Wiederholungsaufgaben 3. Klasse

1) $g(x) = \frac{1}{360} x^2$

a)

$g'(x) = \frac{1}{180} x$

$g'(90) = \frac{1}{180} \cdot 90 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \mathrel{\hat{=}} 50\%$

b)

$R = (40 / g(40)) = (40 / \frac{40}{9})$

$g(40) = \frac{1}{360} \cdot 40^2 = \frac{40}{9}$

$g'(40) = \frac{1}{180} \cdot 40 = \frac{2}{9}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{9}\right) \approx 12{,}529°$

c) $h(x) = ax^2 + bx + c$

$h'(x) = 2ax + b$

I: $h'(580) = 0 \rightarrow 2a \cdot 580 + b = 0$

II: $h'(480) = 0{,}5 \rightarrow 2a \cdot 480 + b = 0{,}5$

III: $245 = 580^2 a + 580 b + c$

$a = -\frac{1}{360}, \quad b = \frac{29}{9}, \quad c = -\frac{6205}{9}$

$h(x) = -\frac{1}{360} x^2 + \frac{29}{9} x - \frac{6205}{9}$

2)

$$K(x) = \sqrt{100^2 + x^2} \cdot 1400 + (1500 - x)\,1000$$

$$K(x) = (100^2 + x^2)^{1/2} \cdot 1400 + (1500 - x) \cdot 1000$$

$$K'(x) = 2x \cdot (100^2 + x^2)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1400 - 1000$$

$$K'(x) = \frac{x}{\sqrt{100^2 + x^2}} \cdot 1400 - 1000$$

$$0 = \frac{x}{\sqrt{100^2 + x^2}} \cdot 1400 - 1000$$

TR: $x \approx 102,062$

$$K(102,062) = \sqrt{100^2 + 102,062^2} \cdot 1400 + (1500 - 102,062)\,1000$$

$$K(102,062) = 1597979,59 \text{ €}$$

Die Verlegung des Fernheizsystems kostet mindestens ~ 1,597 Millionen Euro.

Randwerte:

$$K(0) = \sqrt{100^2 + 0} \cdot 1400 + (1500 - 0) \cdot 1000 = 1640\,000$$

$$K(1500) = \sqrt{100^2 + 1500^2} \cdot 1400 + 0 \cdot 1000 = 2104661$$

3) $\int (3x+1) \cdot e^{0{,}5x+1} \, dx$

$u = 0{,}5x+1$

$u' = \frac{du}{dx} = 0{,}5$

$\downarrow$

$dx = \frac{du}{2}$

$= \int (3x+1)\, dx \cdot \int e^{u} \frac{du}{2}$

$= 3 \cdot \frac{1}{2} \int e^{u} \, du$

$= \frac{3}{2} \cdot e^{u}$

$= \frac{3}{2} \cdot e^{0{,}5x+1}$

$\int \overbrace{(3x+1)}^{u} \cdot \overbrace{e^{0{,}5x+1}}^{v'} \, dx$

$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$u = 3x+1$

$a = 0{,}5x+1 \qquad a' = \frac{da}{dx} = 0{,}5$

$u' = 3$

$v = \int e^{0{,}5x+1} dx = \int e^{a} \cdot 2\, da$

$v' = 0{,}5x+1$

$v = 2e^{a} = 2e^{0{,}5x+1}$

$(3x+1) \cdot 2e^{0{,}5x+1} - \int 3 \cdot 2e^{0{,}5x+1}$

$= 2(3x+1)\, e^{0{,}5x+1} - 6 \int e^{0{,}5x+1}$

$= 2(3x+1)\, e^{0{,}5x+1} - 6 \cdot 2 \cdot e^{0{,}5x+1} + c$

$= 2(3x+1)\, e^{0{,}5x+1} - 12\, e^{0{,}5x+1} + c$

4) $\int_0^a (f(x) - g(x))\,dx + (b-a)\,c - \int_a^b g(x)\,dx$

$f(x) = 1{,}033\,x^3 - 2{,}26\,x^2 + 1{,}237\,x + 0{,}1$
$g(x) = 1{,}033\,x^3 - 2{,}26\,x^2 + 1{,}237\,x$

$f'(x) = 3 \cdot 1{,}033\,x^2 - 2 \cdot 2{,}26\,x + 1{,}237$
$f'(x) = 3{,}099\,x^2 - 4{,}52\,x + 1{,}237$

$0 = 3{,}099\,x^2 - 4{,}52\,x + 1{,}237$

✓ $x_1 = 1{,}0935$
$x_2 = 0{,}365$

$f''(x) = 2 \cdot 3{,}099\,x - 4{,}52$
$f''(x) = 6{,}198\,x - 4{,}52$

✓ $f''(1{,}0935) = 6{,}198 \cdot 1{,}0935 - 4{,}52 = 2{,}257$
$f''(0{,}365) = 6{,}198 \cdot 0{,}365 - 4{,}52 = -2{,}257$

$f(1{,}0935) = 1{,}033\,x^3 - 2{,}26\,x^2 + 1{,}237\,x + 0{,}1$
$f(1{,}0935) = 0{,}100975$

$T = (1{,}0935 \,/\, 0{,}100975)$

$k = f'(1{,}6) = 3{,}099 \cdot 1{,}6^2 - 4{,}52 \cdot 1{,}6 + 1{,}237 = 1{,}93844$

$\alpha = \arctan(k) = \arctan(1{,}93844) = 62{,}712^\circ$

Die beiden Funktionen haben die gleichen Werte. $f(x)$ ist lediglich um 0,1 entlang der y-Achse verschoben. Da dadurch die 0,1 beim Ableiten entfallen, sind die abgeleiteten Funktionen gleich.

5) $v(0) = 30 \frac{km}{h} \triangleq \frac{25}{3} \frac{m}{s}$

$$\int_0^t 2 \frac{m}{s^2} \, dx = v(t) - v(0)$$

$$[2x]_0^t = v(t) - v(0)$$

$$2t = v(t) - \frac{25}{3}$$

$$v(t) = 2t + \frac{25}{3}$$

$$\int_0^t \left(2x + \frac{25}{3}\right) dx = s(t) - s(0) \qquad s(0) = 0$$

$$\left[x^2 + \frac{25}{3}x\right]_0^t = s(t)$$

$$t^2 + \frac{25}{3} t = s(t)$$

$$60 = t_0^2 + \frac{25}{3} t_0$$

$$0 = t_0^2 + \frac{25}{3} t_0 - 60$$

TR: $t_1 = 4{,}6288\ldots$

$t_2 = -12{,}96\ldots$ -> kein Sinn

$$v(t_1) = v(4{,}6288) = 2 \cdot 4{,}6288 + \frac{25}{3} = 17{,}591 \frac{m}{s}$$

$$\triangleq 63{,}33$$

Bewegungen

inkl. vorheriges Bsp.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \left[s(t)\right]\Big|_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1)$$

Ortsänderung zwischen t_1 & t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = \left[v(t)\right]\Big|_{t_1}^{t_2} = v(t_2) - v(t_1)$$

Geschwindigkeitsänderung zwischen t_1 & t_2

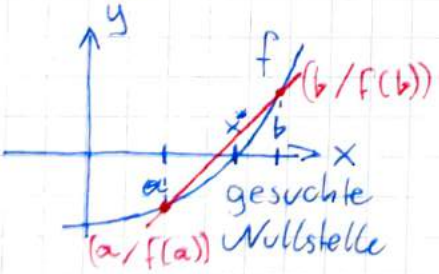
Numerische Verfahren

nicht-lineare-Glg. -> lösen mit Näherungsverf.

umformen auf $f(x) = 0$ -> lösen der Glg. ist Auffinden der Nullstellen der Fkt.

durch gezieltes Probieren bzw. Iterationsverfahren

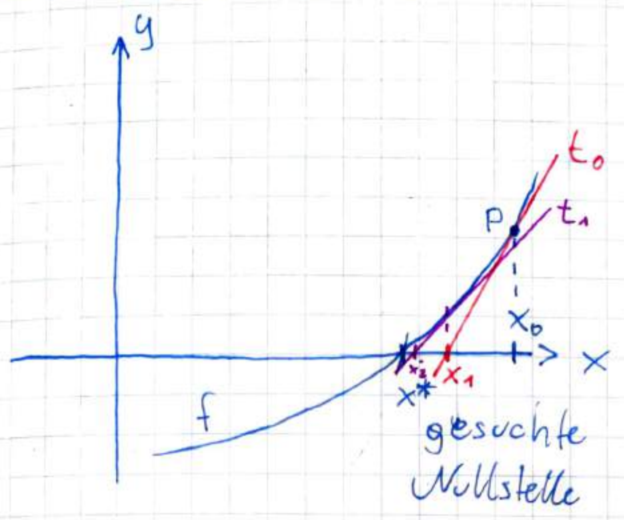
Regula-falsi-Verfahren



$f(a) < 0$

$f(b) > 0$

Newton-Verfahren



$f(x) = 0$

x^* ... gesuchte Nullstelle

wähle x_0 nahe genug bei x^*

- an der Stelle x_0 wird Graph der Fkt. durch Tangente ersetzt.
- erhalte x_1 (Schnitt der t_0 mit x-Achse als ersten Näherungswert
- Schritt wiederholen mit x_n

Berechnung:

- Steigung der Tangente an Stelle x_0: $k = f'(x_0)$
- Punkt $P = (x_0/y_0)$ liegt auf der Tangente
  -> einsetzen: $y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + d$
  auf d umformen: $d = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$
- Tangentengleichung t_0:
  $y = f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$
- $y = 0$ um Nullstelle x_1 zu berechnen:
  $0 = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$
  $f'(x_0)x_0 = f'(x_0)x + y_0$
  $f'(x_0)x_0 - y_0 = f'(x_0)x$
  $$x = \frac{f'(x_0)x_0 - y_0}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Nennen diese Nullstelle x_1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$$

8.2

$$f(x) = 3{,}2 - 3x^2 + x^3 = 0$$

Vermutung: Nullstelle bei $x_0 = 1{,}5$ dm

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}5 - \frac{3{,}2 - 3 \cdot 1{,}5^2 + 1{,}5^3}{3 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5}$$

$$x_1 \approx 1{,}4222\dots$$

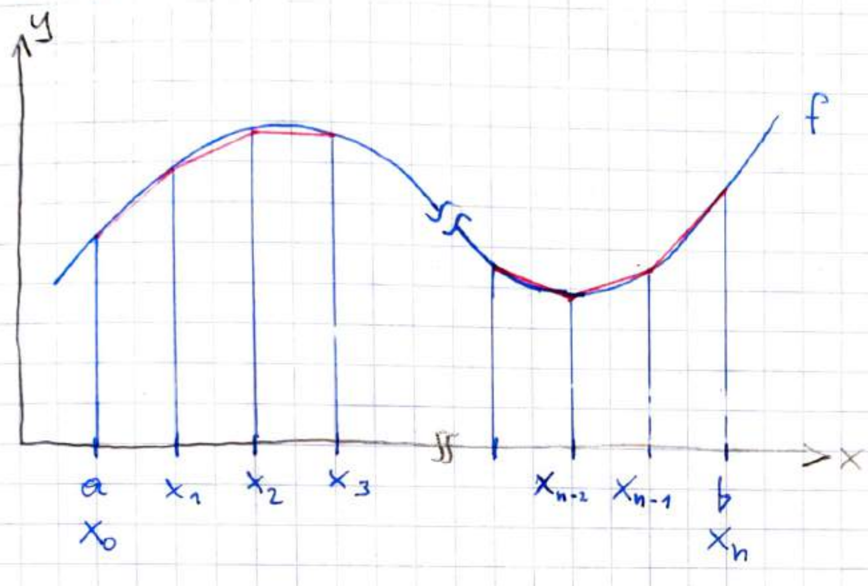
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{64}{45} - \frac{3{,}2 - 3 \cdot \left(\frac{64}{45}\right)^2 + \left(\frac{64}{45}\right)^3}{3 \cdot \left(\frac{64}{45}\right)^2 - 6 \cdot \frac{64}{45}}$$

$$x_2 \approx 1{,}4257\dots$$

$\rightarrow$ 1,43 dm (auf mm gerundet)

Numerische Integration

- Ober- & Untersummen (bekannt, 3 Jg.)
- Trapezregel:



- f = positiv in $[a; b]$
- teile Integrationsintervall $[a; b]$ in Teilintervalle gleicher Breite

- Flächeninhalt als Summe von Trapezflächen
  ↳ $A_{trapez} = \frac{(a+c)h}{2}$, wobei $h = \Delta x$ (Breite Teilintervall)
  Parallelseiten a & c sind Funktionswerte an Rändern der Teilintervalle

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+ \dots + \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + \dots + 2\cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

8.24 $\int_0^2 x^2\,dx$, $n=4$ gleichbreite Intervalle

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\int_0^2 x^2\,dx \approx \frac{0{,}5}{2}\left[f(0) + 2f(0{,}5) + 2f(1) + 2f(1{,}5) + f(2)\right]$$

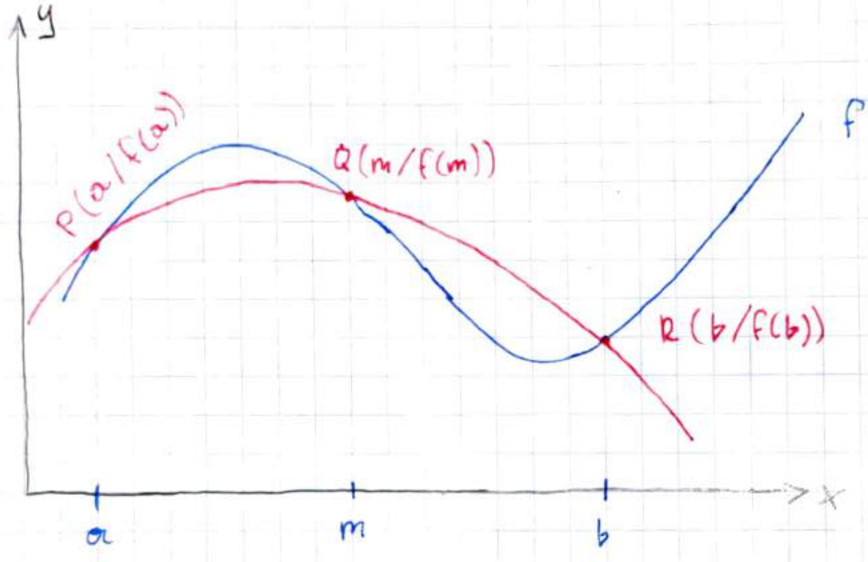
$$= 0{,}25\left[0{,}5^2 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1{,}5^2 + 2^2\right] = 2{,}75$$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}\dot{6}$$

· Kepler'sche Regel:

Graph der Funktion wird in $[a; b]$ durch Parabel genähert.

$$p(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$



Parabel durch Punkte P, Q, R aufstellen (wobei $m = \frac{a+b}{2}$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4(f(m)) + f(b)\right]$$

8.25 $\int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 4x + 1)\,dx$

$f(a) = f(0) = 1$

$f(b) = f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = 4$

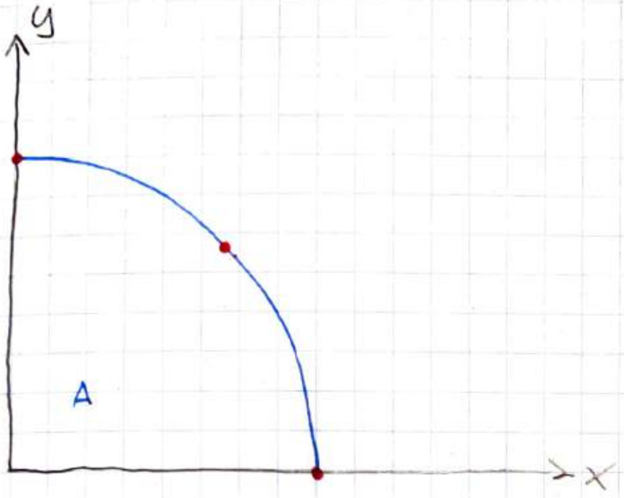
$f(m) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(1{,}5) = 1{,}375$

$$\int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 4x + 1)\,dx \approx \frac{3-0}{6}\left[1 + 4 \cdot 1{,}375 + 4\right] = 5{,}25$$

Bei quadratischen & kubischen Funktionen genau.

Bei höheren nur eine Näherung!

b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$



$f(0) = 1$

$f(1) = 0$

$f(0{,}5) = 0{,}866$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \approx \frac{1-0}{6}\left[1 + 4 \cdot 0{,}866 + 0\right] = 0{,}744$$

$$A = r^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$$

Simpson'sche Regel (S. 300):

8.27 f)

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = 2$$

$\Delta x = \frac{4}{2} = 2$, $n = 2$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx \approx \frac{2}{2}\left[f(0) + 2f(2) + f(4)\right]$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$\approx 2{,}2278$$

$n = 4$, $\Delta x = \frac{4}{4} = 1$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx \approx \frac{1}{2}\left[f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + f(4)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}}\right]$$

$$\approx 2{,}0692$$

$n = 8$, $\Delta x = \frac{4}{8} = 0{,}5$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx \approx \frac{0{,}5}{2}\left\{f(0) + 2\left[f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2) + f(2{,}5) + f(3) + f(3{,}5)\right] + f(4)\right\}$$

$$\approx 2{,}0191$$

Simpson:

8.28 a)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad , n=4$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left[f(0)+4f(0{,}25)+2f(0{,}5)+4f(0{,}75)+f(1)\right]$$

$$\approx 0{,}7680$$

b) $n=4$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \approx 1{,}1114$$

$$\approx \frac{1}{12}\left[f(0)+4f(0{,}25)+2f(0{,}5)+4f(0{,}75)+f(1)\right]$$

$$\approx 1{,}2843$$

c) $n=8$

$$\int_1^5 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx \approx 1{,}4471$$

$$\approx \frac{4}{24}\left[f(1)+4f(1{,}5)+2f(2)+4f(2{,}5)+2f(3)+4f(3{,}5)\right.$$
$$\left.+2f(4)+4f(4{,}5)+f(5)\right]$$

$$\approx 1{,}4473$$

Kepler:

a)

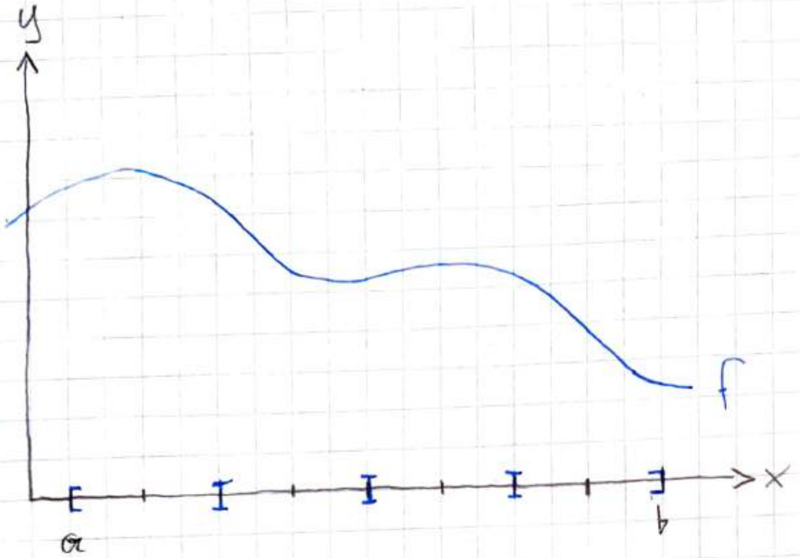
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(0{,}5)+f(1)\right] \approx 0{,}78\dot{3}3$$

b)

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(0{,}5)+f(1)\right] \approx 1{,}1085$$

c)

$$\int_1^5 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx \approx \frac{4}{6}\left[f(1)+4f(3)+f(5)\right] \approx 1{,}4281$$



- teile Integrationsintervall $[a; b]$ wieder in Teilintervalle (gleich breit & gerade Anzahl)
- so können jeweils 2 Teilintervalle zu einem Doppelintervall zusammengefasst werden.

