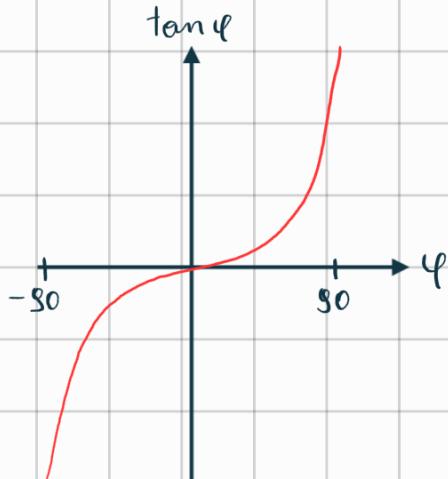
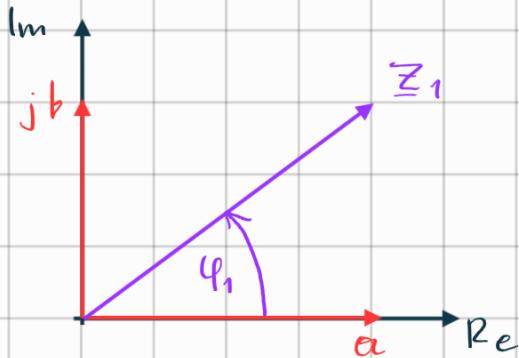


Wiederholung kompl. Zahlen

$$\underline{Z}_1 = a + jb$$

$$|\underline{Z}_1| = \underline{Z}_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

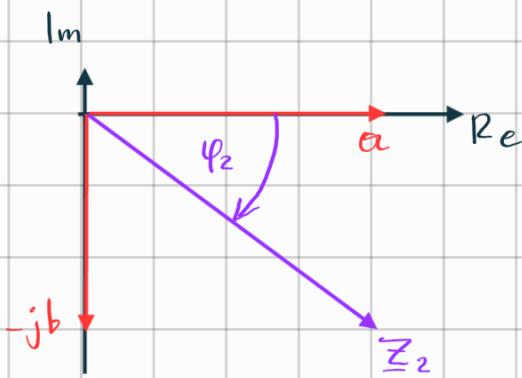
$$\tan \varphi_1 = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{b}{a}$$



$$\underline{Z}_2 = a - jb$$

$$|\underline{Z}_2| = \underline{Z}_2 = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{-b}{a}$$

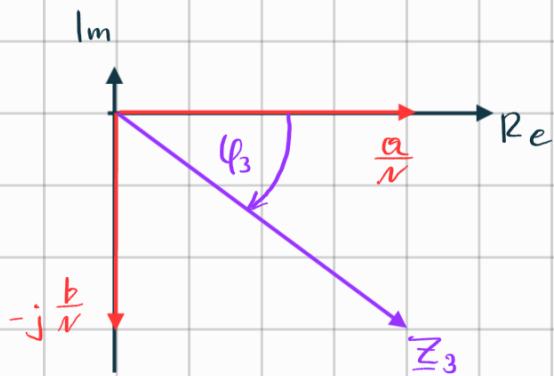


$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{a + jb} = \frac{1}{a + jb} \cdot \frac{a - jb}{a - jb} = \frac{a - jb}{a^2 + j ab - jab - j^2 b^2}$$

$$= \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{N} - j \frac{b}{N}$$

$$|\underline{Z}_3| = \underline{Z}_3 = \sqrt{\left(\frac{a}{N}\right)^2 + \left(-\frac{b}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{N^2} + \frac{b^2}{N^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

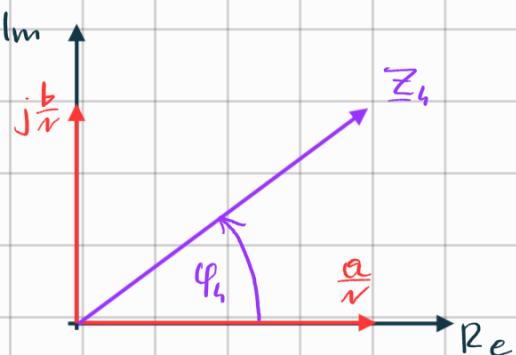
$$\boxed{\underline{Z}_3 = \frac{1}{a + jb} = \frac{1}{\underline{Z}_1} \rightarrow |\underline{Z}_3| = \frac{1}{|\underline{Z}_1|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



$$\tan \varphi_3 = \frac{-\frac{b}{V}}{\frac{a}{V}} = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} Z_4 &= \frac{1}{a-jb} = \frac{1}{a-jb} \cdot \frac{a+jb}{a+jb} = \frac{a+jb}{a^2+jab-jab-j^2b^2} \\ &= \frac{a+jb}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + j \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a}{V} + j \frac{b}{V} \end{aligned}$$

$$|Z_4| = Z_4 = \sqrt{\left(\frac{a}{V}\right)^2 + \left(\frac{b}{V}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{V^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



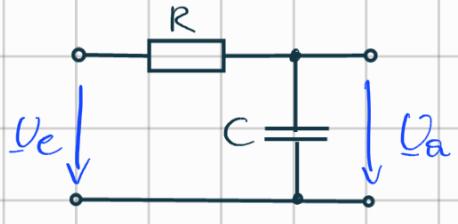
$$\tan \varphi_4 = \frac{\frac{b}{V}}{\frac{a}{V}} = \frac{b}{a}$$

$$-\frac{3}{j\omega CR - \frac{4}{\omega}}$$

$$Im = \frac{3\omega CR}{(-\frac{4}{\omega})^2 + (-\omega CR)^2}$$

$$Re =$$

Passiver Tiefpass 1. Ordnung



$$G(j\omega) = \frac{V_a}{V_e} = \frac{1}{j\omega C + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$|G|(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \tan \varphi = \omega RC$$

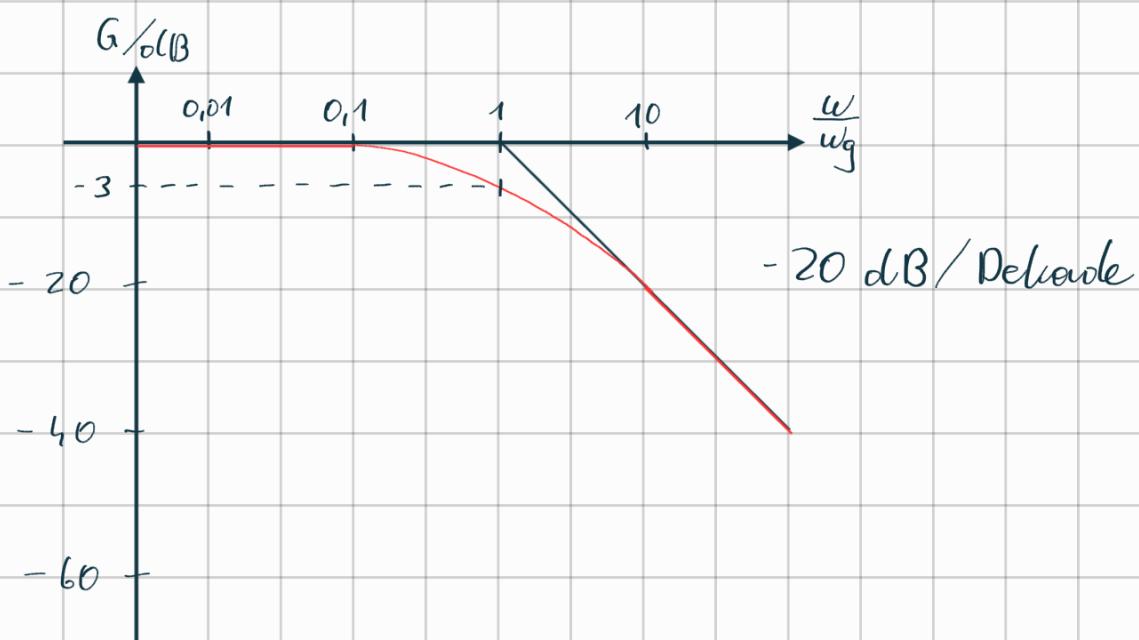
für $\omega = \omega_g$ (Grenzkreisfrequenz) gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (= 0,707 \triangleq -3 \text{ dB})$$

$$1 + (\omega_g RC)^2 = 2$$

$$(\omega_g RC)^2 = 1$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC} \rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$



- TP beginnt eine Dekade vor ω_g zu fallen
- Bei ω_g -3 dB
- Eine Dekade nach ω_g -20 dB

Bsp.: geg.: $C = 10 \text{ nF}$; $f_g = 500 \text{ Hz}$
 ges.: $R = ?$

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} \rightarrow R = \frac{1}{2\pi f_g C} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 31,8 \text{ k}\Omega$$

Wieso -20 dB / Dekade?

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}}$$

• für $\omega = \omega_g$:

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega_g RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \stackrel{!}{=} -3 \text{ dB}$$

• für $\omega = 10 \omega_g$:

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (10\omega_g RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 10^2}} \approx \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

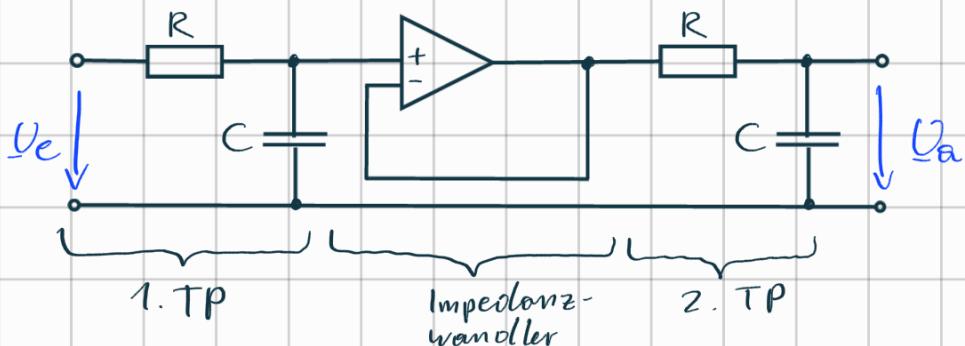
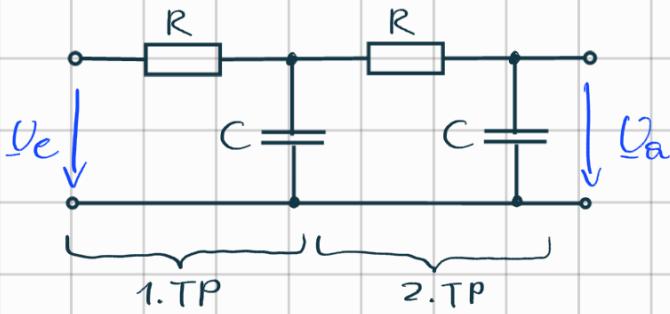
$$20 \cdot \log(10^{-1}) = 20 \cdot (-1) = -20 \text{ dB / Dekade}$$

• für $\omega = 100 \omega_g$:

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (100\omega_g RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 100^2}} \approx \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$20 \cdot \log(10^{-2}) = 20 \cdot (-2) = -40 \text{ dB / Dekade}$$

Tiefpass 2. Ordnung



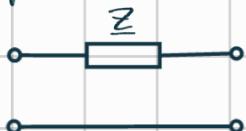
Impedanzwandler wird verwendet, um den 1. TP zu entlasten.

Die beiden Bode-Diagramme der einzelnen Tiefpässe "addieren" sich. Das bedeutet, die Betragskurve fällt mit -40dB/Dekade . Bei 500 Hz ergibt sich eine Dämpfung von -6dB . Die Grenzfrequenz ist jedoch bei -3dB definiert, diese liegt laut Simulation bei $\sim 325\text{ Hz}$. Außerdem ist zu erkennen, dass der Phasenwinkel von 0° auf -180° und bei 325 Hz die Phase -65° beträgt.

Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & F & G \\ & H & K \\ \hline A & B & AF+B\cdot H & A\cdot G+B\cdot K \\ C & D & C\cdot F+D\cdot H & C\cdot G+D\cdot K \end{array}$$

Impedanzmatrix



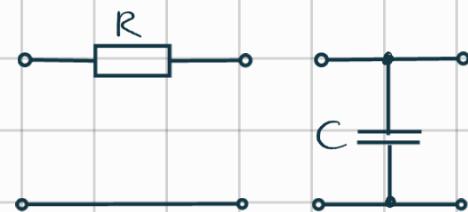
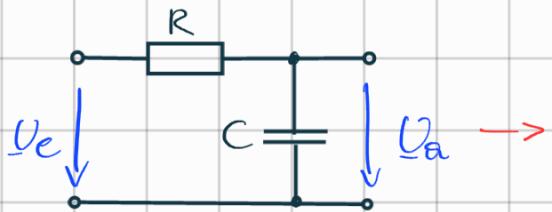
$$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Admittanzmatrix



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$$

TP 1.0.



$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

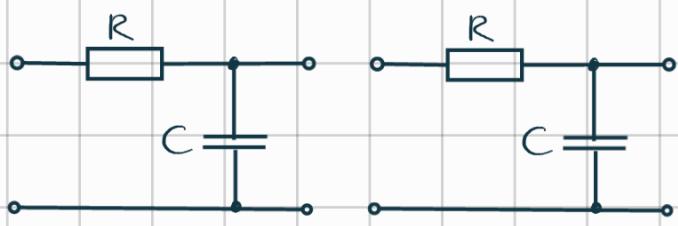
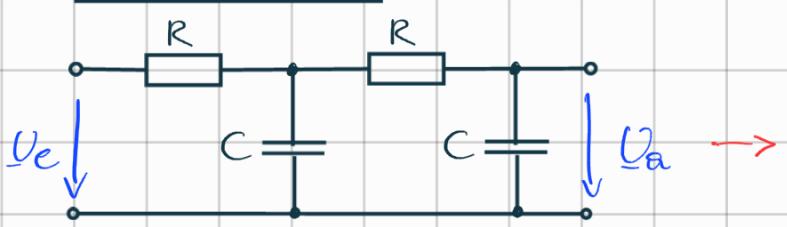
1	0
$j\omega C$	1
1	$1 + j\omega RC$
0	$j\omega C$

$$\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

Impedanzm. Admittanzm.

$$|G| = \frac{U_e}{U_a} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

TP 2.0.



$1 + j\omega RC$	$j\omega C$
R	$(1 + j\omega RC)^2 + j\omega RC$
$j\omega C$	1

$$G = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{(1 + j\omega RC)^2 + j\omega RC}$$

$$= \frac{1}{1 + 2j\omega RC - \omega^2 R^2 C^2 + j\omega RC}$$

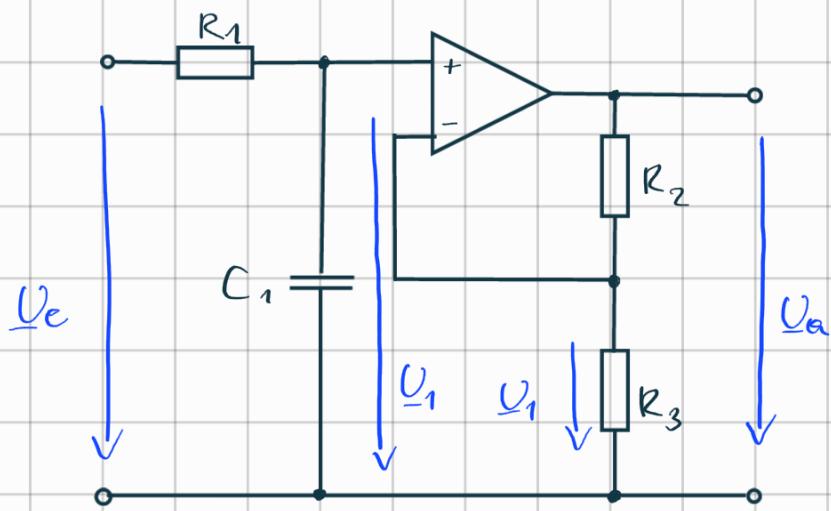
$$= \frac{1}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 3j\omega RC}$$

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + (3\omega RC)^2}} \stackrel{|}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\omega = \omega_0$

Aktives TP-Filter 1. O.

1.) nicht-invertierender aktiver TP 1. O.



$$G(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{U_1}{U_e} = G_1 \cdot G_2$$

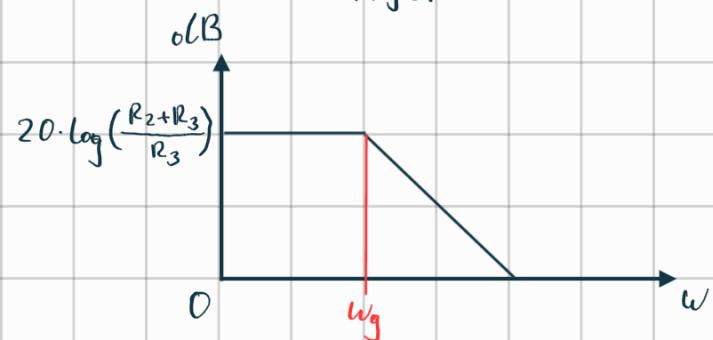
$$G_1 = \frac{U_1}{U_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$G_2 = \frac{U_a}{U_1} = \frac{R_2 + R_3}{R_3}$$

$$G = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_3}$$

$$|G| = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\begin{aligned} w=0 &: |G| = \frac{R_2 + R_3}{R_3} = A_0 \\ w \rightarrow \infty &: |G| = 0 \end{aligned}$$



$$\text{for } w=w_g: |G| = A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_2 + R_3}{R_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (w_g R_1 C_1)^2}} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 + (w_g R_1 C_1)^2 = 2$$

$$w_g^2 = \frac{1}{R_1^2 C_1^2}$$

$$w_g = \sqrt{\frac{1}{R_1^2 C_1^2}}$$

Beispiel:

geg.: $V = 20 \text{ dB}$

$R \geq 10 \text{ k}$

$f_g = 100 \text{ Hz}$

$$V = A_o = 10^{\frac{20}{20}} = 10 = \frac{R_2 + R_3}{R_3}$$

$$8R_3 = R_2$$

$$\rightarrow R_{3, \text{gew}} = 10 \text{ k}$$

$$\rightarrow R_2 = 80 \text{ k}$$

$$\omega_g = \frac{1}{R_1 C}$$

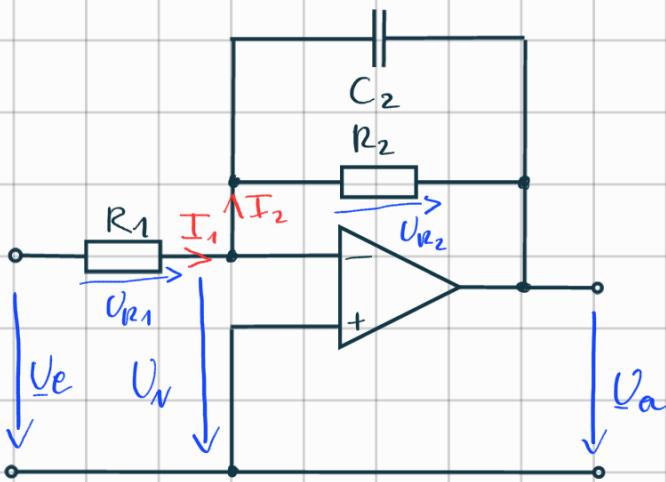
$$C = \frac{1}{R_1 \omega_g}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_g \cdot R_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10 \text{ k}} = 159,15 \text{ nF}$$

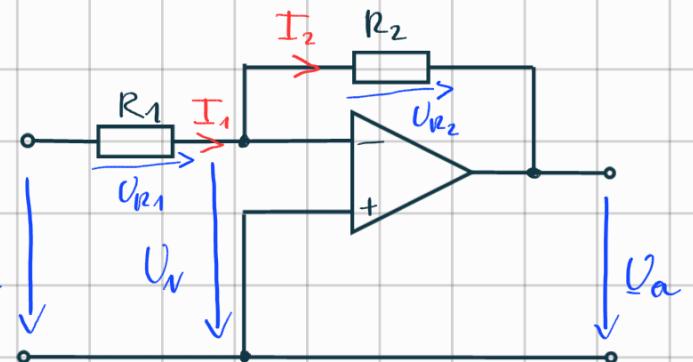
Die Simulation zeigt, dass bei niedrigen Frequenzen $< 10 \text{ Hz}$ eine Verstärkung von 20 dB erreicht wird. Bei $f_g = 100 \text{ Hz}$ beträgt die Verstärkung $v = V - 3 \text{ dB} = 17 \text{ dB}$ und der Phasenwinkel -45° . Bei Frequenzen $> 100 \text{ kHz}$ erkennt man den Einfluss des OPVs.

In der Industrielektronik werden Tief- und Hochpässe zumeist mit OPVs in Gegenkopplung realisiert.

2.) invertierender aktiver TP 1. O.



invert. Verstärker:



$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U_{R1}}{Z_1} = \frac{U_{R2}}{Z_2}$$

$$\frac{V_e - U_N}{Z_1} = \frac{U_N - V_a}{Z_2}$$

$$\frac{U_e}{Z_1} = -\frac{U_a}{Z_2}$$

$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

$$\frac{V_e - U_N}{R_1} = \frac{U_N - V_a}{R_2}$$

$$\frac{U_e}{R_1} = -\frac{U_a}{R_2}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}{\frac{1}{R_1}} = -\frac{\frac{R_2}{1+j\omega C_2 R_2}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+j\omega C_2 R_2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega C_2 R_2)^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{\omega C_2 R_2}{1} = -\omega C_2 R_2$$

- $\omega = 0 : |G(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} = A_0 \quad \tan \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0 \quad \varphi_{\text{ges}} = -180^\circ$
- $\omega = \infty : |G(j\omega)| = 0 \quad \tan \varphi = -\infty \rightarrow \varphi = -90^\circ \quad \varphi_{\text{ges}} = -270^\circ$

$$\omega = \omega_g : |G(j\omega)| = A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cancel{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega_g C_2 R_2)^2}} = \cancel{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 + (\omega_g C_2 R_2)^2 = 2$$

$$\omega_g = \frac{1}{C_2 R_2} \rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi C_2 R_2}$$

Bsp.: Signalfrequenz 0,1 Hz $\rightarrow f_g = 1 \text{ Hz}$
 $A_o = 20 \text{ dB}, C = 10 \text{ nF}, R \geq 10k$

$$f_g = 1 = \frac{1}{2\pi \cdot C \cdot R_2}$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 15,8 \text{ M}\Omega$$

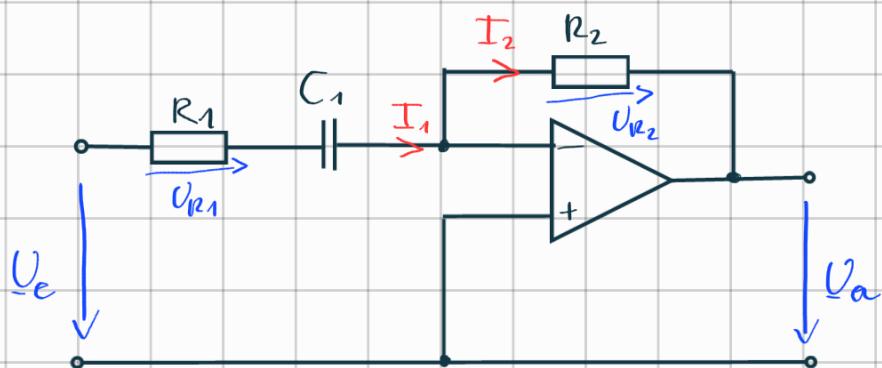
$$A_o = 10^{\frac{20}{20}} = 10 = \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{10} = 1,58 \text{ M}\Omega$$

Die Simulation zeigt:

- 1) Bei $f_g = 1 \text{ Hz}$ beträgt die Verstärkung $A_0 - 3 \text{ dB} = 20 - 3 \text{ dB} = 17 \text{ dB}$.
- 2) Ab ca. 100 kHz ist der Einfluss des OPVs zu erkennen.
- 3) Im Bode-Diagramm zeigt LTSpice einen Phasenwinkel von 135° an. Dies kann mit der Transient (.trans) - Analyse widerlegt werden. Der reale Phasenwinkel beträgt -225° .

aktives HP-Filter 1. O. mit Gegenkopplung



$$G(j\omega) = \frac{V_a}{V_e} = - \frac{Z_2}{Z_1} = - \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_1}}$$

$$G(j\omega) = - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega C_1 R_1}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1 R_1}\right)^2}} \quad \tan \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C_1 R_1}}{1} = \frac{1}{\omega C_1 R_1}$$

$$\begin{array}{lll} \cdot \omega = 0 : & |I| = 0 & \tan \varphi = \infty \quad \varphi = 90^\circ \quad \varphi_{\text{ges}} = -90^\circ \\ \cdot \omega = \infty : & |I| = \frac{R_2}{R_1} = A_\infty & \tan \varphi = 0 \quad \varphi = 0 \quad \varphi_{\text{ges}} = -180^\circ \end{array}$$

$$\cdot \omega = \omega_g : \quad |I| = A_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cancel{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\omega_g C_1 R_1}\right)^2}} = \cancel{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 + \left(\frac{1}{\omega_g R_1 C_1} \right)^2 = 2$$

$$\frac{1}{\omega_g R_1 C_1} = 1$$

$$\omega_g = \frac{1}{C_1 R_1} \rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi C_1 R_1}$$

Bsp.: $A_\infty = 40 \text{ dB}$, $f_g = 1 \text{ kHz}$, $C = 220 \text{nF}$, $R \geq 10 \text{k}\Omega$

$$f_g = \frac{1}{2\pi C_1 R_1}$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi \cdot f_g \cdot C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 220 \cdot 10^{-9}} = 723,43 \Omega$$

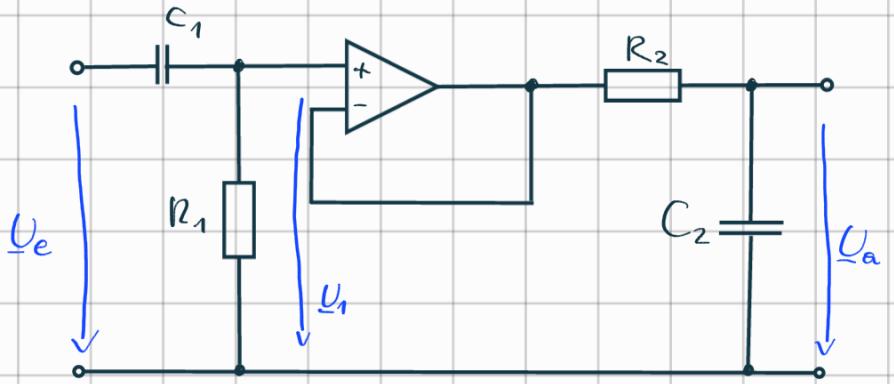
$$A_\infty = 10^{\frac{40}{20}} = 100 = \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_2 = 100 \cdot R_1 = 72,3 \text{k}\Omega$$

Aus der Simulation erkennt man:

- 1) Niedrige Frequenzen werden gedämpft.
- 2) Bei f_g beträgt die Verstärkung $40 - 3 \text{ dB} = 37 \text{ dB}$.
- 3) Der Phasenwinkel beträgt -135° .
- 4) Bei $10 f_g$ beträgt die Verstärkung 14 dB und der Phasenwinkel 180° .

