac{U_2}{2} = \frac{U_{ref}}{4}$$

$$U_0 = \frac{U_1}{2} = \frac{U_{ref}}{8}$$

Netzwerk stellt eine fortlaufende Spannungsteilung um den Faktor $\frac{1}{2}$ dar. Der Eingangswid. der Schaltung ist immer gleich R → Quelle wird immer gleich belastet.

$$I_g = I_f = -\frac{U_a}{R_f}$$

$$U_a = -I_g \cdot R = -\left[Z_3 \frac{U_3}{2\cancel{R}} + Z_2 \frac{U_2}{2\cancel{R}} + Z_1 \frac{U_1}{2\cancel{R}} + Z_0 \frac{U_0}{2\cancel{R}}\right] \cancel{R}$$

$$= -\left[Z_3 \frac{U_3}{2} + Z_2 \frac{U_2}{2} + Z_1 \frac{U_1}{2} + Z_0 \frac{U_0}{2}\right]$$

$$= -\left[Z_3 \cdot \frac{U_{ref}}{2} + Z_2 \frac{U_{ref}}{4} + Z_1 \frac{U_{ref}}{8} + Z_0 \frac{U_{ref}}{16}\right]$$

$$U_a = -\frac{U_{ref}}{16}\left[8 Z_3 + 4 Z_2 + 2 Z_1 + Z_0\right]$$

Die Schaltung eignet sich gut zur Herstellung monolitisch integrierten Schaltkreisen (CMOS-Techn.).