-> Anwenden der Kepler'schen Regel $\frac{n}{2}$-mal

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3\cdot n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \ldots\right.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots\right]$$

8.26

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \quad , \quad n = 4$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \approx \frac{1-0}{3\cdot 4}\left[f(0) + 4f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 4f(0{,}75) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[1 + 4\sqrt{0{,}875} + 2\sqrt{0{,}75} + 4\sqrt{1-0{,}75^2} + 0\right]$$

$$= 0{,}7709$$

Mittelwerte von Funktionen

- linearer/arithmetischer Mittelwert:

$$m_1 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

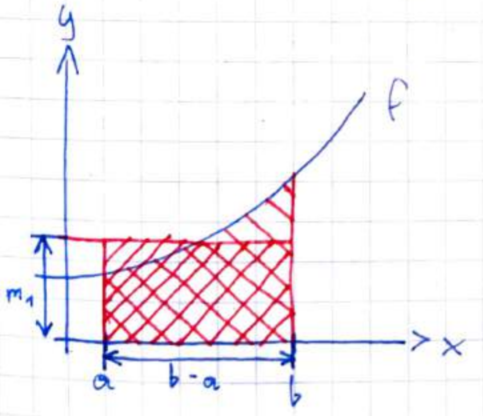
- quadratischer Mittelwert:

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

zu linearem Mittelwert:

- wenn $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$ so ist:

$$(b-a) \cdot m_1 = \int_a^b f(x) dx$$



der Inhalt der Fläche zwischen dem Graph der Funktion f und d. x-Achse ist gleich d. Rechtecksfläche (mit Seiten $b-a$ & m_1)

Bei gleichstarken Abweichungen in positiver & negativer Richtung ist der lineare Mittelwert $=0$

zu quadr. Mittelwert:

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

quadr. Mittelwert oft aussagekräftiger, da Abweichungen von $y=0$ immer positiv durch quadrieren

7.155

$$T(t) = 0{,}0170 \cdot t^4 - 0{,}449 \cdot t^3 + 3{,}259 \cdot t^2 - 4{,}120t + 3{,}521$$

$0 \leq t \leq 12$, t in Monaten

a)

$0 \leq t \leq 1$ -> Jänner,
$1 \leq t \leq 2$ -> Februar,
-> $5 \leq t \leq 8$ -> Juni - August

$$m_1 = \frac{1}{8-5} \int_5^8 T(t)\, dt = 20{,}6\,°C$$

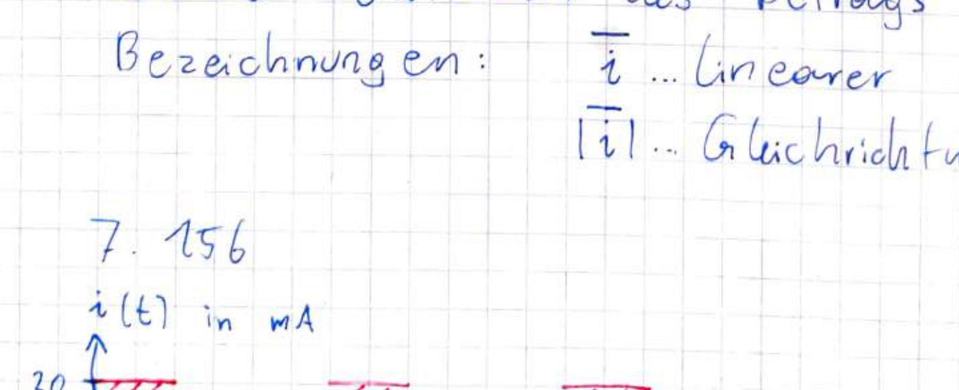
b)

$$m_2 = \frac{1}{12} \int_0^{12} T(t)\, dt = 11{,}77\,°C$$

Gleichrichtwert einer/s Wechselspannung/-stromes

Linearer Mittelwert des Betrags der Größe:
Bezeichnungen: $\bar{i}$ ... Linearer Mittelwert } jeweils über
$\overline{|i|}$ ... Gleichrichtwert } ganze Periode gemittelt

7.156



$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 i(t)\,dt &= 20\\ \int_1^3 i(t)\,dt &= -20\end{aligned}\right\}$$

Lin. Mittelwert

$$\bar{i} = 20 + (-20) = 0 \text{ mA}$$

Gleichrichtwert

$$\overline{|i|} = \frac{20+20}{3} = \frac{40}{3} \text{ mA}$$

7.157

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |\hat{i} \cdot \sin(\omega t)|\,dt = \frac{1}{\frac{T}{2}} \cdot \int_0^{T/2} \hat{i} \cdot \sin(\omega t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \hat{i} \cdot \sin(\omega t)\,dt$$

substituieren: $\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow dt = \frac{T}{2\pi} \cdot d\alpha$$

Grenzen:

$$t = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

$$t = \frac{T}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi$$

$$\overline{|i|} = \frac{2}{T} \cdot \hat{i} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\alpha)\, \frac{T}{2\pi}\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \hat{i} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \hat{i} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\alpha)\,d\alpha = \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot \left[-\cos(\alpha)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot \left[-\cos(\pi) - (-\cos(0))\right] = \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot (1+1) = \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot 2$$

$$= 0{,}637 \cdot \hat{i}$$

quadr. Mittelwert

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

Effektivwert ... quadr. Mittelwert über eine Periode

7. 158 $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$

Effektivwert I

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [\hat{i} \cdot \sin(\omega t)]^2 \, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega t) \, dt}$$

Konstante Vorziehen

zuerst Integral berechnen:

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) \, dt$$

substituieren

$$\alpha = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$$\underbrace{\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T}}$$

$$dt = \frac{T}{2\pi} \cdot d\alpha$$

Grenzen: $t = 0 \to \alpha = 0$

$t = T \to \alpha = 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot d\alpha = \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) \, d\alpha$$

NR: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ ... Summensatz (2. Kl.)

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

nach $\sin^2(\alpha)$ umformen: $\sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \cos(2\alpha)$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) - \cos(2\alpha)$$

$$2 \cdot \sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\alpha)\right.$$

$$\frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \cos(2\alpha)\right] d\alpha$$ Konstante vorziehen

$$= \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos(2\alpha)\right] d\alpha$$

substituieren

$$a = 2\alpha$$

$$a' = 2 = \frac{da}{d\alpha} \rightarrow d\alpha = \frac{1}{2}\, da$$

$$\frac{T}{4\pi} \cdot \left[\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{T}{4\pi} \cdot \left[\left(2\pi - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 2\pi)\right) - \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 0)\right)\right]$$

$$= \frac{T}{\cancel{4\pi}_2} \cdot \cancel{2\pi} = \frac{T}{2}$$

somit: (jetzt in Mittelwertformel einsetzen)

$$I = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot \hat{i}$$

7.170 b)

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} [u(t)]^2 \, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{T/2} [\hat{u} \cdot \sin(\omega t)]^2 \, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \hat{u}^2 \cdot \int_0^{T/2} \sin^2(\omega t) \, dt}$$

Integral berechnen:

$$\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t) \, dt$$

$$\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow dt = \frac{T}{2\pi} \cdot d\alpha$$

Grenzen: $t = 0 \rightarrow \alpha = 0$

$t = \frac{T}{2} \rightarrow \alpha = \pi$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(\alpha) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot d\alpha$$

$$= \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2(\alpha) \, d\alpha \quad \rightarrow \quad \sin^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) \cdot \cos \ldots$$

$$\vdots$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2\alpha)]$$

$$= \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\alpha)] \, d\alpha$$

$$= \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^{\pi} [1 - \cos(2\alpha)]\, d\alpha$$

$$= \frac{T}{4\pi} \cdot \underbrace{\left[\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)\right]_0^{\pi}}_{\pi}$$

$$= \frac{T}{4\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} = \frac{T}{4}$$

Ausgangspunkt:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \hat{u}^2 \cdot \int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\, dt}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \hat{u}^2 \cdot \frac{T}{4}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4}} = \frac{\hat{u}}{2}$$

7.159)

$$u(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ -2t + 8 & \text{für } 2 \leq t < 6 \\ 2t - 16 & \text{für } 6 \leq t < 8 \end{cases} \qquad T = 8\,ms$$

Gleichrichtwert:

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T}\left(\int_0^2 |2t|\, dt + \int_2^6 |-2t+8|\, dt + \int_6^8 |2t-16| \ldots \right.$$

$$|\bar{u}| = 2V$$

Effektivwert:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^2 (2t)^2\, dt + \int_2^6 (-2t+8)^2\, dt + \int_6^8 (2t-16)^2\, dt \right.}$$

$$U = \frac{4}{\sqrt{5}}\, V$$

Unendliche Reihen - Konvergenz

(konstante Glieder)

- unendl. geom. Reihe

Einschub: 3. Kl.

Folge: $\langle 1, 3, 5, 7, 9, \ldots \rangle$ $a_n = 2n - 1$

Reihe: Folge aufsummieren $n = 1, 2, 3 \ldots$

geom. Folge: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$\langle 2, \underset{\cdot q}{\frown} 4, \underset{\cdot q}{\frown} 8, \underset{\cdot q}{\frown} 16, \underset{\cdot q}{\frown} 32, \ldots \rangle \qquad q = 2$$

---

unendl. geom. Reihe

$$b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^n$$

zwei Bsp. solcher Reihen:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ $q = \frac{1}{2}$

b) $3 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$ $q = 0{,}1$

Addiert man fortgesetzt, so kommen die Teilsummen / Zwischensummen / Partialsummen, der Zahl 2 beliebig nahe. Daher sagt man, dass die Zahl 2 die Summe dieser unendl. Reihe ist.

Konvergenzsatz für unendl. geom. Reihe

Ist $|q| < 1$, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_1 \cdot q^n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n$$
$$= \frac{b_1}{1-q}$$

Für $|q| \geq 1$ besitzt diese Reihe keine (endl.) Summe

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b) $3 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \dots = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{9}{10}} = \frac{30}{9} \approx 3{,}\dot{3}$

Konvergenz einer unendl. Reihe

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$

heißt konvergent, wenn die Folge der Teilsummen $s_1 = c_1$, $s_2 = c_1 + c_2$, $s_3 = c_1 + c_2 + c_3$, … usw. konvergiert.

Ihr Grenzwert $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ heißt Summe der unendl. Reihe.

Besitzt die Teilsummenfolge $\langle s_n \rangle$ keinen Grenzwert, so heißt die Reihe divergent.

5.1 Prüfen ob Reihen konvergent

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

n-te Teilsumme s_n anschreiben:

$$s_n = \underbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}_{1.\ G} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{2.\ G} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}}_{3.\ G} + \dots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{n.\ G}$$

$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ (n-te Teilsumme)

Da $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

Reihe ist konvergent u. besitzt Summe 1

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$ ("harmonische R.")

durch abschnittsweises Zusammenfassen erkennt man, dass die Teilsummen über alle Grenzen hinaus wachsen → divergent

Restglied bei Abbruch der Reihe

nochmal: geom. Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Summe: $s = 2$

Abbruch nach 5. Glied

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$ ... Näherungswert für Summe der Reihe

Der Fehler gegenüber der Summe einer konvergenten Reihe, die beim Abbruch <u>nach</u> dem n-ten Glied entsteht, heißt Restglied R_n

hier: $R_5 = s - s_5 = 2 - \frac{31}{16} = \frac{1}{16}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{Restglied} \\ R_5}} = 2$$

5.2 Restglied

geg.: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

a) Reihe konvergiert, Summe $\frac{2}{3}$

geom. Reihe: $q = -\frac{1}{2}$, $b_1 = 1$

da $|q| < 1$

$\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ ✓ -> Reihe konvergent

$$s = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

b) $\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots}_{s_{10}} + R_{10} = \frac{2}{3}$

wie gut ist Näherung

$$s_{10} = \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$$

(Summe endl. geom. Reihen)

$b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$= 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{341}{512}$$

Summe der ersten 10 Glieder

$$R_{10} = \frac{2}{3} - s_{10} = \frac{2}{3} - \frac{341}{512} = \frac{1}{1536} = 0{,}000651$$

Konvergenzkriterien

- Notwendige Konvergenzbedingung

  Erforderlich für die Konvergenz der Reihe $c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$ ist, dass die Reihenglieder c_n eine Nullfolge bilden; d.h. $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$

  Bsp.: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + n+1 \ldots$

  divergent

  Divergenznachweis: Reihenglieder bilden keine Nullfolge

  Aber wichtig: Bilden Reihenglieder eine Nullfolge, ist aber noch keine Aussage ob konvergent od. divergent möglich.

Bsp.: S. 107

- harmonische Reihe: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

  ↳ obwohl Reihenglieder Nullfolge bilden ist Reihe divergent.

- geom. Reihe: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

  ↳ Reihenglieder bilden Nullfolge und Reihe ist konvergent.

Quotientenkriterium

geg.: unendl. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$

Ist $q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$, so gilt:

$q < 1 \Rightarrow$ Reihe absolut konvergent
$q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich
$q > 1 \Rightarrow$ Reihe ist divergent

5.3 a) $\quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

$$c_n = \frac{1}{n!}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \rightarrow \text{Reihe ist konvergent}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ (harm. Reihe)

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

mithilfe des Quotientenkriteriums ist keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz möglich

$\rightarrow$ andere Überlegung / Kriterium

Alternierende Reihe

Die Reihe $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - \dots$, alle $c_n > 0$ bei der aufeinander folgende Reihenglieder abwechselnd verschiedene Vorzeichen haben, heißt alternierende Reihe

Leibniz'sches Kriterium

Ist $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - \dots$, alle $c_n > 0$, eine alternierende Reihe, deren Glieder gegen Null gehen, so ist sie konvergent.

5.4) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$c_n = \frac{1}{n}$, $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

jedes Reihenglied c_n ist größer als das unmittelbar nachfolgende Reihenglied c_{n+1}

und $c_n \rightarrow 0$

somit ist Reihe konvergent

Absolut konvergente Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ heißt absolut konvergent, wenn auch die daraus gebildete Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = |c_1| + |c_2| + |c_3| + \ldots + |c_n| \text{ konverg. ist}$$

Potenzreihe / Taylor-Reihe

Einführung: Näherungsweises Berechnen von Funktionswerten

Problem: bestimmen Art von Wertepaaren ist gegeben. Annäherung durch geeignete Funktion soll stattfinden

Satz: Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades ist durch (n+1) Wertepaare eindeutig bestimmt.

einfachster Fall: Lineare Fkt. → 2 Wertepaare erforderlich

Bsp.: $\left.\begin{array}{l} 8^{00} \ldots 13\,°C \\ 9^{00} \ldots 14{,}5\,°C \end{array}\right\}$ ges.: $x\,°C$ bei 8^{15}

$f(x) = y = k \cdot x + d$

$f(8) = 13 \qquad \left.\begin{array}{l} 13 = k \cdot 8 + d \\ 14{,}5 = k \cdot 9 + d \end{array}\right\}$ Glg.-System lösen

$f(9) = 14{,}5 \qquad k = 1{,}5;\ d = 1$

$f(x) = y = 1{,}5 \cdot x + 1 \rightarrow f(8{,}25) = 13{,}375\,°C$

mehr Werte: quadr. Fkt.

8^{00} ... 13 °C

9^{00} ... 14,5 °C

10^{00} ... 17 °C

$y = ax^2 + bx + c$

Glg.-System aufstellen

$$13 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$$
$$14{,}5 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c$$
$$17 = a \cdot 10^2 + b \cdot 9 + c$$

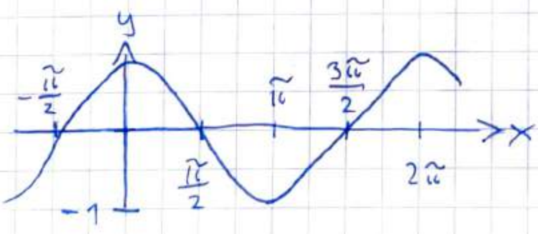
$$a = 0{,}5, \quad b = -7, \quad c = 37$$

$f(x) = y = 0{,}5\,x^2 - 7x + 37$

$f(9{,}5) = 15{,}625$ °C

"anderes" Problem: rechentechnisch „schwierige" Fkt. durch einfache Polynome ersetzen

$y = \cos(x)$



kubische Näherung (4 Punkte notwendig)

$P_1 = (0/1), \quad P_2 = (\frac{\pi}{2}/0), \quad P_3 = (\pi/-1), \quad P_4 = (\frac{3\pi}{2}/0)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

I: $1 = d$

II: $0 = a \cdot (\frac{\pi}{2})^3 + b \cdot (\frac{\pi}{2})^2 + c \cdot \frac{\pi}{2} + d$

III: $-1 = a \cdot \pi^3 + b \cdot \pi^2 + c \cdot \pi + d$

$$IV: \quad 0 = a \cdot \left(\frac{3\pi}{2}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + c \cdot \frac{3\pi}{2} + d$$

$\downarrow$

$a = 0{,}086 \,;\; b = -0{,}405 \,;\; c = -0{,}212 \,;\; d = 1$

$$f(x) = 0{,}086\,x^3 - 0{,}405\,x^2 - 0{,}212\,x + 1$$

Wie gut ist diese Näherung?

$y = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}7071$

$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}625$

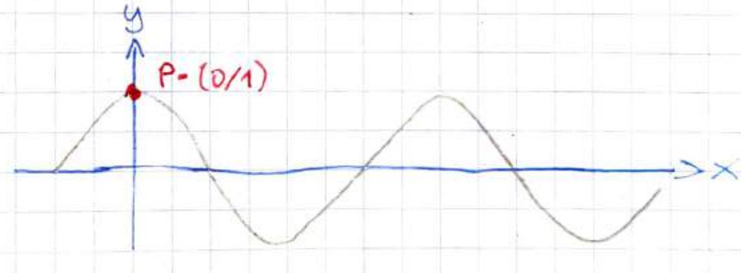
Fehler: $\sim 11{,}6\,\%$ $\rightarrow$ zu groß

andere Methode $\rightarrow$ bessere Näherung

Fkt. durch Näherungspolynom so ersetzen, dass eine Übereinstimmung in $f(x)$ und $f'(x)$ gegeben ist.

$P = (0/1)$

$f(x) = \cos(x)$



lineare Näherung

$y = g(x) = kx + d \qquad f(x) = \cos(x)$

$g'(x) = k \qquad f'(x) = -\sin(x)$

$f(0) = \cos(0) = 1 = g(0) = k \cdot 0 + d = d$

$\rightarrow d = 1$

$f'(0) = -\sin(0) = 0 = g'(0) = k$

$\rightarrow k = 0$

$y = g(x) = 0 \cdot x + 1$

$\rightarrow \quad y = 1$ (Tangent)

quadr. Näherung $\quad g(x) = \boxed{a}\, x^2 + \boxed{b}\, x + \boxed{c}$

Übereinstimmung in $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in $P = (0/1)$

$f(x) = \cos(x)$ $\quad g(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = -\sin(x)$ $\quad g'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = -\cos(x)$ $\quad g''(x) = 2a$

es muss gelten:

$\left.\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \\ f''(x) = g''(x) \end{array}\right\}$ jeweils von f ausgehend berechnen:

$f(0) = \cos(0) = 1 = g(0)$

$= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \rightarrow c = 1$

$f'(0) = -\sin(0) = 0 = g'(0)$

$= 2 \cdot a \cdot 0 + b \quad \rightarrow \quad b = 0$

$f''(0) = -\cos(0) = -1 = g''(0)$

$= 2a \quad \rightarrow \quad c = -0{,}5$

$g(x) = -\frac{1}{2} x^2 + 0 \cdot x + 1 = -\frac{1}{2} x^2 + 1$

weiter verbessern

Näherung 4. Grades $\quad P = (0/1)$

$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$
$f''(x) = -\cos(x)$
$f'''(x) = \sin(x)$
$f^{IV}(x) = \cos(x)$

$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$g'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$g''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
$g'''(x) = 24ax + 6b$
$g^{IV}(x) = 24a$

$f(0) = 1 = g(0) = \underbrace{a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0}_{=0} + e \rightarrow e = 1$

$f'(0) = -\sin(0) = 0 = g'(0) = d \qquad \rightarrow d = 0$

$f''(0) = -1 = g''(0) = 2c \qquad \rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$f'''(0) = 0 = g'''(0) = 6b \qquad \rightarrow b = 0$

$f^{IV}(0) = 1 = g^{IV}(0) = 24a \qquad \rightarrow a = \frac{1}{24}$

$g(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

allgemeine Näherung (4. Grades)

$f(x)$ ... gegebene Fkt. -> diese soll genähert werden

$g(x)$ ... Näherungspolynom

$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$g'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$g''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
$g'''(x) = 24ax + 6b$
$g^{IV}(x) = 24a$

$f(0) = g(0) = e$
$f'(0) = g'(0) = d$
$f''(0) = g''(0) = 2c$
$f'''(0) = g'''(0) = 6b$
$f^{IV}(0) = g^{IV}(0) = 24a$

kann also schreiben:

$e = f(0)$ $\qquad b = \frac{f'''(0)}{6}$
$d = f'(0)$
$c = \frac{f''(0)}{2}$ $\qquad a = \frac{f^{IV}(0)}{24}$

$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$= e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4$

$g(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{24} \cdot x^4$

Exkurs: n! (n-Fakultät)

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots$

$0! = 1$ (Def.)

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$\vdots$

allg.: $g(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$

Maclaurin'sche Form der Taylorreihe

- vorausgesetzt ist, dass f an der Stelle 0 beliebig oft differenzierbar ist
- man sagt, dass man an der Stelle 0 eine Potenzreihe entwickelt
- Teilsummen $s_n(x)$ der Maclaurin-Reihe sind einfache Polynomfunktionen in x. Sie werden auch Taylorpolynom genannt.
- Ersetzen des Fkt.-Wertes f(x) durch das Taylorpolynom $s_n(x)$ von Grad n bedeutet, dass der Fkt.-Wert und alle Ableitungen bis hin zur n-ten Ableitung von f & s_n an der Stelle 0 übereinstimmen. -> Abnahme der Güte der Näherung, je weiter man sich von der Stelle 0 entfernt.