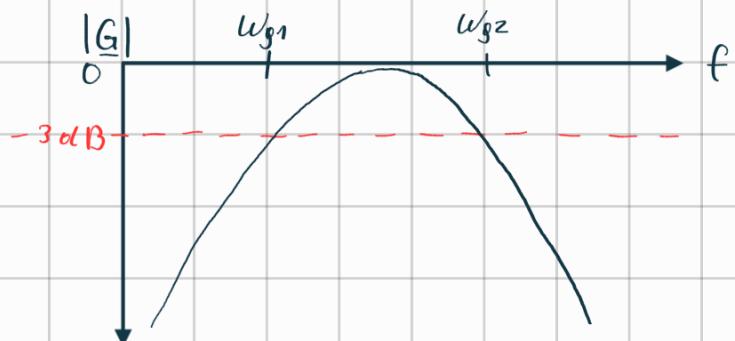
Bandpass



$$G = \frac{U_a}{U_e} = \frac{U_1}{U_e} \cdot \frac{U_a}{U_1}$$

$$G = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_1 C_1}} \cdot \frac{1}{j\omega R_2 C_2 + 1}$$

$$G = \frac{1}{1 - \frac{1}{j\omega R_1 C_1}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2}$$



$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega R_1 C_1})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_2 C_2)^2}}$$

$$\omega_{g1} : \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega R_1 C_1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega R_1 C_1})^2} = \sqrt{2}$$

$$\omega_{g2} : \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_2 C_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

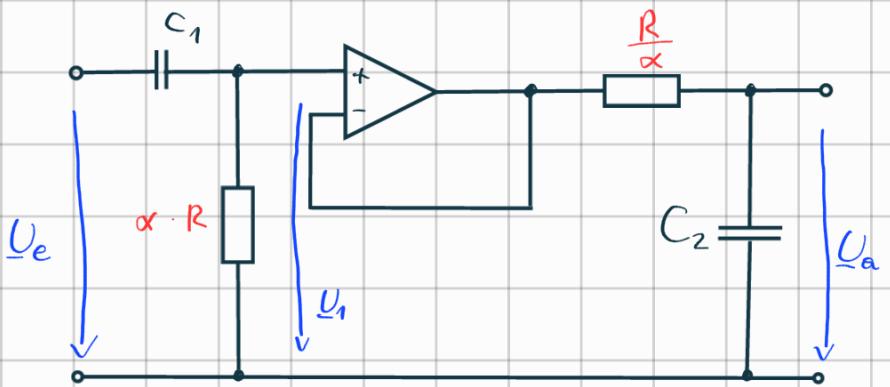
$$\sqrt{1 + (\omega R_2 C_2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\omega R_1 C_1} = 1$$

$$\omega R_2 C_2 = 1$$

$$\omega_{g1} = \omega = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$\omega_{g2} = \omega = \frac{1}{R_2 C_2}$$



$$G = \frac{U_a}{U_e} = \frac{U_1}{U_e} \cdot \frac{U_a}{U_1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega \alpha R C}} \cdot \frac{1}{1 + j \omega \alpha R C}$$

Bsp.: $C = 100 \text{ nF}$; $\alpha = 3$; $R = 30 \text{ k}\Omega$

ges.: f_{g1}, f_{g2}

$$f_{g1} = \frac{1}{2\pi \alpha R C} = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} = 17 \text{ Hz}$$

$$f_{g2} = \frac{1}{2\pi \frac{R}{\alpha} C} = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{30 \cdot 10^3}{3} \cdot 100 \cdot 10^{-9}} = 159 \text{ Hz}$$

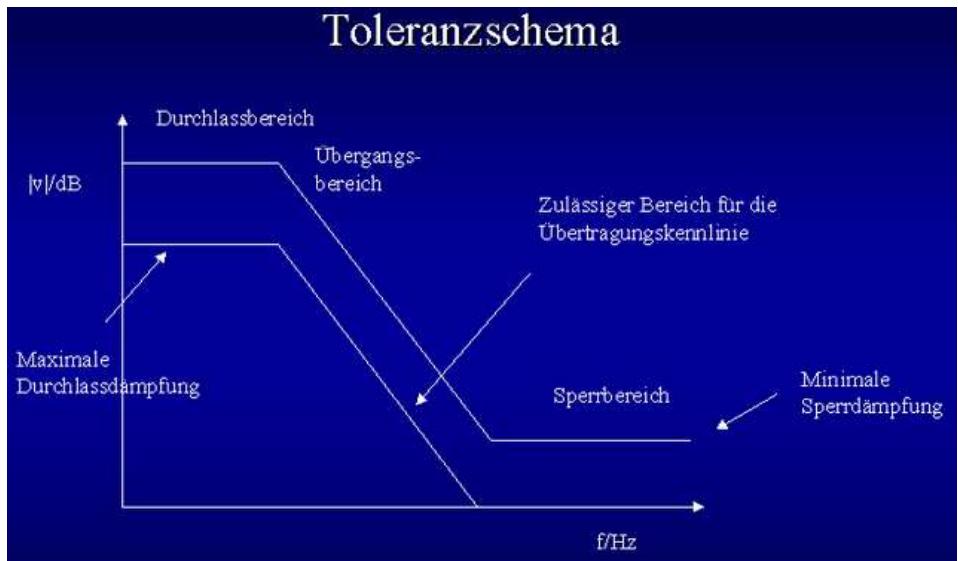
Die Sim. zeigt:

- 1) die max. Verst. < 0 dB
- 2) Wird um Faktor 10 erhöht, so ist die max. Verst. 0 dB & das Filter breitbandiger

Elektrische Filter

Elektrische Filter dienen dazu, unerwünschte Frequenzbereiche eines Signals zu dämpfen und nur den Nutzanteil durchzulassen.

Die Menge der Frequenzen, die durchgelassen werden, wird als Durchlassbereich und die Menge der gesperrten Frequenzen als Sperrbereich bezeichnet.



Zwischen Durchlass- und Sperrbereich befindet sich der Übergangsbereich.

Wichtige Kenndaten

Übertragungsfunktion

Das Verhalten des Filters in Abhängigkeit von der Frequenz f wird als Übertragungsfunktion bezeichnet. Die Übertragungsfunktion gibt das Verhältnis von der Ausgangs - zur Eingangsspannung an. Für einen analogen TP ergibt sich die

$$\text{Übertragungsfunktion zu } \underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{X}_c}{R+\underline{X}_c} = \frac{1}{1+\frac{R}{\underline{X}_c}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

Grenzfrequenz (cutoff frequency)

Die Grenzfrequenz f_g , ist diejenige Frequenz, bei der sich die Leistung eines Signals halbiert.

Weil meistens mit Spannungen gerechnet wird, muss sich die Spannung um den Faktor $\sqrt{2}$ vermindern, damit sich die Leistung halbiert ($P = \frac{U^2}{R}$).

Die Grenzfrequenz ist also der Punkt, an dem der Betrag der Übertragungsfunktion den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (dies entspricht -3dB) beträgt.

Amplitudengang

Das Verhältnis der Amplituden von Eingangssignal und Ausgangssignal in Abhängigkeit von der Frequenz ist der Amplitudengang.

Bei Grenzkreisfrequenz ω_g gilt $|\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für den analogen TP ergibt sich:

$$|\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_g RC)^2}} \text{ daraus folgt } \omega_g = \frac{1}{RC} \text{ bzw. } f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

Meistens in dB angegeben $G_{[\text{dB}]} = 20 \cdot \lg |\underline{G}(j\omega)|$

¹ <http://www.ruhr-uni-bochum.de/dv/lehre/seminar/digi-filter/sld009.htm>

Flankensteilheit, Filterordnungszahl

Die Flankensteilheit gibt an, wie schnell der Pegel des Amplitudengangs ab- bzw. zunimmt. Pro Filterordnungszahl n ergibt sich eine Amplitudenänderung von 20dB/Dekade. Je größer der dB-Wert, desto steilflankiger ist das Filter.

Welligkeit (ripple)

Bei bestimmten Filtern ergeben sich im Durchlass- und im Sperrbereich Schwankungen im Amplitudengang. Diese Welligkeit, die maximale Schwankungsbreite, wird in einem dB-Wert angegeben.

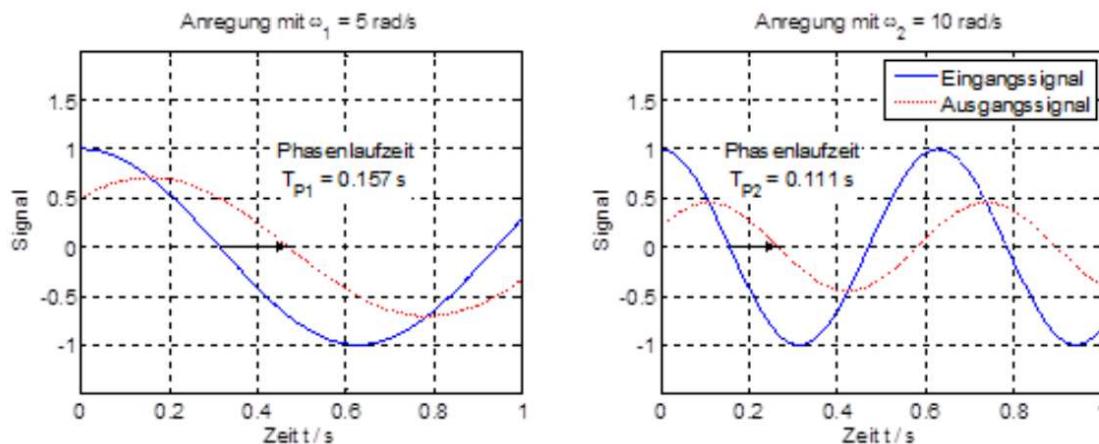
Phasengang (phase response)

Der Unterschied der Phase zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal in Abhängigkeit von der Frequenz ist der Phasengang. Der Phasengang oder Frequenzgang, wird meistens im Zusammenhang mit dem Amplitudengang betrachtet

Phasenlaufzeit

Die Phasenlaufzeit gibt die Verzögerung an, die eine harmonische Schwingung mit der Frequenz f_0 durch das System erfährt. Das Ausgangssignal ist also gegenüber dem Eingangssignal phasenverschoben. Mathematisch ausgedrückt $\tau_{ph} = -\frac{\varphi(f)}{f}$.

Die folgende Abbildung stellt die Phasenlaufzeit T_p am Beispiel eines RC-Tiefpasses mit $\tau = 0,2\text{s}$ für zwei unterschiedliche Frequenzen dar



2

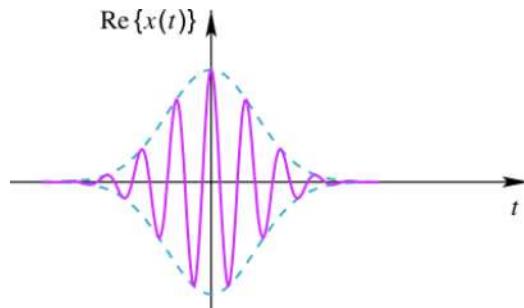
² <https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-a-zeitkontinuierliche-signale-und-systeme/grundlagen-des-filterentwurfs/zielsetzung-fuer-den-filterentwurf/forderungen-an-den-phasengang-eines-filters.html>

2

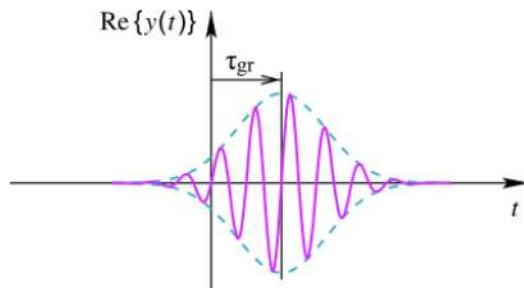
Gruppenlaufzeit (group delay)

Die Phasenlaufzeit bietet eine anschauliche Interpretation des Phasengangs bei einer harmonischen Anregung des Filters. Reale Signale erstrecken sich typischerweise jedoch über einen Frequenzbereich, sodass das Modell zur Interpretation des Phasengangs erweitert werden muss. Zur Bewertung des Verhaltens eines Signals, das aus verschiedenen Spektralanteilen besteht, wird die sogenannte Gruppenlaufzeit τ_{gr} eingeführt.

Die Durchlaufzeit einer Wellengruppe durch ein System hängt von den Eigenschaften des Systems und von der Trägerfrequenz der Wellengruppe ab.



Unter der Gruppenlaufzeit τ_{gr} eines schmalbandigen Signals durch System versteht man die Verzögerung der Umhüllenden dieses Signals.



³

Ist die Gruppenlaufzeit konstant, dann ist die Durchlaufzeit verschiedener Wellengruppen zu unterschiedlichen Frequenzen gleich und beim Passieren des Systems erfahren alle Wellengruppen die gleiche Verzögerung, weshalb die relative Lage der Gruppen zueinander erhalten bleibt.

Eine konstante Gruppenlaufzeit ist z.B. bei Übertragungsstrecken erwünscht, damit der Phasenverlauf eines zu übertragenden Nutzsignals bei der Übertragung möglichst erhalten bleibt⁴.

Die Gruppenlaufzeit beeinflusst z.B. das Klangbild im Audiobereich.

Gruppenlaufzeiten führen hierbei zu Signalverfälschungen bei denen unter Umständen der Informationsinhalt einer Nachricht nicht mehr erkannt werden kann. Werden z.B. alle Frequenzen in einem Filter um 90° verschoben, so "verlassen" die höheren Frequenzanteile vor den niedrigeren Frequenzen das System

90° bei 1kHz 250µs

90° bei 100Hz 2,5ms → keine konstante Gruppenlaufzeit

Das Filter muss bei höheren Frequenzen eine größere Phasenverschiebung haben als bei niedrigen.

90° bei 1kHz 250µs

9° bei 100Hz 250µs → konstante Gruppenlaufzeit

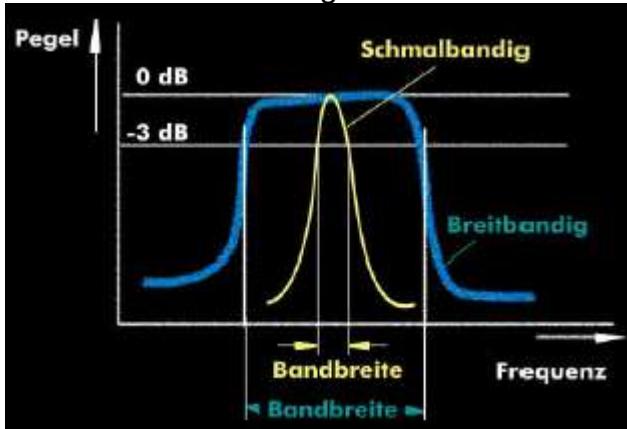
Aus dem Phasengang lässt sich über Differenzieren ($-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$) die Gruppenlaufzeit bestimmen. Besitzt ein System einen linearen Phasengang, dann weist es eine konstante Gruppenlaufzeit auf.

³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Gruppenlaufzeit>

⁴ Die Übertragungsfunktion eines Koaxialkabels besitzt in guter Näherung einen linearen Phasengang

Bandbreite⁵

Oft wird die Bandbreite für einen Frequenzbereich angegeben. Die Bandbreite ist dabei der Frequenzbereich, in dem elektrische Signale mit einem Amplitudenabfall von bis zu 3 dB übertragen werden.



Es handelt sich um die Frequenzdifferenz zwischen der oberen und der unteren Frequenz, die einen Amplitudenabfall von 3 dB haben. Je größer die Bandbreite, desto mehr Informationen können theoretisch in einer Zeiteinheit übertragen werden. Bei analogen Systemen wird die Bandbreite Hz, kHz oder MHz angegeben.

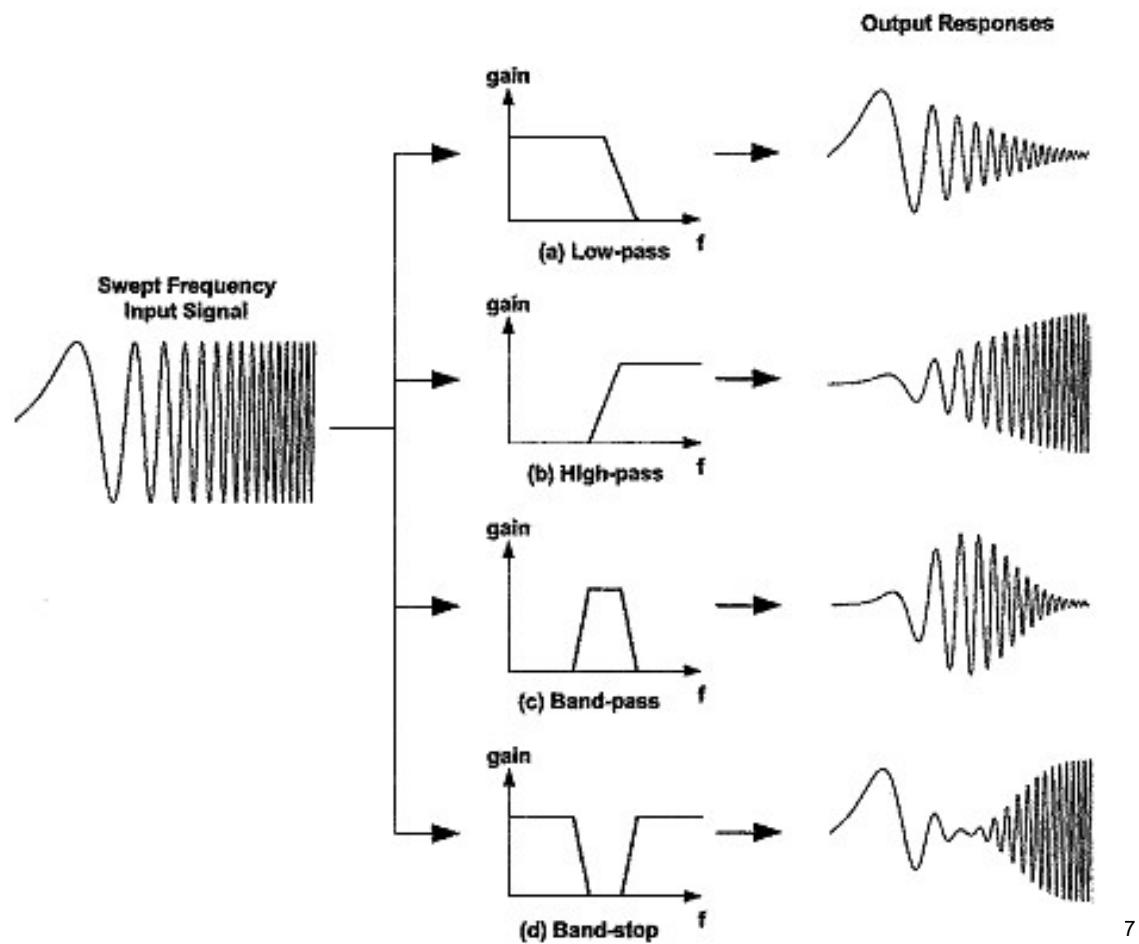
Sprungantwort

Die Sprungantwort ist das Ausgangssignal eines linearen, zeitinvarianten⁶ Systems, dem am Eingang die Sprungfunktion zugeführt wird. Sie wird als Übergangsfunktion bezeichnet, wenn die Höhe des Eingangssprunges 1 beträgt (Einheitssprungfunktion) bzw. wenn durch die Höhe des Eingangssprunges dividiert wurde.

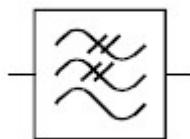
⁵ http://www.itwissen.info/fileadmin/user_upload/EBOOKS/2012_08_Filter.pmd.pdf

⁶ Bei gleicher Eingabe zeigt das System zu jeder Zeit das gleiche Verhalten.

Filtertypen

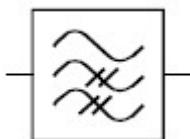


7



Tiefpassfilter (low pass filter)

Alle Frequenzen bis zur Grenzfrequenz werden fast ohne Abschwächung an den Ausgang durchgelassen. Die Signalamplituden zu den höheren Frequenzen werden zunehmend gedämpft.



Hochpassfilter (high pass filter)

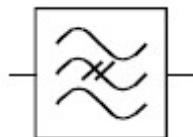
Die Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz stehen am Filterausgang ungeschwächt zur Verfügung. Je weiter man sich von der Grenzfrequenz in den Bereich tiefer Frequenzen bewegt, desto mehr werden die Amplituden geschwächt. Gleichspannungsanteile werden vollkommen gesperrt.

⁷ <http://www.sensorsmag.com/sensors/electric-magnetic/an-introduction-analog-filters-1023>



Bandpassfilter (band pass filter)

Der Frequenzbereich oberhalb der unteren Grenzfrequenz und unterhalb der oberen Grenzfrequenz passiert das Filter ungeschwächt. Beim Entfernen von der jeweiligen Grenzfrequenz werden die Signalamplituden kleiner. Ein Bandpass ist die Zusammenschaltung von einem Hoch- und Tiefpass mit unterschiedlichen Grenzfrequenzen. Als Arbeitsparameter werden meist die Bandmittenfrequenz und die Filtergüte angegeben.



Bandsperrfilter (notch filter, band reject filter)

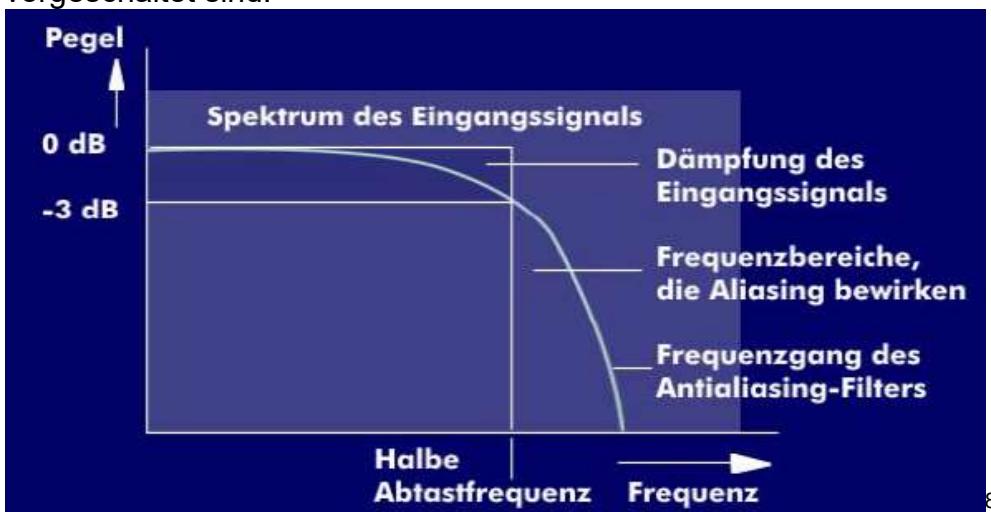
Alle Frequenzen bis zur unteren Grenzfrequenz und ab der oberen Grenzfrequenz passieren ungedämpft das Filter. Der Frequenzbereich dazwischen wird zur Mittenfrequenz hin zunehmend geschwächt. Eine Bandsperre mit einem sehr schmalen Frequenzband bei steilen Flanken und hoher Dämpfung wird Kerbfilter genannt. Handelt es sich um einen Reihenschwingkreis, so spricht man von Falle oder Saugkreis.

Erwähnt sei außerdem das

Anti Aliasing Filter

Die Antialiasing-Filter begrenzen die Bandbreite der Eingangssignale, damit deren Frequenzen dem Abtasttheorem entsprechen. Höhere Eingangs frequenzen können das Filter nicht passieren und daher auch kein Aliasing hervorrufen.

Bei elektrischen Signalen erfolgt dieses durch Antialiasing-Filter (AAF), das sind Tiefpässe, die dem A/D-Wandler oder der elektronischen Signalverarbeitung vorgeschaltet sind.



8

⁸ http://www.itwissen.info/fileadmin/user_upload/EBOOKS/2012_08_Filter.pmd.pdf

Filtercharakteristiken⁹

Analoge Filtertypen unterscheiden sich in ihrem Übertragungsverhalten in Bezug auf den Amplitudenverlauf im Durchlass- und im Sperrbereich, dem Phasenverhalten und der Gruppenlaufzeit.

Man beurteilt dabei die Welligkeit im Durchlass- und im Sperrbereich und die Flankensteilheit.

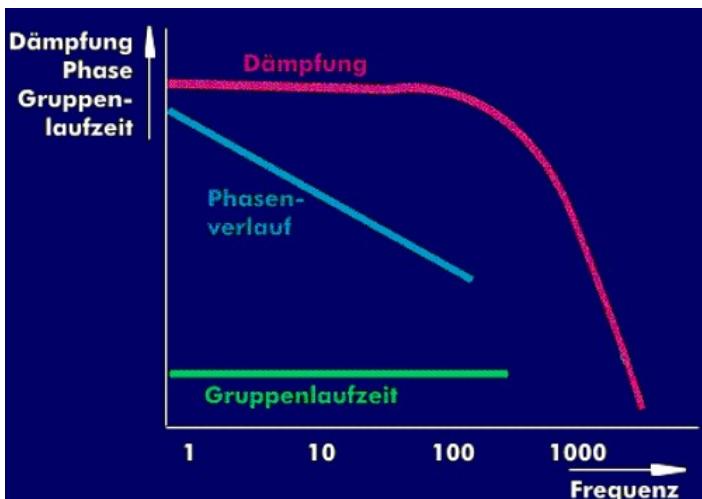
Filter mit Welligkeiten haben generell größere Flankensteilheit, dafür schlechteres Impuls- Gruppenlaufzeitverhalten.

Bei den drei Filtertypen Bessel Filter, Butterworth- und Tschebyscheff- Filter¹⁰ zeigen sich ausgeprägte Charakteristiken hinsichtlich dieser Parameter.

Filter mit kritischer Dämpfung

Filter mit kritischer Dämpfung entstehen durch die rückkopplungsfreie Reihenschaltung von RC-Tiefpassen. Sie weisen nur eine geringe Filtersteilheit auf und haben die Eigenschaft, dass ihre Sprungantwort nicht überschwingt.

Bessel Filter



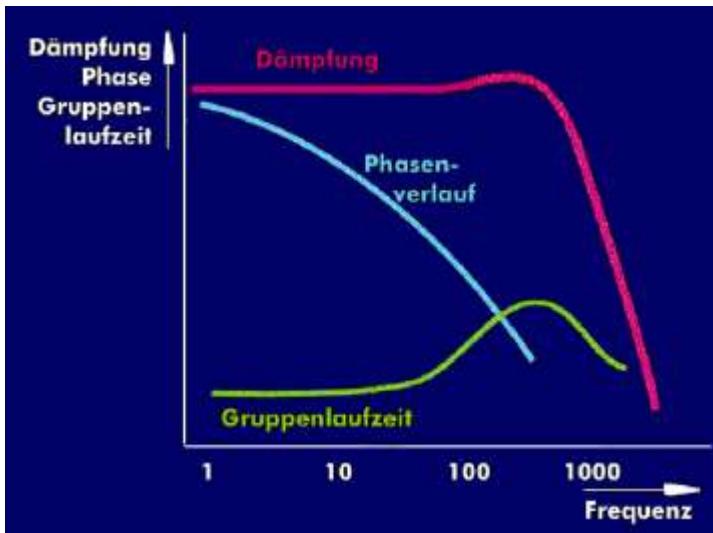
Das Bessel-Filter zeichnet sich durch eine konstante Gruppenlaufzeit und keine Welligkeit im Durchlassbereich des Filters aus.

Diese Eigenschaft ist besonders interessant für die verzerrungsfreie Übertragung breitbandiger Signale wie Rechtecksignale oder Pulse. Allerdings ist die Flankensteilheit flacher als die der beiden anderen genannten Filtertypen. Hohe Flankensteilheiten können nur mit hohen Filterordnungen realisiert werden, wodurch sie nur in Spezialfällen eingesetzt werden

⁹ <http://www.krucker.ch/skripten-uebungen/EL1-2/EL-Kap3%20Filter.pdf>

¹⁰ http://www.itwissen.info/fileadmin/user_upload/EBOOKS/2012_08_Filter.pmd.pdf

Butterworth Filter

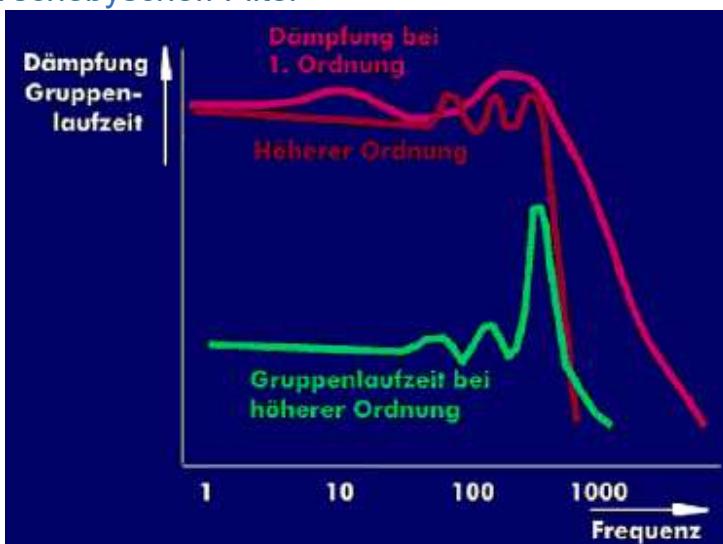


Das Butterworth-Filter ist nach dem britischen Ingenieur Stephen Butterworth benannt, der das Verhalten 1930 dokumentiert hat.