↳ Erreichen einer höheren Genauigkeit durch Dazunehmen weiterer Glieder

• Symmetrieverhalten: Gerade Fkt. besitzen in einer Reihenentwicklung nur gerade Potenzen von x, ungerade Fkt. nur ungerade Potenzen von x.

kurz zurück zum Bsp.: Reihenentw. von cos(x):

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n} \cdot (-1)^n$$

Potenzreihe

Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots$ heißt Potenzreihe. Die Zahlen a_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ heißen Koeffizienten der Potenzreihe.
(Reihenglieder sind Funktionen einer Variable)

Bsp.: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$
$a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{5!} \quad \dots$

Bsp.: geometrische Reihe: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$
wenn man q nicht als feste Zahl, sondern als Variable auffasst, bezeichne diese Variable wie üblich mit x
$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ mit Koeffizienten a_n sind gleich 1 für alle n

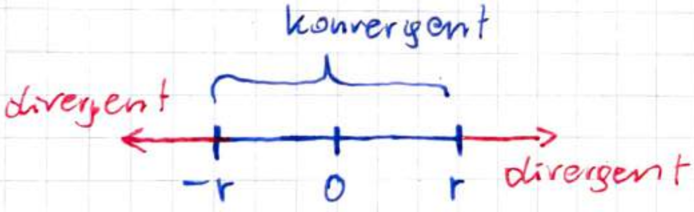
Die geom. Reihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ d.h. im Intervall $]-1; 1[$

↳ konvergiert in einen symmetrisch zu 0 liegenden Intervall, typisch für Potenzreihe

Konvergenz zur Potenzreihe

Potenzreihe konvergiert für:

- $x = 0$
- alle Werte x
- es gibt eine Zahl r, sodass Reihe absolut konvergent für $|x| < r$ bzw. divergent für $|x| > r$



r heißt Konvergenzradius; $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Verhältnisse von Null verschiedenen Koeffizienten der Potenzreihe

Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$a_n = 1 \quad , \quad a_{n+1} = 1$

$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 \qquad |x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{(-1)^{n+2} \cdot n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{(-1)n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = 1$$

5.12 c)

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{n!}$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

Potenzreihe ist für alle $x \in R$ konvergent.

d) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)+1]!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (2n+3)!}{(2n+1)! \cdot (-1)^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{2n+1!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(2n+3)(2n+2) \right] = \infty$$

Reihe ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

5.13 Potenzreihenentwicklung einer Funktion

$f(x) = \sin(x)$ entwickeln in eine Potenzreihe

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$f'''(x) = -\cos(x)$

$f^{IV}(x) = \sin(x)$

$f^{V}(x) = \cos(x)$

$\vdots$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

$$f(0) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

$f(0) = \sin(0) = 0$

$f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''(0) = -\sin(0) = 0$

$f'''(0) = -\cos(0) = -1$

$f^{IV}(0) = \sin(0) = 0$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

$\hookrightarrow$ Potenzreihenentwicklung der Sinusfkt.

Konvergenzradius siehe 5.12 d)
=> hergeleitete Reihenentwicklung des Sinus
ist für alle Winkel $x \in \mathbb{R}$ geeignet
Winkel im Bogenmaß!

Würde man x im Gradmaß nehmen, müsste man in der Reihe x durch $\frac{x \cdot \pi}{180}$ ersetzen.

5.14 b)

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$\ln(0)$ kann nicht gebildet werden, statt $\ln(x)$ entwickeln wir $\ln(1+x)$

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \qquad f^{IV}(0) = -6$$
$$f^{V}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \qquad f^{V}(0) = 24$$

$$\ln(1+x) \approx 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{(-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 + \dots$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

a) e^x

Wie gut ist diese Näherung?

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots \approx 2{,}7083$$

(vgl. e in TR: 2,71828...)

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{5!} - \dots = 0.86629\dots$$

(vgl. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ in TR = 0.866025...)

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(2) \approx 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} + \dots \approx 0{,}78\dot{3}$$

(vgl. TR: 0,6931

Wann konvergiert die Reihe?

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

$r = 1$ Reihe konvergiert für $r = 1$,
aber nicht für $r = -1$

$\ln(3)$ ... konvergiert gar nicht

B.S. 118 Potenzreihenentwicklung wichtiger Fkt.

Reihe über Substitution

$e^{2x} = ?$

$e^{x} \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$f(x) = e^{2x}$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ $\qquad$ $f'(0) = 2$

$f''(x) = 4 \cdot e^{2x}$ $\qquad$ $f''(0) = 4$

$f'''(x) = 8 \cdot e^{2x}$ $\qquad$ $f'''(0) = 8$

$f^{IV}(x) = 16 \cdot e^{2x}$ $\qquad$ $f^{IV}(0) = 16$

$\vdots$

$$e^{2x} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{4}{2!} \cdot x^2 + \frac{8}{3!} \cdot x^3 + \frac{16}{4!} \cdot x^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots$$

5.15) Eulersche Formel

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

$$e^{j \cdot \varphi} \approx 1 + \frac{j \cdot \varphi}{1!} + \frac{(j \cdot \varphi)^2}{2!} + \frac{(j \cdot \varphi)^3}{3!} + \frac{(j \cdot \varphi)^4}{4!} + \dots$$

[Einschub: $j = j \quad j^2 = -1 \quad j^3 = -j \quad j^4 = 1$]

$$\approx 1 + j \cdot \frac{\varphi}{1!} - 1 \cdot \frac{\varphi^2}{2!} - j \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots$$

Reihe ist absolut konvergent → darf umordnen

$$\underbrace{\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)}_{\cos(\varphi)}+j\cdot\underbrace{\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\ldots\right)}_{\sin(\varphi)}$$

$$\cos(\varphi) \quad + j\cdot \sin(\varphi)$$

$f(x)=\sin(3x)$	$f(0)=0$
$f'(x)=3\cdot\cos(3x)$	$f'(0)=3$
$f''(x)=-9\cdot\sin(3x)$	$f''(0)=0$
$f'''(x)=-27\cdot\cos(3x)$	$f'''(0)=-27$
$f^{IV}(x)=81\cdot\sin(3x)$	$f^{IV}(0)=0$

$$\sin(3x)=\frac{3}{1!}\cdot x-\frac{27}{3!}\cdot x^3+\ldots$$

Taylorreihe

nicht an der Stelle 0 nach Potenzen von x entwickeln, sondern an der Stelle x_0 nach Potenzen von $(x-x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots$$

je mehr Glieder der Reihe hinzugenommen werden, umso besser ist die erreichte Genauigkeit

Bsp.: $f(x) = e^x$ mit $x_0 = 1$ in Reihenentwicklung

$$f'(x) = e^x \qquad f(1) = e^1 = e$$

$$f''(x) = e^x \qquad f'(1) = e^1 = e$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$e^x \approx e + \frac{e}{1!} \cdot (x-1) + \frac{e}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{2}{3!} (x-1)^3 + \dots$$

Linearisierung einer Fkt.

Fkt. $f(x) = y$ wird an der Stelle x_0 linearisiert d.h. Fkt. wird an der Stelle x_0 durch ihr Taylorpolynom 1. Grades $s_1(x)$ ersetzt.
geom. Bedeutung: Fkt. wird an dieser Stelle durch Tangente ersetzt; x_0 ist dabei die Entwicklungsstelle der allg. Form der Taylorreihe

$$f(x) \approx s_1(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)}_{\text{Taylorpolynom 1. Grades}}$$

5.17 | a)

(1) $v = v_E \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_E} \cdot t\right)$

v_E ... konst. Endgeschw.
g ... Fallbeschleunigung
Berücksichtigung Luftwiderstand

(2) $v = g \cdot t$ ... ohne Luftwiderstand

(2) entsteht aus (1) durch Linearisierung an der Stelle $t = 0\,s$

$$v(t) = v_E \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_E} \cdot t\right)$$

$$v'(t) = \cancel{v_E} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{g}{v_E} \cdot t\right)} \cdot \frac{g}{\cancel{v_E}} = \frac{g}{\cosh^2\left(\frac{g}{v_E} \cdot t\right)}$$

$$v(t) \approx v(0) + \frac{v'(0)}{1!} \cdot (t-0)$$

$$\approx 0 + \frac{g}{1!} \cdot t = g \cdot t$$

c) $f(t) = s\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Aufgabe: Linearisiere an $t = 0$ und $t = \tau$

$$f(t) = s \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$f'(t) = s \cdot \left(0 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

$$= s\left(\frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

an Stelle $t = 0$:

$$f(0) = s\left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = 0$$

$$f'(0) = s \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{s}{\tau}$$

$$f(t) \approx 0 + \frac{\frac{s}{\tau}}{1!}(t-0) = \frac{s}{\tau} \cdot t$$

an Stelle $t = \tilde{\tau}$:

$$f(\tau) = s \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tilde{\tau}}{\tau}}\right) = s\left(1 - e^{-1}\right)$$

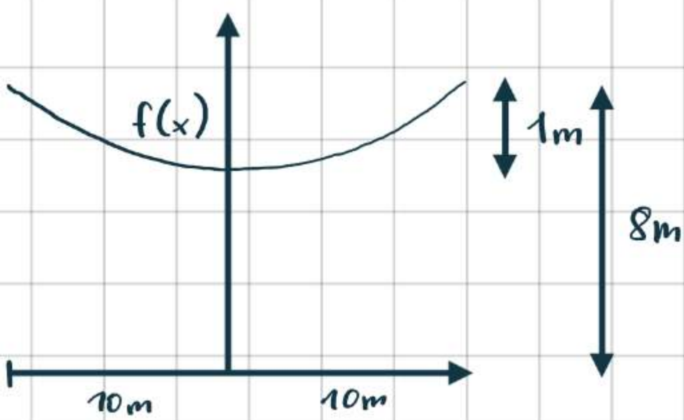
$$f'(\tilde{\tau}) = s \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{\tilde{\tau}}{\tau}} = \frac{s}{\tau} \cdot e^{-1}$$

$$f(t) = s \cdot \left(1 - e^{-1}\right) + \frac{s}{\tau} \cdot e^{-1} \cdot (t - \tilde{\tau})$$

5.36 (veränderte Werte)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Abstand: } 20\,m = 2L \\ \text{Durchhang: } 1\,m \\ \text{Höhe Träger: } 8\,m \end{array}\right\} y = f(x) = a \cdot \cosh(x) + b$$

ges.: a, b, Seillänge



$f(0) = 7$ $\qquad$ $a + b = 7$

$f(10) = 8$ $\qquad$ $a \cdot \cosh\left(\frac{10}{a}\right) + b = 8$

⇒ f(x) nähern mit Taylorpolynom 2. Grades ein a zu bestimmen.

$f(x) = \cosh(x)$ $\quad f(0) = \cosh(0) = 1$

$f'(x) = \sinh(x)$ $\quad f'(0) = \sinh(0) = 0$

$f''(x) = \cosh(x)$ $\quad f''(0) = \cosh(0) = 1$

$$\cosh(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!}$$

$$\cosh\left(\frac{10}{a}\right) \approx 1 + \left(\frac{10}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{50}{a^2}$$

$$a \cdot \left(1 + \frac{50}{a^2}\right) + b = 8$$

$$a + \frac{50}{a^2} + b = 8$$

$$a + \frac{50}{a^2} + 7a = 8$$

$$\frac{50}{a} = 1 \quad \rightarrow \quad a = 50$$

$$b = 7 - 50 = -43$$

$$f(x) = 50 \cdot \cosh\left(\frac{x}{50}\right) - 43$$

Seillänge: über Integralrechnung

$$s = 2 \cdot \int_0^{10} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$f'(x) = \cancel{50} \cdot \sinh\left(\frac{x}{50}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{50}} = \sinh\left(\frac{x}{50}\right)$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\sinh\left(\frac{x}{50}\right)\right)^2$$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{50}\right)} = \cosh\left(\frac{x}{50}\right)$$

$$s = 2 \cdot \int_0^{10} \cosh\left(\frac{x}{50}\right) dx$$

$u = \frac{x}{50}$

$u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{50}$

$dx = 50 \cdot du$

$$s = 2 \cdot \int_{\dots}^{\dots} 50 \cdot \cosh(u)\, du$$
$$= 2 \cdot 50 \cdot \sinh(u)\Big|_{\dots}^{\dots}$$
$$= 2 \cdot 50 \cdot \sinh\left(\frac{x}{50}\right)\Big|_{0}^{10} = 20{,}13\ m$$

Näherungsformeln entwickeln / herleiten

5.34 $E_{kin} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-x^2}} - m_0 \cdot c^2$

m_0 … Ruhemasse
v … Geschwindigkeit
$x = \frac{v}{c}$
c … Lichtgeschw.

?

$E_{kin} = \frac{m_0 \cdot v^2}{2}$ für kleine v

$$E_{kin} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-x^2}} - m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right]$$

① Reihe entwickeln für $\frac{1}{\sqrt{1-a}} = (1-a)^{-1/2}$

$$f(a) = (1-a)^{-1/2}$$
$$f'(a) = -\frac{1}{2}(1-a)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-a)^{-3/2}$$
$$f''(a) = -\frac{3}{4}(1-a)^{-5/2} \cdot (-1) = \frac{3}{4}(1-a)^{-5/2}$$

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$f''(0) = \frac{3}{4}$$

$$f(a) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot a + \frac{3}{4 \cdot 2!} \cdot a^2 = 1 + \frac{1}{2} a + \frac{3}{8} a^2$$

② Substituieren: $a = x^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4$$

③ Näherung in Formel einsetzen:

$$E_{kin} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left[\cancel{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - \cancel{1}\right]$$

$$= m_0 \cdot \cancel{c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{\cancel{c^2}}$$

$$= m_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot v^2$$

$$\boxed{= \frac{m_0 \cdot v^2}{2}}$$

5.32

$$c = 331{,}5\,\frac{m}{s} \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15\,°C}}$$ T... Lufttemp. in °C

$$f(T) = \left(1 + \frac{T}{273{,}15\,°C}\right)^{1/2}$$

$$f'(T) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T}{273{,}15\,°C}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{273{,}15}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2 \cdot 273{,}15}$$

$$f(T) = 1 + \frac{1}{546{,}3} T$$

$$c_L(T) = 331{,}5 \cdot \left(1 + \frac{T}{546{,}3}\right)$$
$$c_L(30) = 349{,}70 \ \frac{m}{s}$$

$$c(T) = 331{,}5 \ \frac{m}{s} \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15\,^\circ C}}$$
$$c(30) = 349{,}23 \ \frac{m}{s}$$

$$F_r = \left| \frac{349{,}23 - 349{,}70}{349{,}23} \right| = \left| \frac{-0{,}47}{349{,}23} \right| \mathrel{\hat{=}} 0{,}13\ \%$$

Fourier - Reihe

<u>WH:</u>
- Überlagerung zweier Sinusfkt. gleicher Frequenz → wieder Sinusfkt.
- Überlagerung zweier Sinusfkt. ungleicher Frequenz → periodische Fkt.

Idee entstanden: jede periodische Fkt. auch als Summe von Sinusschwingungen darstellbar.
(Fourier hat gezeigt, dass das unter sehr allg. Voraussetzungen über periodischen Fkt. immer der Fall ist.)

2π - periodische Fkt.

Sei f eine 2π-period. Fkt; Ist das Periodenintervall $[0; 2\pi]$ in endlich viele Teilintervalle zerlegbar, in denen f sowohl stetig als auch monoton ist dann kann diese Fkt. f in eine sogenannte Fourierreihe zerlegt werden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + \dots + b_1 \cdot \sin(x) + b_2 \cdot \sin(2x)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \cos(nx)\right]$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ -> Fourierkoeffizienten

$\frac{a_0}{2}$ -> hat keine Auswirkung auf Periodizität; bedeutet Verschiebung in y-Richtung

Sinus - Kosinus - Form

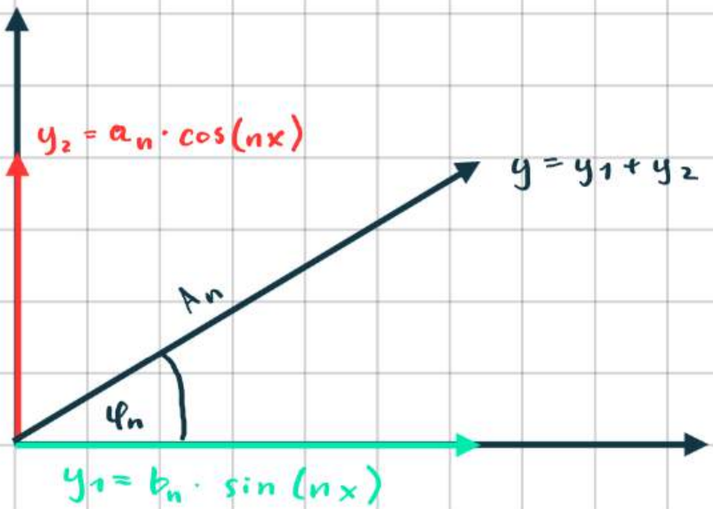
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right]$$

In der Reihe treten Sinus- & -Kosinusfkt. gleicher Freq. aufeinander:

$$a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

da Kosinusfkt. auch eine Sinusfkt. (90° verschoben) ist und die beiden gleiche Freq. haben, ist ihre Summe wieder eine Sinusfkt. gleicher Freq.

$$a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) = A_n \cdot \sin(nx + \varphi)$$



$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x)$$

$$= A_0 + A_1 \cdot \sin(x + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(2x + \varphi)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(nx + \varphi_n)$$

$\downarrow$

Amplituden-Phasen-Form

man nennt:

$A_1 \cdot \sin(x + \varphi_1)$ ... 1. Harmonische / Grundwelle
$\rightarrow$ Freq. wie periodische f

$A_2 \cdot \sin(x + \varphi_2)$ ... 2. Harmonische / 1. Oberwelle
$\rightarrow$ doppelte Freq. wie Grundw.

$A_3 \cdot \sin(x + \varphi_3)$ ... 3. Harmonische / 2. Oberwelle
$\rightarrow$ dreifache Freq. wie Grundw.

- In Fourierreihen treten nur Frequenzen auf, die ein ganzes Vielfaches der Grundfrequenz sind.
- Entwicklung einer periodischen Fkt. in eine Fourierreihe heißt harmonische Analyse od. Fourier-Analyse.
- Koeffizienten a_n & b_n bzw. A_n & φ_n definieren die Fkt. vollständig
  → Gesamtheit der Koeffizienten nennt man Spektrum von f.
- an einer Unstetigkeitsstelle konvergiert die Fourierreihe gegen das arithm. Mittel der links- & rechtsseitigen Grenzwerte an dieser Stelle

Klirrfaktor: Maß für den Oberschwingungsgehalt einer periood. Fkt.

$$k = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots}}$$

je kleiner k, desto weniger Oberschwingungsgehalt, deste mehr gleicht sie ihrer Grundschwingung

Bestimmung d. Fourierkoeffizienten

a_0

innerhalb der Periode 0 bis 2π integrieren

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \int_0^{2\pi} a_1 \cdot \cos(x)\,dx + \int_0^{2\pi} a_2 \cdot \cos(x)\,dx$$

$$+ \ldots + \int_0^{2\pi} b_1 \cdot \sin(x)\,dx + \int_0^{2\pi} b_2 \cdot \sin(x)\,dx + \ldots$$

wegen:

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \left[\frac{a_0}{2} \cdot x\right]_0^{2\pi} = \frac{a_0}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi = a_0 \cdot \pi$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos(nx)\,dx = a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx$$

$$= a_n \left[\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$n \cdot x = u$
$\cos(u)$
$u' = \frac{du}{dx} = n$
$\frac{1}{n} \cdot du = dx$
$\therefore \int \frac{1}{n} \cdot \cos(n)$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin(nx)\,dx = b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx$$

$$= b_n \left[-\frac{1}{n} \cdot \cos(nx)\right]_0^{2\pi} = b_n \left[-\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot 2\pi) + \frac{1}{n}\cos(0)\right]$$

$$= b_n \left[-\frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 1\right] = 0$$

folgt: $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = a_0 \cdot \pi \quad | : \pi$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx}$$

In ähnlicher Weise erhält man die weiteren Koeffizienten a_n & b_n $(n=1,2,3,\dots)$
indem man die Reihe zuerst jeweils mit $\cos(x)$, $\cos(2x)$, ..., $\sin(x)$, $\sin(2x)$, ... multipliziert und dann wiederum innerhalb der Periode 0 bis 2π integriert.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx$$

→ $\frac{a_0}{2}$ ... linearer Mittelwert von f über eine Periode

WH: $m_1 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \quad \text{(Gleichanteil)}$$

Verallgemeinerung T-periodische Funktion

Variable x ersetzen durch $w_0 \cdot t$ mit $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n \cdot w_0 t) + b_n \cdot \sin(n \cdot w_0 t) \right]$$

Änderung der Formeln für Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \cdot \int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot w_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot w_0 t)\, dt$$

Verschiebung des Integrationsintervalls

bei 2π-period.: gleichgültig, ob das Integrationsintervall von 0 bis 2π oder von $-\pi$ bis π gewählt wird

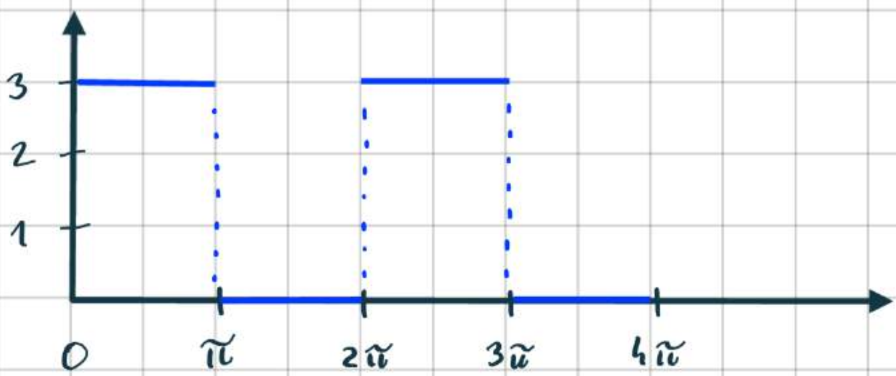
wesentlich ist nur: Integrationsintervall muss volle Periode umfassen

genau so bei T-period. Fkt.