Das Butterworth-Filter ist im Wesentlichen durch das konstante Dämpfungsverhalten im Durchlassbereich charakterisiert, das erst im Bereich der Grenzfrequenz eine geringfügige Amplitudenanhebung zeigt und dann steil abfällt. Das Butterworth Filter ist das Standardfilter wenn keine Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen wird. Der Phasenverlauf zeigt eine leichte Nichtlinearität, die Gruppenlaufzeit ist nicht konstant sondern frequenzabhängig.

Butterworth-Filter eignet sich daher besonders für die Übertragung von schmalbandigen Signalen mit unterschiedlichen Frequenzen, zwischen denen keine Amplitudenänderungen auftreten dürfen.

Tschebyscheff Filter



Im Gegensatz zu anderen Filtertypen zeigt das Tschebyscheff-Filter bei der Grenzfrequenz ein starkes Überschwingen, das von einem stark abfallenden Dämpfungsverhalten gefolgt.

Außerdem weist die Dämpfungskurve im Durchlassbereich eine gewisse Welligkeit auf.

Der Phasenverlauf hat eine starke Nichtlinearität und die Gruppenlaufzeit ist ebenfalls stark frequenzabhängig. Die Filtercharakteristik eines Tschebyscheff-Filters wird von den Tschebyscheff-Polynomen abgeleitet.

Bedingt durch die starke Welligkeit des Durchlassbereichs werden Puls- und Rechtecksignale mit starkem Überschwingen übertragen.

Interessant und für praktische Anwendungen nutzbar ist der steile Abfall der Dämpfungskurve nach der Grenzfrequenz.

Das Tschebyscheff-Filter ist das einfachste Filter, wenn Welligkeiten im Durchlassbereich zugelassen werden.

Passive Filter¹¹

Prinzipiell lassen sich alle passiven Filter (auch höherer Ordnung) aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten aufbauen und benötigen keine externe Spannungsquelle. In der Praxis gibt es doch einige Nachteile.

Vor allem in den unteren Frequenzbereichen sind oft sehr große Induktivitäten notwendig, sodass in den meisten Fällen Eisenkerne eingesetzt werden müssen.

Neben Größe und Gewicht stören dann die durch Hysterese hervorgerufenen nichtlinearen Verzerrungen. Außerdem können Spulen mit solch hoher Induktivität, in integrierten Schaltkreisen nicht realisierbar werden.

Die Übertragungsfunktion passiver Filter wird in der Regel für das unbelastete Filter berechnet.

Wird das Filter belastet, ändert sich dadurch auch das Frequenzverhalten.

Wird die Last bei der Berechnung des Filters berücksichtigt, so hat man die gewünschte Übertragungsfunktion nur bei einer bestimmten Last realisiert.

Dieses Problem macht sich auch bemerkbar, wenn man Filter höherer Ordnung realisieren möchte.

Filter höherer Ordnung lassen sich durch Kaskadieren mehrerer Filter, meist erster oder zweiter Ordnung, aufbauen.

Schaltet man die Filterstufen jedoch einfach hintereinander, so stellt die nachfolgende Stufe eine Last für die vorhergehende Stufe dar, die daraufhin ihre Übertragungsfunktion ändert.

Passive Filter können außerdem keine Verstärkungen größer Eins bieten¹².

Aktive Filter

Aktive Filter erfüllen folgende Eigenschaften:

- Verstärkung > 1 möglich
- Verzicht auf Induktivitäten
- Übertragungsfunktion ist unabhängig von der Last
- Filter einfach kaskadierbar

Außerdem besteht die Möglichkeit z.B. die Grenzfrequenz, Mittenfrequenz und die Bandbreite elektronisch zu steuern.

Im Unterschied zu passiven Filtern benötigen aktive Filter zusätzlich aktive Elemente wie z.B. OPVs (oder Transistoren) und eine externe Spannungsversorgung.

Ein weiterer Vorteil analoger, aktiver Filter ist, dass durch den Einsatz von OPVs das Filter induktivitätslos realisiert werden kann und als passive Komponenten nur Widerstände und Kondensatoren eingesetzt werden.

Induktivitäten werden schaltungstechnisch z.B. mit **Gyratoren** simuliert.

Als Gyrator bezeichnet man einen Vierpol (Zweitor), also einer Schaltung, welche aus einem Transistor, einer Last und einer Kapazität besteht und welche beliebige Impedanzen in ihre dualen Impedanzen transformieren kann¹³ z.B. C in L.

Der große Vorteil eines Gyrorators ist, dass man keine Spulen wickeln muss und abhängig von der Kapazität sehr hohe Induktivitätswerte erreichen kann. In der Leistungselektronik und bei Anwendungen, wo Induktivitäten zur temporären Energiespeicherung benötigt werden, ist ein Gyrator nicht zu gebrauchen¹⁴.

11 Die einfachsten analogen Filter sind Spannungsteiler die aus der Kombination vom ohmschen Widerstand, Kapazität oder Spule bestehen.

12 TU Berlin - Fachgebiet Elektronik und medizinische Signalverarbeitung: Vorlesung Analog- und Digitalelektronik WS 2001/2002

13 <https://de.wikipedia.org/wiki/Gyrator>

14 <http://elektroniktutor.de/analogverstaerker/gyrator.html>

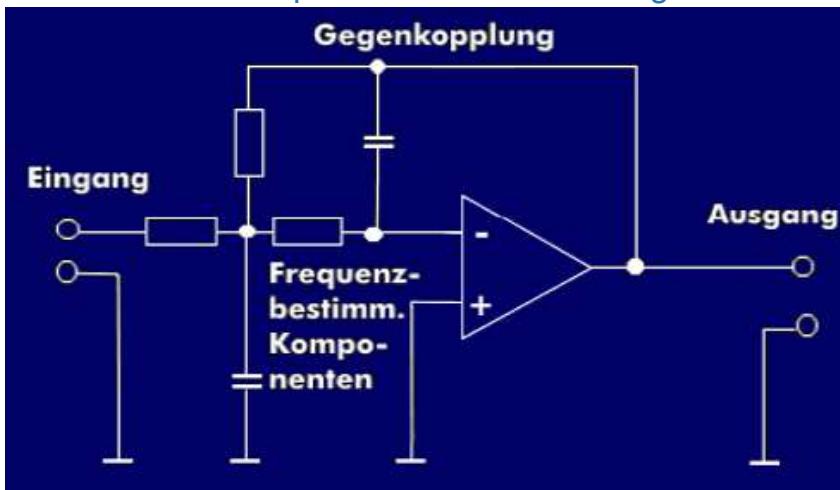
Schaltungstechnisch sind aktive Filter demnach Verstärker, die bestimmte Frequenzen stärker und andere weniger stark verstärken.

Zur Hervorhebung oder Abschwächung von Frequenzen arbeitet man mit Rückkopplungen, entweder als Mitkopplung oder als Gegenkopplung geschaltet.

Darauf basierend gibt es zwei grundsätzliche Schaltungstechniken:

Die Multiple-Feedback-Schaltung als invertierende Gegenkopplungsschaltung und die Sallen-Key-Schaltung als nichtinvertierende Mitkopplungsschaltung.

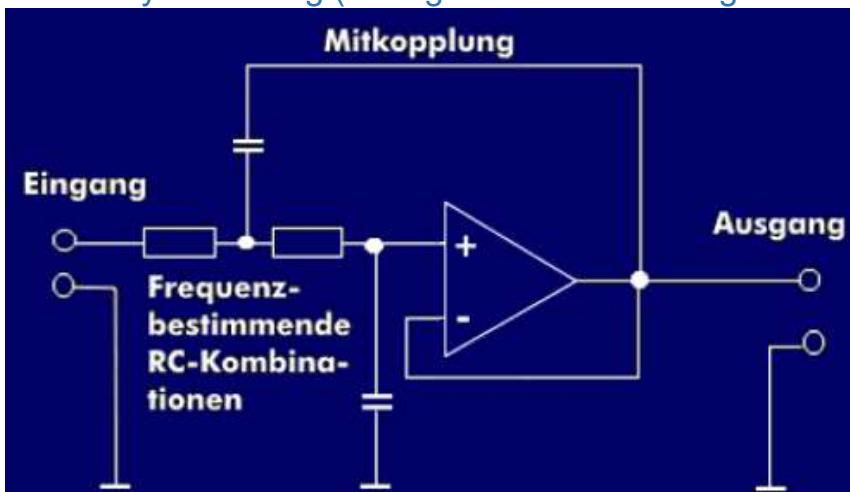
invertierenden Multiple-Feedback-Schaltung



Bei der invertierenden Multiple-Feedback-Schaltung wird das Ausgangssignal des OPVs an den negativen Verstärkereingang gelegt.

In der Eingangsschaltung und im Rückkopplungsweg befinden sich die frequenzbestimmenden Bauelemente. Der Verstärkungsfaktor ist beliebig

Sallen-Key-Schaltung (Voltage Controlled Voltage Source Filter VCVS Filter)¹⁵



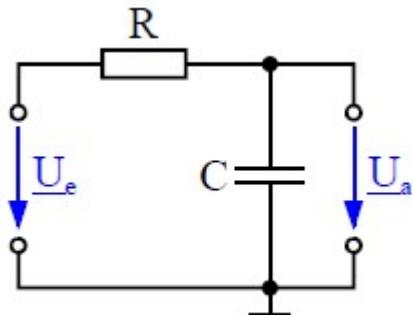
Die gegebene Sallen-Key-Schaltung mit Operationsverstärker, welcher mit einem Verstärkungsfaktor von 1 betrieben wird. Das Verhältnis der R und Cs bestimmt die Filtergrenzfrequenz.

Für $\omega \rightarrow 0$ stellen die Kondensatoren einen unendlich großen Widerstand dar und der Rückkopplungszweig ist unterbrochen -> am Ausgang liegt die Eingangsspannung. Für sehr große Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$ stellen die Kondensatoren einen Kurzschluss dar. Am Eingang des Verstärkers liegt dann 0V und die Ausgangsspannung ist gering (Mitkopplung über kurzgeschlossenen C und Spannungsteiler am Eingang). Durch Vertauschen der Widerstände und Kondensatoren können auch Hochpässe realisiert werden. Auch Bandpässe und -sperren können realisiert werden.

15 http://www.itwissen.info/fileadmin/user_upload/EBOOKS/2012_08_Filter.pmd.pdf

Wiederholung Übertragungsfunktion eines RC Tiefpasses

Für sinusförmige Eingangssignale gibt die Übertragungsfunktion $\underline{G}(j\omega)$ (auch mit Frequenzgang $\underline{F}(j\omega)$, $\underline{A}(j\omega)$ oder mit $\underline{H}(j\omega)$ gekennzeichnet) als das Verhältnis der komplexen Ausgangsspannung \underline{U}_a zur komplexen Eingangsspannung \underline{U}_e an. Der Betrag des Frequenzganges ist der Amplitudengang $A(\omega)$ und die Phase des Frequenzganges der Phasengang $\varphi(\omega)$



$$\underline{G}_{(j\omega)} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$|G_{(j\omega)}| = G_{(\omega)} = A_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

Für Frequenzen, die deutlich über der Grenzfrequenz liegen ($f \gg f_g$), d.h. $\omega RC \gg 1$, wird der Amplitudengang $G_{(\omega)} = \frac{1}{\omega RC}$; das entspricht einer Verstärkungsabnahme von 20dB je Frequenzdekade.

In der Filtertheorie wird die Übertragungsfunktion meist im Bildbereich der Laplace Transformation $s = j\omega$ beschrieben $\underline{G}_{(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \rightarrow G(s) = \frac{1}{1 + sRC}$.

Bezieht die Kreisfrequenz ω auf die Grenzkreisfrequenz ω_g und bezeichnet dies dann als die normierte Frequenz $\frac{j\omega}{\omega_g} = j\Omega = S$ so ergibt sich

$$\underline{G}_{(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \rightarrow \frac{1}{1 + j\frac{\omega_g}{\omega_g} \omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g} \omega_g RC} = \frac{1}{1 + j\Omega \omega_g RC} = \frac{1}{1 + S\omega_g RC} \rightarrow G(S) = \frac{1}{1 + S\omega_g RC}$$

Wird für die Grenzkreisfrequenz eingesetzt $\omega_g = \frac{1}{RC}$, so erhält man $G(S) = \frac{1}{1 + S}$.

Benötigt man einen steileren Verstärkungsabfall, kann man n Tiefpässe in Reihe schalten und es ergibt sich die Übertragungsfunktion zu

$$G(S) = \frac{1}{(1+k_1S)(1+k_2S)\dots(1+k_nS)}.$$

Multipliziert man den Nenner aus so erhält man die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses n-ter Ordnung

$$G(S) = \frac{A_0}{1+c_1S+c_2S^2+\dots+c_nS^n}.$$

Die Ordnung des Filters ist gleich der höchsten Potenz von S.

Für die Realisierung der Filter ist es günstig, wenn man das Nennerpolynom in Faktoren zerlegt:

$$G(S) = \frac{A_0}{(1+a_1S+b_1S^2)(1+a_2S+b_2S^2)\dots(1+a_nS+b_nS^2)} = \frac{A_0}{\prod_1^n (1+a_iS+b_iS^2)}.$$

In der Gleichung sind a_i und b_i positive reelle Koeffizienten. Bei ungerader Ordnung ist der Koeffizient $b_1 = 0$.

Die Koeffizienten hängen von der Filterordnung und der Filterapproximation ab.

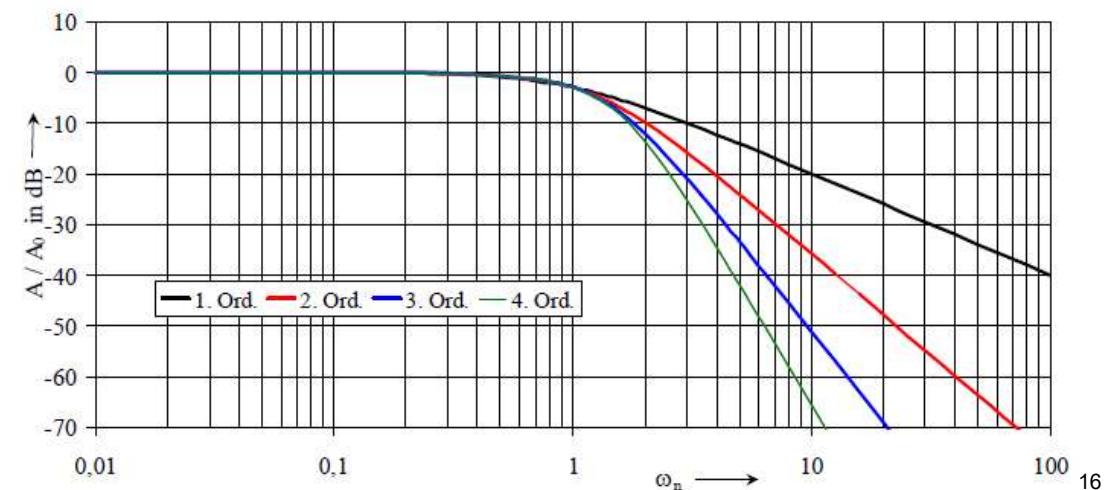
Die Asymptotensteigung des Frequenzganges der Verstärkung beträgt je n - 20dB/Dekade. Der übrige Verlauf der Verstärkung wird für die jeweilige Ordnung durch den Filtertyp bestimmt. Von besonderer Bedeutung sind Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Filter, die sich durch die Koeffizienten a_i und b_i unterscheiden.

Bekannteste Approximationen

Bessel-Tiefpassfilter

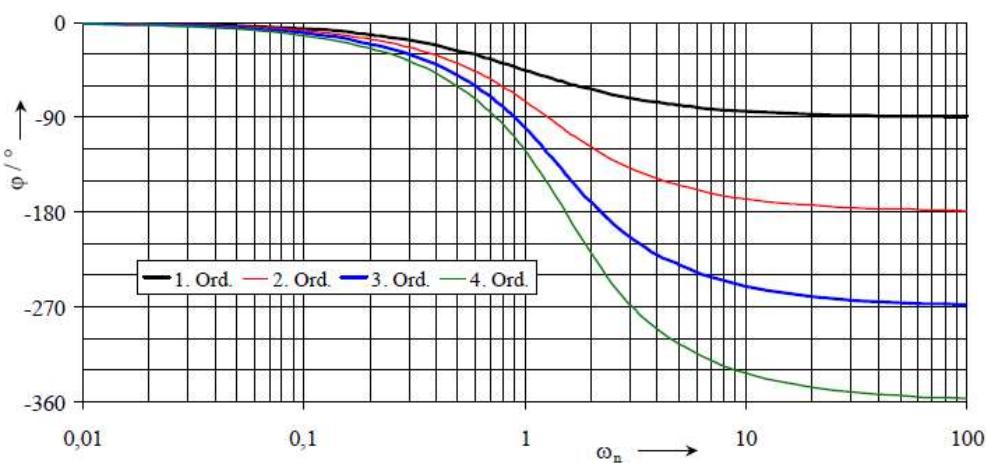
Bessel-Tiefpassfilter besitzen ein optimales Rechteckübertragungsverhalten. Die Voraussetzung hierfür ist, dass die Gruppenlaufzeit über einen möglichst großen Frequenzbereich konstant ist, d.h. dass die Phasenverschiebung in diesem Frequenzbereich proportional zur Frequenz ist. Allerdings knickt der Amplitudengang der Bessel-Filter nicht so scharf ab wie bei den Butterworth- und Tschebyscheff-Filters.

Amplitudengang von Bessel-Tiefpässen 1. bis 4. Ordnung

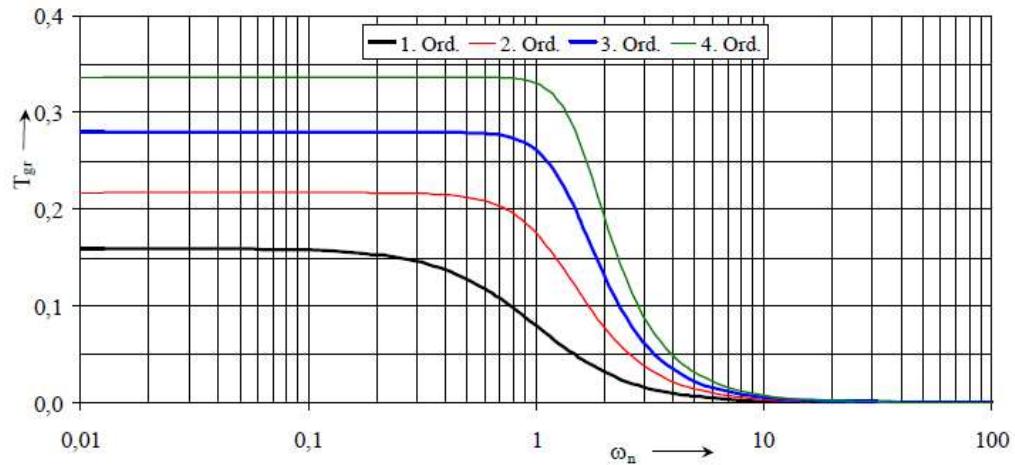
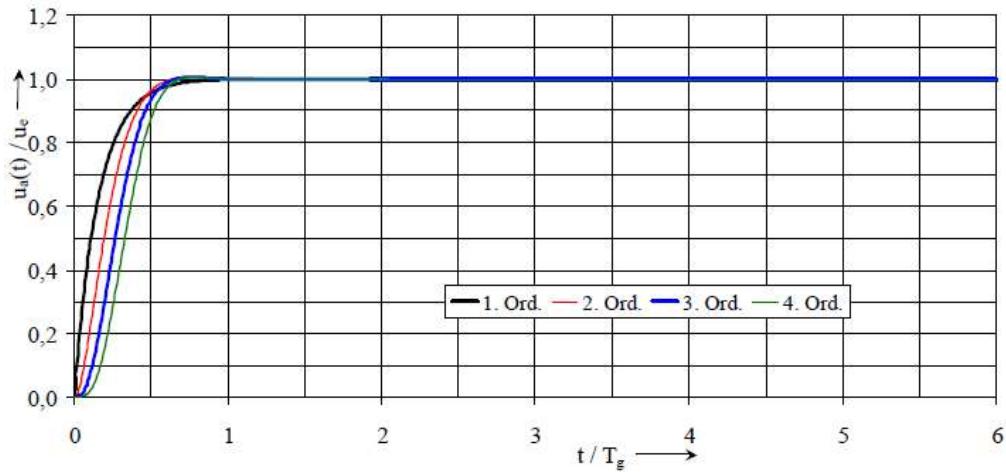


$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_g}$$

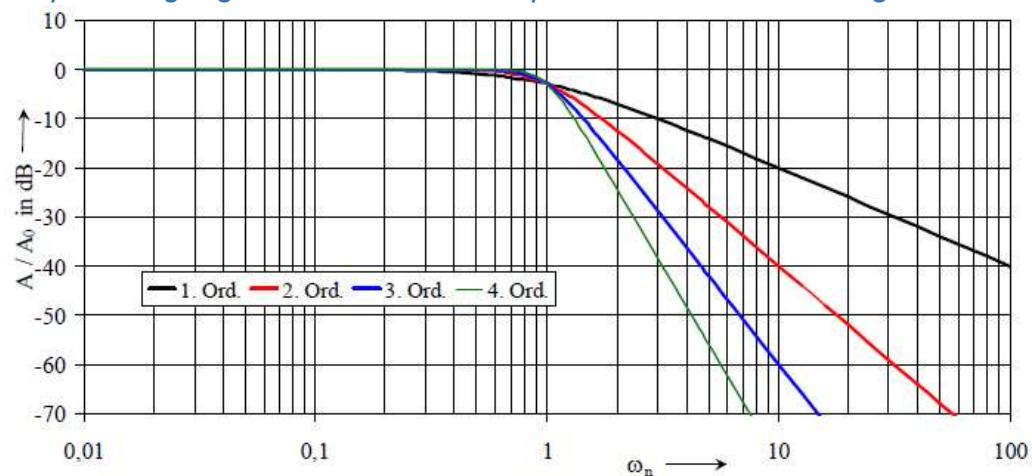
Phasenganggang von Bessel-Tiefpässen 1. bis 4. Ordnung

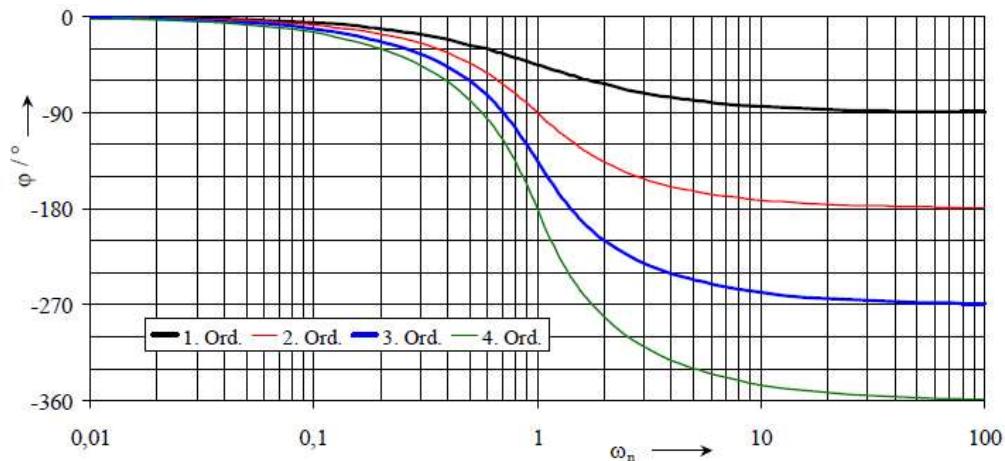
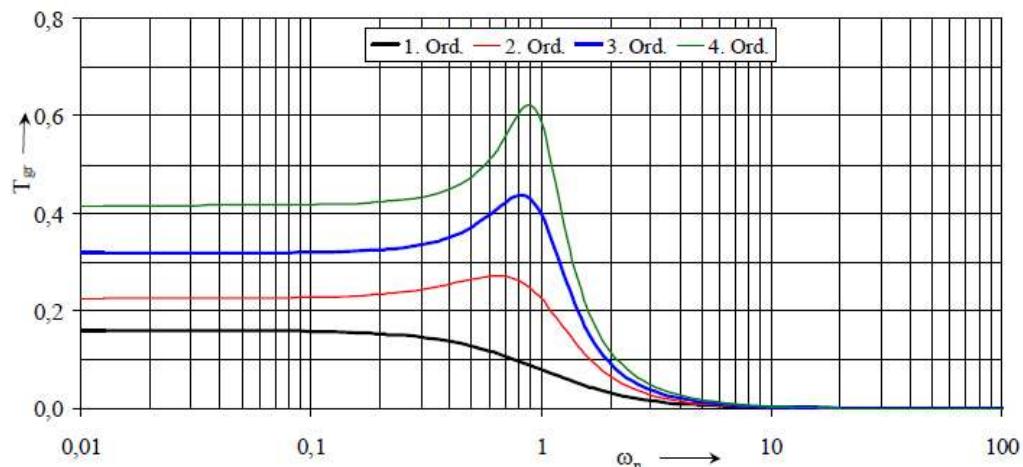
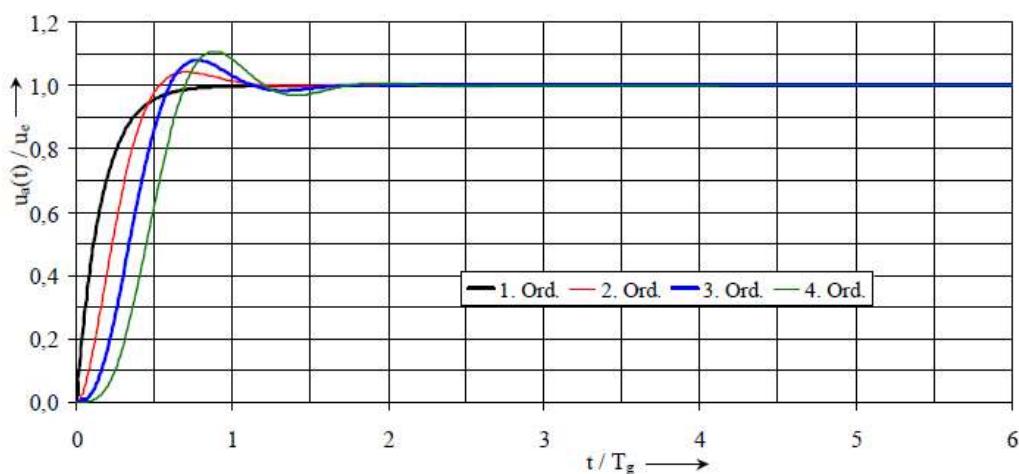


¹⁶ http://www.et-inf.fho-emden.de/~elmalab/indelek/download/Ind_5.pdf

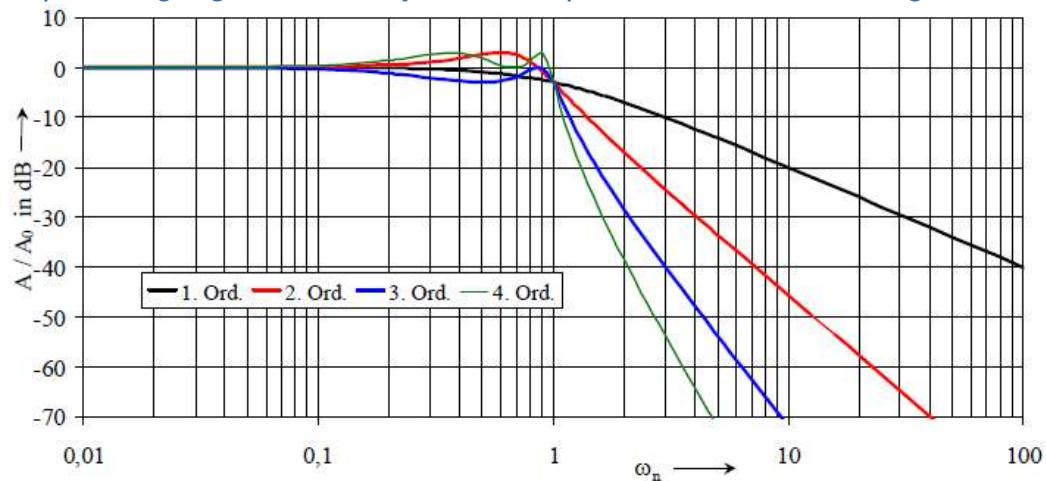
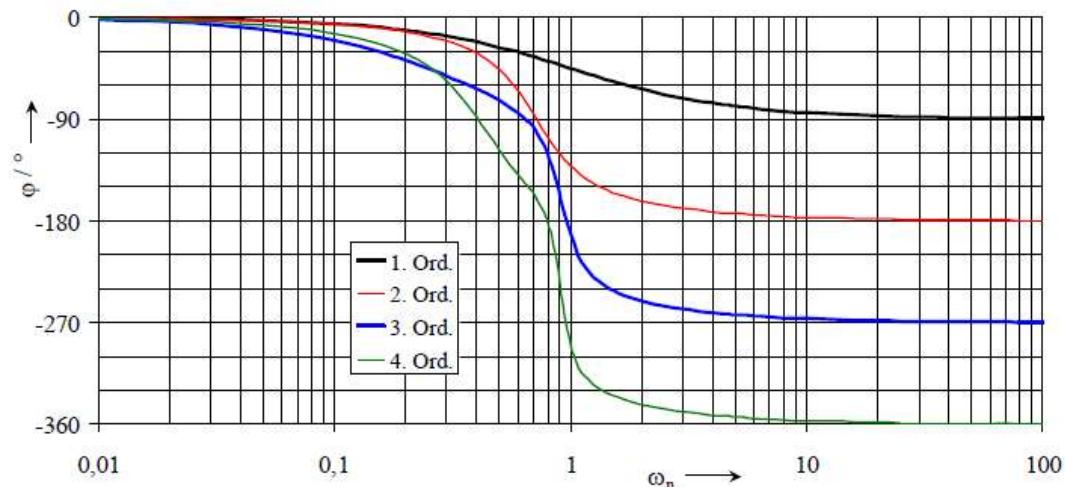
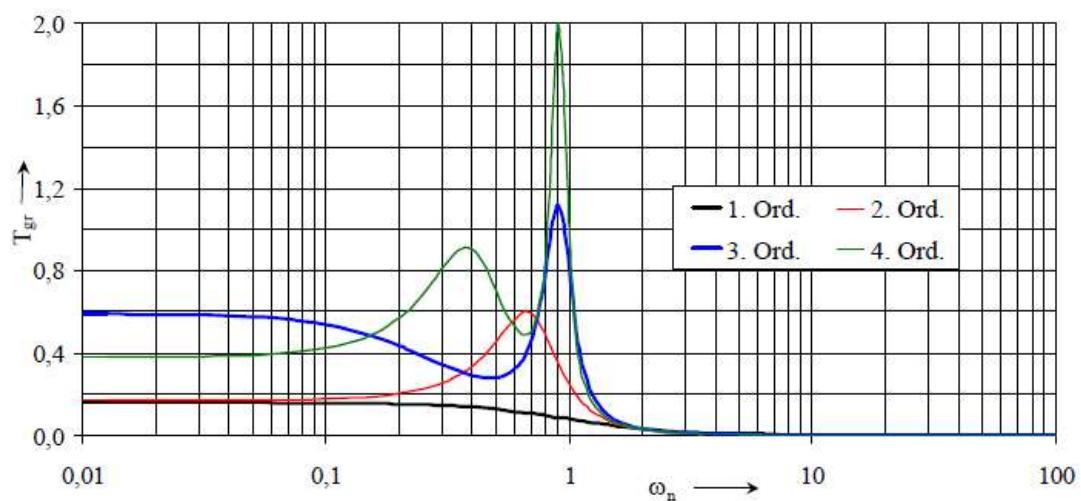
Normierte Gruppenlaufzeit von Bessel-Tiefpässen 1. bis 4. Ordnung*Sprungantwort von Bessel-Tiefpässen 1. bis 4. Ordnung***Butterworth-Tiefpassfilter**

Butterworth-Tiefpassfilter besitzen einen Amplituden-Frequenzgang, der möglichst lang horizontal verläuft und erst kurz vor der Grenzfrequenz scharf abknickt. Ihre Sprungantwort zeigt ein beträchtliches Überschwingen, das mit zunehmender Ordnung größer wird.

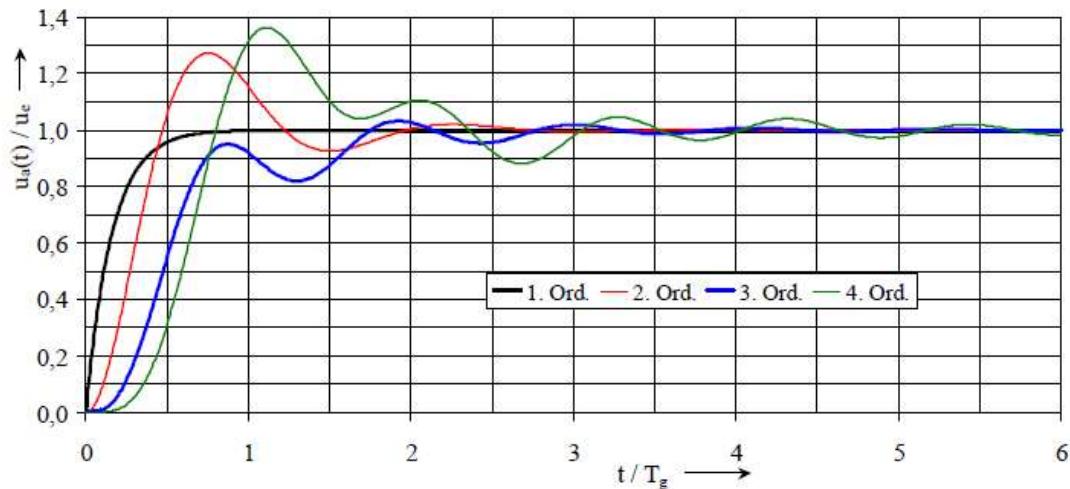
Amplitudengang von Butterworth-Tiefpässen 1. bis 4. Ordnung

Phasenganggang von Butterworth-Tiefpassen 1. bis 4. Ordnung*Normierte Gruppenlaufzeit von Butterworth-Tiefpassen 1. bis 4. Ordnung**Sprungantwort von Butterworth-Tiefpassen 1. bis 4. Ordnung**Tschebyscheff-Tiefpassfilter*

Tschebyscheff-Tiefpassfilter (auch Chebishev) besitzen oberhalb der Grenzfrequenz einen noch steileren Abfall der Verstärkung. Im Durchlassbereich verläuft die Verstärkung jedoch nicht monoton, sondern besitzt eine Welligkeit konstanter Amplitude. Bei gegebener Ordnung ist der Abfall oberhalb der Grenzfrequenz umso steiler, je größer die zugelassene Welligkeit ist. Das Überschwingen der Sprungantwort ist noch stärker als bei den Butterworth-Filters.

Amplitudengang von Tschebyscheff-Tiefpassen 1. bis 4. Ordnung*Phasenganggang von Tschebyscheff-Tiefpassen 1. bis 4. Ordnung mit 3 dB Welligkeit**Normierte Gruppenlaufzeit von Tschebyscheff-Tiefpassen 1. bis 4. Ordnung mit 3 dB Welligkeit*

Sprungantwort von Tschebyscheff-Tiefpassen 1. bis 4. Ordnung mit 3 dB Welligkeit



Für diese Filtercharakteristiken bis zur 4. Ordnung sind folgende Koeffizienten notwendig:

Ordnung	Filter-Nr.	a_i	b_i
Butterworth			
1	1	1.0000	0.0000
2	1	1.4142	1.0000
3	1	1.0000	0.0000
	2	1.0000	1.0000
4	1	1.8478	1.0000
	2	0.7654	1.0000
Tschebyscheff			
1	1	1.0000	0.0000
2	1	1.0650	1.9305
3	1	3.3496	0.0000
	2	0.3559	1.1923
4	1	2.1853	5.5339
	2	0.1964	1.2009
Bessel			
1	1	1.0000	0.0000
2	1	1.3617	0.6180
3	1	0.7560	0.0000
	2	0.9996	0.4772
4	1	1.3397	0.4889
	2	0.7743	0.3890

17

Für die Überprüfung von aktiven Filtern ist es günstig, wenn die 3dB-Grenzfrequenz eines jeden Teilstückes durch die Größe f_{g_i}/f_g bekannt ist.

¹⁷ <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/FP/anleitungen/old/E02.pdf>

Um Instabilitäten bei einzelnen Filtern abschätzen zu können, ist es vorteilhaft, wenn die Polgüte $Q_i = \frac{\sqrt{b_i}}{a_i}$ der einzelnen Teilfilter bekannt ist.

Je größer die Polgüte ist, desto größer ist die Neigung des Filters zu Instabilitäten.

Tiefpass-Hochpass-Transformation

Für den Tiefpass lautet die Übertragungsfunktion

$$G(S) = \frac{A_0}{\prod_1^n (1 + a_i S + b_i S^2)}$$

In der logarithmischen Darstellung kommt man vom Tiefpass zum analogen Hochpass, indem man die Frequenzgangkurve der Verstärkung an der Grenzfrequenz spiegelt, d.h. indem man die normierte Frequenz Ω^{18} durch $\frac{1}{\Omega}$ beziehungsweise S durch $\frac{1}{S}$ ersetzt.

Die Grenzfrequenz bleibt dabei erhalten!

Die Übertragungsfunktion lautet dann:

$$G(S) = \frac{A_\infty}{\prod_1^n \left(1 + \frac{a_i}{S} + \frac{b_i}{S^2}\right)}.$$

Um aus einer Tiefpass-Schaltung eine Schaltung für einen Hochpass zu generieren gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Widerstände und Kondensatoren vertauschen $R \leftrightarrow C$
2. Oder die Kondensatoren durch Spulen ersetzen $C \rightarrow L$

Entsprechende Berechnungen (nur komplizierter) gibt es auch für die Transformation vom Tiefpass in den Bandpass und die entsprechende Bandsperre.

Tiefpass-Bandpass-Transformation

Bandpässe können aus Tiefpassfunktionen abgeleitet werden indem man die folgende Transformation anwendet¹⁹:

$$S \rightarrow Q \cdot \left(S + \frac{1}{S}\right) = Q \cdot \frac{S^2 + 1}{S}$$

¹⁸ Man bezieht die Kreisfrequenz ω auf die Grenzkreisfrequenz ω_g und bezeichnet dies dann als die normierte Frequenz $\frac{j\omega}{\omega_g} = j\Omega = S$

¹⁹ $\Delta\Omega$ ist die Breite des Durchlassbereichs auf dem Niveau -3dB:

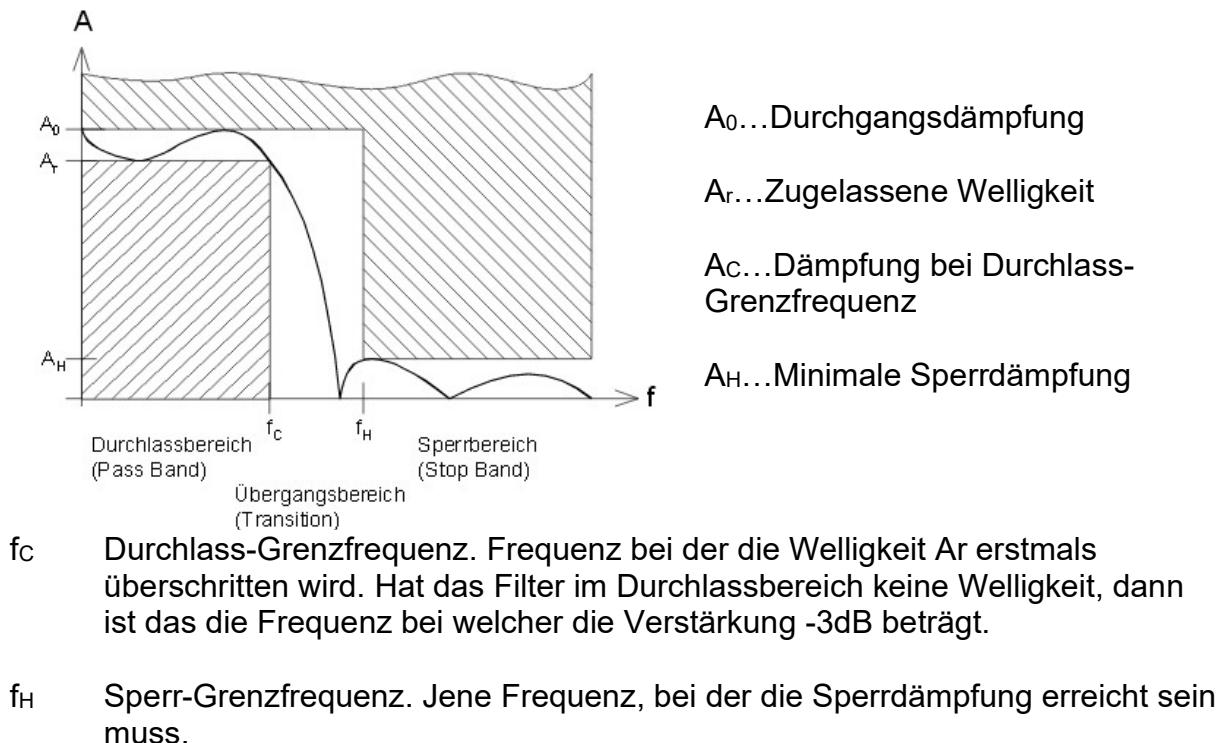
$$\Delta\Omega = \Omega_{max} - \Omega_{min} = \frac{f_{max} - f_{min}}{f_0} = \frac{B}{f_0} = \frac{1}{Q}$$

Q...Güte; B...Bandbreite

Filterentwurf

Filteranforderungen

Die Anforderungen an das Filter werden mit Filterschablonen²⁰ im Frequenz- und Zeitbereich definiert. Sie legen die minimalen Anforderungen und Toleranzen fest. Die Filtersynthese sollte dann das hierfür geeignete einfachste Filter liefern.



Der Entwurf von Filtern folgt eigentlich immer demselben Schema

1. Vorgabe der Filterkoeffizienten
2. Wahl einer geeigneten Schaltung
3. Berechnung (bzw. Nachschlagen) der Übertragungsfunktion
4. Koeffizientenvergleich

Beispiel: Toleranzschema zur Unterdrückung einer Störung in einem Messprozess

Ein Sensor wird über eine analoge Schnittstelle mit einer Steuerung verbunden.

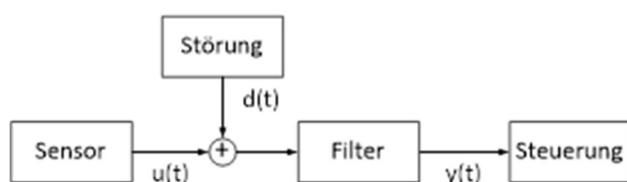


Bild 8.3: Signalfluss für einen gestörten Messprozess

Der Sensor weist eine Grenzfrequenz von $\omega_G = 100 \text{ rad/s}$ auf. In das Kabel wird eine Störung

$$d(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(2500 \text{ rad/s} \cdot t)$$

²⁰ <http://www.krucker.ch/skripten-uebungen/EL1-2/EL-Kap3%20Filter.pdf>

eingekoppelt. Das Signal soll so gefiltert werden, dass Amplituden im Frequenzbereich bis zur Grenzfrequenz ω_G maximal um 5 % verfälscht werden. Aus dieser Bedingung ergibt sich mit $A(\omega_G) = A_D = 0.95$ die Spezifikation des Durchlassbereiches. Außerdem soll die Amplitude der Störung auf 5 % abgesenkt werden. Diese Forderung definiert die Dämpfung im Sperrbereich zu $A(\omega_S) = A_s = 0.05$. Tabelle 8.1 fasst die Kenngrößen des Toleranzschemas zusammen.

Tabelle 8.1: Kenngrößen für das Toleranzschema zur Unterdrückung einer Störung in einem Messprozess

Frequenz ω	Amplitudengang $A(\omega)$	Leistungsübertragungsfunktion $ G(\omega) ^2$
$\omega = 0$	1	1
$\omega_G = 100 \text{ rad/s}$	$A(\omega_G) = A_D = 0.95$	$ G(\omega_G) ^2 = 0.95^2 = 0.9025$
$\omega_S = 2500 \text{ rad/s}$	$A(\omega_S) = A_s = 0.05$	$ G(\omega_S) ^2 = 0.05^2 = 0.0025$

Mit diesen Angaben ist das Toleranzschema der Leistungsübertragungsfunktion vollständig definiert.

Zusammenfassung

Tabelle 8.2 fasst die Diskussion der Zielsetzung für den Filterentwurf im Zeit- und Frequenzbereich zusammen.

Tabelle 8.2: Zusammenfassung der Zielsetzung für den Filterentwurf

Kriterium	Zeitbereich	Frequenzbereich
Idealer Filter	Nicht realisierbar wegen unendlich langer, nicht kausaler Impulsantwort $g(t)$	Nicht realisierbar wegen unendlich hoher Steilheit und damit unendlich hoher Filterordnung N
Forderung Amplitudengang	Dämpfung der Amplituden von Signalen in definierten Frequenzbereichen	Beschreibung von Toleranzgrenzen für die Leistungsübertragungsfunktion $ G(\omega) ^2$
Forderung Phasengang	Geringe Phasenverzerrung, Verschiebung um Gruppenlaufzeit T_G	Linearer Phasengang im Durchlassbereich des Filters

http://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/fileadmin/downloads/teilA/Apps/App_EntwurfAnalogeFilter/EntwurfAnalogerFilter.php

Ausgewählte Filter²¹

Tiefpass

Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 1. Ordnung kann mit einem RC-Glied realisiert werden, wenn die Gleichspannungsverstärkung $A_0 = 1$ beträgt.

$$G(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

mit $s = j\omega$ folgt $G(s) = \frac{1}{1 + sRC}$

bezieht man nun noch auf die Grenzkreisfrequenz $S = \frac{s}{\omega_g} \rightarrow s = S \cdot \omega_g$ so erhält man

$$G(S) = \frac{1}{1 + \omega_g S R C} \text{ der Vergleich mit } G(S) = \frac{A_0}{1 + a_1 S} \text{ liefert:}$$

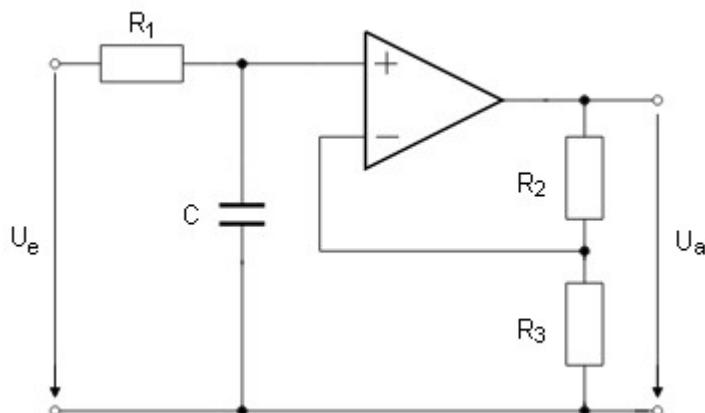
Der Parameter a_1 ist frei wählbar.

Der Koeffizientenvergleich liefert die Dimensionierung

$$a_1 = \omega_g R C \rightarrow RC = \frac{a_1}{\omega_g} = \frac{a_1}{2\pi \cdot f_g}$$

Lt. Tabelle sind in die Koeffizienten für alle Filtertypen 1. Ordnung identisch $a_1 = 1$. Dem Tiefpass muss im Allgemeinen ein Impedanzwandler ($R_2 \rightarrow 0, R_3 \rightarrow \infty$) nachgeschaltet werden, damit sich die Eigenschaften durch die Belastung nicht verändern.

Nichtinvertierenden aktiver Tiefpass 1. Ordnung



Frequenzgang des Tiefpasses 1. Ordnung mit OPV:

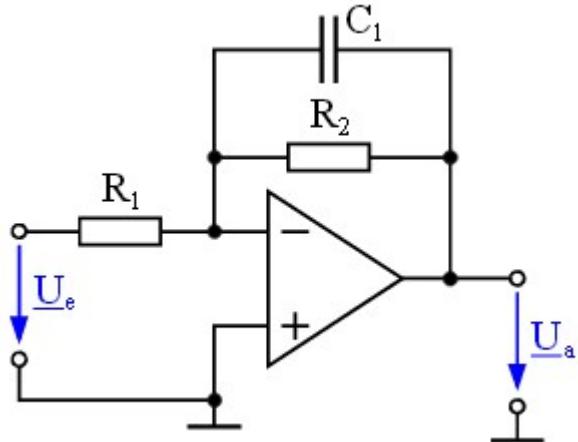
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_3}$$

Einen analogen Hochpass 1. Ordnung erhält man, wenn man R_1 und C vertauscht.

In der Industrieelektronik werden Tief- und Hochpässe 1. Ordnung häufig mit Operationsverstärkern in Gegenkopplung realisiert.

²¹ http://www.et-inf.fho-emden.de/~elmalab/indelek/download/Ind_5.pdf

Aktiver Tiefpass mit Inverter (invertierenden aktiver Tiefpass) 1. Ordnung

Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$:

$$\underline{G}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_1}$$

$$s = j\omega$$

$$G(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + sR_2 C_1} \text{ mit } S = \frac{s}{\omega_g} \rightarrow s = S \cdot \omega_g$$

$$G(S) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \omega_g S R_2 C_1}$$

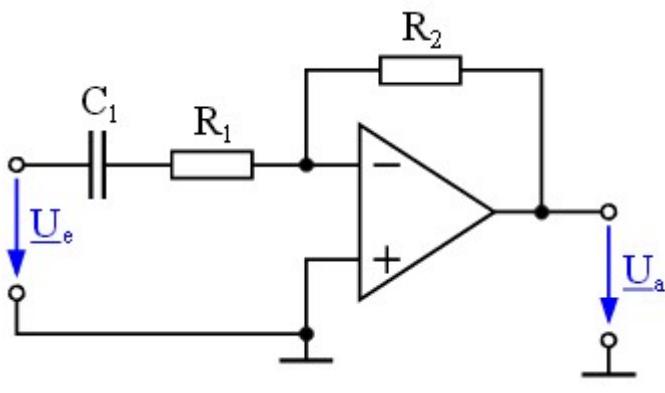
Zur Dimensionierung gibt man die Grenzfrequenz f_g , die **negative** Gleichspannungsverstärkung A_0 und die Kapazität C_1 vor.

Durch Koeffizientenvergleich mit $G(S) = \frac{A_0}{1 + a_1 S}$ erhält man R_2 und R_1 für den

Tiefpass 1. Ordnung mit Umkehrverstärker:

$$a_1 = \omega_g R_2 C_1 \rightarrow R_2 = \frac{a_1}{2\pi \cdot f_g \cdot C_1} \text{ und } R_1 = -\frac{R_2}{A_0} \quad (\text{der Widerstandswert wird wieder positiv, da } A_0 \text{ einen negativen Wert hat})$$

Aktiver Hochpass

Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$:

$$\underline{G}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_1 C_1}}$$

$$G(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{sR_1 C_1}} \text{ mit } S = \frac{s}{\omega_g}$$

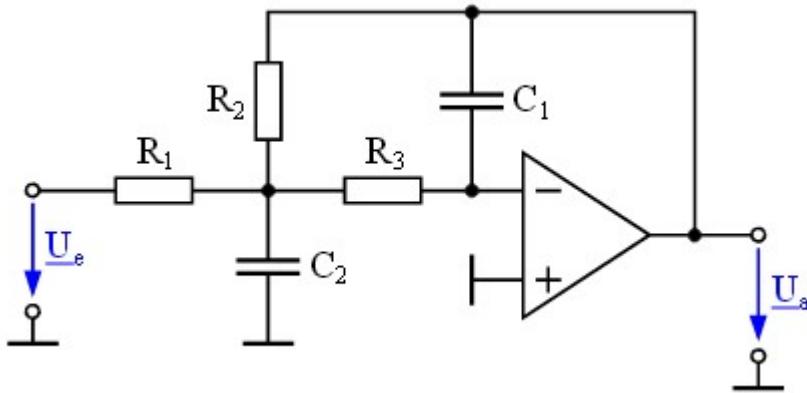
$$G(S) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{\omega_g S R_1 C_1}}$$

Für die Dimensionierung des analogen Hochpasses gibt man die Grenzfrequenz f_g , die hier **negative** Gleichspannungsverstärkung A_∞ und die Kapazität C_1 vor.

Durch Koeffizientenvergleich $G(S) = \frac{A_\infty}{1 + \frac{a_1}{S}}$ erhält man die Widerstandswerte R_2 und R_1 für den Hochpass 1. Ordnung mit Umkehrverstärker:

$$a_1 = \frac{1}{\omega_g R_1 C_1} \rightarrow R_1 = \frac{1}{2\pi \cdot f_g \cdot a_1 \cdot C_1} \text{ und } R_2 = -R_1 \cdot A_\infty \quad (\text{der Widerstandswert wird wieder positiv, da } A_\infty \text{ einen negativen Wert hat})$$

Aktives Tiefpassfilter 2. Ordnung²² (vgl. invertierenden Multiple-Feedback-Schaltung)



$$G(j\omega) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + j\omega C_1 \cdot \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \right) - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3}^{23}$$

$$G(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + sC_1 \cdot \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \right) + s^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3}$$

$$\text{mit } S = \frac{s}{\omega_g} \quad G(S) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \omega_g C_1 \cdot \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \right) \cdot S + \omega_g^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot S^2}$$

Der Koeffizientenvergleich mit $G(S) = \frac{A_0}{1 + a_1 S + b_1 S^2}$ liefert

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$a_1 = \omega_g C_1 \cdot \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \right) \text{ bzw. } b_1 = \omega_g^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3$$

Man kann z.B. die Widerstände R_1 und R_2 vorgeben und R_2 , C_1 und C_2 berechnen.
Die Gleichspannungsverstärkung ist negativ, das bedeutet, dass bei tiefen Frequenzen die Signale invertiert werden.

Um die gewünschten Frequenzgänge zu erhalten, dürfen die Bauelemente keine zu großen Toleranzen aufweisen. Da Kondensatoren häufig nur in der Normreihe E6 erhältlich sind, ist es vorteilhaft, wenn bei der Dimensionierung von Filtern die Kondensatoren vorgegeben und die Widerstände berechnet werden.

$$R_2 = \frac{a_1 C_2 - \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4 C_1 C_2 b_1 (1 - A_0)}}{4 \pi f_g C_1 C_2} \text{ für einen reellen Wert von } R_2 \text{ muss } C_2 \geq \frac{4 b_1 (1 - A_0) C_1}{a_1^2}$$

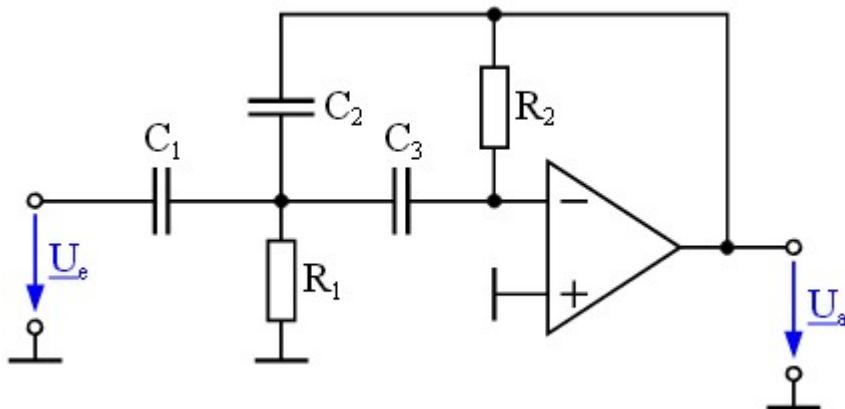
$$R_1 = -\frac{R_2}{A_0} \text{ und } R_3 = \frac{b_1}{4 \pi^2 f_g^2 C_1 C_2 R_2}$$

Es ist günstig, wenn man C_1 vorgibt und für C_2 den nächst größeren Normwert wählt. Die Daten des Filters sind relativ unempfindlich gegenüber Bauteiltoleranzen. Die Schaltung ist geeignet zur Realisierung von Filtern mit höherer Güte.