5.41)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{für} \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

mit periodischer Fortsetzung für alle x



a) Fourierreihe ermitteln Periode 2π

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + \ldots$$

$$+ b_1 \cdot \sin(x) + b_2 \cdot \sin(2x) + \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 3\, dx + \int_0^{\pi} 0\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left([3x]_0^{\pi} + 0 \right) = \frac{1}{\pi} \left[3\pi - 3 \cdot 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot 3\cancel{\pi} = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 3 \cdot \cos(\underbrace{n \cdot x}_{\text{substituieren}})\, dx + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[3 \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi} \left[\underbrace{\sin(n \cdot \pi)}_{0} \cdot \frac{1}{n} - \sin \underbrace{(n \cdot 0)}_{0} \cdot \frac{1}{n} \right]$$

$$= \frac{3}{\pi} \cdot 0 = 0 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} 3 \cdot \sin(nx)\, dx + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \sin(nx)\, dx}_{0} \right]$$

$$= \frac{3}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n} \left(-\cos(nx) \right) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi} \cdot \left[-\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot \pi) + \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot 0)}_{1} \right]$$

$$= \frac{3}{\pi \cdot n} \cdot \left[1 - \cos(n\pi) \right]$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Koeffizienten berechnen

$$b_1 = \frac{3}{\pi \cdot 1} \cdot \left(1 - \cos(1 \cdot \pi) \right) = \frac{3}{\pi} \left(1 - (-1) \right) = \frac{3}{\pi} \cdot 2 = \frac{6}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{3}{2\pi} \cdot \left(1 - \cos(2\pi) \right) = \frac{3}{\pi} \left(1 - 1 \right) = \frac{3}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

$$b_3 = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\pi} \cdot \left(1 - \cos(3\pi) \right) = \frac{3}{\pi} \left(1 - (-1) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi}$$

$$b_4 = \frac{3}{4\pi} \cdot \left(1 - \cos(4\pi) \right) = \frac{3}{\pi} \left(1 - 1 \right) = \frac{3}{4\pi} \cdot 0 = 0$$

$$b_5 = \frac{3}{5\pi} \cdot \left(1 - \cos(5\pi) \right) = \frac{3}{\pi} \left(1 - (-1) \right) = \frac{3}{5\pi} \cdot 2 = \frac{6}{5\pi}$$

↓

$b_n = 0$ für $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ (gerade Zahlen)

$b_n = \frac{6}{n \cdot \pi}$ für $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ (ungerade Zahlen)

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{6}{3\pi} \cdot \sin(3x) + \frac{6}{5\pi} \cdot \sin(5x) + \dots$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right]$$

B.S. 131

b) $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{6}{n \cdot \pi}$ für ungerade

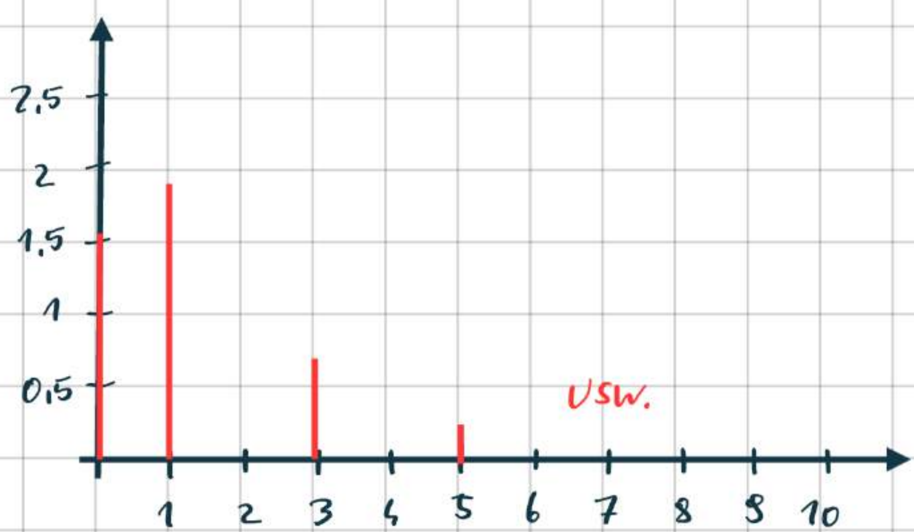
$= 0$ für gerade

$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}$

$A_1 = |b_1| = \frac{6}{1\pi} = \frac{6}{\pi}$

$A_2 = |b_2| = 0$

$A_3 = |b_3| = \frac{6}{3 \cdot \pi} = \frac{2}{\pi}$



$$A_n^2 = \left(\frac{6}{n \cdot \pi} \right)^2$$

$$= \frac{36}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

c)

$$k = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{\frac{36}{\pi^2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right)}}{\sqrt{\frac{36}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)}}$$

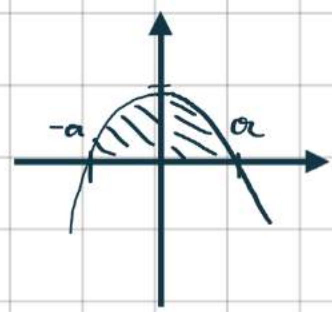
NR $\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}\right]$

$$k = \frac{\frac{\pi}{8} - 1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{8}}} \approx 0{,}435$$

Vereinfachung bei der Bestimmung der Fourierkoeff.

WH 3. Kl.

Gerade Funktion



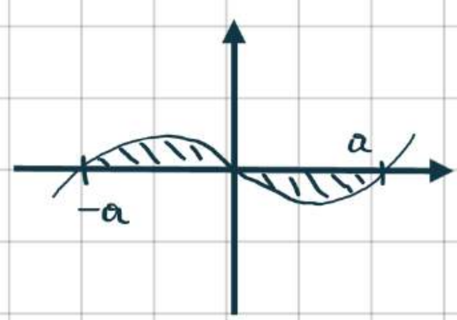
$$f(-a) = f(a)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

Ungerade Funktion

$$f(-a) = -f(a)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



Auswirkung auf Fourierkoeffizienten

- Ist f gerade, so ist der Fkt.-Term...

  ... $f(x) \cdot \cos(nx)$ gerade
  ... $f(x) \cdot \sin(nx)$ ungerade

„Beweis":

$f(-x) \cdot \cos(nx) = f(x) \cdot \cos(nx)$

$f(-x) \cdot \sin(-nx) = f(x) \cdot [-\sin(nx)] = -f(x) \cdot \sin(nx)$

- Ist f ungerade, so ist der Fkt.-Term...

  ... $f(x) \cdot \cos(nx)$ ungerade
  ... $f(x) \cdot \sin(nx)$ gerade

„Beweis" wie oben

Wahl des Integrationsintervalls

$[-\pi ; \pi]$ statt $[0 ; 2\pi]$

- f ist gerade

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx = 0$$

- f ist ungerade

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

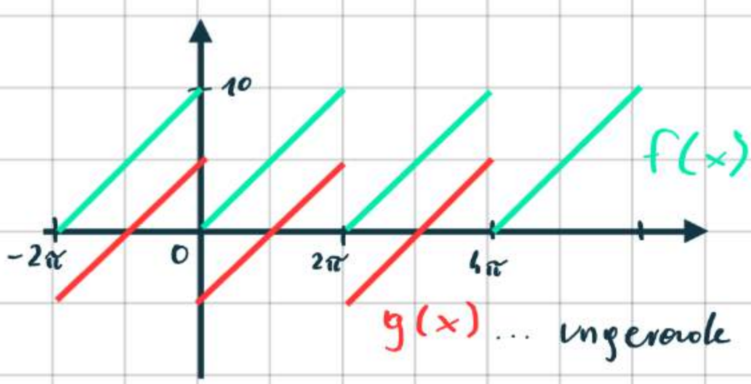
$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

→ Verallgemeinerung auf Periode T
B. S. 132 → Tabelle

$$a_0 : \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \qquad \frac{2}{\frac{T}{2}} \to \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(t)\,dt$$

<u>5.42|</u>

a) Sägezahnfkt.



Graph um 5 E. in negative Richtung verschieben
→ ungerade Fkt. $g(x)$

$$f(x) = g(x) + 5$$

Periode: 2π

Geradengl. für $g(x)$

$y = kx + d$ $\qquad\qquad P = (\pi / 0)$

$d = -5$ (abgelesen $[0; 2\pi]$)

$0 = k \cdot \pi - 5$

$k = \frac{5}{\pi}$

$g(x) = \frac{5}{\pi} \cdot x - 5$

Fourierreihe entwickeln

alle $a_n = 0$, weil g ungerade

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} g(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left[\frac{5}{\pi} \cdot x - 5\right] \cdot \sin(nx)\,dx$$

⋮ partielles Integrieren

$$b_n = \frac{10 \cdot [\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - n\pi]}{(n\pi)^2} = \frac{-10\,\cancel{n\pi}}{n^{\cancel{2}}\pi^{\cancel{2}}} = -\frac{10}{n\pi}$$

$$g(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + \ldots}_{=0} + b_1 \cdot \sin(x) + b_2 \cdot \sin(2x)$$

$$= -\frac{10}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots\right]$$

$$f(x) = g(x) + 5 = 5 + g(x)$$

$$f(x) = 5 - \frac{10}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots\right]$$

$A_0 = \frac{a_0^*}{2} = 5$

$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{b_1^2} = |b_1| = \frac{10}{1\pi}$ $\qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$A_2 = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$

$\vdots$

Grundschwingung

$A_1 \cdot \sin(x + \varphi_1)$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$a_n \cdot \cos(x) + b_n \cdot \sin(x)$

5.44

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \dots\right] - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots\right]$$

Grundschwingung:

$a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x)$

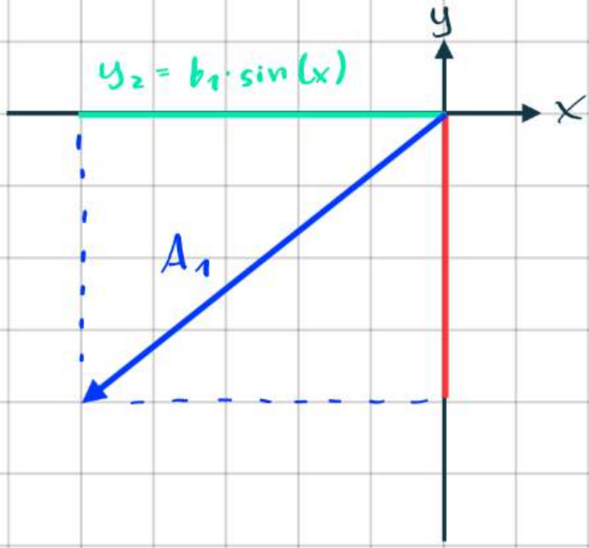
ges.: $A_1 \cdot \sin(x + \varphi_1)$

$a_1 = -\frac{4}{\pi^2} \qquad b_1 = -\frac{2}{\pi}$

$-\frac{4}{\pi^2} \cdot \cos(x) - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x)$

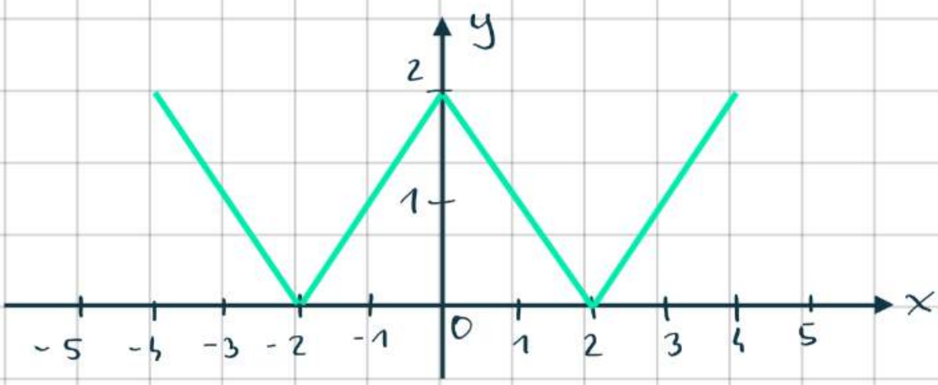
$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{\pi^2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\pi}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2}} \approx 0{,}75467\dots$



Verbesserung der 1. SA

1) periodische Fkt. $f(t) = \begin{cases} t+2 & -2 \leq t < 0 \\ -t+2 & 0 \leq t < 2 \end{cases}$



$T = 4 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Fkt. spiegelt sich an der y-Achse
→ gerade Fkt. → alle $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t)\, dt = \frac{4}{4} \cdot \int_0^{2} (-t+2)\, dt$$

$$= 1 \left[-\frac{t^2}{2} + 2t \right] \Big|_0^2 = -\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - 0$$

$$a_0 = 2$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T} f(t) \cdot \cos(n w_0 t)\, dt \qquad \text{weil gerade}$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$= \frac{4}{4} \int_0^{2} (-t+2) \cdot \cos(n \tfrac{\pi}{2} t)\, dt$$

$u = -t+2 \qquad u' = -1$

$v' = \cos(\frac{n\pi}{2} t) \quad v = \frac{2}{n\pi} \cdot \sin(\frac{n\pi}{2} t)$

$$= \left[(-t+2) \cdot \frac{2}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2} t\right) \right] \Big|_0^2 - \int_0^2 (-1) \frac{2}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2} t\right) dt$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi} (-t+2) \sin\left(\frac{n\pi}{2} t\right) \right] \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2} t\right) dt$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi} (-t+2) \sin\left(\frac{n\pi}{2} t\right) + \frac{2}{n\pi} \cdot \left[-\cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) \right] \frac{2}{n\pi} \right] \Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi} (-t+2) \sin\left(\frac{n\pi}{2} t\right) - \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) \right] \Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi} (-2+2) \sin\left(\frac{n\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\right) - \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\right) \right]$$

$$- \left[\frac{2}{n\pi} (-0+2) \sin\left(\frac{n\pi}{2} \cdot 0\right) - \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2} \cdot 0\right) \right]$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \cos(n\pi) + \frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\pi)\right) = a_n$$

$a_1 = \frac{8}{\pi^2}$

$a_2 = 0$

$a_3 = \frac{8}{9\pi^2}$

$a_4 = 0$

$a_5 = \frac{8}{25\pi^2}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(1\,w_0 t) + a_2 \cdot \cos(2\,w_0 t) + \dots$$

$$= 1 + \frac{8}{\pi^2}\cos(1 w_0 t) + \frac{8}{9\pi^2} \cdot \cos\left(3\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{8}{25\,\pi^2} \cdot \cos\left(5\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$s_n = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n w_0 t)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \left(1-\cos(n\pi)\right) \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$

2) $f(t) = t$ für $0 \leq t < \pi$

$T = \pi$ $\quad w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Kosinusteile fallen weg, weil es sich hier um eine nach oben verschobene ungerade Fkt. handelt.

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(2nt)$$

$$b_n = -\frac{1}{n}$$

$$b_1 = -1$$
$$b_2 = -\frac{1}{2}$$
$$b_3 = -\frac{1}{3}$$
$$b_4 = -\frac{1}{4}$$
$$b_5 = -\frac{1}{5}$$
$$b_6 = -\frac{1}{6}$$

$$k = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 + \dots}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 + \dots}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots}{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{6} - 1}{\frac{\pi^2}{6}}} \approx 0{,}626157 \mathrel{\hat{=}} 62{,}6\,\%$$

③

$$[\sinh(x)]' = \cosh(x) \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$$

$$[\sinh(x)]' = \left[\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})\right]'$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^x - (-1) \cdot e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh(x)$$

$$f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

$$f'(x) = \cancel{a} \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \frac{1}{\cancel{a}} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$f''(x) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

$$f(0) = a \cdot \overbrace{\cosh\left(\frac{0}{a}\right)}^{1} + b = a + b$$

$$f'(0) = \sinh\left(\frac{0}{a}\right) = 0$$

$$f''(0) = \frac{1}{a} \cdot \cosh\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

$$= a + b + \frac{1}{2a} \cdot x^2$$

$P_1 = (0/80)$
$f(0) = 80$

$$\approx 80 + \frac{1}{2a} x^2 \qquad P_2 = (75/125)$$

$$f(75) = 80 + \frac{1}{2a} \cdot 75^2 = 125 \quad | -80$$

$$\frac{75^2}{2a} = 45$$

$$\frac{75^2}{45 \cdot 2} = a = 62{,}5$$

$$a + b = 80$$
$$62{,}5 + b = 80$$
$$b = 17{,}5$$

$$f(x) = 62{,}5 \cdot \cosh\left(\frac{x}{62{,}5}\right) + 17{,}5$$

$$\tan(\alpha) = k$$

$$k = f'(75) = \sinh\left(\frac{75}{62{,}5}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\sinh\left(\frac{75}{62{,}5}\right)\right) \approx 56{,}476\ldots^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \alpha \approx 33{,}5^\circ$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$(y')^2 = \left(\sinh\left(\frac{x}{62{,}5}\right)\right)^2$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

$$1 + \left[\sinh\left(\frac{x}{62{,}5}\right)\right]^2 = \cosh^2\left(\frac{x}{62{,}5}\right)$$

$$\int_{-75}^{75} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{62{,}5}\right)}\, dx = \int_{-75}^{75} \cosh\left(\frac{x}{62{,}5}\right) dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^{75} \cosh\left(\frac{x}{62{,}5}\right) dx = 2\left[\sinh\left(\frac{x}{62{,}5}\right) \cdot 62{,}5\right]\Big|_0^{75}$$

$$= 188{,}7\,m$$

Differenzengleichungen

BS. 20-25

bestimmte Prozessabläufe -> rekursive Darstellung

Bsp.: $a_{n+1} = a_n + d$ (arithm. Folge)

$b_{n+1} = b_n \cdot q$ (geom. Folge)

Eine rekursiv gegebene Folge wird als Differenzengleichung bezeichnet.

- Gibt man einen Anfangswert vor, kann man die FG rekursiv berechnen.
- Termdarstellung finden (wenn es eine gibt)

2.1 a)

$K_0 = 1000,-$, $i = 2\%$, $R = 100,-$

$K_1 = K_0 (1+i) - R = 1000 \cdot 1{,}02 - 100 = 920,-$

$K_2 = K_1 (1+i) - R = 920 \cdot 1{,}02 - 100 = 838{,}40$

$K_3 = K_2 (1+i) - R = 838{,}4 \cdot 1{,}02 - 100 = 755{,}17$

$\vdots$

somit: $K_n = K_{n-1} (1+i) - R$

$K_n = K_{n-1} \cdot 1{,}02 - 100$

mit $K_0 = 1000$ € und $n = 1, 2, 3, \ldots$

Durch die rekursive Darstellung der Kontostandsfolge $\langle K_0, K_1, K_2, K_3, \ldots \rangle$ kann der Kontostand Jahr für Jahr berechnet werden.

b) H_n ... Holzbestand (in ME) am Ende des n-ten Jahres

$H_0 = 2000$ ME , $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$H_n = H_{n-1} + 0{,}04 \cdot H_{n-1} - 0{,}03 \cdot H_{n-1} - 50$$

$$H_n = 1{,}01 \cdot H_{n-1} - 50$$

$$H_1 = 1{,}01 \cdot 2000 - 50 = 1970 \text{ ME}$$
$$H_2 = 1{,}01 \cdot 1970 - 50 = 1938{,}7 \text{ ME}$$
$$H_3 = 1{,}01 \cdot 1938{,}7 - 50 = 1908{,}10 \text{ ME}$$
$$\vdots$$

Charakteristisch für diese Prozesse

in aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten laufen grundsätzlich die selben Prozesse ab.

Wert am Ende (y_n) einer Zeiteinheit (z.B. Jahr) kann aus dem Wert am Anfang (y_{n-1}) dieser Zeiteinheit bestimmt werden.

Alle angeführten Glg. können auf die Form

$$\boxed{y_n = a \cdot y_{n-1} + b}$$ ... Differenzengleichung 1. Ordnung

Ordnung einer Differenzengleichung:
Differenz zw. dem größten u. kleinsten Index der Differenzenglg.

$$y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 0$$

$$n-(n-2) = 2 \quad \dots \text{ Differenzenglg. 2. Ordnung}$$

Termdarstellung → "Lösung" einer Differenzenglg.

$$y_n = a \cdot y_{n-1} + b$$

Sind a & b konstant, so kann die Differenzenglg. nicht gelöst werden.

$$y_1 = a \cdot y_0 + b$$

$$y_2 = a \cdot y_1 + b = a(\underline{a \cdot y_0 + b}) + b = a^2 y_0 + ab + b$$

$$y_3 = a \cdot y_2 + b = a(\underline{a^2 y_0 + ab + b}) + b = a^3 y_0 + a^2 b + ab + b$$

$\vdots$

usw.

allgemein:

$$y_n = a^n y_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \dots + ab + b$$
$$= a^n y_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$$

endl. geom. Reihe

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow \text{hier: } \begin{array}{l} b_1 = 1 \\ q = a \end{array}$$

$$1 \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$$

wenn $a = 1$:

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1}$$

$$\underbrace{1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-2} + 1^{n-1}}_{= n \cdot 1}$$

Damit lautet die Lösung

$a \,!\!= 1$:

$$\begin{aligned} y_n &= a^n y_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a} \\ &= a^n y_0 - b \cdot \frac{a^n - 1}{1-a} \\ &= a^n y_0 - b \left[\frac{a^n}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right] \\ &= \underbrace{a^n y_0 - \frac{b \cdot a^n}{1-a}} + \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

$$\boxed{y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^n + \frac{b}{1-a}}$$

$a = 1$:

$$y_n = y_0 + n \cdot b$$

2.2 Holzbestand Fortsetzung

H_n ... Holzbestand nach n-Jahren

$H_n = 1{,}01 \cdot H_{n-1} - 50$ mit $H_0 = 2000$ ME

$y_n = a\, y_{n-1} + b$

$a = 1{,}01$ $\quad b = -50 \quad \rightarrow y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$

$H_n = \left(2000 - \frac{-50}{1-1{,}01}\right) \cdot 1{,}01^n + \frac{-50}{1-1{,}01}$

$= -3000 \cdot 1{,}01^n + 5000$

$H_n = 5000 - 3000 \cdot 1{,}01^n$

gleichbleibender Holzbestand

jährl. Holzschlagmenge gleich Nettozunahme

$2000 \cdot 0{,}01 = 20$ ME

Bsp. 2.3 a)

$y_n = \frac{1}{2} \cdot y_{n-1} + 2, \quad y_0 = 8$

$y_1 = \frac{1}{2} \cdot y_0 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 8 + 2 = 6$

$y_2 = \frac{1}{2} \cdot y_1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = 5$

$y_3 = \frac{1}{2} \cdot y_2 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 = 4{,}5$

$y_4 = \frac{1}{2} \cdot y_3 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5 = 4{,}25$

$y_5 = \frac{1}{2} y_4 + 2 = 4{,}125$

$y_6 = \frac{1}{2} y_5 + 2 = 4{,}0625$

Lösung: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$

$a = \frac{1}{2}, \quad b = 2$

$$y_n = \left(8 - \frac{2}{1-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{1-\frac{1}{2}}$$

$$y_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

Differentialgleichungen

Grundbegriffe

technische/naturwissenschaftliche Probleme in math. Gleichung übersetzen → Differentialquotienten (Änderungsraten) von Fkt. kommen auf
→ Differentialglg.