²² Tietze, Ulrich/ Schenk, Christoph: Halbleiter-Schaltungstechnik. Springer Verlag, Berlin, 10. Auflage 1993, S. 417ff.

²³ ausgehend von $\frac{U_a}{U_e} = -\frac{Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_4}$ mit $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = R_3$, $Z_4 = \frac{1}{sC_2}$ und $Z_5 = \frac{1}{sC_1}$. Achtung: es handelt sich um komplexe Größen, aber zur leichteren Lesbarkeit wurde bei den Z's auf den Unterstrich verzichtet!

Aktives Hochpassfilter 2. Ordnung



Durch Vertauschen von R und C erhält man ein Hochpassfilter 2. Ordnung.

Wiederum ausgehen von $\frac{U_a}{U_e} = -\frac{Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_4}$ ²⁴ erhält man

$$G(s) = \frac{-\frac{C_1}{C_2}}{1 + \frac{(C_1 + C_2 + C_3)}{s C_2 C_3 R_2} + \frac{1}{s^2 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_2}}$$

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{-\frac{C_1}{C_2}}{1 + \frac{(C_1 + C_2 + C_3)}{j\omega \cdot C_2 C_3 R_2} - \frac{1}{\omega^2 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_2}}$$

$$\text{mit } S = \frac{s}{\omega_g}$$

$$G(S) = \frac{-\frac{C_1}{C_2}}{1 + \frac{(C_1 + C_2 + C_3)}{\omega_g \cdot S \cdot C_2 C_3 R_2} + \frac{1}{\omega_g^2 \cdot S^2 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_2}}$$

Der Koeffizientenvergleich mit $G(S) = \frac{A_\infty}{1 + \frac{a_1}{S} + \frac{b_1}{S^2}}$ liefert:

$$A_\infty = -\frac{C_1}{C_2}$$

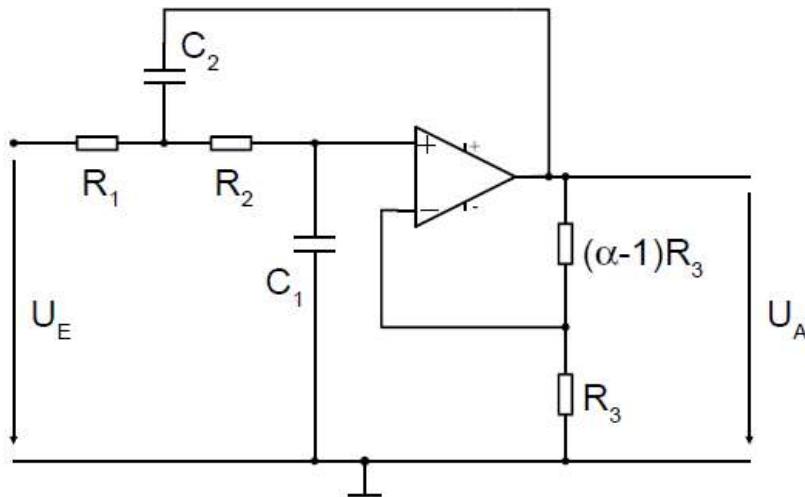
$$a_1 = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)}{\omega_g C_2 C_3 R_2}$$

$$b_1 = \frac{1}{\omega_g^2 C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_2}$$

²⁴ $Z_1 = \frac{1}{s C_1}, Z_2 = \frac{1}{s C_2}, Z_3 = \frac{1}{s C_3}, Z_4 = R_1$ und $Z_5 = R_2$

Aktives TP Filter mit Sallen-Key-Schaltung (Filter mit Einfachmittkopplung²⁵⁾

Aktive Filter lassen sich auch durch Verstärker mit Mitkopplung realisieren. Allerdings muss die Verstärkung durch eine interne Gegenkopplung auf einen definierten Wert festgelegt werden (controlled source).



26

Der Spannungsteiler mit R_3 und $(\alpha - 1)R_3$ bewirkt diese Gegenkopplung und stellt die innere Verstärkung auf den Wert α ein.

Über den Kondensator C_1 erfolgt die Mitkopplung.

Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(S) = \frac{\alpha}{1 + S \cdot (R_1 C_2 + R_2 C_2 + R_1 C_1 \cdot (1 - \alpha)) \cdot \omega_g + S^2 \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_g^2}$$

1. Für den Sonderfall $\alpha = 1$ können die beiden Widerstände R_3 entfallen (OPV als Impedanzwandler) und es lassen sich Filter im MHz Bereich realisieren. Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G(S) = \frac{1}{1 + S \cdot (R_1 C_2 + R_2 C_2) \cdot \omega_g + S^2 \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_g^2}$$

Eine günstige Dimensionierung der Widerstände ergibt sich durch Vorgabe der Kondensatorwerte unter Einhaltung $C_2 \geq 4 \frac{b_1}{a_1^2} \cdot C_1$.

$$A_0 = 1 \text{ und } R_{1,2} = \frac{a_1 C_2 \pm \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4 b_1 C_1 C_2}}{4 \pi f_g C_1 C_2}$$

2. Ein anderer Sonderfall ergibt sich, wenn $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$

$$G(S) = \frac{\alpha}{1 + S(3 - \alpha)RC\omega_g + S^2 R^2 C^2 \omega_g^2}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$RC = \frac{\sqrt{b_1}}{\omega_g} = \frac{\sqrt{b_1}}{2\pi f_g} \quad \text{und } \alpha = A_0 = 3 - \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} = 3 - \frac{1}{Q}$$

Wie man sieht, hängt die innere Verstärkung α nur von der Güte und nicht von der Grenzfrequenz f_g ab.

²⁵ Tietze, Ulrich/ Schenk, Christoph: Halbleiter-Schaltungstechnik. Springer Verlag, Berlin, 10. Auflage 1993, S. 419ff.

²⁶ <http://www.mikrocontroller.net/attachment/99493/sallenkey.png>

Ein großer Vorteil dieser Art der Dimensionierung ist, dass der Filtertyp (Bessel, Butterworth, Tschebyscheff...) nur durch die Verstärkung α bestimmt wird und unabhängig von der Grenzfrequenz ist.

Mit Hilfe der filterabhängigen Werten für a_1 und b_1 erhalten wir folgende Werte für α :

	Bessel	Butterworth	3dB- Tschebyscheff	ungedämpft
α	1,268	1,586	2,234	3

Bei $\alpha = 3$ schwingt die Schaltung selbstständig mit der Frequenz $f = \frac{1}{2\pi}$.

Man erkennt, dass die Einstellung der inneren Verstärkung umso schwieriger wird, je näher sie dem Wert $\alpha = 3$ kommt.

Daher ist besonders beim Tschebyscheff-Filter eine sehr genaue Einstellung notwendig.

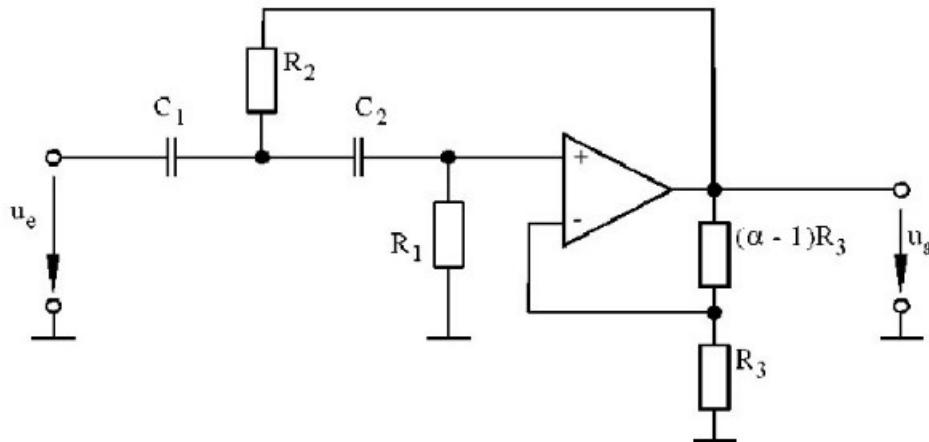
Dies ist ein gewisser Nachteil gegenüber den vorhergehenden Filtern.

Ein bedeutender Vorteil ist jedoch, dass der Filtertyp ausschließlich durch α bestimmt wird und nicht von R und C abhängt.

Dadurch lässt sich die Grenzfrequenz bei diesem Filter besonders einfach verändern, indem man nur R_1 und R_2 zu verändern braucht.

Aktives HP Filter mit Sallen-Key-Schaltung

Vertauscht man die Widerstände mit den Kondensatoren, erhält man ein aktives Hochpassfilter 2. Ordnung mit Einfachmittkopplung.



27

Für eine leichtere Dimensionierung wählen wir $\alpha = 1$ und $C_1 = C_2 = C$

$$A_\infty = 1$$

$$R_1 = \frac{1}{\pi f_g \cdot C \cdot a_1} \text{ und } R_2 = \frac{a_1}{4\pi f_g \cdot C \cdot b_1}$$

Filter höherer Ordnung haben schärfere Filtercharakteristiken

Tiefpassfilter bzw. Hochpassfilter höherer Ordnung lassen sich durch

Reihenschaltung von Filtern 1. Ordnung und Filter 2. Ordnung gut realisieren.

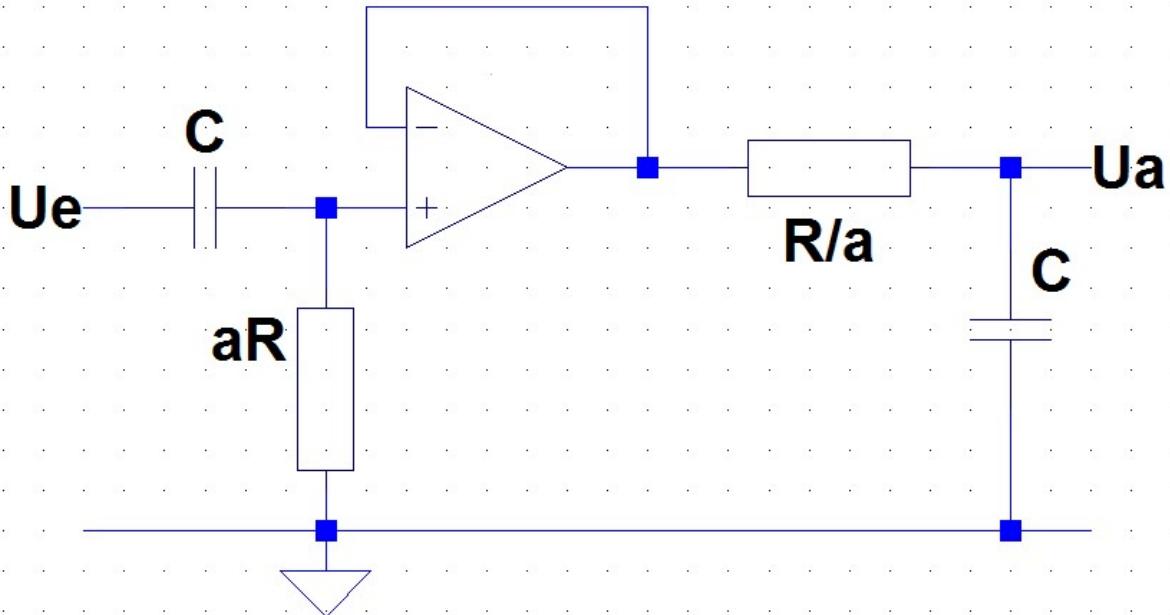
Dabei multiplizieren sich die Frequenzgänge der Einzelfilter.

Man muss deshalb die Koeffizienten der Einzelfilter so einstellen, dass das Produkt der Frequenzgänge den gewünschten Filtertyp mitsamt Grenzfrequenz ergibt.

²⁷ Tietze, Ulrich/ Schenk, Christoph: Halbleiter-Schaltungstechnik. Springer Verlag, Berlin, 10. Auflage 1993, S. 421.

Aktives Bandpassfilter 2. Ordnung

Ein Hochpass (bestehend aus αR und C) dessen Ausgang an einen Impedanzwandler angeschlossen ist, wird in Reihe mit einem Tiefpass 1. Ordnung (bestehend aus $\frac{R}{\alpha}$ und C) in Reihe, so erhält man einen Bandpass²⁸:



Die Übertragungsfunktion ergibt sich aus der Multiplikation der Einzelfilter:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha R s C}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R s C}{\alpha}} = \frac{\alpha R s C}{1 + \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} R s C + s^2 R^2 C^2}$$

Mit $S = \frac{s}{\omega_r}$ folgt $s = S\omega_r$ ergibt eingesetzt:

$$G(S) = \frac{\alpha R C S \omega_r}{1 + \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} R C S \omega_r + S^2 \omega_r^2 R^2 C^2}$$

Bei Bandpässen interessiert man sich für die Verstärkung A_r bei Resonanzfrequenz ω_r bzw. f_r und der Güte Q.

Die Güte Q ist definiert als $Q = \frac{f_r}{B}$, wobei B für die Bandbreite steht.

Durch Einsetzen erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(S) = \frac{\frac{A_r \cdot S}{Q}}{1 + \frac{1}{Q} S + S^2}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können alle interessanten Größen aus der Übertragungsfunktion eines Bandpasses 2. Ordnung direkt abgelesen werden

Für die Resonanzfrequenz muss laut Formel der Ausdruck $\omega_r^2 R^2 C^2 = 1$ sein.

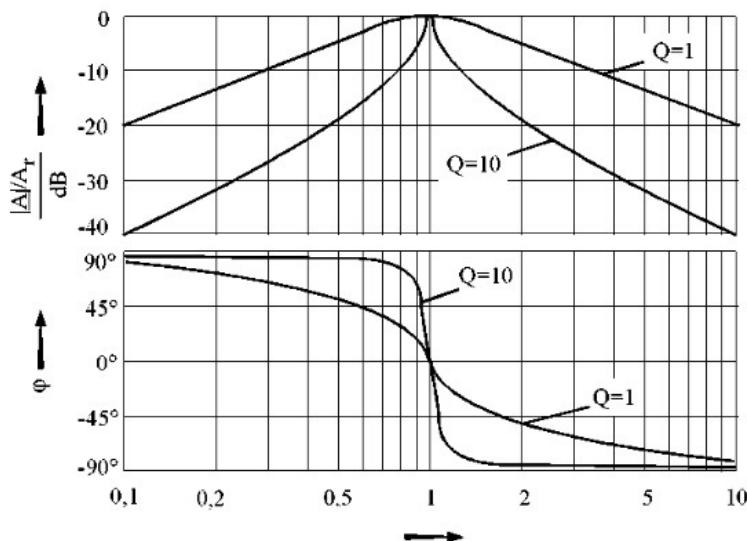
Somit ist $\omega_r = \frac{1}{RC}$.

Die Güte berechnet sich mittels $\frac{1}{Q} S = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} R C \omega_r S$ zu $Q = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}$.

Die maximale Güte, die sich aus der Reihenschaltung von Filtern 1. Ordnung ergibt sich für $\alpha = 1$ zu $Q_{max} = 0,5$

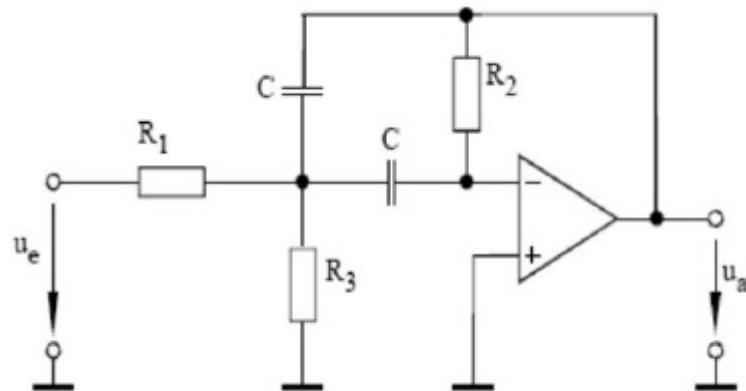
²⁸ Eine mögliche Art der Realisierung

Frequenzgang für Bandpassfilter 2. Ordnung mit unterschiedlicher Güte²⁹



Für Filter mit höherer Güte müssen andere Schaltungsvarianten angewendet werden.

Aktives Bandpassfilter 2. Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung



Wiederum ausgehen von $\frac{U_a}{U_e} = -\frac{Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_4}$ ³⁰ erhält man

$$G(s) = \frac{-\frac{R_2 R_3 \cdot sC}{R_1 + R_3}}{1 + s \frac{2R_1 R_3 C}{R_1 + R_3} + s^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C^2}{R_1 + R_3}}$$

mit $S = \frac{s}{\omega_r}$ folgt $s = S \cdot \omega_r$

²⁹ Tietze, Ulrich/ Schenk, Christoph: Halbleiter-Schaltungstechnik. Springer Verlag, Berlin, 10. Auflage 1993, S. 431ff.

³⁰ $Z_1 = R_1, Z_2 = Z_3 = \frac{1}{sC}, Z_4 = R_3$ und $Z_5 = R_2$

$$G(S) = \frac{-S \frac{R_2 R_3 \cdot C}{R_1 + R_3} \cdot \omega_r}{1 + S \frac{2R_1 R_3 C}{R_1 + R_3} \cdot \omega_r + S^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C^2}{R_1 + R_3} \cdot \omega_r^2}$$

Vergleicht man die erhaltene Übertragungsfunktion wiederum mit

$$G(S) = \frac{\frac{A_r \cdot S}{Q}}{1 + \frac{1}{Q} S + S^2} \text{ so erhalten wir:}$$

$$1 = \frac{R_1 R_2 R_3 C^2}{R_1 + R_3} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f_r^2 \quad \omega_r = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}} \text{ bzw. } f_r = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}}$$

Setzt man nun für die Resonanzfrequenz in der Übertragungsfunktion ein, so erhält man

$$\frac{1}{Q} = \frac{2R_1 R_3 C}{R_1 + R_3} \omega_r \quad Q = \frac{R_1 + R_3}{2R_1 R_3 C \omega_r} \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_3}} = \pi R_2 C f_r$$

$$\frac{A_r}{Q} = \frac{R_2 R_3 \cdot C \cdot \omega_r}{R_1 + R_3} \quad A_r = \frac{R_2 R_3 \cdot C \cdot \omega_r}{R_1 + R_3} \cdot Q \quad A_r = -\frac{R_2}{2R_1}$$

Die Verstärkung, Güte und Resonanzfrequenz ist frei wählbar.

$$\text{Die Bandbreite des Filters ergibt sich zu } B = \frac{f_r}{Q} = \frac{1}{\pi R_2 C}$$

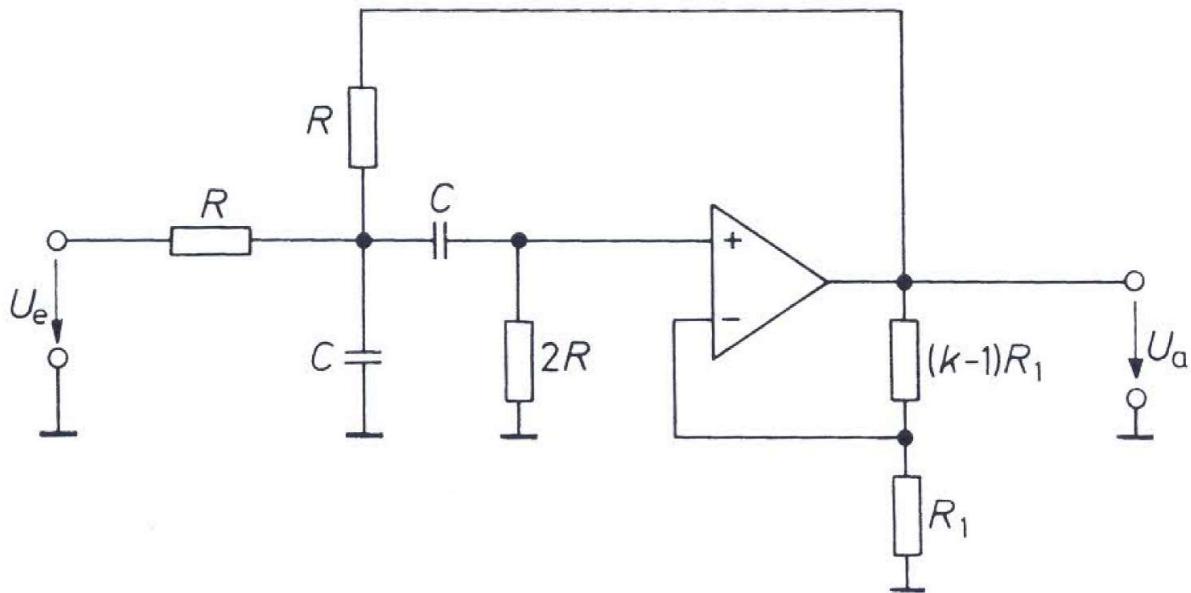
Da die Verstärkung und die Bandbreite von R_3 unabhängig sind, kann die Resonanzfrequenz mittels R_3 variiert werden ohne dass die Verstärkung und die Bandbreite beeinflusst werden.

Damit die Schleifenverstärkung der Schaltung groß gegenüber 1 ist muss die Differenzverstärkung des OPV groß gegenüber $2 \cdot Q^2$ sein.³¹

Gegeben sei: Resonanzfrequenz 10Hz, Güte=100 und Verstärkung $A_r = -10$, $C = 1\mu F$

Gesucht: Bandbreite, untere und obere Grenzfrequenz, R_2 , R_1 , R_3 und Differenzverstärkung des OPV.

³¹ Lässt man den Widerstand R_3 weg ($R_3 \rightarrow \infty$) wird Q von der Verstärkung abhängig $-A_r = 2 \cdot Q^2$

Aktives BP Filter mit Einfachmittkopplung³²

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(S) = \frac{kRC\omega_r S}{1 + (3 - k)RC\omega_r S + R^2 C^2 \omega_r^2 S^2}$$

Der Vergleich mit $G(S) = \frac{\frac{A_r}{Q}S}{1 + \frac{1}{Q}S + S^2}$ liefert wiederum:

die Resonanzfrequenz $f_r = \frac{1}{2\pi RC}$ die Verstärkung $A_r = \frac{k}{3-k}$ und die Güte $Q = \frac{1}{3-k}$

Nachteilig ist, dass sich die Güte Q und die Verstärkung A_r nicht unabhängig voneinander wählen lassen.

Vorteilhaft ist, dass sich durch Variation von k die Güte verändert lässt, ohne dass sich die Resonanzfrequenz des Filters ändert.

Für k = 3 tritt eine ungedämpfte Schwingung auf ($A_r \rightarrow \infty$)

³² Tietze, Ulrich/ Schenk, Christoph: Halbleiter-Schaltungstechnik. Springer Verlag, Berlin, 10. Auflage 1993, S. 433ff.

Regelungstechnik

1) Erkläre Mess-, Regelungs- & Steuerungstechnik

Messtechnik



Steuerungstechn.



Regelungstechn.



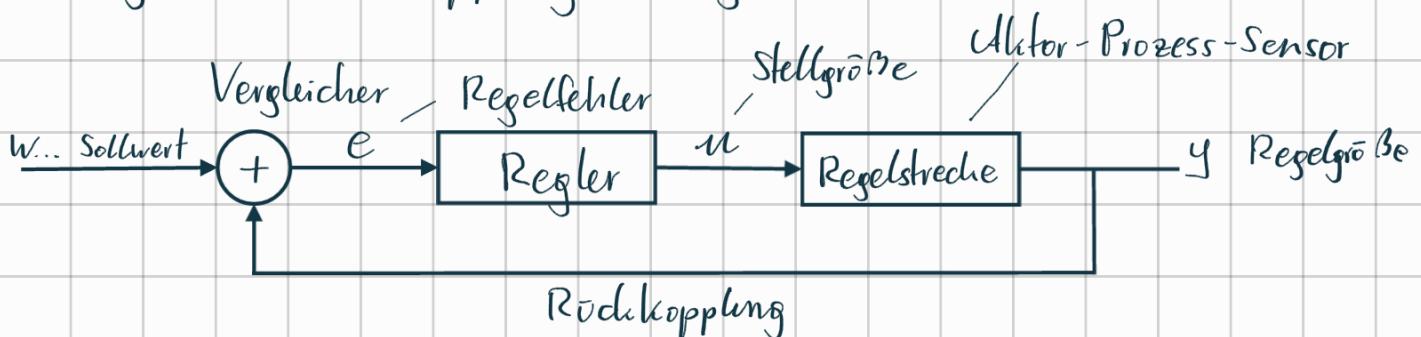
2) Schaltungstechnik Bsp.:

- Toast
- Mikrowelle

3) Wozu Simulation in Mechatronik

- Probleme finden
- Kosten + Material sparen

4) Begriff Rückkopplung + Regelkreis



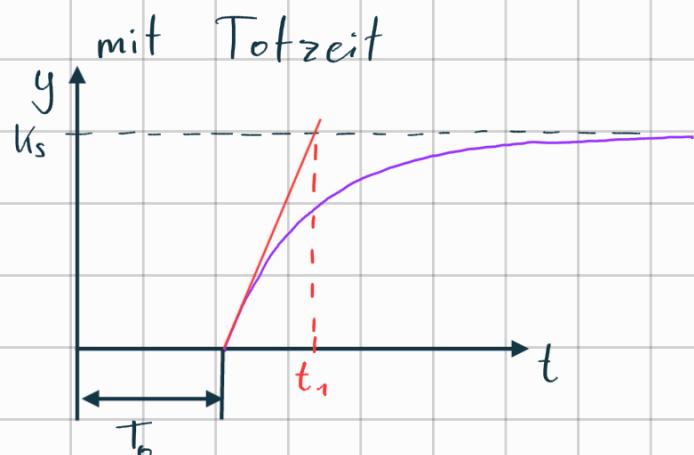
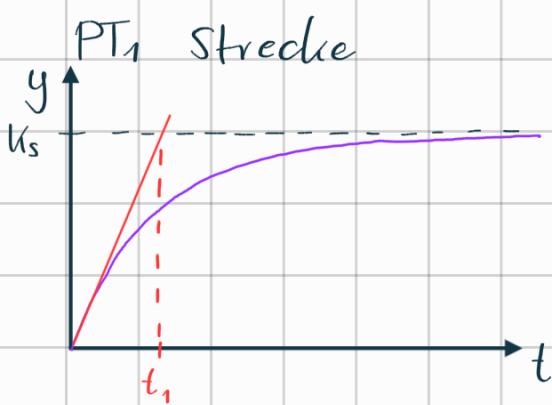
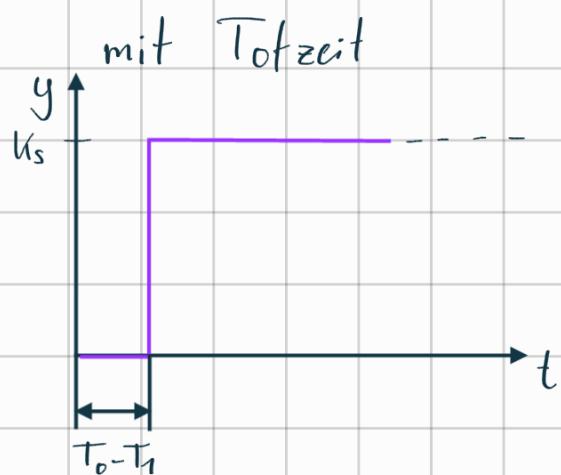
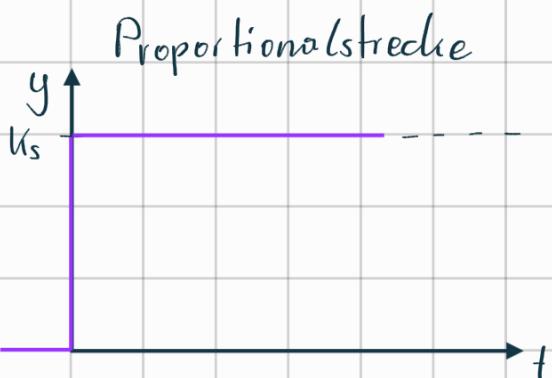
$$e = w - y$$

5) Begriff Dynamik
Wie schnell der Sollwert umgesetzt wird.

Einschub

Sprungfunktion:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

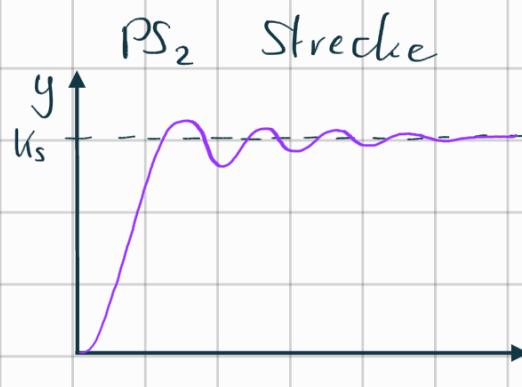
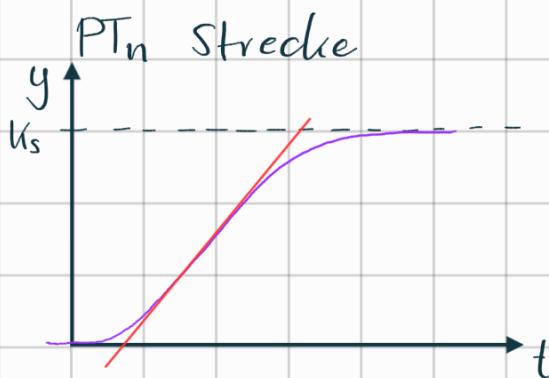


$$G_S = \frac{u_s}{1 + sT_1}$$

$$G_S = \frac{u_s}{1 + sT_1} \cdot e^{-sT_0}$$

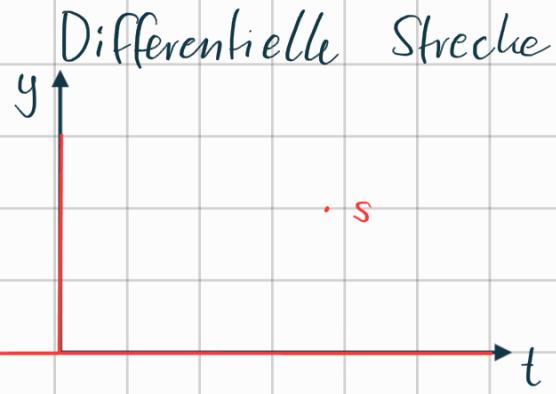
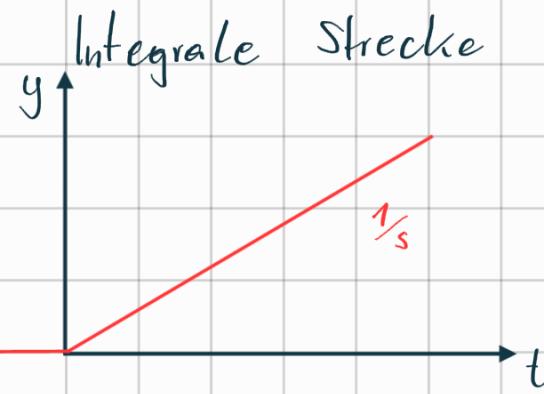
$$e^{-sT_0} = e^{-j\omega T_0}$$

Betrag: 1 Phasenw.: $-\omega T_0$



$$G_s = \frac{K_s}{(1+sT_1)(1+sT_2) \cdots (1+sT_n)}$$

$$G_s = \frac{K_s}{1+s(T_1+T_2)+s^2 \cdot T_1 \cdot T_2}$$



Klassifizierung von Übertragungsfunktionen G(s) nach P, I_n, D_m, T_x

geg.: $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ man benötigt ol. Nenner immer in folgender Form:
 $a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 + \dots$

Falls kein a_0 vorhanden ist, dann die niedrigste Potenz von s im Nenner heranziehen.

Bsp.: $G(s) = \frac{1+7s+s^2}{s+3s^2+4s^3} = \frac{1+7s+s^2}{s(1+3s+4s^2)} = \frac{\frac{1}{s}+7+s}{1+3s+4s^2}$ PIDT₂

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{27+4,5s^2-3s^5}{2,5s^3+3,8s^2+7s^4} = \frac{27+4,5s^2-3s^5}{3,8s^2(1+\frac{2,5}{3,8}s+\frac{7}{3,8}s^2)} \\ &= \frac{\frac{27}{3,8s^2} + \frac{4,5}{3,8} - \frac{3}{3,8}s^3}{1 + \frac{2,5}{3,8}s + \frac{7}{3,8}s^2} \end{aligned}$$

PID₂D₃T₂

$$G(s) = \frac{1+7s+s^2}{1+3s+4s^2} \quad P D_2 T_2$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{5+4s+s^2}{s^2+2s^3+4s^4+5s^5} = \frac{5+4s+s^2}{s^2(1+2s+4s^2+5s^3)} \\ &= \frac{\frac{5}{s^2} + \frac{4}{s} + 1}{1+2s+4s^2+5s^3} \quad P I_2 T_3 \end{aligned}$$

Gesamtübertragungsfunktion durch Komb. mehrerer Teilsysteme

Reihenschaltung

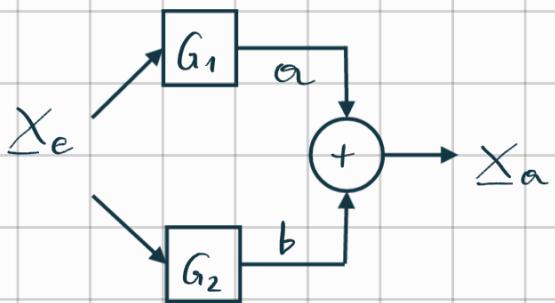


$$X_a = \alpha \cdot G_2 = X_e \cdot G_1 \cdot G_2$$

\downarrow

$$\frac{X_a}{X_e} = G_1 \cdot G_2$$

Parallelschaltung

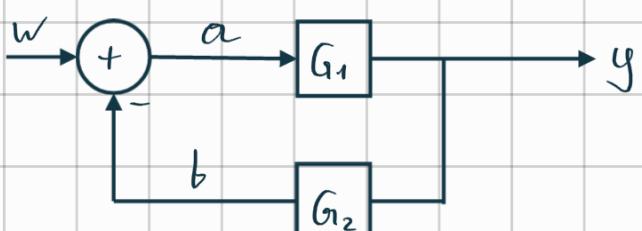


$$X_a = \alpha + b = X_e \cdot G_1 + X_e \cdot G_2$$

$$X_a = X_e (G_1 + G_2)$$

$$\frac{X_a}{X_e} = G_1 + G_2$$

Rückführung von Systemen



$$y = a \cdot G_1 = (w - b) G_1$$

$$y = w \cdot G_1 - b \cdot G_1$$

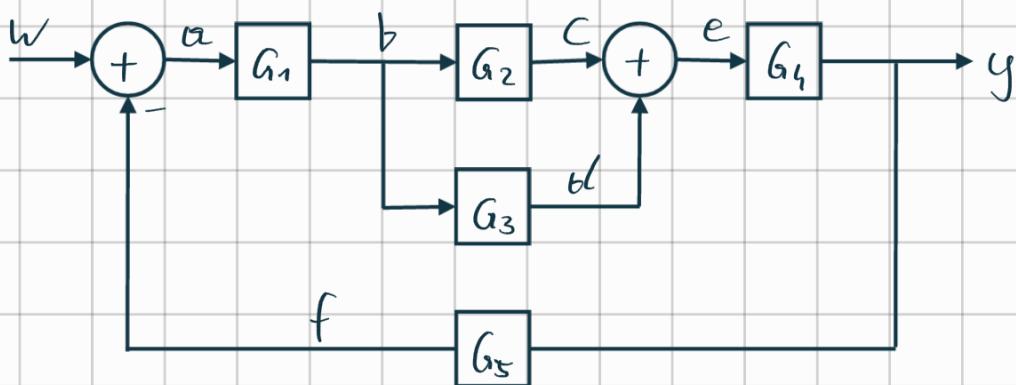
$$y = w \cdot G_1 - y \cdot G_1 \cdot G_2$$

$$y + y \cdot G_2 \cdot G_1 = w \cdot G_1$$

$$y (1 + G_2 \cdot G_1) = w \cdot G_1$$

$$\frac{y}{w} = \frac{G_1}{1 + G_2 \cdot G_1}$$

Bsp.:



$$y = e \cdot G_4 = c \cdot G_4 + dl \cdot G_4 = b \cdot G_2 \cdot G_4 + b \cdot G_3 \cdot G_4$$

$$y = a \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 + a \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot G_4$$

$$y = (w - f) G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 + (w - f) G_1 \cdot G_3 \cdot G_4$$

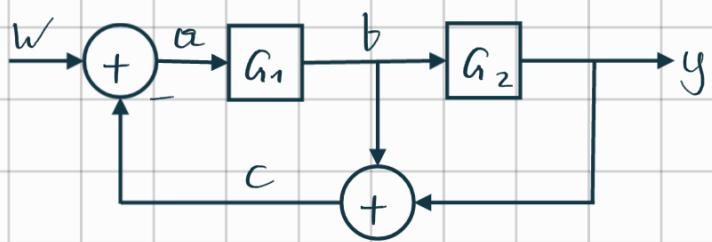
$$y = w \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 - f \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 + w \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 - f \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot G_4$$

$$y = w \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 - y \cdot G_5 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 + w \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 - y \cdot G_5 \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot G_4$$

$$y + y \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 \cdot G_5 + y \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 = w \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 + w \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot G_4$$

$$y (1 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 \cdot G_5 (G_2 + G_3)) = w \cdot G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)$$

$$\frac{y}{w} = \frac{G_1 \cdot G_4 (G_2 + G_3)}{1 + G_1 \cdot G_4 \cdot G_5 (G_2 + G_3)}$$



$$y = b \cdot G_2 = \alpha \cdot G_1 \cdot G_2 = (w - c) G_1 \cdot G_2$$

$$y = w \cdot G_1 \cdot G_2 - c \cdot G_1 \cdot G_2$$

$$y = w \cdot G_1 \cdot G_2 - (b + y) G_1 \cdot G_2$$

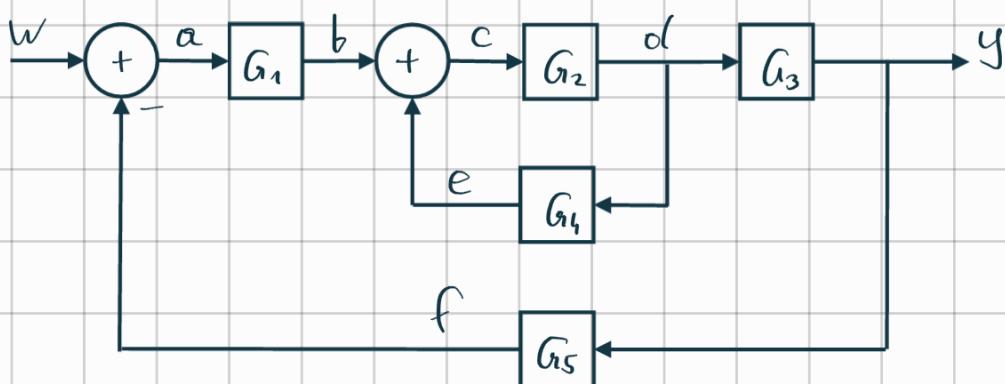
$$y = w \cdot G_1 \cdot G_2 - b \cdot G_2 \cdot G_1 - y \cdot G_1 \cdot G_2 \quad b \cdot G_2 = g$$

$$y = w \cdot G_1 \cdot G_2 - y \cdot G_1 - y \cdot G_1 \cdot G_2$$

$$y + y \cdot G_1 + y \cdot G_1 \cdot G_2 = w \cdot G_1 \cdot G_2$$

$$y(1 + G_1 + G_1 \cdot G_2) = w \cdot G_1 \cdot G_2$$

$$\frac{y}{w} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 + G_1 \cdot G_2}$$



$$y = d \cdot G_3 = c \cdot G_2 \cdot G_3 = (b + e) G_2 \cdot G_3$$

$$y = a \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + d \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

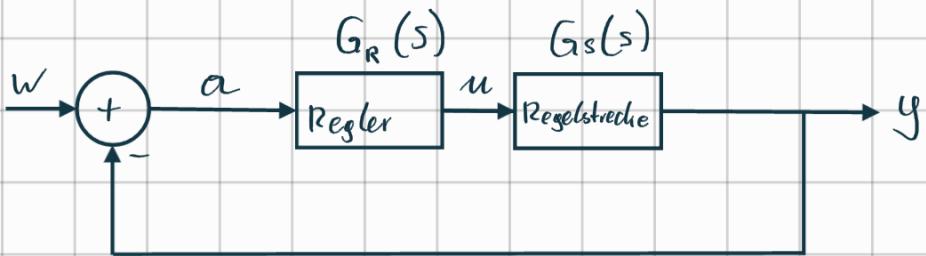
$$y = (w - f) G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + y \cdot G_1 \cdot G_2$$

$$y = w \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 - y \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_5 + y \cdot G_2 \cdot G_1$$

$$y(1 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_5 - G_2 \cdot G_4) = w \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

$$\frac{y}{w} = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{1 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_5 - G_2 \cdot G_4}$$

Der Regelkreis im Bildbereich



w ... Sollgröße

y ... Istgröße

$e = w - y$... Regelfehler

u ... Stellgröße

G_R ... Übertragungsfunktion des Reglers

G_s ... Übertragungsfunktion der Regelstrecke

Die Regelstrecke besteht aus Aktuator - Strecke
System
Prozess - Sensoren

$G_w(s) = \frac{y(s)}{w(s)}$... Führungsübertragungsfunktion

$$y = u \cdot G_s = e \cdot G_R \cdot G_s = (w - y) G_R \cdot G_s = w \cdot G_R \cdot G_s - y \cdot G_R \cdot G_s$$

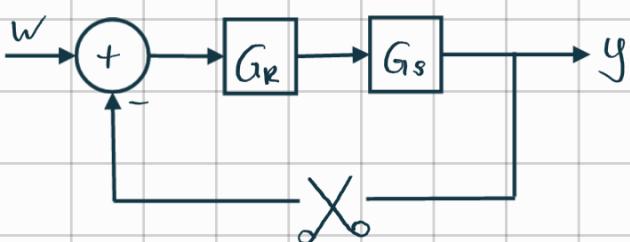
$$y + y \cdot G_R \cdot G_s = w \cdot G_R \cdot G_s$$

$$y(1 + G_R \cdot G_s) = w \cdot G_R \cdot G_s$$

$$G_w = \frac{y}{w} = \frac{G_R \cdot G_s}{1 + G_R \cdot G_s}$$

$G_o = G_R \cdot G_s$... Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$G_w = \frac{G_o}{1 + G_o}$$



Z ... Zählerpolynom

N ... Nennerpolynom

$$G_R = \frac{Z_R}{N_R} \quad G_s = \frac{Z_s}{N_s}$$

$$G_w = \frac{G_R \cdot G_s}{1 + G_R \cdot G_s} = \frac{\frac{Z_R}{N_R} \cdot \frac{Z_s}{N_s}}{1 + \frac{Z_R}{N_R} \cdot \frac{Z_s}{N_s}} = \frac{Z_R \cdot Z_s}{N_R \cdot N_s + Z_R \cdot Z_s} = \frac{Z_w}{N_w}$$

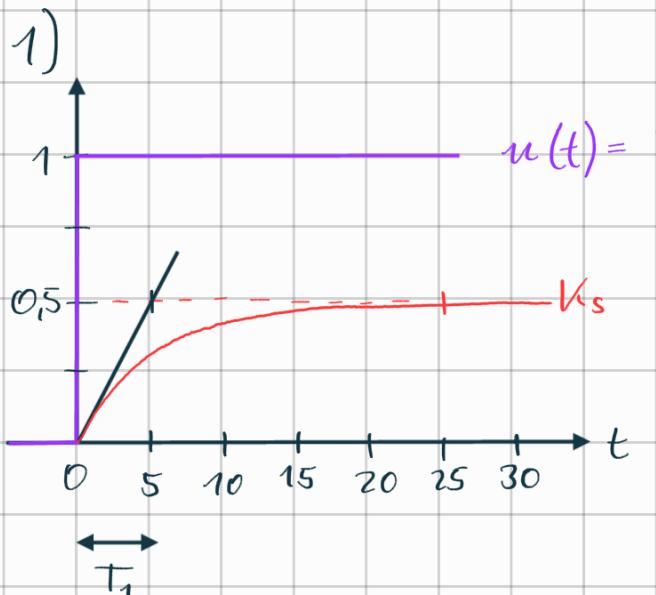
- Die Nullstellen des Zählerpolynoms $Z_w(s)$ sind d. Nullstellen des Regelkreises.
- Die Nullstellen des Nennerpolynoms $N_w(s)$ sind die Polstellen des Regelkreises.

Ein Regelkreis ist stabil, wenn alle Pole der Führungsübertragungsfunktion einen negativen Realteil besitzen.

Allgemein: Es liegt eine stabile Übertragungsfunktion vor, wenn die Nullstellen deren Nennerpolynoms (= Polstellen der Übertragungsfunktion) einen negativen Realteil besitzen.

Bsp.: Geg. ist eine PT_1 -Regelstrecke $G_s = \frac{0,5}{1+5s} \stackrel{!}{=} \frac{K_s}{1+s \cdot T_1}$, welche mit einem PI-Regler $G_R = \frac{12s+3}{s}$ geregelt wird.

- Ges. sind:
- 1) Die Sprungantwort der Regelstrecke
 - 2) Ist die Regelstrecke stabil? Wenn ja, olen Endwert für $t \rightarrow \infty$
 - 3) Die Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$
 - 4) Ist der Regelkreis stabil? Wenn ja, $y_t \rightarrow \infty$



2) Version 1:

Laut Sprungantwort
stabil \rightarrow Endwert
wird erreicht

Version 2:

$$1+5s = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{5}$$

$\hookrightarrow \{\text{Re}\}$ ist neg., daher stabil

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot u(s) \cdot G_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{0,5}{1+5s} = 0,5$$

$$u(t) = \delta(t) \rightarrow u(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad G_w &= \frac{G_R \cdot G_s}{1 + G_R \cdot G_s} = \frac{\frac{12s+3}{s} \cdot \frac{0,5}{1+5s}}{1 + \frac{12s+3}{s} \cdot \frac{0,5}{1+5s}} = \frac{(12s+3)0,5}{s(1+5s) + (12s+3)0,5} \\ &= \frac{z_R z_s}{z_R z_s + N_R + N_s} = \frac{(12s+3)0,5}{(12s+3)0,5 + s(1+5s)} \end{aligned}$$

4) Polstellen:

$$(12s+3)0,5 + s(1+5s) = 0$$

$$6s + 1,5 + s + 5s^2 = 0$$

$$5s^2 + 7s + 1,5 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = -0,264 \\ s_2 = -1,136 \end{array} \right\} \rightarrow \text{stabil}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot w(s) \cdot G_w(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(12s+3)0,5}{(12s+3)0,5 + s(1+5s)} \\ &= \frac{3 \cdot 0,5}{3 \cdot 0,5} = 1 \end{aligned}$$

$$w(t) = \delta(t) \rightarrow w(s) = \frac{1}{s}$$

bleibender Regelfehler:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = w(\infty) - y(\infty) = 1 - 1 = 0$$

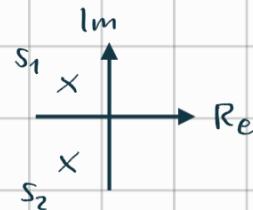
Bsp.: $N_w(s) = s^2 + 0,2s + 4$

Ges.: Ist d. Regelkreis stabil

$$s^2 + 0,2s + 4 = 0$$

$$s_1 = -0,1 - j 1,9$$

$$s_2 = -0,1 + j 1,9$$



Sprungantwort:



Eine Übertragungsfunktion ist dann stabil, wenn das Nennerpolynom ein Hurwitzpolynom (Alle Realteile der Polstellen sind sicher < 0).

Überprüfen auf ein Hurwitzpolynom

1) Für Polynome 1. & 2. Ordnung gilt:

Wenn alle Koeffizienten > 0 sind, dann liegt ein Hurwitzpolynom vor; diese Bedingung ist hin- & ausreichend.

$$a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

$$a_2 > 0 \text{ & } a_1 > 0 \text{ & } a_0 > 0 \rightarrow \text{Hurwitzpolynom}$$

2) Für Polynome > 2 . Ordnung muss zusätzlich die sogenannte Hurwitz-Determinante aufgestellt werden.

Determinante einer Matrix:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = a_{11}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Hurwitz-Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & a_0 \end{bmatrix}$$

$$G_s = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3}$$

Bsp.: Ist die gegebene Übertragungsfkt.
der Regelstrecke stabil?

$$G_s = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}$$

$$V1: n=3 \quad a_0 = 6; \quad a_1 = 16; \quad a_2 = 8; \quad a_3 = 1 \quad > 0$$

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 1 & 16 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 8 \quad > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 - 1 \cdot 6 \quad > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 0 & | & 8 & 6 \\ 1 & 16 & 0 & | & 1 & 16 \\ 0 & 8 & 6 & | & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 \cdot 6 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 8 - 0 \cdot 16 \cdot 0 - 8 \cdot 0 \cdot 8 - 6 \cdot 1 \cdot 6$$

$$D_3 = 732 \quad > 0$$

Alle Determinanten positiv \rightarrow Hurwitz-Polynom

$$V2: s^3 + 8s^2 + 16s + 6 = 0$$

$$s_1 = -5,086$$

$$s_2 = -0,485$$

$$s_3 = -2,428$$

Alle Realteile negativ

Bsp.: Welche Bedingung ergibt sich für die Variable k , damit das folgende Polynom einem Hurwitz-Polynom entspricht?

$$s^3 + ks^2 + ks + k$$

$$n=3 \quad a_3=1; a_2=k; a_1=k; a_0=k > 0$$

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$$

$$D_1 = k$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} k & k \\ 1 & k \end{vmatrix} = k \cdot k - k = k > 0$$

$k < 16$

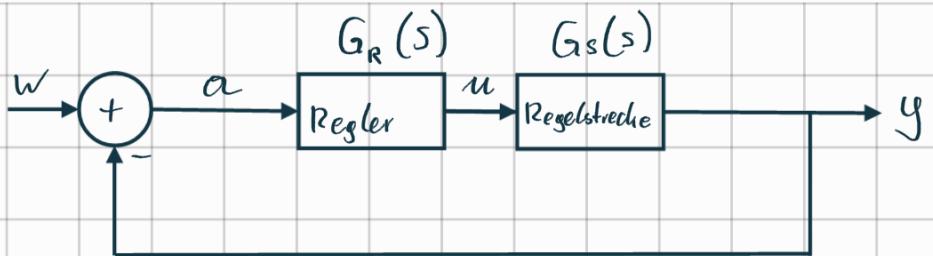
Bsp.:

$$G_R = \frac{1-s}{s+1} \quad G_S = \frac{k}{s(s+2)}$$

- gesucht:
- G_o
 - Führungsübertragungsfkt. G_w
 - Bedingung für k , damit RK stabil

$$G_o = G_R \cdot G_S = \frac{1-s}{s+1} \cdot \frac{k}{s(s+2)}$$

$$G_w(s) = \frac{G_o}{G_o + 1} = \frac{Z_R \cdot Z_S}{N_R \cdot N_S + Z_R \cdot Z_S} = \frac{(1-s)k}{(s+1)(s+2)s + (1-s)k}$$



$$(s+1)(s+2)s + (1-s)k = 0$$

$$(s^2 + s + 2s + 2)s + k - sk = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s - sk + k = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + (2-k)s + k = 0$$

$$\alpha_0 = k; \alpha_1 = 2-k; \alpha_2 = 3; \alpha_3 = 1$$

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 3 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 3(2-k) - k \cdot 1 > 0$$

$$6 - 3k - k > 0$$

$$6 > 4k$$

$$\underline{k < 1,5}$$

$$D_3 = 3(2-k)k + 0 + 0 - k \cdot 1 \cdot k - 0 - 0$$

$$= 6k - 3k^2 - k^2 = 6k - 4k^2 > 0 \quad | : k, \text{ weil } k \neq 0$$

$$6 > 4k$$

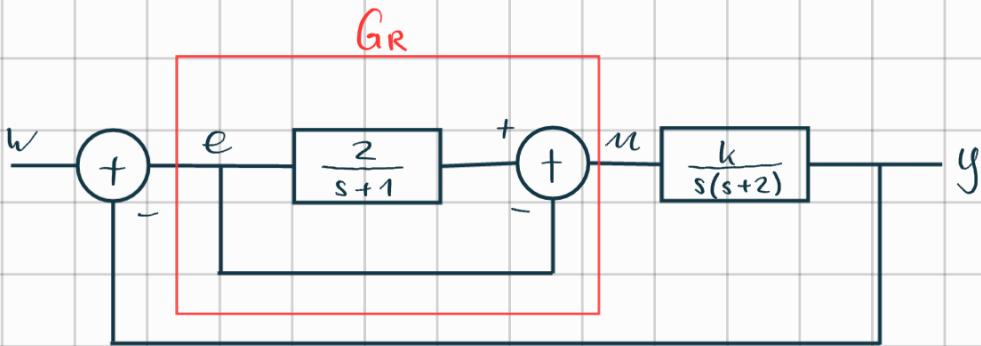
$$\underline{k < 1,5}$$

Bsp.: Ist das Polynom $-0,3 - 0,7s - 2s^2$ ein Hurwitz-Polynom?

$$2s^2 + 0,7s + 0,3 = 0$$

$$a_2 = 2 > 0 \checkmark; a_1 = 0,7 > 0 \checkmark; a_0 = 0,3 > 0 \checkmark$$

Bsp.:



Ges.: Bedingung für k , damit RK stabil.

$$G_R = ? \quad u = e \left(\frac{Z}{s+1} \right) - e = e \left(\frac{Z}{s+1} - 1 \right)$$

$$G_R = \frac{u}{e} = \frac{Z}{s+1} - 1 = \frac{Z-s-1}{s+1} = \frac{1-s}{s+1}$$

$$G_S = \frac{k}{s(s+2)}$$

$$G_W = \frac{Z_R \cdot Z_S}{Z_R \cdot Z_S + N_R \cdot N_S} = \frac{(1-s)k}{(1-s)k + (s+1)(s+2)s}$$

Nur ist $+$ ein Hurwitz-Polynom?

$$\begin{aligned} k - sk + (s+1)(s^2 + 2s) &= k - sk + s^3 + 2s^2 + s^2 + 2s \\ &= s^3 + 3s^2 + (2-k)s + k \end{aligned}$$

:

Bsp.: Von einem RK mit neg. Rückkopplung ist

$$G_o = \frac{k(s+2)}{s(s-1)}$$

gegeben.