WH:

$$s' = \frac{ds}{dt} = v$$
$$s'' = v' = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a$$

$$v(t) = \int a(t)\, dt$$
$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

Bsp. 3.1) Senkrechter Wurf

a)

Stein: m ... Masse

$v_0 = 10\ m/s$

$h_0 = 15\ m$

$g(t)$ ... Höhe zum Zeitpunkt t

↳ Formel finden

$F_G = m \cdot g$

Newton'sches Grundgesetz der Mechanik

Kraft = Masse · Beschleunigung

$$-\cancel{m} \cdot g = -F_G = \cancel{m} \cdot y''(t)$$

$$-g = y''(t)$$ ... gesuchte Höhenfkt. tritt in Form einer Ableitung in der Glg. auf → Differentialglg.

integrieren:

$$v(t) = y'(t) = \int (-g)\, dt = -gt + C_1$$

$$y(t) = \int (-gt + C_1)\, dt$$

$$= -g\frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

C_1 & C_2 ... voneinander unabhängige Integrationskonstanten

$$y(0) = 15 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2$$
$$C_2 = 15$$

$$v(0) = y'(0) = 10 = -g \cdot 0 + C_1$$
$$C_1 = 10$$

$g \approx 10\ m/s^2$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 + 10t + 15$$
$$y(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

b) Wann hat Stein die größte Höhe?

$$y'(t) = 0 \quad \rightarrow t = 1$$

max. Höhe: $y(1) = 20m$

c) Wann ist der Stein am Boden?

$$y(t) = 0$$
$$-5t^2 + 10t + 15 = 0$$
$$t_1 = 3s$$
$$(t_2 = -1s)$$

Vereinbarungen:

- Keine spezielle Anwendung x... unabhäng. Variable

  y... abhäng. Variable
- y', y'', ... $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... anstatt $f(x)$, $f'(x)$
- Ableitungen nach der Zeit: $\dot{y}$, $\ddot{y}$ anstatt $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$

Gewöhnliche Differentialglg.

Eine Glg., in der irgendwelche Ableitungen einer Funktion vorhanden

Ordnung einer DGL: die höchste vorkommende Ableitung

Bsp.: DGL 1. Ordnung

$$y' - 2x = 0 \quad ; \quad 2y' + y = \sin(3x)$$

$$RC \cdot \underbrace{\frac{du_c}{dt}}_{\text{1. Ableitung}} + u_c(t) = 0$$

DGL 2. Ordnung:

$$y'' + y' + y = 0 \quad , \quad \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{\text{2. Ableitung}} = -g$$

weitere Einteilung:

- Grad: hängt davon ab welche Operation mit y bzw. dessen Ableitung ausgeführt werden
  $y' + 2y = 0$ linear / Grad 1
  $y' + 2y^2 = 0$ Grad 2

- Koeffizienten: konstant: $y' + 2y = 0$
  variabel: $y' + 2xy = 0$

- Homogen/inhomogen: $y' + 2y = 0$ homogen
  $y' + 2y = 2x$ inhomogen

Umstellen einer DGL ist wie Ansatz finden bei Textaufgaben.
Lösung einer DGL: Funktion
B.S. 28 grüne Box (wichtige Zusammenhänge / Formeln)

Allgemeine u. spezielle (= partikuläre) Lösung

geg.:

$y' - 2x = 0 \quad | + 2x$

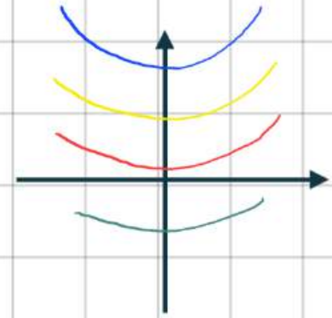
$y' = 2x \quad |$ integrieren

$$y = \int 2x \, dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = x^2 + C_1$$

Integrationskonstante C_1 steht für jede beliebige Zahl deshalb unendlich viele Lösungen dieser DGL

→ Lösungsschar

die Kurven schneiden einander nicht, durch jeden Punkt der Ebene geht genau eine Kurve.



Durch weitere Angabe

→ Lösung auswählen

$P = (1/2)$ → in allg. Lösung einsetzen u. C_1 bestimmen

↗

Anfangsbedingung

$$y = x^2 + C_1$$
$$2 = 1^2 + C_1$$
$$C_1 = 1$$

$y = x^2 + 1$ spezielle / partikuläre Lösung

„Anfangsaufgabe" ... Anfangsbedingung u. DGL zusammen

Bsp.: $y'' + x = 1 \qquad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$

$$y'' = -x + 1$$

$$y' = \int(-x+1)\,dx = -\frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$y = \int\left(-\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)dx = -\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \qquad \text{allg. L.}$$

$y(0) = 1 = -\frac{1}{6} \cdot 0^3 + \frac{1}{2} 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_2$

$c_2 = 1$

$y'(0) = 2 = -\frac{0^2}{2} + 0 + c_1$

$c_1 = 2$

spez. L.: $y = -\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 2x + 1$

3.17) PKW: 90 km/h

70 m vor dem Auto:

Reh → Schrecksek. → $a = -8\ m/s^2$

(bremsen)

$t = 0\,s$ Zeitpunkt ab Bremsung

$s'' = a(t) = -8$

$s' = v(t) = \int -8\, dt = -8t + c_1$

$s = s(t) = \int (-8t + c_1)\, dt = -8 \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$

$s(t) = -4t^2 + c_1 t + c_2$

$v(0) = 90\ km/h = 25\ m/s$

$s(0) = 25$ (Schrecksek. eingerechnet)

$s(0) = 25 = -4 \cdot 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_2$

$c_2 = 25$

$v(0) = 25 = -8 \cdot 0 + c_1$

$c_1 = 25$

$s(t) = -4t^2 + 25t + 25$

$v(t) = 0$ (dann steht das Auto)

$-8t + 25 = 0$

$25 = 8t$

$t = 3{,}125\ s$

nach 3,125 s zum Stillstand gekommen

$s(3{,}125) = -4 \cdot 3{,}125^2 + 25 \cdot 3{,}125 + 25 \approx 64{,}0625\ m$

$< 70\ m$ -> Geht sich aus.

3.13 $y' = \frac{1}{x}$ $y(1) = 0$

$y = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c = \ln(x) + c$

$0 = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + c$

$c = 0$ $y = \ln(x)$

Richtungsfeld einer DGL 1. Ordnung B.S. 32/33

$y' = 2x$ $(y = x^2 + c)$

$P = (1/2)$

Linienelemente

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Trennung d. Variablen

WH: Rechnen mit Beträgen

wenn a pos.: $|a| = a$

wenn a neg.: $|a| = -a$

wenn $|a| = 3$, a könnte 3 oder -3 sein

man schreibt daher $a = \pm 3$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Bsp.: $x + y \cdot y' = 0$ $\qquad y(4) = 3$

$y' = \frac{dy}{dx}$ durch andere Schreibweise ersetzen

$x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ mit dx multiplizieren

$x\,dx + y\,dy = 0$ Variablen trennen

$x\,dx = -y\,dy$ integrieren

$\int x\,dx = \int -y\,dy$

$\frac{x^2}{2} + c_1 = -\frac{y^2}{2} + c_2$

$x^2 + 2c_1 = -y^2 + 2c_2$

$x^2 = -y^2 + \underbrace{2c_2 - 2c_1}_{=c}$

$x^2 = -y^2 + c$

$c = x^2 + y^2$

Anfangsbedingung: $y(4)=3$

$$4^2+3^2=c$$

$$c=25 \quad \ldots \text{ Kreis mit } r=5$$

$$x^2+y^2=25 \quad \ldots \text{ spez. L.}$$

Bsp.: $y'+2y=1 \qquad y(0)=3$

$$\frac{dy}{dx}+2y=1$$

$$dy+2y\,dx=1\,dx$$

$$dy=1dx-2y\,dx$$

$$dy=dx\,(1-2y)$$

$$\frac{dy}{1-2y}=1dx$$

NR: $\int \frac{1}{1-2y}\,dy$ subst. $1-2y=a$

$a'=\frac{da}{dy}=-2$

$\int \frac{1}{a}\,dy$ $\qquad -\frac{1}{2}da=dy$

$$\int \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2}\right)da=-\frac{1}{2}\ln|a|+c_1$$

rücksubst.: $-\frac{1}{2}\cdot\ln|1-2y|+c_1$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2y|+c_1=x+c_2$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2y|=x+\underbrace{c_2-c_1}_{=\bar{c}}$$

$$\ln|1-2y|=-2x-2\bar{c}$$

$$|1-2y|=e^{-2x-2\bar{c}}$$

$$|1-2y|=e^{-2x}\cdot e^{-2\bar{c}}$$

$$1-2y = \pm e^{-2\tilde{c}} \cdot e^{-2x}$$

$$\frac{1}{2} - y = \underbrace{\pm \frac{1}{2} e^{-2\tilde{c}}}_{=c} \cdot e^{-2x}$$

allg. L. $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2} - c \cdot e^{-2x}$ $\quad y(0) = 3$

$$3 = \frac{1}{2} - c \cdot \underbrace{e^{-2 \cdot 0}}_{=1}$$

$$c = -\frac{5}{2}$$

spez. L. $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2} + \frac{5}{a} \cdot e^{-2x} = \frac{1}{2}(1 + 5 \cdot e^{-2x})$

Methode d. Variablentrennung

DGL 1. Ordnung der Art $y' = f(x) \cdot g(y)$
lässt sich folgendermaßen lösen
1) $\frac{dy}{dx}$ statt y' u. Variablen trennen
2) Integrieren
3) wenn möglich nach y auflösen (allg. L.)

3.25) Exponentielle Abnahme einer Größe
a) Entladen eines Kondensators ($\rightarrow$ 3.2)

Kondensator: C … Kapazität
U_0 … Aufladespannung
$t=0$ … Beginn d. Entladung

2. Kirchhoff'sche Regel:

$$u_R(t) + u_c(t) = 0$$
$$R \cdot i + u_c = 0$$

$u_R = R \cdot i$
(Ohmsches Gesetz)

$$i \text{ — } \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$q = C \cdot U$
(Fkt, die zu jedem Zeitpunkt Ladung abgibt)

$$R \cdot C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

↳ DGL lösen

$$R \cdot C \cdot du_c + u_c \cdot dt = 0 \qquad | -u_c\, dt$$
$$R \cdot C \cdot du_c = -u_c \cdot dt$$
$$\frac{1}{u_c} \cdot du_c = -\frac{1}{RC}\, dt$$

↳ Integrieren

$$\ln|u_c| + k_1 = -\frac{1}{RC} \cdot t + k_2 \qquad | -k_1$$
$$\ln|u_c| = -\frac{1}{RC} \cdot t + \bar{k} \qquad \bar{k} = k_2 - k_1$$

↳ auflösen

$$|u_c| = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t + \bar{k}}$$
$$|u_c| = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \cdot e^{\bar{k}}$$
$$u_c = \underbrace{\pm\, e^{\bar{k}}}_{k} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$
$$u_c = k \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

$$u_c(0) = U_0$$

$$U_0 = k \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{RC}\cdot 0}}_{=1}$$
$$U_0 = k$$

$$u_c = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}$$

b) Behälter mit 1000 L (darin 20 kg Salz gelöst)
ab $t=0$:
Zufluss reines Wasser: 5 L/min
Abfluss Salzwasser: -5 L/min

Wie viel Salz nach 2h noch darin?
$m(t)$ ... Salzwasser, die zum Zeitpunkt t noch in Behälter ist.
Δt ... sehr kleine Zeitspanne, die auf $t=0$ folgt

Abfluss: in 1 min ... 5 l
in Δt ... $\Delta t \cdot 5$ l

Wie viel Salz fließt nun in Δt min ab?

Salzmasse in 1 L ... $\frac{m(t)}{1000 L}$

Salzmasse in $\Delta t \cdot 5$ ... $\frac{m(t)}{1000} \cdot \Delta t \cdot 5$

Δm ... Änderung der Salzmasse in d. Zeitspanne Δt

$$\Delta m = -\frac{m(t)}{1000} \cdot \Delta t \cdot 5 \qquad \Big| : \Delta t$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{m(t)}{1000} \cdot 5$$

für $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{5}{1000} \cdot m(t) = -k \cdot m(t)$$

$$k = \frac{5}{1000}$$

$$\frac{dm}{dt} + \frac{5}{1000} \cdot m(t) = 0 \qquad \Big| \cdot dt$$

$$dm + \frac{5}{1000} \cdot m(t)\, dt = 0 \qquad \Big| - \frac{5}{1000} m(t)\, dt$$

$$dm = -\frac{5}{1000} \cdot m(t)\, dt \qquad \Big| : m(t)$$

$$\frac{dm}{m(t)} = -\frac{5}{1000}\, dt \qquad \Big| \int$$

$$\ln|m(t)| + k_1 = -\frac{5}{1000} t + k_2 \qquad \Big| - k_1$$

$$\ln|m(t)| = -\frac{5}{1000} t + \bar{k} \qquad \bar{k} = k_2 - k_1$$

$$|m(t)| = e^{-\frac{5}{1000} t + \bar{k}}$$

$$|m(t)| = e^{-\frac{5}{1000} t} \cdot e^{\bar{k}}$$

$$m(t) = \underbrace{\pm e^{\bar{k}}}_{k} \cdot e^{-\frac{5}{1000} t}$$

$$m(t) = k \cdot e^{-\frac{5}{1000} t}$$

allg. Lösung

$$m(0) = 20$$

$$20 = k \cdot \underbrace{e^{-\frac{5}{1000} \cdot 0}}_{=1}$$

$$k = 20$$

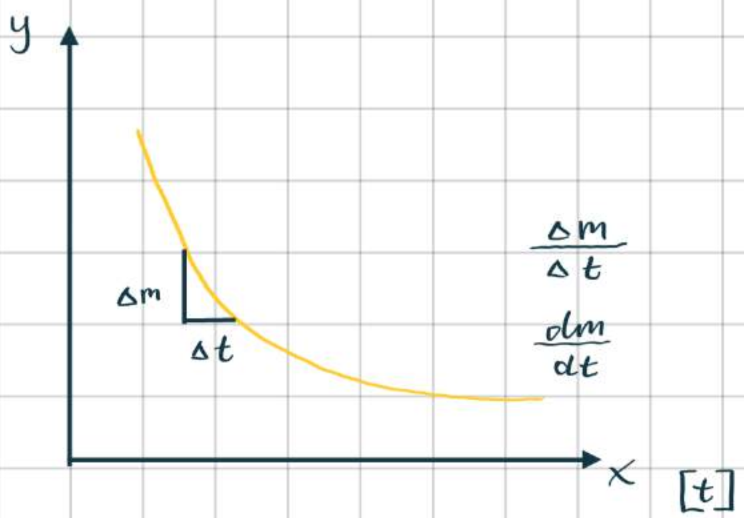
$$m(t) = 20 \cdot e^{-\frac{5}{1000} \cdot t} \quad \text{spezielle Lösung}$$

Wie viel Salz ist nach $2\,h = 120\,min$ noch im Behälter?

$$m(120) = 20 \cdot e^{-\frac{5}{1000} \cdot 120} \approx 11\,kg$$

in Anwendung: gleich dm und dt statt Δdm und Δdt

Grenzübergang wird vorweggenommen.



Differentialgleichung einer exponentiellen Abnahme

in Anwendungen oft exponentielle Abnahme y abhängig von x.
Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\frac{dy}{dx} = -k \cdot y \quad (k > 0)$$

Bsp. Kondensator

$$\frac{du_c}{dt} = -k \cdot u_c(t) \qquad u_c(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_C}}$$

Bsp. Salz

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot u_m(t) \qquad m(t) = 20 \cdot e^{-\frac{5}{1000} \cdot t}$$

3.27) Logistisches Wachstum
Gerücht ausgehend von
1 Person in Schule:
1000 Personen
Beginn d. Verbreitung: $t = 0$ d
$N(A)$ ... # der zum Zeitpunkt t informierten Personen
$1000 - N(t)$ ... # der zum Zeitpunkt t noch nicht inf. P.

$N(t)$ ... Annahme als kontinuierlich differenzierbar Fkt.

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N(t) \cdot [1000 - N(t)] \qquad k = 0{,}0008 = 8 \cdot 10^{-4}$$

a) $k > 0$, $N(t) > 0$, $[1000 - N(t)] > 0$
auch das Produkt dieser Faktoren muss > 0 sein
$N(t)$ nimmt zu

$$N'(t) = \frac{dN}{dt} > 0$$
$\Rightarrow N(t)$ streng monoton steigend

b) DGL interpretieren u. Anfangsbed. angeben
$\hookrightarrow N(0) = 1$

$N = 2$	$1000 - N = 998$	$2 \cdot 998 = 1996$
$N = 20$	$1000 - N = 980$	$20 \cdot 980 = 19600$
$N = 998$	$1000 - N = 2$	$998 \cdot 2 = 1996$

$\frac{dN}{dt}$ ist proportional zum Produkt $N \cdot (1000 - N)$
Änderung zuerst klein, dann größer, anschließend wieder klein.

c) Lösen d. DGL

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N(1000 - N) \qquad | \cdot dt \quad | : (N(1000 - N))$$

$$\frac{dN}{N(1000 - N)} = k \cdot dt$$

Hilfestellung

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b} \cdot \ln \left| \frac{x}{ax+b} \right| + c$$

$a = -1$
$b = 1000$

$$\frac{1}{1000}\cdot\ln\left|\frac{N}{-N+1000}\right|+c_1=kt+c_2 \qquad \bar{c}=c_2-c_1$$

$$\frac{1}{1000}\cdot\ln\left|\frac{N}{1000-N}\right|=kt+\bar{c} \qquad \Big|\ \text{weil } N>0$$

und $1000-N>0$

Betrag weglassen

$$\frac{1}{1000}\cdot\ln\left(\frac{N}{1000-N}\right)=kt+\bar{c}$$

$$\ln\left(\frac{N}{1000-N}\right)=0{,}8\,t+1000\,\bar{c}$$

$$\frac{N}{1000-N}=e^{0{,}8t+1000\bar{c}}$$

$$\frac{N}{1000-N}=e^{0{,}8t}\cdot\underbrace{e^{1000\bar{c}}}_{c} \qquad \Big|\cdot(1000-N)$$

$$N=(1000-N)\cdot e^{0{,}8t}\cdot c$$

$$N=1000\cdot c\cdot e^{0{,}8t}-N\cdot c\cdot e^{0{,}8t} \qquad \Big|+N\cdot c\cdot e^{0{,}8t}$$

$$N+N\cdot c\cdot e^{0{,}8t}=1000\cdot c\cdot e^{0{,}8t}$$

$$N\left(1+c\cdot e^{0{,}8t}\right)=1000\cdot c\cdot e^{0{,}8t} \qquad \Big|:(\,)$$

$$N=\frac{1000\cdot c\cdot e^{0{,}8t}}{1+c\cdot e^{0{,}8t}}$$

3.39)
$$v_0 = 20\,\frac{km}{h} = 5{,}\dot{5}\,\frac{m}{s}$$
$$\frac{dv}{dt} = -k \cdot v(t)$$

a) Weil Geschw. streng monoton abnimmt.