Ges.: Bedingung für k , damit RK stabil ist

$$G_w = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{\frac{k(s+2)}{s(s-1)}}{1 + \frac{k(s+2)}{s(s-1)}} = \frac{k(s+2)}{s(s-1) + k(s+2)}$$

$$\text{Nw: } s^2 - s + ks + 2k = 0$$

$$s^2 + (k-1)s + 2k = 0$$

$$a_2 = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} a_1 &= k-1 > 0 \rightarrow k > 1 \\ a_0 &= 2k > 0 \rightarrow k > 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} k > 1 \\ k > 0 \end{array} \right\} k > 1$$

Bsp.: Welche Bedingung für k sind gegeben, damit das folgende Polynom ein Hurwitz-Polynom ist?

$$s^3 + 10s^2 + 27s + (18+k) = 0$$

$$n = 3$$

$$a_3 = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$a_2 = 10 > 0 \quad \checkmark$$

$$a_1 = 27 > 0 \quad \checkmark$$

$$a_0 = 18+k > 0 \rightarrow k > -18$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18+k & 0 \\ 1 & 27 & 0 \\ 0 & 10 & 18+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 18+k \\ 1 & 27 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 10$$

$$D_2 = 10 \cdot 27 - (18+k) = 270 - 18 - k > 0 \rightarrow k < 252$$

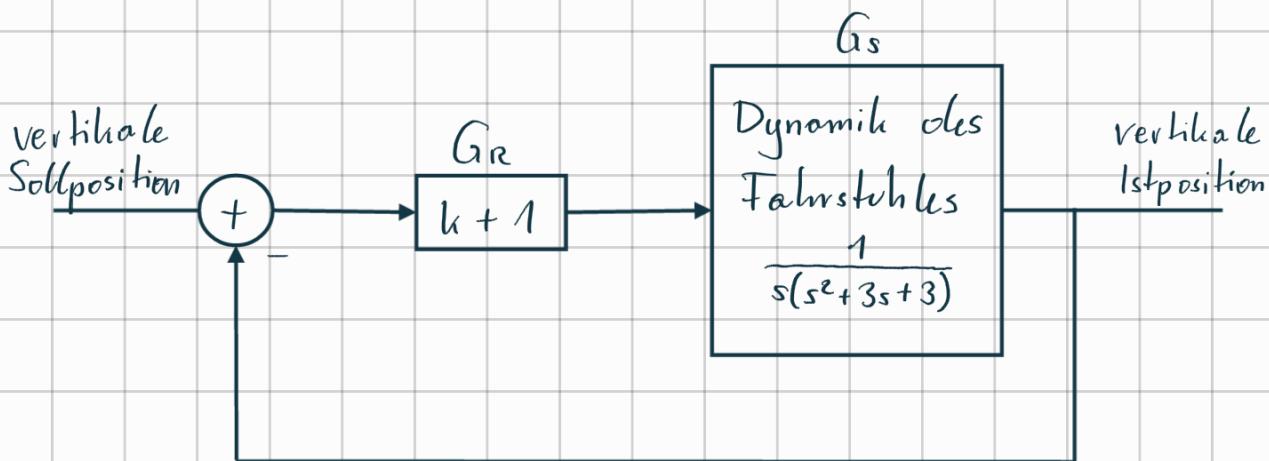
$$\begin{aligned} D_3 &= 10 \cdot 27 \cdot (18+k) + 0 + 0 - 0 - 0 - (18+k)^2 \\ &= 270(k+18) - (18+k)^2 > 0 \\ &\cancel{270(k+18) > (18+k)^2} \\ &270 > (18+k) \\ &\cancel{k < 252} \end{aligned}$$

$$252 > k > -18$$

Bsp.:

1993 wurde der damals modernste Lift im 70 stöckigen Landmarktower in Lukahama mit einer Spitzengeschwindigkeit von 45 km/h eröffnet. Damit Passagiere nicht übermäßig belastet werden, wird der Lift über einen ausgedehnten Zeitraum beschleunigt.

Bei der Aufwärtsfahrt erreicht der Lift seine volle Geschwindigkeit im 27. Stock und fängt 15 Stockwerke später zu bremsen an. Die maximale Beschleunigung ist $1/10$ g. Bremsbacken aus Eisen würden bei solchen Belastungen schmelzen, daher wurden Keramikbremsbacken eingebaut.



ges.: Bereich für k , damit der RK stabil ist.

$$G_W = \frac{Z_R \cdot Z_S}{Z_R \cdot Z_S + N_R \cdot N_S} = \frac{(k+1)1}{(k+1)1 + s(s^2 + 3s + 3)}$$

$$N_w: (k+1) + s^3 + 3s^2 + 3s = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + (k+1) = 0$$

$$n=3$$

$$\alpha_3 = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$\alpha_2 = 3 > 0 \quad \checkmark$$

$$\alpha_1 = 3 > 0 \quad \checkmark$$

$$\alpha_0 = k+1 > 0 \rightarrow k > -1$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_n & \alpha_{n-2} & 0 \\ 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & k+1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & k+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & k+1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

$$D_1 = 3 > 0 \quad \checkmark$$

$$D_2 = 3 \cdot 3 - (k+1) = 8 - k - 1 > 0$$

$$8 > k$$

$$D_3 = 3 \cdot 3(k+1) + 0 + 0 - 0 - 0 - (k+1)^2 \cdot 1$$

$$= 8(k+1) - (k+1)^2 > 0$$

$$8 - (k+1) > 0$$

$$8 - k - 1 > 0$$

$$8 > k$$

$$8 > k > -1$$

Bsp.: $G_0 = \frac{k}{(s+1)(s+3)(s+6)}$ ges.: Wert für k , damit ein Wurzelpaar auf der imag. Achse liegt

$$\begin{aligned}
 G_W &= \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{\frac{k}{(s+1)(s+3)(s+6)}}{1 + \frac{k}{(s+1)(s+3)(s+6)}} = \frac{\frac{k}{(s+1)(s+3)(s+6)}}{\frac{(s+1)(s+3)(s+6) + k}{(s+1)(s+3)(s+6)}} \\
 &= \frac{k}{k + (s+1)(s+3)(s+6)} = \frac{k}{(s^3 + 3s^2 + s^2 + 3s + 6s^2 + 18s + 6s + 18) + k} \\
 &= \frac{k}{s^3 + 10s^2 + 27s + (18+k)} = \frac{k}{s^3 + 10s^2 + 27s + (18+k)}
 \end{aligned}$$

$N_w:$ $s^3 + 10s^2 + 27s + (18+k) = 0$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 1 > 0 \checkmark; \quad a_2 = 10 > 0 \checkmark; \quad a_1 = 27 > 0 \checkmark \\
 a_0 &= (18+k) > 0 \rightarrow k > -18
 \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18+k & 0 \\ 1 & 27 & 0 \\ 0 & 10 & 18+k \end{bmatrix} \begin{matrix} 10 & 18+k \\ 1 & 27 \\ 0 & 10 \end{matrix}$$

$$D_1 = 10$$

$$D_2 = 10 \cdot 27 - (18+k) = 270 - 18 - k > 0 \rightarrow k < 252$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= 10 \cdot 27 \cdot (18+k) + 0 + 0 - 0 - 0 - (18+k)^2 \\
 &= 270(k+18) - (18+k)^2 > 0 \\
 &\quad 270(k+18) > (18+k)^2 \\
 &\quad 270 > (18+k)^2 \\
 &\quad k < 252
 \end{aligned}$$

$$K = 252 : s^3 + 10s^2 + 27s + 270 = 0$$

$$s_1 = -10$$

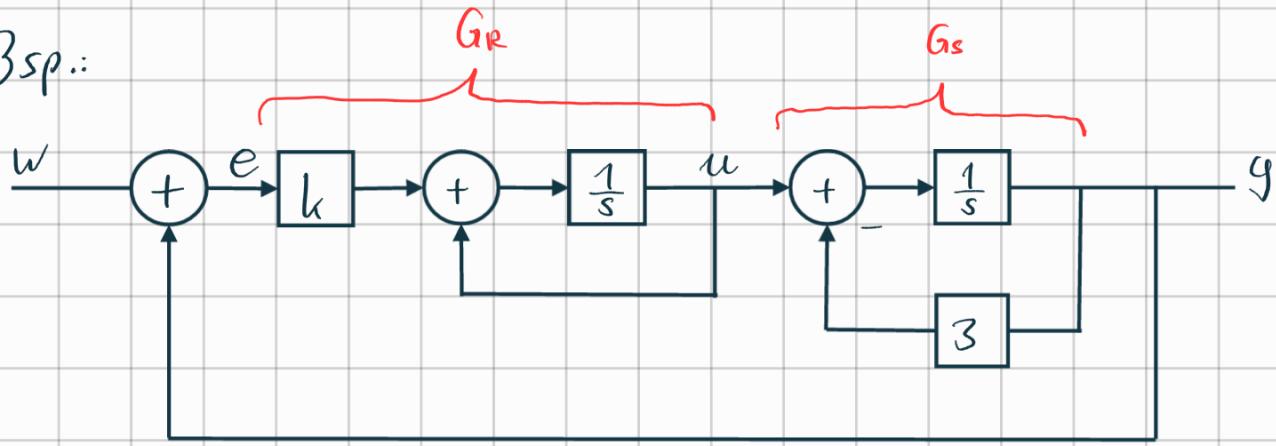
$$s_{2/3} = \pm j 3\sqrt{3}$$

$$K = -18 : s^3 + 10s^2 + 27s + 0 = 0$$

$$s_1 = 0$$

$$s_{2/3} = -5 \pm j\sqrt{2}$$

Bsp.:



ges.: G_R , G_s , G_w & Bereich für k damit Rk stabil

$$G_R = \frac{u}{e} = \frac{k}{s-1}$$

$$u = \frac{1}{s} \cdot (k \cdot e + u)$$

$$u = \frac{1}{s} \cdot k \cdot e + \frac{1}{s} \cdot u$$

$$u \left(1 - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \cdot k \cdot e$$

$$u = \frac{\frac{1}{s} \cdot k \cdot e}{1 - \frac{1}{s}} = \frac{\frac{k \cdot e}{s}}{\frac{s-1}{s}} = \frac{k \cdot e}{s-1}$$

$$G_s = \frac{y}{u} = \frac{1}{s+3}$$

$$y = \frac{1}{s} (u - 3y) = \frac{u}{s} - 3 \cdot \frac{1}{s} \cdot y$$

$$y + 3 \cdot \frac{1}{s} \cdot y = \frac{u}{s}$$

$$y \left(1 + \frac{3}{s}\right) = \frac{u}{s}$$

$$y = \frac{u}{s+3}$$

$$G_w = \frac{Z_R \cdot Z_s}{Z_R \cdot Z_s + N_R \cdot N_s} = \frac{k}{k + (s+3)(s-1)}$$

$$(s+3)(s-1) + k = 0$$

$$s^2 - s + 3s - 3 + k = 0$$

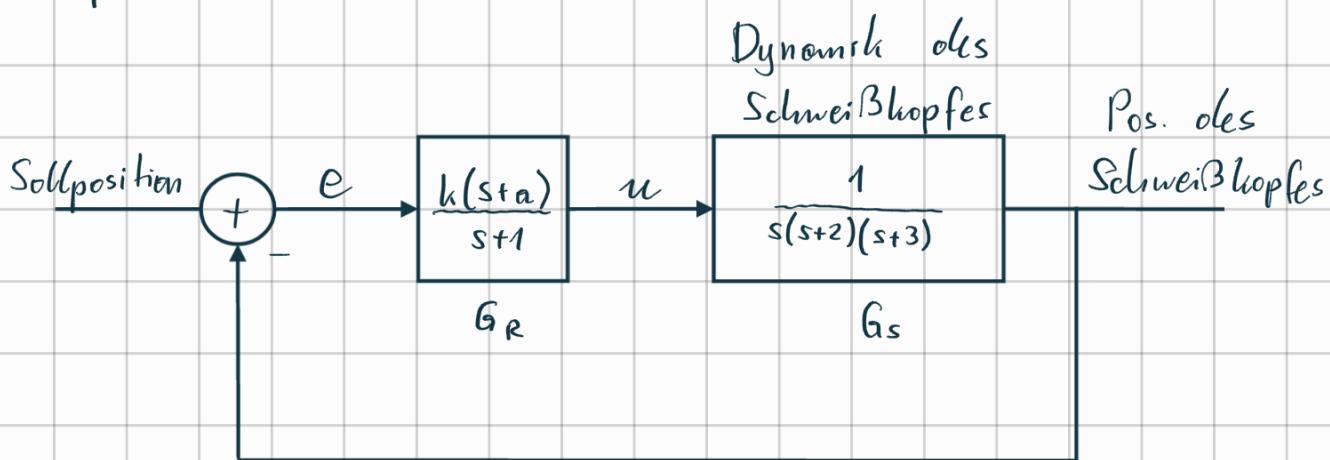
$$s^2 + 2s + (k-3) = 0$$

$$\alpha_2 = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$\alpha_1 = 2 > 0 \quad \checkmark$$

$$\alpha_0 = k-3 > 0 \rightarrow k > 3$$

Bsp.:



ges.: Wert für α & k , damit System stabil

$$G_w = \frac{k(s+a)}{k(s+a) + (s^2 + s)(s+2)(s+3)}$$

$$\begin{aligned}
 & ks + ka + (s^3 + 2s^2 + s^2 + 2s)(s+3) \\
 &= ks + ka + (s^3 + 3s^2 + 2s)(s+3) \\
 &= ks + ka + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s^3 + 9s^2 + 6s \\
 &= s^4 + 6s^3 + 11s^2 + s(6 + ka) + ka
 \end{aligned}$$

$$a_1 = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$a_3 = 6 > 0 \quad \checkmark$$

$$a_2 = 11 > 0 \quad \checkmark$$

$$a_4 = 6+k > 0 \rightarrow k > -6$$

$$a_0 = ka > 0$$

Man sucht eine Zeile oder Spalte aus (nach Möglichkeit mit vielen 0). In

$$D_4 \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} a_{mn} \\ m \dots \text{Zeile} \\ n \dots \text{Spalte} \end{array}$$

unserem Beispiel Spalte 4.

$$D_4 = (-1)^{1+4} \cdot a_{14} \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array} \right| + (-1)^{2+4} \cdot a_{24} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array} \right|$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot a_{34} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array} \right| + (-1)^{4+4} \cdot a_{44} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

Zum Glück ist die Hurwitz-Determinante so aufgebaut, dass in der letzten Spalte nur 0 bis auf a_0 stehen.

$$D_4 = (-1)^{4+4} \cdot a_0 \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| = (-1)^{4+4} \cdot a_0 \cdot D_3$$

hur D_3 muss in diesem Fall gelöst werden.

Nyquist - Kriterium

Die Stabilitätsüberprüfung erfolgt mittels Bode-Diagramm.

Bsp.:

Zu nachfolgender Übertragungsfunktion ist der Bodeknickzug zu ermitteln.

$$G_s = \frac{5s + 30s^2 + 25s^3}{1 + 2,5s + 3s^2}$$

1. Im Zähler muss ein Ausdruck ohne s stehen, ansonsten hersusheben.

$$G_s = \frac{s(5 + 30s + 25s^2)}{1 + 2,5s + 3s^2}$$

2. Im Zähler muss der Ausdruck vor der höchsten Potenz von s ein 1er sein, ansonsten herausheben.

$$G_s = \frac{25s\left(\frac{5}{25} + \frac{30}{25}s + s^2\right)}{1 + 2,5s + s^2} = \frac{25s(0,2 + 1,2s + s^2)}{1 + 2,5s + s^2}$$

3. Die Punkte 1 & 2 für den Nenner anwenden.

$$1 + 2,5s + s^2 \quad \checkmark$$

4. Den Satz von Vieta anwenden.

$$0,2 + 1,2s + s^2 = 0$$

$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -0,2$$

$$\begin{aligned}
 0,2 + 1,2s + s^2 &= (s - s_1)(s - s_2) \\
 &= (s - (-1))(s - (-0,2)) \\
 &= (s + 1)(s + 0,2)
 \end{aligned}$$

$$1 + 2,5s + s^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = -0,5 \\ s_2 = -2 \end{array} \right\} (s+0,5)(s+2)$$

$$G_s = \frac{25s(s+1)(s+0,2)}{(s+0,5)(s+2)}$$

5. Schauen, dass immer $1 + sT_1$ in der Klammer steht, ansonsten herausheben.

$$\begin{aligned} G_s &= \frac{25s(s+1)(s+0,2)}{(s+0,5)(s+2)} = \frac{25s(s+1)0,2(1 + \frac{1}{0,2}s)}{0,5(1 + \frac{1}{0,5}s)2(1 + \frac{1}{2}s)} \\ &= \frac{5s(1+s)(1+5s)}{(1+2s)(1+0,5s)} = 5s(s+1)(1+5s) \frac{1}{1+2s} \cdot \frac{1}{1+0,5s} \\ &\quad G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 \end{aligned}$$

$$G_1 = 5s$$

$$F_1(j\omega) = j5\omega$$

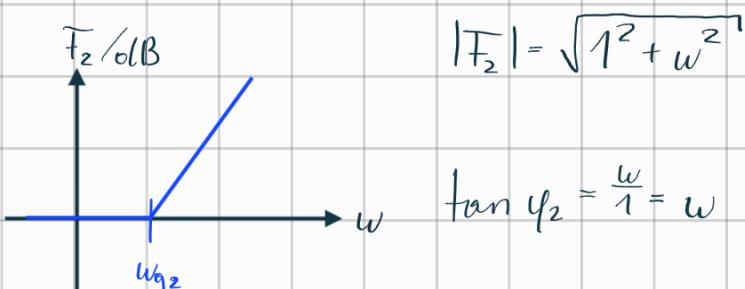


Durchtrittsfrequenz w_D :

$$|F_1| = 5\omega_D \rightarrow \omega_D = \frac{1}{5} \text{ rad/s}$$

$$G_2 = (1+s)$$

$$F_2(j\omega) = 1 + j\omega$$

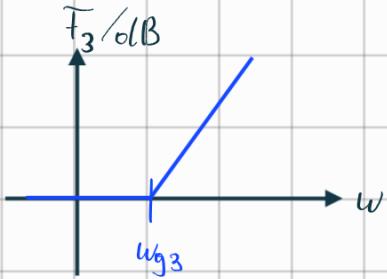


Grenzfrequenz ω_{g_2} :

$$\sqrt{2^1} = \sqrt{1^2 + \omega_{g_2}^2} \rightarrow \omega_{g_2} = 1$$

$$G_3 = 1 + 5s$$

$$F_3(j\omega) = 1 + j5\omega$$



$$|F_3| = \sqrt{1^2 + (5\omega)^2}$$

$$\tan \varphi_3 = \frac{5\omega}{1}$$

$$\omega = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty$$

$$1$$

$$\infty$$

$$0/0^\circ$$

$$\infty / 90^\circ$$

Grenzfrequenz ω_{g_3} :

$$\sqrt{1^2 + (5\omega_{g_3})^2} = \sqrt{2}$$

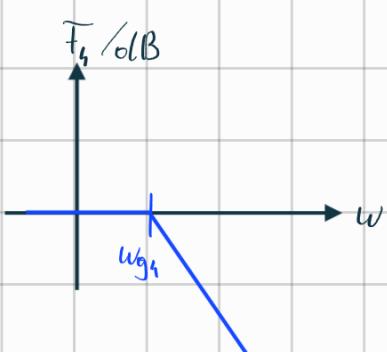
$$(5\omega_{g_3})^2 = 1 \rightarrow \omega_{g_3} = \frac{1}{5} \text{ sek}^{-1}$$

$$G_4 = \frac{1}{1+2s}$$

$$F_4(j\omega) = \frac{1}{1+j2\omega}$$

$$\omega = 0 \quad \omega \rightarrow \infty$$

$$1 \quad 0$$



$$|F_4| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (2\omega)^2}}$$

$$\tan \varphi_4 = -\frac{2\omega}{1} = -2\omega$$

$$0/0^\circ$$

$$-\infty / -90^\circ$$

Grenzfrequenz ω_{g_4} :

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + (2\omega_{g_4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

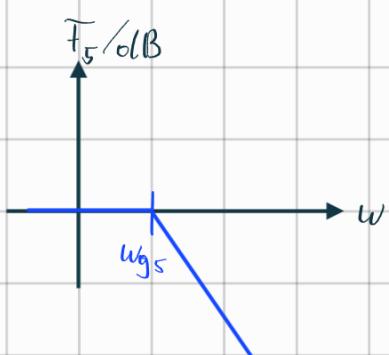
$$(2\omega_{g_4})^2 = 1$$

$$\omega_{g_4} = \frac{1}{2} \text{ sek}^{-1}$$

$$G_5 = \frac{1}{1+0,5s}$$

$$F_5(j\omega) = \frac{1}{1+j0,5\omega}$$

$$\omega=0 \quad \omega \rightarrow \infty$$



$$|F_5| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (0,5\omega)^2}}$$

$$1 \quad 0$$

$$\tan \varphi_5 = -\frac{0,5\omega}{1} = -0,5\omega$$

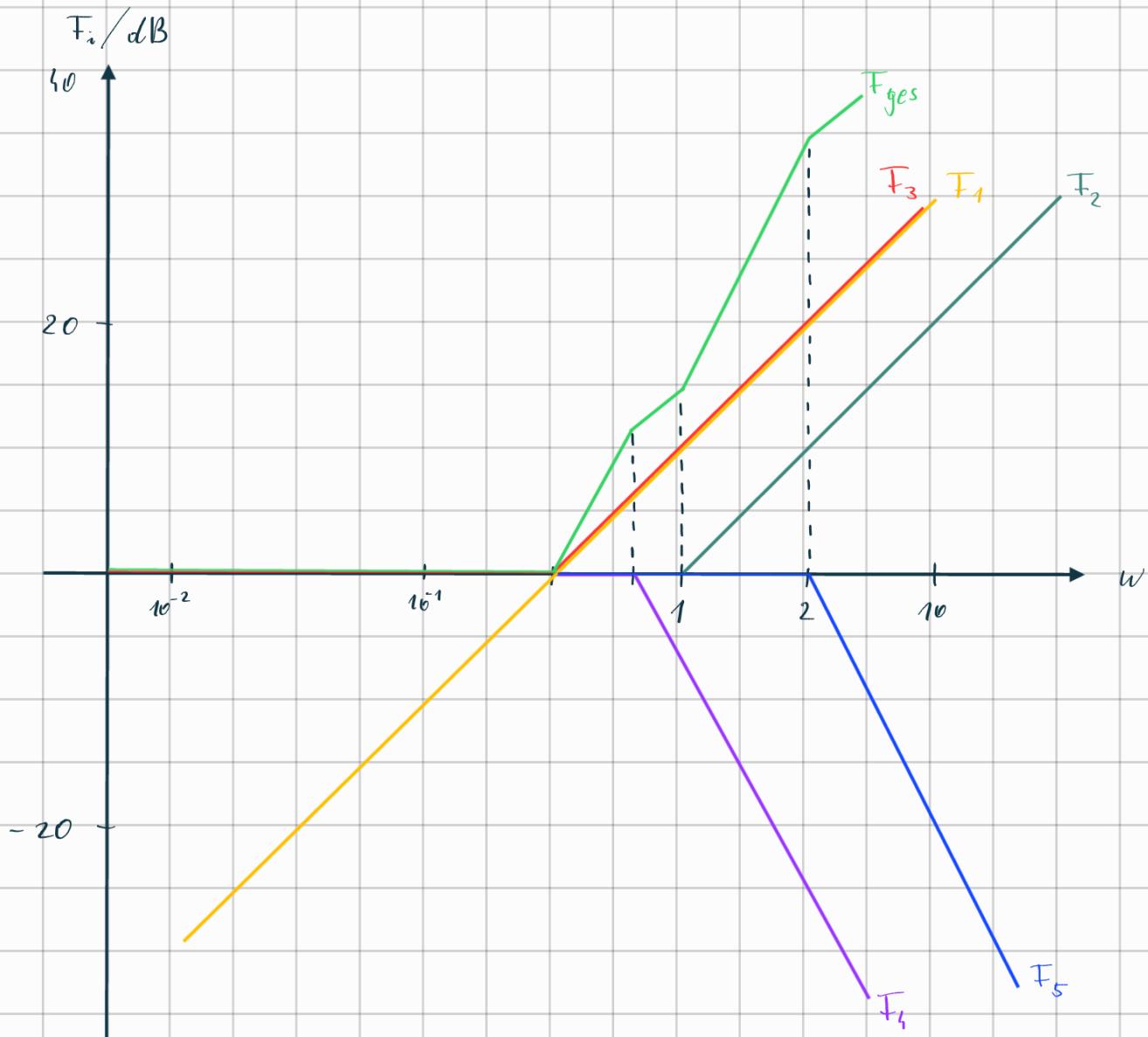
$$0/0^\circ \quad -\infty/-90^\circ$$

Grenzfrequenz ω_{g5} :

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + (0,5\omega_{g5})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

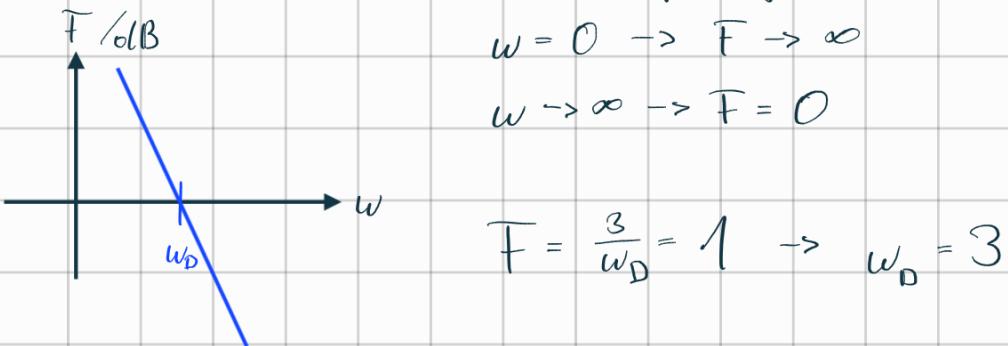
$$(0,5\omega_{g5})^2 = 1$$

$$\omega_{g5} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ sek}^{-1}$$



Falls folgender Ausdruck da stünde:

$$G = \frac{3}{s} \quad F(j\omega) = \frac{3}{j\omega} = -j \frac{3}{\omega} \quad |F| = \frac{3}{\omega}$$



$$F = \frac{3}{\omega_D} = 1 \rightarrow \omega_D = 3$$

Händische Berechnung der Phasenreserve für Nyquist-Kriterium

geg.: $G_s = \frac{2}{0,51s^2 + 2s + 1}$ PT₂ Strecke

$$G_R = K_p + \frac{K_I}{s} = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s} \quad \text{PI Regler}$$

$$\text{ges.: } G_o(s) = \frac{2s+2}{0,51s^3 + 2s^2 + s} = G_R \cdot G_s$$

$$G_o(j\omega) = \frac{j2\omega + 2}{-j0,51\omega^3 - 2\omega^2 + j\omega} = \frac{2 + j2\omega}{-2\omega^2 + j(\omega - 0,51\omega^3)}$$

$$G_o = (2 + j2\omega) \cdot \frac{1}{-2\omega^2 + j(\omega - 0,51\omega^3)} \quad (a + jb) \frac{1}{c + jd}$$

$$|G_o| = \sqrt{2^2 + (2\omega)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-2\omega^2)^2 + (\omega - 0,51\omega^3)^2}}$$

Für Phasenreserve muss Betrag = 0 sein:

$$1 = \sqrt{2^2 + (2\omega)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-2\omega^2)^2 + (\omega - 0,51\omega^3)^2}} \quad |^2 \cdot N$$

$$(-2\omega)^2 + (\omega - 0,51\omega^3)^2 = 2^2 + (2\omega)^2$$

$$4\omega^2 + \omega^2 - 1,02\omega^4 + 0,51^2\omega^6 = 4 + 4\omega^2$$

$$0,51^2\omega^6 - 1,02\omega^4 + \omega^2 - 4 = 0$$

Substituieren $x = \omega^2$

$$0,51^2 x^3 - 1,02 x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_1 = -12,29$$

$$x_2 = 1,61$$

$$x_3 = -0,78$$

) positiv

$$\omega = \sqrt{1,61} = 1,27 \frac{1}{\text{sek}}$$

in $G_o(j\omega)$ einsetzen

$$G_o(j\omega) = (2 + j2,54) \cdot \frac{1}{-3,23 + j0,23}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{2,54}{2} = 1,27 \rightarrow \varphi_1 = 51,8^\circ$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{0,23}{3,23} \rightarrow \varphi_2 = 4,07^\circ$$

$$\varphi_{\text{ges}} = -180^\circ + \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_{\text{ges}} = -180^\circ + 51,8^\circ - 4,07^\circ$$