b)
$$v(0) = 5{,}\dot{5}\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{dv}{dt} = -k \cdot v$$
$$\frac{dv}{v} = -k\,dt \qquad |\cdot dt \;|:v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -k\,dt$$
$$\ln|v| = -k \cdot t + c_1$$
$$|v| = e^{-kt+c_1}$$
$$v = e^{-kt+c_1} \qquad v>0$$
$$v = e^{-kt} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$v = e^{-kt} \cdot c \qquad \text{allg. Lösung}$$

$$v(0) = 5{,}\dot{5} = c \cdot e^{-k\cdot 0}$$
$$c = 5{,}\dot{5}$$

$$v(t) = 5{,}\dot{5} \cdot e^{-kt}$$

c)
$$v(10) = 12\,\frac{km}{h} = 3{,}\dot{3}\,\frac{m}{s}$$

$$3{,}\dot{3} = 5{,}\dot{5} \cdot e^{-k\cdot 10}$$
$$\frac{3{,}\dot{3}}{5{,}\dot{5}} = e^{-10k}$$

$$\ln\left(\frac{3,\dot{3}}{5,\dot{5}}\right) = -10\,k \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1}$$

$$k = 0,0511$$

$$v(t) = 5,\dot{5} \cdot e^{-0,0511\,t}$$

d) $v(t) = 0$

$$v(t) = 0 = 5,\dot{5} \cdot \underbrace{e^{-0,0511\,t}}$$

für $t \to \infty$
geht $e^{-0,0511\,t}$ gegen 0

$$s(t) = \int_0^\infty v(t)\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(5,\dot{5} \cdot e^{-0,0511\,t}\right) dt$$

$$= 5,\dot{5} \cdot \lim_{b\to\infty} \int e^{-0,0511}\,dt$$

$$= 5,\dot{5} \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{0,0511} \cdot e^{-0,0511\,t}\right]\Big|_0^b$$

$$= 5,\dot{5} \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{0,0511} \cdot e^{-0,0511\cdot b} - \left(-\frac{1}{0,0511} \cdot e^{-0,0511\cdot 0}\right)\right]$$

$$= 5,\dot{5} \cdot \lim_{b\to\infty} \left[\underbrace{-\frac{1}{0,0511} \cdot e^{-0,0511\cdot b}}_{\to 0} + \frac{1}{0,0511}\right]$$

$$= 5,\dot{5} \cdot \frac{1}{0,0511} \approx 109\text{ m}$$

Uneigentliches Integral

Zuerst bis b berechnet
dann schauen was passiert
wenn $b \to \infty$

3.41

$$\frac{dV}{dt} = -\mu \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}$$

$\mu = 0{,}6$

A_0 ... Fläche der Öffnung

Zusatz: $V = R^2 \pi \cdot h$

$$\frac{dV}{dt} = R^2 \pi \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$R^2 \cancel{\pi} \cdot \frac{dh}{dt} = -\mu \cdot r^2 \cancel{\pi} \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}$$

$$R^2 \frac{dh}{dt} = -\mu \cdot r^2 \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} \qquad | : \sqrt{h} \quad | : R^2 \quad | \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot dh = \int -\frac{\mu \cdot r^2 \sqrt{2g}}{R^2} \, dt \qquad | \int$$

$$2 \cdot \sqrt{h} = -\frac{\mu \cdot r^2 \cdot \sqrt{2g}}{R^2} \cdot t + C_1$$

$$h = \Big(-\frac{\mu \cdot r^2 \cdot \sqrt{2g}}{R^2 \cdot 2} \cdot t + \underbrace{\frac{C_1}{2}}_{c}\Big)^2$$

$$h(t) = \Big(-\frac{\mu \cdot r^2 \cdot \sqrt{2g}}{R^2 \cdot 2} \cdot t + c\Big)^2$$

$\mu = 0{,}6$; $r = 0{,}1\ m$; $R = 1m$; $g = 9{,}81$

$$h(t) = (-0{,}005 \cdot \sqrt{2g} \cdot t + c)$$

$$\to c = \sqrt{2}$$

Lineare DGL 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten

$$y' + p \cdot y = s(x)$$

p ... Koeffizient — Störterm

$s(x) = 0$ ... homogene DGL

$s(x) \neq 0$ ... inhomogene DGL

3.43 Homogene lineare DGL 1. Ordnung

$y' + 2y = 0 \qquad y(1) = 3$

1. Lösungsmöglichkeit: Trennung d. Variablen

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad | \cdot dx$$

$$dy + 2y\,dx = 0 \qquad | -2y\,dx$$

$$dy = -2y\,dx \qquad | : y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2\,dx$$

$$\ln|y| = -2x + c_1$$

$$|y| = e^{-2x + c_1}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c} \cdot e^{-2x}$$

$y = c \cdot e^{-2x}$ allg. Lösung

$$3 = c \cdot e^{-2 \cdot 1}$$

$$c = 3 \cdot e^{2}$$

$y = 3 \cdot e^{2} \cdot e^{-2x} = 3 \cdot e^{2-2x} = 3 \cdot e^{2(1-x)}$ part. L.

2. Lösungsmöglichkeit: wichtig homogen u. konstanter Koeff.
↳ Exponentialansatz

Eigenschaft der Exponentialfkt.:

Ableitung unterscheidet sich nur um konstanten Faktor

$$\left.\begin{aligned} y &= \underbrace{c}\cdot e^{\lambda x} \\ y' &= \underbrace{c\cdot\lambda}\cdot e^{\lambda x}\end{aligned}\right\}\text{ in DGL einsetzen}$$

$$y' + 2y = 0$$

$$c\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x} + 2\cdot c\cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$c\cdot e^{\lambda x}\cdot(\lambda+2) = 0$$

Produkt-Null-Satz
mind. 1 Faktor muss 0 sein

$c = 0$ ist eine Lösung

$e^{\lambda x}$ wird für keinen Wert von x gleich 0

$\lambda + 2 = 0$ ... „charakteristische Gleichung"

$\lambda = -2$

→ allg. Lösung: $y = c\cdot e^{-2x}$ (schließt auch $c=0$ ein)

↳ exp. Abnahme wenn $p > 0$

Lösung ist flüchtig

Was passiert wenn $p = -3 < 0$

$$y = c\cdot e^{\lambda x}$$

$$y' = c\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x}$$

$$y' - 3y = 0$$

$$c\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x} - 3\cdot c\cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$c\cdot e^{\lambda x}(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = 3$$

3.44

$$RC \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c(t) = 0$$

$$RC \cdot u_c' + u_c = 0 \qquad |:RC$$

$$u_c' + \frac{1}{RC} \cdot u_c = 0 \qquad y' + p \cdot y = 0$$

mit Exponentialansatz

$$u_c = k \cdot e^{\lambda t}$$

$$u_c' = k \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

$$u_c(0) = u_0 \quad \rightarrow k = u_0$$

$$u_c(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Lösungsstrategie für lin. DGL mit Störterm (inhomogen)

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL = allgemeine Lösung der homogenen DGL + irgendeine partikuläre Lösung der inhom. DGL

$$y = y_h + y_p$$

Bsp.:

$$y' + 2y = 4x \qquad y(0) = 3$$

$$y' + py = s(x)$$

1) homogene DGL lösen: $y' + 2y = 0$

$$\left.\begin{aligned} y &= c \cdot e^{\lambda x} \\ y' &= c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \text{in DGL einsetzen}$$

$$c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + 2 \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0$$
$$c \cdot e^{\lambda x}(\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda = -2$$

$$y_h = c \cdot e^{-2x}$$

2) irgendeine spezielle Lösung der inhomogenen DGL

$$\underbrace{y' + 2y} = 4x$$

naheliegend, dass dieser Teil eine Polynomfkt., sogar eine lineare Fkt. ist.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= ax + b \\ y_p' &= a \end{aligned}\right\} \text{in DGL einsetzen}$$

$$a + 2(ax + b) = 4x$$
$$a + 2ax + 2b = 4x$$

nach fallenden Potenzen ordnen:

$$\underbrace{2a}x + \underbrace{a + 2b} = \underbrace{4x} + \underbrace{0}$$

I: $2a = 4$

II: $a + 2b = 0$

$\boxed{\text{Koeffizientenvergleich}}$

I: $a = 2$

I -> II: $2 + 2b = 0$

$$2b = -2$$
$$b = -1$$

$y_p = ax + b = 2x - 1$

3) $y = y_h + y_p$

$y = c \cdot e^{-2x} + 2x - 1$ ... allg. Lösung d. inhomogenen DGL

4) Anfangsbedingung $y(0) = 3$

$3 = c \cdot e^{-2 \cdot 0} + 2 \cdot 0 - 1$

$c = 4$

$y = 4 \cdot e^{-2x} + 2x - 1$

BS. 54)

Störterm $s(x)$	Lösungsansatz
$s(x) = A \cdot x + B$	$y_p = ax + b$
$s(x) = A$	$y_p = a$
$s(x) = A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_0$	$y_p = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$
$s(x) = A \cdot \sin(\omega x)$	$y_p = a \cdot \sin(\omega x) + b \cdot \cos(\omega x)$
$s(x) = A \cdot \cos(\omega x)$	oder
$s(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = a \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
$s(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} a \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -p \\ a \cdot x \cdot e^{bx} & \text{für } b = -p \end{cases}$

3.47 b)

$$y' + 2y = 52 \cdot \sin(3x) \qquad y(0) = 0$$

$$y = y_h + y_p$$

1) Lösung y_h d. homogenen DGL

$$\left.\begin{aligned} &y' + 2y = 0 \\ &y = c \cdot e^{\lambda x} \\ &y' = c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + 2 \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0 \\ &c \cdot e^{\lambda x} \cdot (\lambda + 2) = 0 \\ &\qquad\qquad \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$y_h = c \cdot e^{-2x}$$

2) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Stör fkt. ist Sinusfkt. -> entsprechender Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} y_p &= a \cdot \sin(3x) + b \cdot \cos(3x) \\ y_p' &= 3a \cdot \cos(3x) - 3b \cdot \sin(3x) \end{aligned}\right\} \text{in DGL}$$

$$y' + 2y = 52 \cdot \sin(3x)$$

$$3a \cdot \cos(3x) - 3b \cdot \sin(3x) + 2\left[a \cdot \sin(3x) + b \cdot \cos(3x)\right] = 52 \cdot \sin(3x)$$

$$3a \cdot \cos(3x) - 3b \cdot \sin(3x) + 2a \cdot \sin(3x) + 2b \cdot \cos(3x) = 52 \cdot \sin(3x)$$

$$\underbrace{(2a - 3b)} \sin(3x) + \underbrace{(3a + 2b)} \cos(3x) = \underbrace{52} \cdot \sin(3x) + \underbrace{0} \cdot \cos(3x)$$

$$\text{I: } 2a - 3b = 52$$

$$\text{II: } 3a + 2b = 0$$

$$a = 8, \quad b = -12$$

$$y_p = 8 \cdot \sin(3x) - 12 \cdot \cos(3x)$$

3) $y = y_h + y_p$

$$y = c \cdot e^{-2x} + 8 \cdot \sin(3x) - 12 \cdot \cos(3x)$$
$$y = c \cdot e^{-2x} + 4 \cdot \sqrt{13} \cdot \sin(3x - 56{,}8^\circ)$$

4) $y(0) = 0$

$$0 = c \cdot \underbrace{e^{-2 \cdot 0}}_{1} + 8 \cdot \underbrace{\sin(3 \cdot 0)}_{0} - 12 \cdot \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_{1}$$

$$0 = c - 12$$

$$c = 12$$

$$y = 12 \cdot e^{-2x} + 8 \cdot \sin(3x) - 12 \cdot \cos(3x)$$

Grüne Merkbox zur Vorgehensweise -> BS. 53

3.48) Newton'sches Abkühlungs- bzw. Erwärmungsgesetz

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot [T(t) - T_e]$$

t ... in Minuten
$T(t)$ ... Temp. in °C
T_e ... Umgebungstemp.

Lösen der DGL, wenn Thermometer aus einem Raum mit 22°C ins Freie gebracht wird, wo −10°C herrschen.

$T(0) = 22°C$
$T_e = -10°C$

$T' = k \cdot T - k \cdot T_e$

$T' - kT = -k \cdot T_e$

$T' - kT = -k\,(-10)$

$T' - kT = 10\,k$

konst. Koeffizient

Störterm

1) Lösung homogene DGL: $T' - kT = 0$

$$\left.\begin{aligned} T &= c \cdot e^{\lambda t} \\ T' &= c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} - k \cdot c \cdot e^{\lambda t} = 0 \\ &c \cdot e^{\lambda t}\,(\lambda - k) = 0 \\ &\lambda = k \end{aligned}$$

$T_h = c \cdot e^{kt}$

2) partikuläre Lösung d. inhomogenen DGL

$T' - kT = \underbrace{10\,k}_{\text{Konstant}}$

$T_p = -10$

3) $T = T_h + T_p$

$T = c \cdot e^{k \cdot t} - 10$ allg. L.

4) Anfangsbed.

$T(0) = 22\,°C$

$22 = c \cdot e^{k \cdot 0} - 10$

$32 = c$

$T(t) = 32 \cdot e^{kt} - 10$

$T(0{,}5) = 11°C$
$T(1) = ?$

$11 = 32 \cdot e^{k \cdot 0{,}5} - 10$
$21 = 32 \cdot e^{0{,}5k}$
$\frac{21}{32} = e^{0{,}5k}$
$\ln\left(\frac{21}{32}\right) = 0{,}5 \cdot k$
$k = -0{,}84$

$T(t) = 32 \cdot e^{-0{,}84t} - 10$
$T(1) = 32 \cdot e^{-0{,}84 \cdot 1} - 10 \approx 3{,}8°C$

Wann hat d. Thermometer 9°C?
$-9 = 32 \cdot e^{-0{,}84t} - 10$
$t \approx 4{,}1 \text{ min}$

3.50) $m \cdot \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v(t)$

$m = 3000 \text{ kg}$
$F = 480 \text{ N}$
$k = 60 \text{ kg/s}$
$v(t)$ in m/s
$t \geq 0 \text{ s}$
$v(0) = 0$

a) $\frac{dv}{dt} = 0$
$m \cdot 0 = F - k \cdot v(t)$
$k \cdot v(t) = F$
$v_{max} = \frac{F}{k} = \frac{480 \text{ N}}{60 \frac{kg}{s}} = 8 \frac{m}{s}$

b) Geschw. nimmt zu, aber immer langsamer
$m \cdot \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v(t)$
$\frac{dv}{dt} > 0$

$3000 \cdot \frac{dv}{dt} = 480 - 60 \cdot v(t)$
$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{25} - \frac{1}{50} \cdot v(t) = 0$ (v_{max})

für $v < 8\,\frac{m}{s}$: $\frac{4}{25} - \frac{1}{50} \cdot v > 0$

somit ist $v(t)$ streng monoton steigend

Zunahme erfolgt immer langsamer

Krümmung: $\frac{d^2v}{dt^2} < 0$

$-\frac{1}{50} < 0$ ✓

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{25} - \frac{1}{50} \cdot v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{50} \cdot v = \frac{4}{25}$$

$[y' + py = s(x)] \rightarrow p = \frac{1}{50},\quad v(0) = 0,\quad s(x) = \frac{4}{25}$

1) $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{50} \cdot v = 0$

$$\left.\begin{aligned} v_h &= c \cdot e^{\lambda t} \\ v_h' &= c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \end{aligned}\right\} \quad c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + \frac{1}{50} \cdot c \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$c \cdot e^{\lambda t}\left(\lambda + \frac{1}{50}\right) = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{50}$$

$\downarrow$

$$v_h = c \cdot e^{-\frac{1}{50}t}$$

2) Ansatz: $s(x) = \frac{4}{25}$ konstant

$$\left.\begin{aligned} v_p &= a \\ v_p' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 + \frac{1}{50} \cdot a = \frac{4}{25}$$

$$a = \frac{4 \cdot 50}{25} = 8$$

3) $v = v_h + v_p = c \cdot e^{-\frac{1}{50}t} + 8$

$v(0) = 0$

$0 = c \cdot e^{-\frac{1}{50} 0} + 8$

$c = -8$

$$v = \underbrace{-8 \cdot e^{-\frac{1}{50}t}}_{\text{flüchtiger Anteil}} + \underbrace{8}_{\text{stationärer Anteil}}$$

3.68 | a)

$$u + RC \cdot \frac{du}{dt} = U_0$$

$$u + \cancel{10^4} \cdot 50 \cdot 10^{-\cancel{6}\,2} \frac{du}{dt} = U_0$$

$$u + 0{,}5 \frac{du}{dt} = U_0$$

$$\frac{du}{dt} + 2u = U_0$$

$$\hookrightarrow p = 2$$

$$\hookrightarrow \lambda = -p = -2$$

$$\hookrightarrow U_h = c \cdot e^{-2t}$$

$$U_p = a \,, \quad U_p' = 0$$

$$U_p' + U_p = U_0$$

$$0 + a = 10$$

$$a = 10$$

$$U(t) = U_h + U_p = c \cdot e^{-2t} + 10$$

$$U(0) = 0 = c \cdot e^0 + 10$$

$$c = -10$$

$$U(t) = -10 \cdot e^{-2t} + 10$$

$$\boxed{U(t) = 10 \cdot (1 - e^{-2t})}$$

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

$y'' + py' + qy = s(x)$

p, q ... Konstante

$s(x) = 0$ ... homogen

$s(x) \neq 0$ ... inhomogen

linear ... nur 1. Potenz

keine gemischte Produkte

Bsp.: $y'' + 3y' + 4 = 0$

$y'' + 9y = \sin(2x)$

$y \cdot y'' + y + 1 = 0$

$y'' + (y')^2 = 0$

homogene DGL:

$y'' + py' + q \cdot y = 0$

Exponentialansatz:

$$\left.\begin{aligned} y_h &= c \cdot e^{\lambda x} \\ y_h' &= c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y_h'' &= c \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &c \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + p \cdot c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + q \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0 \\ &c \cdot e^{\lambda x} (\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 \end{aligned}$$

PNS: $c = 0$ ist eine Lösung

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ... charakteristische Gleichung

quadr. Glg: p, q-Formel

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1. F: $\frac{p^2}{4} - q > 0 \longrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)
2. F: $\frac{p^2}{4} - q = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (Doppellösung)
3. F: $\frac{p^2}{4} - q < 0 \longrightarrow$ 2 komplexe Lösungen

$$\lambda_1 = a + bj$$
$$\lambda_2 = a - bj$$

1. Fall: 3.73 a)

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad \text{mit } y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y &= c \cdot e^{\lambda x} \\ y' &= c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= c \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &c \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 4c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + 3 \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0 \\ &c \cdot e^{\lambda x} \cdot (\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3}$$
$$\lambda_{1/2} = -2 \pm 1$$
$$\lambda_1 = -1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = -3$$

$$\left.\begin{aligned} y_{h_1} &= C_1 \cdot e^{-x} \\ y_{h_2} &= C_2 \cdot e^{-3x} \end{aligned}\right\} y_{h_1} + y_{h_2} = y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

Zusammenfassung: BS. 68 grüne Box

Ansatz für Störterm

1) Allg. Lösung der zugehörigen homogenen DGL
$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{(3 Fälle von vorher)}$$

2) beliebige partikuläre Lsg. mit Ansatz für Störterm finden

3) Allg. Lsg. der inhomogenen DGL
$$y = y_h + y_p$$

4) Berücksichtigung der Anfangsbedingung

3.75 a) $y'' + 8y' + 7y = 14$

1) Lösung der homogenen DGL: $y'' + 8y' + 7y = 0$

charakteristische Glg.:
$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$
$$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0$$
$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -7$$
$$y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-7x}$$

2) partikuläre Lsg.: $s(x) = 14$ (konstante Fkt)

$$\left.\begin{aligned} y_p &= a \\ y_p' &= 0 \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$ in DGL einsetzen
$$y'' + 8y' + 7 = 14$$
$$7a = 14 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

$$y_p = 2$$

3) allg. Lsg. der inhomogenen DGL

$$y = y_h + y_p$$
$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-7x} + 2$$

4) Anfangsbed. miteinbeziehen

$$y(0) = 6$$
$$y'(0) = 2$$

I: $6 = c_1 \cdot e^{-0} + c_2 \cdot e^{-7 \cdot 0} + 2$

$$6 = c_1 + c_2 + 2$$
$$c_1 + c_2 = 4$$

II: $2 = -c_1 \cdot e^{-0} - 7 \cdot c_2 \cdot e^{-7 \cdot 0}$

$$2 = -c_1 - 7c_2$$

I: $4 = c_1 + c_2$ $\Big) +$

$$6 = -6c_2$$
$$c_2 = -1$$
$$c_1 - 1 = 4$$
$$c_1 = 5$$

$$y = 5 \cdot e^{-x} - e^{-7x} + 2$$

b) $y'' + 2y' + y = 2x + 1$

$y(1) = 0$

$y'(1) = 3$

1) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_1 = -1 = \lambda_2$

$$y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-x} \cdot x = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

2) $s(x) = 2x + 1$

$$\left.\begin{aligned} y_p &= a \cdot x + b \\ y_p' &= a \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y'' + 2y' + y &= 2x + 1 \\ 0 + 2a + ax + b &= 2x + 1 \\ \underbrace{ax} + \underbrace{2a + b} &= \underbrace{2x} + \underbrace{1} \end{aligned}$$

$ax = 2x$

$a = 2$

$2a + b = 1$

$4 + b = 1$

$b = -3$

$$y_p = 2x - 3$$

3) $y = y_h + y_p = \underbrace{(c_1 + c_2 \cdot x)}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{v} + 2x - 3$ $\quad u \cdot v' + u' v$

Produktregel

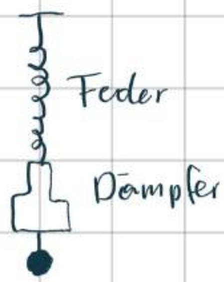
$$y' = c_2 e^{-x} + (c_1 + c_2 x)(-1) e^{-x} + 2$$

Schwingungen (Anwendung)

1) Freie Schwingungen

schwingungsfähiges System wird einmal angeregt und bleibt dann sich selbst überlassen

Feder - Masse - System:



Feder, Dämpfer } als masselos angenommen

... periodische Umwandlung von potent. Energie der Feder in kinet. Energie der Feder & umgekehrt

Schwerkraft wird vernachlässigt

$y(t)$ ... Auslenkung der Masse aus der Ruhelage

es wirken:

- Rückstellkraft: $F_F = -c \cdot y(t)$ mit c ... Federkonst.
- Reibungskraft: $F_R = -b \cdot \dot{y}(t)$ $\quad$ b ... Dämpfungskonst.

Newton'sches Grundgesetz:

$$m \cdot a(t) = F_F + F_R \qquad a(t) = \ddot{y}(t)$$

$$m \cdot \ddot{y}(t) = -c \cdot y(t) - b \cdot \dot{y}(t)$$

$$m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + c \cdot y(t) = 0 \qquad | : m$$

$$\left.\ddot{y}(t) + \frac{b}{m} \cdot \dot{y}(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) = 0 \right\} \text{DGL für Auslenkung}$$

Anfangsbed.: $y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = v_0$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = 0$$

δ ... Abklingkoeffizient

ω_0 ... Kennkreisfrequenz

D ... Dämpfungsgrad $\qquad D = \frac{\delta}{\omega_0}$

3.81) $m = 1kg$; $c = 16\ N/m$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1{,}2\ \frac{m}{s}$

a) $b = 0\,kg/s$

$$y''(t) + 16y(t) = 0$$

char. Glg.: $\lambda^2 + 16 = 0$

$$\lambda^2 = -16$$

$$\lambda_{1/2} = \pm 4j$$

$$y = c_1 \cdot \cos(4t) + c_2 \cdot \sin(4t)$$

$$y(0) = 0 = c_1 \cdot \cos(0) + \underbrace{c_2 \cdot \sin(0)}_{0}$$

$$c_1 = 0$$

$$y = c_2 \cdot \sin(4t)$$

$$y' = c_2 \cdot \cos(4t)\,4$$

$$y'(0) = 1{,}2 = 4 \cdot c_2 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1}$$

$$c_2 = 0{,}3$$

$$y(t) = 0{,}3 \cdot \sin(4t)$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{0}{4} = 0$$

$\boxed{\text{Ungedämpfte Schwingung}}$

b) $b = 1 kg/s$

$$y''(t) + \frac{b}{m} \cdot y'(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) = 0$$
$$y''(t) + y'(t) + 16 \cdot y(t) = 0$$

char. Glg.: $\lambda^2 + \lambda + 16 = 0$

$$\lambda_1 = -0{,}5 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{7}\, j$$
$$\lambda_2 = -0{,}5 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{7}\, j$$

$$y_h = e^{ax} \cdot (c_1 \cdot \cos(bx) + c_2 \cdot \sin(bx))$$
$$y_h = e^{-0{,}5\,t} \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{7}\, t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{7}\, t\right)\right)$$

$$y(0) = 0 = e^0 \,(c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0))$$
$$c_1 = 0$$

$$y_h = \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{u} \cdot \underbrace{c_2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\, t\right)}_{v}$$

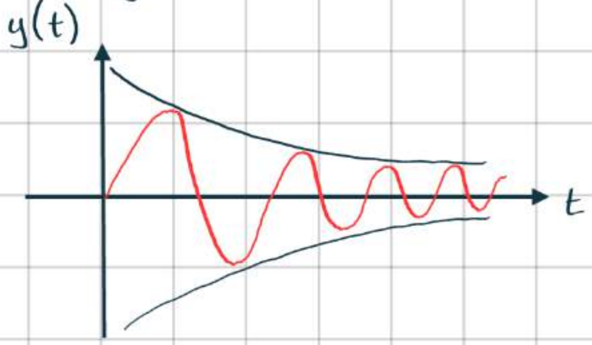
$$u' = -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} \qquad u'v + uv'$$
$$v' = c_2 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\, t\right) \frac{3}{2}\sqrt{7}\, t$$

$$y_h' = -0{,}5\, e^{-0{,}5t} \cdot c_2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\, t\right) + e^{-0{,}5t} \cdot c_2 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\, t\right) \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

$$y_h'(0) = 1{,}2 = \underbrace{-0{,}5\, e^0 \cdot c_2 \cdot \sin(0)}_{0} + e^0 \cdot c_2 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{1} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

$$1{,}2 = c_2 \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$$
$$c_2 \approx 0{,}302 \ldots$$

$$y(t) = e^{-0,5t} \cdot 0,302 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\, t\right)$$



Schwingungsfall -> gedämpfte Schwingung

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}} = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\boxed{\text{Schwingfall: } D < 1 \text{ bzw. } \delta^2 - \omega_0^2 < 0}$$

c) $b = 10$ kg/s

$$y''(t) + \frac{b}{m} \cdot y'(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) = 0$$
$$y''(t) + 10 \cdot y'(t) + 16 y(t) = 0$$

char. Glg.: $\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = -8$

$$y_h = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-8t}$$
$$y_h' = -2 \cdot c_1 \cdot e^{-2t} - 8t \cdot c_2 \cdot e^{-8t}$$

$y(0) = 0 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 \;\rightarrow\; c_1 + c_2 = 0$

$c_1 = -c_2 \quad : \text{I}$

$y'(0) = 1,2 = -2 \cdot c_1 \cdot e^0 - 8 \cdot c_2 \cdot e^0 \;\rightarrow\; -2c_1 - 8c_2 = 1,2 \; : \text{II}$

$\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{II}: \quad -2(-c_2) - 8c_2 = 1{,}2$

$-6c_2 = 1{,}2$

$c_2 = -0{,}2$

$c_1 = 0{,}2$

$y_h = 0{,}2 \cdot e^{-2t} - 0{,}2 \cdot e^{-8t}$

$y(t) = 0{,}2\left(e^{-2t} - e^{-8t}\right)$

Körper schwingt nur 1x und kehrt dann in die Ruhelage zurück.

$D = \frac{b}{2\sqrt{mc}} = \frac{10}{2\sqrt{16}} = \frac{10}{8} = 1{,}25 \quad > 1$ stärke Dämpfung

$\boxed{\text{Kriechfall / aperiodische Bewegung}}$

max. 1 Nullstelle & 1 Extremum

d) $b = 8\ \mathrm{kg/s}$

$y''(t) + \frac{b}{m} \cdot y'(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) = 0$

$y''(t) + 8 \cdot y'(t) + 16 \cdot y(t) = 0$

char. Glg.: $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -4$

$$y(t) = (c_1 + c_2 \cdot t) \cdot e^{-4t}$$

Anfangsbed.: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1{,}2\ \frac{m}{s}$

$$y(0) = 0 = (c_1 + c_2 \cdot 0) \cdot e^{-4 \cdot 0} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(t) = c_2 \cdot t \cdot e^{-4t}$$

$u = c_2 t \qquad u' = c_2$

$v = e^{-4t} \qquad v' = -4 \cdot e^{-4t}$

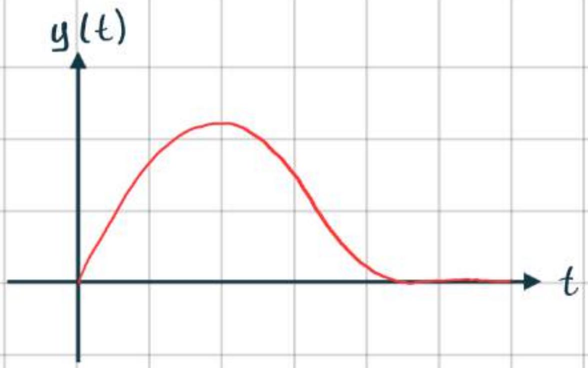
$u'v + uv'$

$$y'(t) = c_2 \cdot e^{-4t} + c_2 t\,(-4)\,e^{-4t}$$

$$y'(0) = 1{,}2 = c_2 \cdot e^0 + \underbrace{c_2 \cdot 0\,(-4)\,e^0}_{=0}$$

$$c_2 = 1{,}2$$

$$y(t) = 1{,}2t \cdot e^{-4t}$$



aperiodischer Grenzfall

vom Verlauf her dem Kriechfall ähnlich

aber geht in kürzester Zeit gegen 0

$$D = \frac{b}{2\sqrt{mc}} = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{16}} = \frac{8}{8} = 1$$

3.83 $m = 25\,kg$; $b = 1000\,kg/s$; $c = 6{,}4 \cdot 10^3\ N/m$

$y(0) = 0$; $y'(0) = 4\ \frac{m}{s}$

a) Kriechfall: $D > 1$

$$D = \frac{b}{2\sqrt{mc}} = \frac{1000}{2\sqrt{25 \cdot 6{,}4 \cdot 10^3}} = 1{,}25 \quad > 1 \rightarrow \text{Kriechfall}$$

b)
$$y''(t) + \boxed{\frac{b}{m}} \cdot y'(t) + \boxed{\frac{c}{m}} \cdot y(t) = 0$$
$$y''(t) + \boxed{2\delta}\, y'(t) + \boxed{\omega_0^2} \cdot y(t) = 0$$
$$y''(t) + 40\, y'(t) + 256 \cdot y(t) = 0$$

char. Glg.:
$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$$
$$\lambda^2 + 40\lambda + 256 = 0$$
$$\lambda_1 = -8$$
$$\lambda_2 = -32$$

→ Zwei reelle neg. Lsg. zeigen ebenfalls Kriechfall

Exkurs:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$
$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{4} - q}$$

damit 2 reelle Lsg.:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0$$
$$\frac{(2\delta)^2}{4} - \omega_0^2 > 0$$
$$\frac{4\delta^2}{4} - \omega_0^2 > 0$$
$$\delta^2 - \omega_0^2 > 0$$
$$\delta > \omega_0$$
$$20 > 16 \rightarrow \text{Kriechfall}$$

I: $y(t) = c_1 \cdot e^{-8t} + c_2 \cdot e^{-32t}$

II: $y'(t) = -8c_1 \cdot e^{-8t} - 32\,c_2 \cdot e^{-32t}$

AB -> I: $y(0) = 0 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0$

$$c_1 = -c_2$$

AB -> II: $y'(0) = 4 = -8(-c_2)\,e^0 - 32\,c_2 \cdot e^0$

$$4 = 8\,c_2 - 32\,c_2$$

$$24\,c_2 = -4$$

$$c_2 = -\frac{1}{6}$$

II -> I: $c_1 = \frac{1}{6}$

$$y(t) = \frac{1}{6} \cdot e^{-8t} - \frac{1}{6} \cdot e^{-32t} = \frac{1}{6}\left(e^{-8t} - e^{-32t}\right)$$

c) $y(t) = 0$

$$\frac{1}{6}\left(e^{-8t} - e^{-32t}\right) = 0$$

$$e^{-8t} = e^{-32t}$$

$$-8t = -32t$$

$$21t = 0$$

$$t = 0$$

-> nur eine Nullstelle (Ruhelage am Anfang)

$$\lim_{t \to \infty}\left[\frac{1}{6}\left(e^{-8t} - e^{-32t}\right)\right] = \lim_{t \to \infty}\left[\frac{1}{6}\left(\underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{e^{8t}}} - \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{e^{32t}}}\right)\right] = 0$$

$y(t) > 0$ für $t > 0$
somit strebt $y(t)$ ohne Querung der Ruhe-
lage asymptotisch in Ruhelage zurück

Maximum:

$y'(t) = 0$; überprüfen mit $y''(t) < 0$

$$y(t) = \frac{1}{6}\left(e^{-8t} - e^{-32t}\right)$$
$$y'(t) = \frac{1}{6}\left(-8\,e^{-8t} + 32\,e^{-32t}\right)$$
$$y''(t) = \frac{1}{6}\left(64\,e^{-8t} - 1024\,e^{-32t}\right)$$

$$y'(t) = 0 = \frac{1}{6}\left(-8e^{-8t} + 32e^{-32t}\right)$$
$$0 = -8\,e^{-8t} + 32\,e^{-32t}$$
$$8e^{-8t} = 32\,e^{-32t}$$
$$\frac{e^{-8t}}{e^{-32t}} = \frac{32}{8}$$
$$e^{24t} = 4$$
$$24t \cdot \ln(e) = \ln(4)$$
$$24t = \ln(4)$$
$$t = \frac{\ln(4)}{24} \approx 0{,}058\,s$$

$y''(0{,}058) \approx -20{,}2 < 0$ -> Max.

$y(0{,}058) \approx 0{,}079$ m

3.85 $y'' + p \cdot y' + 4y = 0$

a)

$D = \frac{b}{2\sqrt{mc}} = 1$

$\frac{b}{m} = p \; ; \; \frac{c}{m} = 4$

$b = p \cdot m \; ; \; c = 4m$

Annahme: $m = 2$

$b = 4 \cdot 2 = 8 \; ; \; c = 4 \cdot 2 = 8$

$1 = \frac{p \cdot m}{2\sqrt{4m^2}}$

$1 = \frac{2p}{2\sqrt{16}}$

$2p = 8$

$p = 4$

$y'' + 4y' + 4y = 0$

Freie Schwingung eines elektr. Reihen-Schwingkreises

B.S. 73

$u_R(t) = R \cdot i(t)$ Ohmsches Gesetz

$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$ Spulengleichung

$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ Kondensatorgleichung

$i(t) = \frac{dq}{dt}$

$u_R + u_L + u_C = 0$ 2. KHG

$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q(t) = 0$

$R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = 0$ 1. Ableitung

$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = 0$ Sortieren $| : L$

$$i'' + \frac{R}{L} \cdot i' + \frac{1}{LC} \cdot i = 0$$

Anfangsbed.: $i(0) = 0$

$$u_c(0) + u_0 = 0$$

$$u_c(0) = -u_0$$

$$R \cdot \cancel{i(t)} + L\frac{di}{dt} + u_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} - u_0 = 0$$

bei $t = 0$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u_0$$

$$\left.\begin{aligned} i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{1}{LC} i &= 0 \\ y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2\delta &= \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0^2} = \frac{\frac{R}{2L}}{\sqrt{\frac{1}{LC}}} = \frac{\frac{R}{2L}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{R\sqrt{LC}}{2L} = \frac{R \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{C}}{2L} \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}}$$

$$D = \frac{R \cdot \cancel{L} \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \cancel{L} \cdot \sqrt{L}} = \frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}$$

Es gilt wieder:

$D < 1$ ... Schwingfall

$D > 1$ ... Kriechfall

$D = 1$ ... aperiodischer Grenzfall

Mehr über elektr. Reihenschwingkreis: B.S. 74

$\underline{3.82|}$ $L = 1\,H$; $C = 100\,\mu F \hat{=} 10^{-4}\,F$; $u_0 = 100\,V$

$$i'' + \frac{R}{L} \cdot i' + \frac{1}{LC} \cdot i = 0$$

a) $R = 50\,\Omega$

$$i'' + 50\,i' + 10^4\,i = 0 \qquad i(0) = 0$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} \text{ für } t = 0$$

char. Glg.:

$$\lambda^2 + 50\lambda + 10^4 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -25 \pm j\,96{,}8$$

allg. Lsg.: $i(t) = e^{-25t}\left[c_1 \cdot \cos(96{,}8\,t) + c_2 \cdot \sin(96{,}8\,t)\right]$

$$i(0) = e^0\left[c_1 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{0}\right]$$

$$c_1 = 0$$

$$i(t) = \underbrace{e^{-25t}}_{u} \cdot \underbrace{c_2 \cdot \sin(96{,}8\,t)}_{v} \qquad u'v + uv'$$

$$i'(t) = -25 \cdot e^{-25t} \cdot c_2 \cdot \sin(96{,}8t) + e^{-25t} \cdot c_2 \cdot \cos(96{,}8t) \cdot 96{,}8$$

$$i'(0) = 100 = \underbrace{-25 \cdot e^0 \cdot c_2 \cdot \sin(0)}_{0} + e^0 \cdot c_2 \cdot \cos(0) \cdot 96{,}8$$

$$100 = 96{,}8\,c_2$$

$$c_2 \approx 1{,}03$$

$$i(t) = 1{,}03 \cdot e^{-25t} \cdot \sin(96{,}8t)$$

$$D = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2\sqrt{L}} = \frac{50 \cdot \sqrt{10^{-4}}}{2 \cdot 1} = 0{,}25 < 1$$

$\rightarrow$ gedämpfte Schwingung

b) $R = 250\ \Omega$

$$i'' + \frac{R}{L} \cdot i' + \frac{1}{LC} \cdot i = 0$$
$$i'' + 250 \cdot i' + 10\,000 \cdot i = 0$$

char. Glg.: $\lambda^2 + 250\lambda + 10000 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -50 \\ \lambda_2 &= -200 \end{aligned}\right\} \text{Kriechfall}$$

allg.: $i(t) = c_1 \cdot e^{-50t} + c_2 \cdot e^{-200t}$ (I)

$$i(0) = 0 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0$$
$$c_1 = -c_2$$

$$i'(0) = 100 = c_1 \cdot (-50) \cdot e^{-50t} + c_2 \cdot (-200) \cdot e^{-200t} \quad \text{(II)}$$
$$100 = -50 \cdot c_1 \cdot e^0 - 200 \cdot c_2 \cdot e^0$$
$$100 = -50 \cdot (-c_2) - 200 \cdot c_2 \quad (\text{I} \to \text{II})$$
$$100 = 50\, c_2 - 200\, c_2$$
$$100 = -150\, c_2$$
$$c_2 = -\frac{100}{150} = -\frac{2}{3}$$
$$c_1 = \frac{2}{3}$$

$$i(t) = \frac{2}{3} \cdot e^{-50t} - \frac{2}{3} \cdot e^{-200t} = \frac{2}{3}\left(e^{-50t} - e^{-200t}\right)$$

$$D = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}} = \frac{250 \cdot \sqrt{10^{-4}}}{2 \cdot \sqrt{1}} = 1{,}25 > 1 \to \text{Kriechfall}$$

c) $R = 200\,\Omega$

$$i'' + 200\,i' + 10000 \cdot i = 0$$

char. Glg.: $\lambda^2 + 200\,\lambda + 10000 = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -100$$ } aperiodischer Grenzfall

$$i(t) = (c_1 + c_2 \cdot t) \cdot e^{-100t}$$
$$i(0) = 0 = (c_1 + c_2 \cdot 0) \cdot e^{0}$$
$$c_1 = 0$$

$$i(t) = \underbrace{c_2 \cdot t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-100t}}_{v} \qquad u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$i'(t) = c_2 \cdot e^{-100t} + c_2 \cdot t \cdot (-100) \cdot e^{-100t}$$
$$i'(0) = 100 = c_2 \cdot e^{0} + c_2 \cdot 0\,(-100) \cdot e^{0}$$
$$c_2 = 100$$

$$i(t) = 100 \cdot t \cdot e^{-100t}$$

$$D = 1$$

3.96 $C = 50\,\mu F$; $L = 2H$; $U_0 = 200V$; $R = 240\,\Omega$

$i(0) = 0\,A$; $i'(0) = \frac{U_0}{L} = \frac{200}{2} = 100$

$$L \cdot i'' + R \cdot i' + \frac{1}{C} \cdot i = 0$$
$$i'' + \frac{R}{L} \cdot i' + \frac{1}{CL} \cdot i = 0$$
$$i'' + 120 \cdot i' + 10000 \cdot i = 0$$

char. Glg.: $\lambda_2 + 120\lambda + 10000 = 0$

$$\lambda_1 = -60 + 80j$$
$$\lambda_2 = -60 - 80j$$

$$i(t) = e^{-60t}\left[c_1 \cdot \cos(80t) + c_2 \cdot \sin(80t)\right]$$
$$i(0) = 0 = e^0\left[c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0)\right]$$
$$c_1 = 0$$
$$i(t) = \underbrace{e^{-60t}}_{u} \cdot \underbrace{c_2 \cdot \sin(80t)}_{v} \qquad u'v + uv'$$

$$i'(t) = -60 \cdot e^{-60t} \cdot c_2 \cdot \sin(80t) + e^{-60t} \cdot c_2 \cdot \cos(80t) \cdot 80$$
$$i'(0) = 100 = -60 \cdot e^0 \cdot c_2 \cdot \sin(0) + e^0 \cdot c_2 \cdot \cos(0) \cdot 80$$
$$100 = c_2 \cdot 80$$
$$c_2 = \frac{100}{80} = 1{,}25$$

$$i(t) = 1{,}25 \cdot e^{-60t} \cdot \sin(80t)$$

b) $D = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}} < 1$

$$1 > \frac{R \cdot \sqrt{50 \cdot 10^{-6}}}{2 \cdot \sqrt{2}}$$
$$R < \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{50 \cdot 10^{-6}}} \rightarrow R < 400\,\Omega$$

3.86 $y'' + \frac{b}{m} \cdot y' + \frac{c}{m} \cdot y = 0$

$m = 0{,}1\ kg \quad ; \quad c = 10\ N/m$

wie b wählen, dass Schwingungsfall?

$$D = \frac{b}{2\sqrt{mc}} < 1$$

$$b < 2\sqrt{mc}$$

$$b < 2\sqrt{0{,}1 \cdot 10}$$

$$b < 2$$

3.87 a) $y(t) = e^{-4t}\left[c_1 \cdot \cos(12t) + c_2 \cdot \sin(12t)\right]$

Satz von Vieta:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$x_{1/2} = -4 \pm 12j \quad \longrightarrow \text{Schwingfall}$$

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$x_1 + x_2 = -4 + 12j + (-4 - 12j)$$

$$-8 = -p$$

$$p = 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-4 + 12j)(-4 - 12j) = 16 + 48j - 48j - 144j^2$$

$$= 16 + 144 = 160 = q$$

$$y'' + 8y' + 160y = 0$$

Verbesserung 2. SA

① $U_0 = 75\,V$ $\qquad$ $i(0) = 0$

$R = 1k\Omega$ $\qquad$ $i'(0) = \frac{U_0}{L}$

$C = 5\,\mu F$

$L = 0{,}8\,H$

a) $u_R + u_L + u_C = U_0$

$$R \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q(t) = U_0$$

$$R \cdot i' + L\,i'' + \frac{1}{C} \cdot i = 0$$

$$i'' + \frac{R}{L} \cdot i' + \frac{1}{CL} \cdot i = 0$$

$$i'' + \frac{1000}{0{,}8} \cdot i' + \frac{1}{0{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \cdot i = 0$$

$$i'' + 1250\,i' + 250000\,i = 0$$

char. Glg.: $\lambda^2 + 1250\,\lambda + 250000 = 0$

$\lambda_1 = -250$

$\lambda_2 = -1000$

$$i(t) = c_1 \cdot e^{-250t} + c_2 \cdot e^{-1000t}$$

$$i(0) = 0 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0$$

$$0 = c_1 + c_2$$

$$i'(t) = -250\,c_1 \cdot e^{-250t} - 1000\,c_2 \cdot e^{-1000t}$$

$$i'(0) = \frac{U_0}{L} = \frac{75}{0{,}8} = 93{,}5 = -250\,c_1 \cdot e^0 - 1000\,c_2 \cdot e^0$$

TR: $c_1 = \frac{1}{8}$; $c_2 = -\frac{1}{8}$

$$i(t) = 0{,}125\ e^{-250t} - 0{,}125\ e^{-1000\,t}$$
$$i(t) = 0{,}125\ \left(e^{-250t} - e^{-1000\,t}\right)$$

b) $$i(t) = 0 = 0{,}125\left(e^{-250t} - e^{-1000t}\right)$$
$$0 = e^{-250t} - e^{-1000t}$$
$$e^{-1000t} = e^{-250t}$$
$$1 = \frac{e^{-250t}}{e^{-1000t}}$$
$$1 = e^{750t}$$
$$\ln(1) = 750t$$
$$0 = 750t$$
$$t = 0\ \text{s}$$

Extrema:
$$i'(t) = 0 = -250 \cdot \tfrac{1}{8} \cdot e^{-250t} + 1000 \cdot \tfrac{1}{8} \cdot e^{-1000\,t}$$
$$31{,}25\,e^{-250t} = 125\ e^{-1000\,t}$$
$$\frac{e^{-250t}}{e^{-1000t}} = \frac{125}{31{,}25}$$
$$e^{750t} = \frac{125}{31{,}25}$$
$$750t = \ln\left(\frac{125}{31{,}25}\right)$$
$$t = 0{,}00184839\ \text{s} \mathrel{\hat{=}} 1{,}8\ \text{ms}$$

c) $$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\int i\ dt = q + c$$
$$q(0) = 0$$

$$\int\left(\tfrac{1}{8}\left[e^{-250t} - e^{-1000\,t}\right]\right)dt = \tfrac{1}{8}\int\left(e^{-250t} - e^{-1000t}\right)dt$$
$$q(t) = \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{250}\ e^{-250t} + \tfrac{1}{1000}\ e^{-1000t}\right) + c$$

$$q(0) = 0 = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{250} e^{0} + \frac{1}{1000} e^{0}\right) + c \rightarrow TR: \quad c = \frac{3}{8000}$$

② $m(0) = 0$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{5}{10} - \frac{m}{50}$$

$$m' + \frac{m}{50} = \frac{5}{10}$$

m_h:

$$p = \frac{1}{50}$$

$$m_h = c \cdot e^{-\frac{1}{50}t}$$

m_p:

$$\left.\begin{array}{l} m_p = a \\ m_p' = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 + \frac{a}{50} = 0{,}5 \\ a = 25 \end{array}$$

$$m_p = 25$$

$$m(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{50}t} + 25$$

$$m(0) = 0 = c \cdot e^{0} + 25$$

$$c = -25$$

$$m(t) = -25\, e^{-\frac{1}{50}t} + 25 = 25\left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)$$

$$m(t) = 12 = 25\left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)$$

$$\frac{12}{25} = 1 - e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$e^{-\frac{1}{50}t} = 1 - \frac{12}{25}$$

$$t = 32{,}7 \text{ min}$$

Erzwungene Schwingungen

... es wirkt von außen eine Fremdanregung

- Feder - Masse - System
- elektr. Reihenschwingkreis

- FMS:

$$m \cdot a = F_F + F_R + F = -c \cdot y - b \cdot v + F$$
$$m \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = F(t)$$
$$y'' + \frac{b}{m} \cdot y' + \frac{c}{m} \cdot y = \frac{1}{m} \cdot F(t)$$
... inhomogene DGL 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

- RSK:

$$u_R + u_L + u_C = u \qquad i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$
$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = u$$
$$R \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_C = u$$
$$LC \cdot u_c'' + RC \cdot u_c' + u_c = u$$
$$u_c'' + \frac{RC}{LC} \cdot u_c' + \frac{1}{LC} \cdot u_c = \frac{1}{LC} \cdot u$$
... inhomogene DGL 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Berechnung wie gehabt
1. zugehörige homogene DGL lösen y_h
2. partikuläre Lösung der inhomogenen DGL (Störtermansatz)
3. Summe aus 1 & 2 bilden: $y = y_h + y_p$

- Lösung homogene DGL: beschreibt Eigenschwingung des schwingfähigen Systems
- Dämpfung tritt dann auf, wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ oder $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\underbrace{a}_{\text{Realteil}} > 0$

3.99) Einschwingvorgang & stationärer Zustand

Feder-Masse-System: $m = 20\,kg$; $b = 600\,kg/m$

$c = 1{,}25 \cdot 10^4\,N/m$; $F = 5\,kN$ ab $t = 0\,s$

$$y'' + \frac{b}{m} \cdot y' + \frac{c}{m} \cdot y = \frac{1}{m} \cdot F(t)$$

$$y'' + 30 \cdot y' + 625\,y = 250$$

ges.: $y(t)$

① y_h: $\lambda^2 + 30\lambda + 625 = 0$ $\qquad \lambda_1 = -15 + 20j$

$\lambda_2 = -15 - 20j$

$$y_h = e^{-15t}\left[c_1 \cdot \cos(20t) + c_2 \cdot \sin(20t)\right]$$

② y_p: Störterm ist konst. Fkt.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= a \\ y_p' &= y_p'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 625 \cdot a &= 250 \\ a &= \frac{2}{5} = 0{,}4 \end{aligned}$$

③ $$y(t) = y_h + y_p = \underbrace{e^{-15t}\left[c_1 \cdot \cos(20t) + c_2 \cdot \sin(20t)\right]}_{\text{flüchtig}} + \underbrace{0{,}4}_{\text{stationär}}$$

-> c_1 & c_2 mit Anfangsbed.: $c_1 = -0{,}4$

$c_2 = -0{,}3$

Sinusförmige Anregung

-> sinusförmige Störfunktion

-> wäre als Fourierreihe darstellbar; für jedes Reihenglied DGL lösbar (sämtl. Lösungen aufaddieren)

-> beschränken uns auf $s = A \cdot \sin(\omega t)$ mit ω als Erregerfrequenz

3.100)

$$u_c'' + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta} \cdot u_c' + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} \cdot u_c = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \cdot \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}$$

allgemeiner:

δ ... Abklingkoeffizient

ω_0 ... Kennkreisfrequenz

- interessieren uns jetzt nur für stationären Anteil
- y_p finden
- Störterm -> Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} y_p &= a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) \\ y_p' &= -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \\ y_p'' &= -a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) - b \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \text{in DGL einsetzen}$$

$$-a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) - b\omega^2 \cdot \sin(\omega t) + 2\delta\left(-a\omega \cdot \sin(\omega t) + b\omega \cdot \cos(\omega t)\right) + \omega_0^2\left(a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)\right) = \omega_0^2 \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

$$-a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) - b\omega^2 \cdot \sin(\omega t) - 2\delta a\omega \cdot \sin(\omega t) + 2\delta b\omega \cdot \cos(\omega t) + \omega_0^2 a \cdot \cos(\omega t) + \omega_0^2 b \cdot \sin(\omega t) = \omega_0^2 \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

-> sin: I: $-b\omega^2 - 2\delta a\omega + \omega_0^2 b = \omega_0^2 \hat{u}$

-> cos: II: $-a\omega^2 + 2\delta b\omega + \omega_0^2 a = 0$

$$a = \frac{-\omega_0^2 \hat{u} \cdot 2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \quad ; \quad b = \frac{\omega_0^2 \hat{u}\,(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$y_p = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) = \underset{\hat{u}_{c/p}}{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{u}_{c/p} = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\omega_0^2 \cdot \hat{u}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$A(\omega) = \frac{\hat{u}_{c/p}}{\hat{u}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$ ... dimensionsloses Amplitudenverhältnis
oder Amplitudengang

A maximal, wenn $\sqrt{\ }$ minimal wird

$f(\omega) = (\omega_0^2 + \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$ Minimum suchen

$f'(\omega) = 0$

Zusammenfassung

$$u_c'' + \underset{2\delta}{\frac{R}{L}} \cdot u_c' + \underset{\omega_0^2}{\frac{1}{LC}} u_c = \underset{\omega_0^2}{\frac{1}{LC}} \cdot u(t) \quad \text{mit} \quad u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

? Amplitude u. Phasenverschiebung Sinusantwort (stationärer Lösung), partikuläre Lösung über Störtermansatz

$$a = \frac{\omega_0^2 \cdot \hat{u} \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \quad ; \quad b = \frac{-\omega_0^2 \cdot \hat{u} \cdot 2\delta \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$y_p = a \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t) = \underset{\hat{u}_{c/p}}{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{u}_{c/p} = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\omega_0^2 \cdot \hat{u}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$A = \frac{\hat{u}_{c/p}}{\hat{u}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

② Wann ist A maximal?

→ Wenn $\sqrt{\boxed{}}$ ← minimal

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$$
$$f'(\omega) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\delta^2\omega$$
$$f'(\omega) = -4\omega\omega_0^2 + 4\omega^3 + 8\delta^2\omega$$
$$f'(\omega) = 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) \overset{!}{=} 0 \qquad \text{PNS: } \omega_1 = 0$$

$$\omega^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ p}}{0}\omega + \underbrace{2\delta^2 - \omega_0^2}_{q}$$

$$\omega_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - (2\delta^2 - \omega_0^2)}$$
$$\omega_{2/3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \text{mit } \omega_0^2 > 2\delta^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_{max} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}}$$
$$= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)}}$$

$$A_{max} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ ... man spricht von Resonanz
Dämpfung δ muss groß genug sein, ansonsten Resonanzkatastrophe

Phasenverschiebung

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \rightarrow \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

$\omega_0^2 > \omega^2 \rightarrow \varphi$ ist zwischen $-90°$ & $0°$

$\omega_0^2 = \omega^2 \rightarrow \varphi = 90°$

$\omega_0^2 < \omega^2 \rightarrow \varphi$ ist zwischen $-180°$ & $-90°$ aber $-180°$ vom TR-Ergebnis abziehen

neg. φ: Erzwungene Schwingung ist gegenüber der anregenden Schwingung verzögert

3.105)

$y'' + 4y' + 5y = \sin(2t)$ $\qquad$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

a) Da Dämpfung geringer ist.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Disziplin der Mathematik; Abschätzen von Risiken; Zufallsvorgänge | Zufallsexperimente; man versucht festzustellen, ob gewisse Regeln vorhanden

- **Ereignis:** Teilmenge von möglichen Versuchsausgänge
  Bezeichnung mit Großbuchstaben
  z.B. A: Werfe eine gerade Zahl → Ausgänge: 2, 4, 6

$\boxed{\text{Grüne Box S. 185}}$

Wahrscheinlichkeit für A:

$P(A)$ ↗ probability in % gegeben

sicheres Ereignis: $P(A) = 1$
unmögl. Ereignis: $P(A) = 0$
rel. Häufigkeit → stat. Schätzung

Laplace Experiment

(1) Nur endlich viele Versuchsausgänge
(2) alle Versuchsausgänge müssen die gleiche Chance haben (faire Münze, fairer Würfel, etc.)

Wahrscheinlichkeit für A:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl mögliche Ausgänge}} = \frac{g}{m}$$

A: Werfe mit fairem Würfel eine gerade Zahl
→ mögliche Ausgänge: 1, 2, 3, 4, 5, 6 → $m = 6$
→ günstige Ausgänge: 2, 4, 6 → $g = 3$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Bsp.: Werfen von 2 fairen Würfeln

a) Wahrscheinlichkeit mind. 1x eine 6 zu werfen

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

günstige Ausgänge: $g = 11$

mögliche Ausgänge: $m = 36$

$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{11}{36} = 80{,}5\,\%$

b) Wahrscheinlichkeit mind. 1x Augensumme 8 zu werfen

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

günstige Ausgänge: 5

mögliche Ausgänge: 36

$P(B) = \frac{g}{m} = \frac{5}{36} = 13{,}8\,\%$

Bsp.: Werfen von 3 Münzen

a) Wahrscheinlichkeit von mind. 1x Zahl

KKK	KKZ
KZK	ZKK
KZZ	ZZK
ZKZ	ZZZ

$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{7}{8}$

8.4

Gesamtanzahl Läufer: 1064

A: Läufer unter 3h

$g = 147$

$m = 1064$ $P(A) = \frac{g}{m} = 13,8\,\%$

B: Läufer mind. 4h

$g = 206$

$m = 1064$ $P(B) = \frac{g}{m} = 19,3\,\%$

8.6

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$g = 4$

$m = 36$

$P(A) = \frac{4}{36} = 11,1\,\%$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

8.10| Zusammengesetzte Ereignisse

fairer Würfel: wird 2-mal geworfen

a) mind. einmal eine Sechs werfen

↳ in Teilergebnisse splitten

A: beim 1. Wurf 6 } $A \vee B$
B: beim 2. Wurf 6 }

b) zweimal 6 werfen

A: beim 1. Wurf 6 } $A \wedge B$
B: beim 2. Wurf 6 }

Unvereinbare Ereignisse

Ereignisse A & B können nicht gemeinsam auftreten.

↳ A: Werfe 6 } A & B unvereinbar
B: Werfe 3 }
C: Werfe gerade Zahl } A & C sind vereinbar
B & C sind unvereinbar

8.11|

♡: As, König, Dame, Bube, Zehn
◇: As, König, Dame, Bube, Zehn
♤: As, König, Dame, Bube, Zehn
♧: As, König, Dame, Bube, Zehn

} 20 Spielkarten
? Wahrscheinlichk. eine Herz- oder Karokarte zu ziehen

A: Ziehen einer ♡-Karte $P(A) = \frac{5}{20}$

B: Ziehen einer ◇-Karte $P(B) = \frac{5}{20}$

$P(A \vee B) = \frac{10}{20} = \frac{5}{20} + \frac{5}{20} = P(A) + P(B)$

$\boxed{P(A \vee B) = P(A) + P(B) \text{ für unvereinbare Ereignisse}}$

8.12 a)

Wahrscheinlichk. aus 20 Karten eine ♡-Karte oder einen König zu ziehen.

A: Ziehe eine ♡-Karte $\rightarrow P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
B: Ziehe einen König $\rightarrow P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

günstig für $A \vee B$:

$$P(A \vee B) = \frac{8}{20} \neq P(A) + P(B) = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$$

$\boxed{P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B) \text{ für vereinbare Ereignisse}}$

b)

Wahrsch. beim 2-maligen Werfen eines fairen Würfels mind. 1x 6 zu würfeln

A: Beim 1. Wurf 6 $\rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$
B: Beim 2. Wurf 6 $\rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} = 30{,}5\,\%$$

8.13|

Behälter:

$$\left.\begin{array}{l}3 \text{ rote}\\ 2 \text{ grüne}\\ 5 \text{ weiße}\end{array}\right\}$$ Wahrsch. bei einem Zug rot/grün zu ziehen

A: rote Kugel ziehen $\to$ $P(A) = \frac{3}{10}$

B: grüne Kugel ziehen $\to$ $P(B) = \frac{2}{10}$

A & B unvereinbar

$P(A \vee B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{10}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

② Wahrsch., dass Augensumme 8 geworfen wird unter der Voraussetzung, dass mind. 1x 6 geworfen wird.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

A: Werfe Augensumme 8

B: Werfe 6

$$\left.\begin{array}{l}P(A|B) = \frac{2}{11} = 18{,}2\,\%\\ P(A) = \frac{5}{36} = 13{,}9\,\%\end{array}\right\}$$ B begünstigt Ausgang für A

$P(B) = \frac{11}{36}$

$P(A \wedge B) = \frac{2}{36}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) \neq 0}$$

... bedingte Wahrsch. von A unter der Bedingung B

Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A & B eines Zufallsprozesses heißen unabhängig $P(A|B) = P(A)$

d.h. A ist nicht abhängig von B und umgekehrt

-> beeinflussen einander nicht

$P(A \wedge B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$ -> bel. Ereignisse

$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$ -> unabh. Ereignisse

Bsp.: Topf mit Batterien: 4 neue & 2 alte

? Wahrsch. für 2 neue Batterien

A: Neue Batterie bei 1. Entnahme

B: Neue Batterie bei 2. Entnahme

$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(A|B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 40\%$

Wahrsch. des Gegenereignisses

A: Werfe 6 (Ereignis)

$\bar{A}$: Werfe keine 6 (Gegenereignis)

- A und $\bar{A}$ sind unvereinbar
- es tritt entweder A oder $\bar{A}$ ein

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ (Würfelbsp.)

Bsp.: Würfel

A: mind. 1x 6 bei 3x würfeln

116, 126, ..., 362, ..., 666 → aufwendig

Über Gegenereignis:

$\bar{A}_1$: kein 6er beim 1. Wurf → $P(\bar{A}_1) = \frac{5}{6}$

$\bar{A}_2$: kein 6er beim 2. Wurf → $P(\bar{A}_2) = \frac{5}{6}$

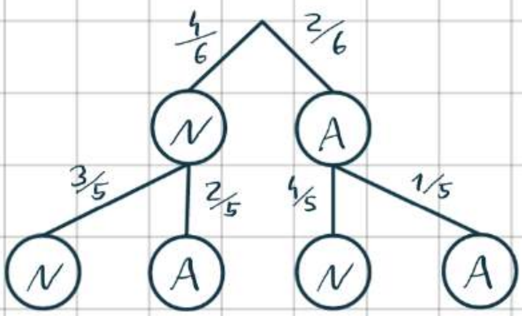
$\bar{A}_3$: kein 6er beim 3. Wurf → $P(\bar{A}_3) = \frac{5}{6}$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{A}_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

Mehrstufige Zufallsprozesse → in Baumdiagramm darstellen

Bsp.: Batterien: 2 alte, 4 neue



graphischer Überblick über Zielfolgen: NN, NA, AN, AA

$$P(NN) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 40\,\%$$

$$P(\text{mind. } 1\times N) = P(AN \vee NN \vee NA) = P(AN) + P(NN) + P(NA)$$
$$= \frac{2}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}9\dot{3} = 93{,}\dot{3}\,\%$$

oder:

$$\bar{P}(\text{mind. } 1\times N) = 1 - P(AA) = 1 - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{28}{30}$$

Kontrolle: Ereignisse ausgehend von einem Knoten, müssen in der Summe 1 ergeben.

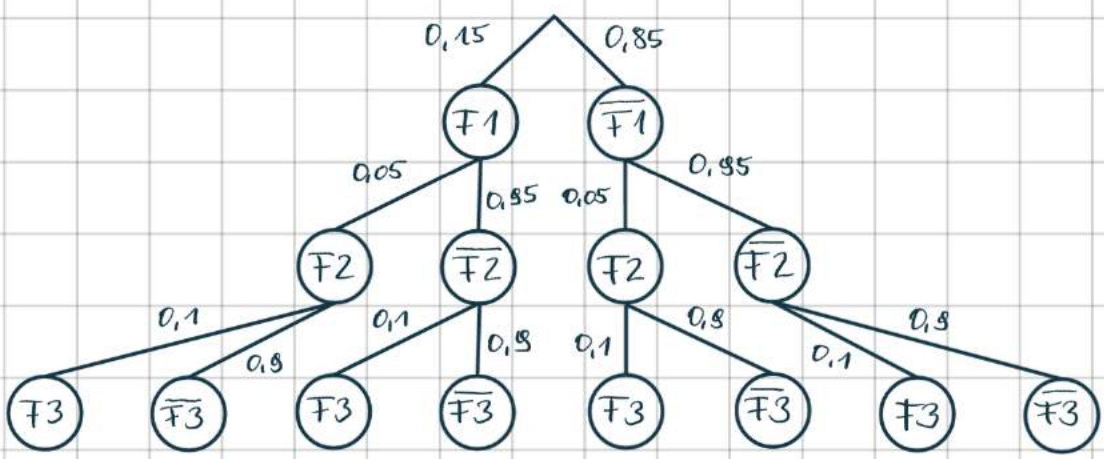
Bsp.: Trinkgläser - Produktion

Fehler 1: Materialfehler → $P(F1) = 15\,\%$

Fehler 2: Fehlerhafter Schliff → $P(F2) = 5\,\%$

Fehler 3: Bruch → $P(F3) = 10\,\%$

→ Fehlerarten treten unabhängig voneinander auf



$P(\text{alle Fehler}) = 0{,}15 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}075\,\%$

$P(\text{irgendein Fehler}) = 1 - P(\text{kein Fehler})$

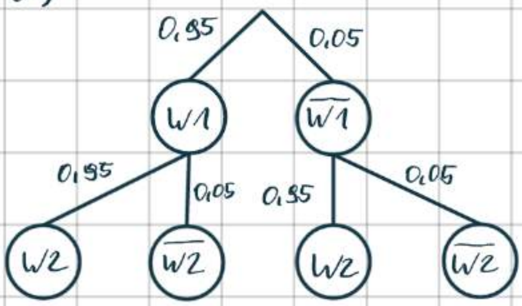
$= 1 - 0{,}85 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 27{,}3\,\%$

$P(\text{höchstens 1 Fehler}) = 0{,}15 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 + 0{,}85 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}9 + 0{,}85 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}1$

$+ 0{,}85 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 97{,}4\,\%$

8.34

a)



b)

$P(\text{geweckt}) = 0{,}95 \cdot 0{,}05 + 0{,}95 \cdot 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 99{,}75\,\%$

8.33

a) $P(\text{Erfolg bei 2 Versuchen}) = 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 91\,\%$

b) $P(> 2 \text{ Versuche}) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 9\,\%$