Bsp.: G_{G} $G_S = \frac{2,5}{(1+5s)(1+0,5s^2)}$ PT₃

PI Regel $K_P = 2,5$ $K_I = 0,5$

$$G_{\text{R}} = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P \cdot s + K_I}{s} = \frac{2,5 \cdot s + 0,5}{s}$$

$$G_0 = G_{\text{R}} G_S = \frac{2,5^2 s + 1,25}{s(1+0,5s^2 + 5s + 2,5s^3)} =$$

$$= \frac{1,25 + 2,5^2 s}{s + 0,5s^3 + 5s^2 + 2,5s^4} = (1,25 + 2,5^2 s) \frac{1}{2,5s^4 + 0,5s^3 + 5s^2 + s}$$

$$G_0(j\omega) = (1,25 + j6,25\omega) \cdot \frac{1}{(2,5\omega^4 - 5\omega^2) + j(\omega - 0,5\omega^3)}$$

$$|G_0| = \sqrt{1,25^2 + (6,25\omega)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{(2,5\omega^4 - 5\omega^2)^2 + (\omega - 0,5\omega^3)^2}}$$

$$|G_0| = 1$$

$$1,25^2 + 6,25^2 \omega^2 = (2,5\omega^4 - 5\omega^2)^2 + (\omega - 0,5\omega^3)^2$$

$$1,25^2 + 6,25^2 \omega^2 = 2,5^2 \omega^8 - 2 \cdot 2,5 \cdot 5 \omega^6 + 25 \omega^4 + \omega^2 - 2 \cdot 0,5 \omega^4 + 0,5^2 \omega^6$$

$$1,25^2 + 6,25^2 \omega^2 = 2,5^2 \omega^8 - 25 \omega^6 + 25 \omega^4 + \omega^2 - \omega^4 + 0,25 \omega^6$$

$$2,5^2 \omega^8 - 24,75 \omega^6 + 24 \omega^4 - 38,1 \omega^2 - 1,56 = 0$$

$$6,25 \omega^8 - 24,75 \omega^6 + 24 \omega^4 - 38,1 \omega^2 - 1,56 = 0$$

$$6,25\omega^8 - 29,75\omega^6 + 29\omega^4 - 38,1\omega^2 - 1,56 = 0$$

Setzen $x = \omega^2$

$$6,25x^4 - 29,75x^3 + 29x^2 - 38,1x - 1,56 = 0$$

$$x_1 = 3,364 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{x_1} = \sqrt{3,364} = \underline{1,83 \frac{1}{\text{sec}}}$$

$$x_2 = -0,04$$

$$\cancel{x_{3,4} = 0,32 \pm j 1,32}$$

Berechnung der Phasenreserve

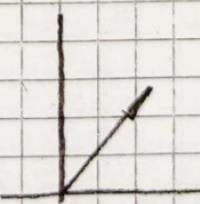
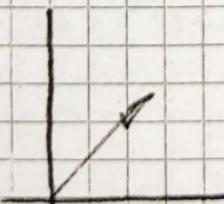
$\omega = 1,83$ in $G(j\omega)$ einsetzen

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1,25 + j(6,25 \cdot 1,83)) \cdot \frac{1}{(2,5 \cdot 1,83^4 - 5 \cdot 1,83^2)} + j(1,83 - 0,5 \cdot 1,83^3)}}$$

$$= (1,25 + j 11,44) \cdot \frac{1}{(28,1 - 16,75) + j(1,83 - 3,06)}$$

$$= (1,25 + j 11,44) \cdot \frac{1}{11,36 - j 1,23}$$

$a+jb$ $\frac{1}{c-jd} = \frac{c+jd}{n}$



$$s = tf('s')$$

$$\varphi_1 = \arctan \frac{11,44}{1,25}$$

$$= 83,76^\circ$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{1,23}{11,36} = 6,18^\circ$$

$$\varphi_{\text{ges}} = \underline{\underline{90^\circ}}$$

$$\text{Bsp.: } G_s = \frac{2,5}{(1+5s)(1+0,5s)^2} \quad G_R = \frac{0,5 + 2,5s}{s}$$

$$G_o = G_R \cdot G_s = \frac{1,25 + 2,5^2 s}{(1+5s)(1+s+0,25s^2)s} = \frac{1,25 + 2,5s}{s + s^2 + 0,25s^3 + 5s^2 + 5s^3 + 1,25s^4}$$

$$G_o = (1,25 + 2,5^2 s) \frac{1}{s + 6s^2 + 5,25s^3 + 1,25s^4}$$

$$G_o(j\omega) = (1,25 + 2,5^2 \omega) \frac{1}{j\omega - 6\omega^2 - j5,25\omega^3 + 1,25\omega^4}$$

$$G_o(j\omega) = (1,25 + j2,5^2 \omega) \frac{1}{(1,25\omega^4 - 6\omega^2) + j(\omega - 5,25\omega^3)}$$

$$|G_o|(j\omega) = \sqrt{1,25^2 + 2,5^4 \omega^2} \frac{1}{\sqrt{(1,25\omega^4 - 6\omega^2)^2 + (\omega - 5,25\omega^3)^2}} = 1$$

$$\sqrt{1,25^2 + 2,5^4 \omega^2} = \sqrt{(1,25\omega^4 - 6\omega^2)^2 + (\omega - 5,25\omega^3)^2}$$

$$1,5625 + 38,0625 \omega^2 = (1,25^2 \omega^8 - 15 \omega^6 + 36 \omega^4) + (\omega^2 - 10,5 \omega^4 + 27,5625 \omega^6)$$

$$1,5625 + 38,0625 \omega^2 = 1,5625 \omega^8 + 12,5625 \omega^6 + 25,5 \omega^4 + \omega^2$$

$$1,5625 \omega^8 + 12,5625 \omega^6 + 25,5 \omega^4 - 38,0625 \omega^2 - 1,5625 = 0$$

$$x = \omega^2$$

$$1,5625 x^4 + 12,5625 x^3 + 25,5 x^2 - 38,0625 x - 1,5625 = 0$$

$$x_1 = 1 \rightarrow \omega = 1$$

$$x_2 = -0,05$$

$$x_3 = -4,5 + j2,18$$

$$x_4 = -4,5 - j2,18$$

$$G_o(j\omega) = (1,25 + j2,5^2) \frac{1}{(1,25 - 6) + j(1 - 5,25)}$$

$$= (1,25 + j6,25) \frac{1}{-4,75 - j4,25}$$

$$\varphi_1 = \alpha \tan\left(\frac{6,25}{1,25}\right) = 78,69^\circ$$

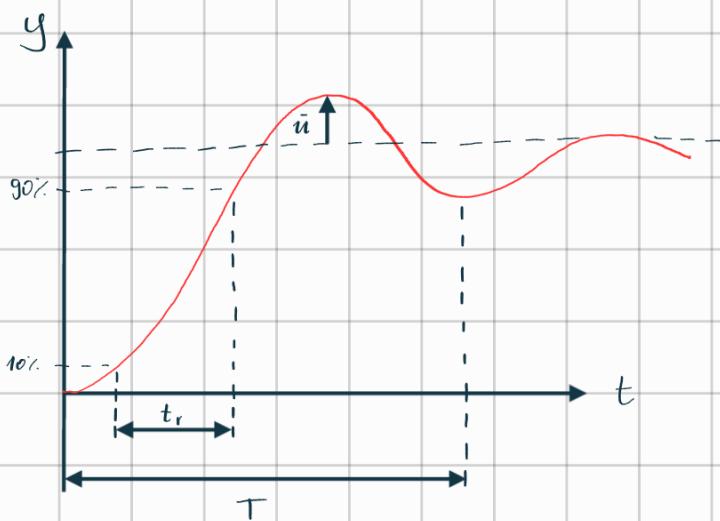
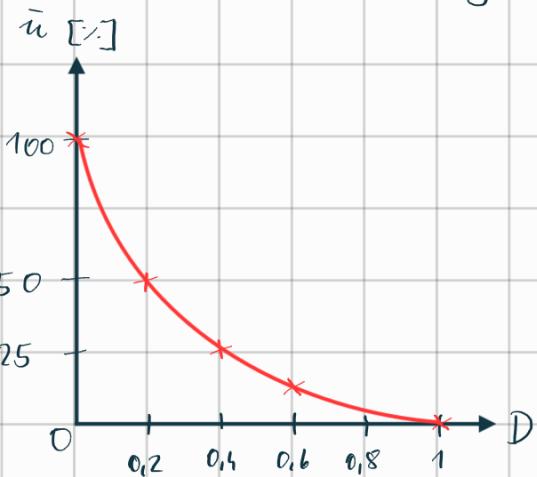
$$\varphi_2 = \alpha \tan\left(\frac{-4,25}{+4,25}\right) = -(41,82^\circ + 180^\circ) = -221,82^\circ$$

$$\varphi_{\text{ges}} = -143,13^\circ$$

$$\varphi_{\text{res}} = 180^\circ - 143,13^\circ = 36,87^\circ$$

Übersicht Regelungssysteme

Zusammenhang Dämpfung einer PS2-Strecke



$$\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

D	\bar{u} [%]
0	100
0,2	50
0,4	25
0,6	10
1	0

$$G = \frac{k_s}{1 + 2D \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\omega_0 \cdot t_r = 1,5$$

$$\text{Bsp.: } G_s(s) = 60 \cdot \frac{1}{s} \left(1 + \frac{s}{10}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

ges.: Betriebsverlauf

$$G_1 = 60 \cdot \frac{1}{s} \rightarrow F_1(j\omega) = \frac{60}{j\omega} = -j \frac{60}{\omega}$$

\downarrow

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 \quad |F| &\rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty \quad |F| &= 0 \end{aligned} \quad |F_1| = \frac{60}{\omega_{D_1}} = 1 \rightarrow \omega_{D_1} = 60 \text{ rad/s}$$

$$G_2 = 1 + \frac{s}{10} \rightarrow F_2(j\omega) = 1 + j0,1\omega$$

\downarrow

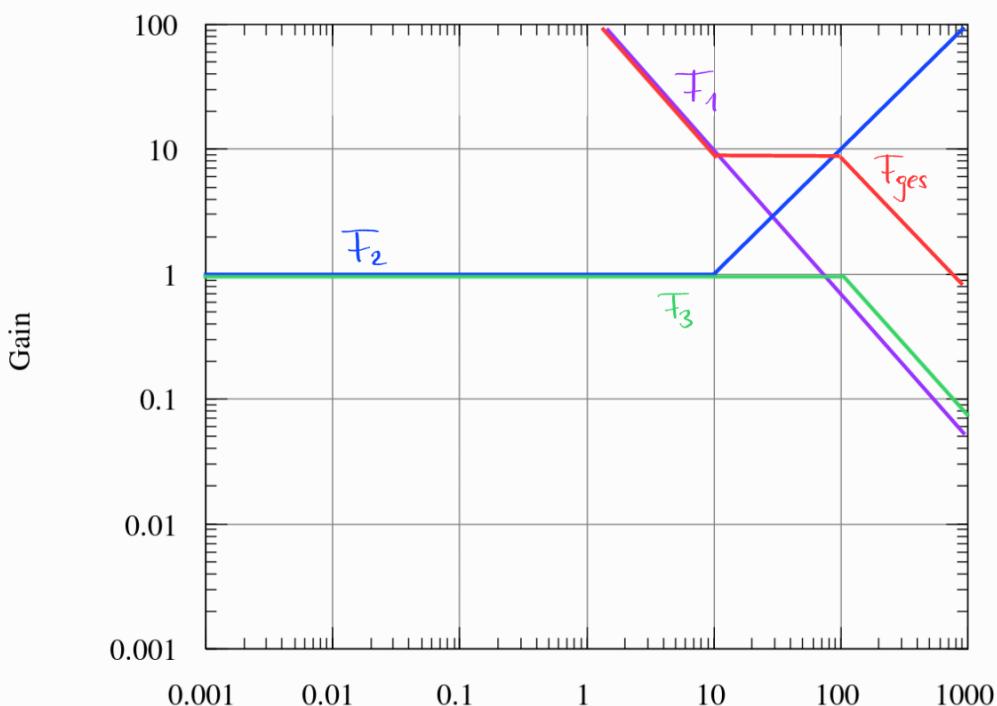
$$\begin{aligned} \omega = 0 \quad |F| &= 1 \\ \omega \rightarrow \infty \quad |F| &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad |F_2| = \sqrt{1^2 + (0,1\omega_{g_2})^2} = \sqrt{2}$$

$$(0,1\omega_{g_2})^2 = 1 \quad \omega_{g_2} = 10 \text{ rad/s}$$

$$G_3 = \frac{1}{1 + \frac{s}{100}} \rightarrow F_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{100}}$$

$|F_3| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (0,01\omega_{g_3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$1 + (0,01\omega_{g_3})^2 = 2 \quad \omega_{g_3} = 100 \text{ rad/s}$$



$$\text{Bsp.: } G_0(s) = \frac{0,5}{s^3 + 2s^2 + s + 0,5}$$

ges.: φ_{res} , A_{res}

$$G_0(j\omega) = \frac{0,5}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + j\omega + 0,5} = \frac{1}{0,5 - 2\omega^2 + j(\omega - \omega^3)} \cdot 0,5$$

$$|G_0| = \frac{1}{\sqrt{(0,5 - 2\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}} \cdot \sqrt{0,5^2} = 1$$

$$0,5^2 = (0,5 - 2\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2$$

$$0,25 = 0,25 - 2\omega^2 + 4\omega^4 + \omega^2 - 2\omega^4 + \omega^6$$

$$0 = \omega^6 + 2\omega^4 - \omega^2$$

$$x = \omega^2$$

$$0 = x^3 + 2x^2 - x$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\sqrt{2} - 1$$

$$x_3 = \sqrt{2} - 1 = 0,41$$

$$\omega = \sqrt{x_3} = \sqrt{0,41} = 0,64 \frac{1}{\text{sek}}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{0,5}{(0,5 - 2 \cdot 0,64^2) + j(0,64 - 0,64^3)} = \frac{0,5}{-0,328 + j0,377}$$

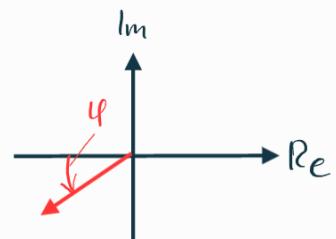
$$\varphi = \arctan \left(\frac{0,377}{-0,328} \right) = 48,08^\circ \quad \varphi_{\text{res}} = 48,08^\circ$$

$$\tan \varphi_{\text{res}} = \frac{\omega - \omega^3}{0,5 - \omega^2} = 0$$

$$\omega - \omega^3 = 0$$

$$1 - \omega^2 = 0$$

$$\omega = 1 \frac{1}{\text{sek}}$$



$$\text{in } |G| \text{ einsetzen } || = \frac{0,5}{\sqrt{(0,5 - 2 \cdot 1^2)^2 + (1 - 1^3)^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{1,5^2}} = \frac{1}{3}$$

$$|G|_{\text{dB}} = 20 \cdot \lg \left(\frac{1}{3} \right) = -8,45 \text{ dB}$$

$$A_{\text{res}} = \frac{1}{|G|} = 3$$

PID-Strecken

	G_R
P	K_p
I	$\frac{K_I}{s}$
D	$K_D \cdot s$

$$G_R$$

PI $K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p \cdot s + K_I}{s}$
 $K_p + \frac{K_I}{s} = K_p \left(1 + \frac{K_I}{K_p \cdot s}\right) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n \cdot s}\right)$

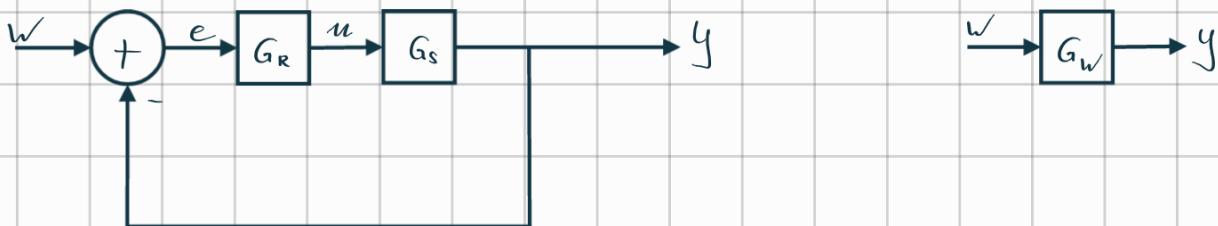
PID $K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = \frac{K_p \cdot s + K_I + s^2 \cdot K_D}{s}$
 $= K_p \left(1 + \frac{K_I}{K_p \cdot s} + \frac{K_D}{K_p} \cdot s\right)$
 $= K_p \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_n} + T_V \cdot s\right)$
 $= K_p \frac{s \cdot T_n + 1 + T_n \cdot T_V \cdot s}{T_n \cdot s}$

Nachstellzeit $T_n = \frac{K_p}{K_I}$

Vorhaltezeit $T_V = \frac{K_D}{K_p}$

Regler-Entwurf

1) Kompensationsreglerentwurf



Herleitung

$$G_w = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{G_R \cdot G_s}{1 + G_R \cdot G_s}$$

$$G_w (1 + G_R \cdot G_s) = G_R \cdot G_s$$

$$G_w + G_w G_R G_s = G_R G_s$$

$$G_w = G_R G_s - G_w G_R G_s = G_R (G_s - G_w G_s)$$

$$G_R = \frac{G_w}{G_s - G_w G_s} = \frac{1}{G_s} \cdot \frac{G_w}{1 - G_w}$$

Die Polstellen der Strecke werden durch die math. Operation zu Nullstellen des Reglers.

$$\frac{1}{G_s}$$

$$G_o = G_R \cdot G_s$$

Es kürzen sich somit die Nullstellen des Reglers mit den Polstellen der Strecke bzw. der Regler kompensiert die Polstellen der Strecke, daher der Name Kompensationsregler.

Diese Art des Entwurfs setzt voraus, dass die Strecke stabil ist. Damit ein realisierbarer Regler entsteht, muss der Polüberschuss des geforderten Modells (G_w) mindestens gleich groß sein wie der Polüberschuss der Strecke (G_s).

$$\text{Polüberschuss} = n - m = \# \text{ Pole} - \# \text{ Nullstellen}$$

Ein technisch realisierbares System liegt nur dann vor, wenn gilt:

- Anzahl der Pole \geq Anzahl der Nullstellen
- $n \geq m$

Beispiel: Gegeben ist die folgende Strecke. Vom Regelkreis ist gefordert, dass die Zeitkonstante(n) nur 1/4 der Streckenzeitkonstante ist.

$$G_s = \frac{2}{4+16s} = \frac{2}{4(1+4s)} = \frac{0,5}{1+4s} \quad \frac{K_s}{1+T_1 \cdot s} \quad T_1 = 4 \text{ sek.}$$

1) G_s stabil?

$$1+4s = 0$$

$$s = -\frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad \text{Hurwitz}$$

2) Polüberschuss d. Strecke

$$m = 0; n = 1$$

$$\text{Polüberschuss} = m - n = 1 - 0 = 1$$

$\rightarrow G_w$ muss mindestens PT1-Verhalten aufweisen

$$3) G_w = \frac{K_s}{1+sT_1} = \frac{1}{1+s\frac{1}{4}} = \frac{1}{1+s}$$

$$4) G_R = \frac{1}{G_s} \cdot \frac{G_w}{1-G_w} = \frac{1+4s}{0,5} \cdot \frac{\frac{1}{1+s}}{1-\frac{1}{1+s}} = \frac{1+4s}{0,5} \cdot \frac{\frac{1}{1+s}}{\frac{1+4s-1}{1+s}}$$

$$G_R = \frac{1+4s}{0,5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2+8s}{s}$$

$$\text{PI-Regler } G_R = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p \cdot s + K_I}{s}$$

$$\rightarrow K_p = 8 ; K_I = 2$$

$$\text{Nachstellzeit } T_n = \frac{K_p}{K_I} = \frac{8}{2} = 4 \text{ sek}$$

Beispiel: Die Führungsübertragungsfunktion sollte minimalistisch gehalten werden und deren Zeitkonstante(n) nur halb so groß wie die größte Streckenzeitzkonstante sein.

$$G_s = \frac{0,8+1,2s}{(1+3s)(4+8s)} = \frac{0,8+1,2s}{4+8s+12s+24s^2} = \frac{0,8+1,2s}{4(1+2s+3s+6s^2)}$$

$$G_s = \frac{0,2+0,3s}{1+5s+6s^2} = \frac{0,2+0,3s}{(1+3s)(1+2s)}$$

1) G_s stabil?

$$1+5s+6s^2 = 0$$

$$s_1 = -0,5$$

$$s_2 = -\frac{1}{3} \quad \checkmark \text{ ola neg. Realteile}$$

$$2) 0,2+0,3s = 0 \quad \# \text{ Pole} = 2 ; \# \text{ NST} = 1$$

$$s = -\frac{0,2}{0,3} \quad m = 2 ; \quad n = 1$$

$$\text{Polüberschuss} = m-n = 2-1 = 1$$

$\rightarrow G_w$ muss mindestens PT1-Verhalten aufweisen

$$3) G_w = \frac{K}{1+sT_1} = \frac{1}{1+s\frac{3}{2}} = \frac{1}{1+1,5s}$$

$$\begin{aligned} 4) G_R &= \frac{1}{G_s} \cdot \frac{G_w}{1-G_w} = \frac{(1+3s)(1+2s)}{0,2+0,3s} \cdot \frac{\frac{1}{1+1,5s}}{1-\frac{1}{1+1,5s}} \\ &= \frac{(1+3s)(1+2s)}{0,2+0,3s} \cdot \frac{\frac{1}{1+1,5s}}{\frac{1+1,5s-1}{1+1,5s}} = \frac{(1+3s)(1+2s)}{0,2+0,3s} \cdot \frac{1}{1,5s} \\ &= \frac{(1+3s)(1+2s)}{1,5 \cdot 0,2s (1+\frac{0,3}{0,2}s)} = \frac{1+5s+6s^2}{0,3s(1+1,5s)} = \frac{\frac{1}{0,3} + \frac{5}{0,3}s + \frac{6}{0,3}s^2}{s(1+1,5s)} \\ &= \frac{3,3 + 16,6s + 20s^2}{s(1+1,5s)} \end{aligned}$$

$\frac{3,3}{s} + \frac{16,6}{1+1,5s} + 20s$ → PIDT₁

Art des Reglers?

Wolltg. PID

$$G_R = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = \frac{K_p \cdot s + K_I + K_D \cdot s^2}{s}$$

PIDT₁

$$G_R = \frac{K_p \cdot s + K_I + K_D \cdot s^2}{s(1+sT_1)}$$

$$K_p = 16,6 ; K_I = 3,3 ; K_D = 20 ; T_1 = 1,5 \text{ sek}$$

$$\text{Nahstellezeit } T_n = \frac{K_p}{K_I} = \frac{16,6}{3,3} = 5 \text{ sek}$$

$$\text{Vorhaltezeit } T_v = \frac{K_D}{K_p} = \frac{20}{16,6} = 1,2 \text{ sek}$$

PID

$$G_R = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = K_p \left(1 + \frac{K_I}{K_p \cdot s} + \frac{K_D \cdot s}{K_p} \right)$$

$$G_R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n \cdot s} + T_v \cdot s \right)$$

PIDT₁

$$G_R = \frac{K_p \left(1 + \frac{1}{T_n \cdot s} + T_v \cdot s \right)}{1+sT_1} = \frac{16,6 \left(1 + \frac{1}{5s} + 1,2s \right)}{1+1,5s}$$

$$\text{Bsp.: } G_S = \frac{0,2}{(1+3s)(1+2s)}$$

Der Regelkreis sollte maximal 20% überschwingen und eine Anstiegszeit von 8 Sekunden haben.

1.) stabil?

$$1+3s=0 \quad s_1 = -\frac{1}{3}$$

$$1+2s=0 \quad s_2 = -\frac{1}{2}$$



2.) # Pole $n=2$

$$\text{Po überschuss} = 2 - 0 = 2$$

NST $m=0$

G_W muss PT_2 v PS_2

3.)

$$G_W = \frac{1}{1 + 2D\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\begin{matrix} \ddot{\epsilon} \\ 0,5 \end{matrix} \quad D \quad \begin{matrix} 0,2 \\ 0,25 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0,4 \\ 0,1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0,4 \\ 0,6 \end{matrix}$$

$$D \approx 0,45 \quad \ddot{\epsilon} = 20$$

$$\omega_0 \cdot t_r = 1,5 \rightarrow \omega_0 = \frac{1,5}{1,8} = \frac{5}{6} \frac{1}{\text{sec}}$$

$$G_W = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0,45 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{1 + 0,9 \cdot \frac{6}{5} + \frac{25}{36}} = \frac{1}{1 + 1,085 + 0,694} = \frac{1}{2,779}$$

$$\begin{aligned}
 4.) \quad G_e &= \frac{1}{G_S} \cdot \frac{G_W}{1 - G_W} \\
 &= \frac{(1+3s)(1+2s)}{0,2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+1,08s+1,44s^2}} \\
 &= \frac{1+5s+6s^2}{0,2} \cdot \frac{1}{1+1,08s+1,44s^2 - 1} \\
 &= \frac{1+5s+6s^2}{0,216s+0,288s^2} = \frac{4,629 + 23,15s + 27,78s^2}{s(1+1,3s)}
 \end{aligned}$$

$$K_p = 23,15$$

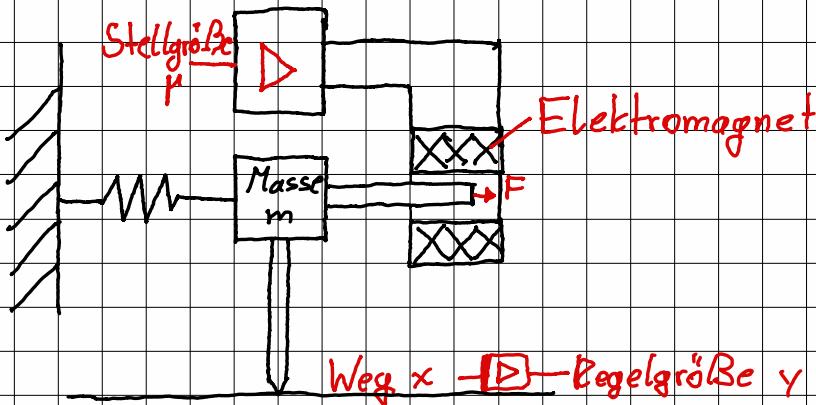
$$K_I = 4,629$$

$$K_D = 27,7$$

$$T_1 = 1,3 \text{ sec}$$

$$T_h = \frac{K_p}{K_I} = \frac{23,15}{4,629} = 5 \text{ sec}$$

$$T_V = \frac{K_D}{K_p} = \frac{27,7}{23,15} = 1,196 \text{ sec}$$



$$K_s = 0,03 \left[\frac{m}{V} \right]$$

$$G_s = \frac{0,03}{1 + 2 \cdot 0,2 \frac{s}{12,6} + \left(\frac{s}{12,6} \right)^2}$$

1) G_s stabil?

$$1 + 0,4 \frac{s}{12,6} + \frac{s^2}{12,6^2}$$

ein Hurwitz-Polynom?

Ja, weil $a_0, a_1, \& a_2 > 0$ und 2. Ordnung,
daher keine Determinanten nötig.

2) $m = 0$

$n = 2$ Polüberschuss $= 2 - 0 = 2 \rightarrow G_w$ muss PT_2 / PS_2 Verhalten

3) Anforderungen: PT_2 -Verhalten mit $T_1 = T_2 = 0,0527$ sek.

$$G_w = \frac{1}{(1+s \cdot 0,0527)(1+s \cdot 0,0527)} = \frac{1}{1+s \cdot 0,1054 + s^2 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3}}$$

$$G_p = \frac{1}{G_s} \cdot \frac{G_w}{1 - G_w} = \frac{1 + 0,4 \cdot \frac{s}{12,6} + \frac{s^2}{12,6^2}}{0,03} \cdot \frac{\frac{1}{1+s \cdot 0,1054 + s^2 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3}}}{1 - \frac{1}{1+s \cdot 0,1054 + s^2 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3}}}$$

$$= \frac{1 + 0,4 \frac{s}{12,6} + \frac{s^2}{12,6^2}}{0,03} \cdot \frac{\frac{1}{1 + s \cdot 0,1054 + s^2 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3}}}{\frac{1 + s \cdot 0,1054 + s^2 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3} - 1}{1 + s \cdot 0,1054 + s^2 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3}}}$$

$$= \frac{1 + \frac{0,4}{12,6} s + \frac{s^2}{12,6^2}}{0,03 (0,1054 s + 2,77 \cdot 10^{-3} s^2)} = \frac{1 + \frac{0,4}{12,6} s + \frac{s^2}{12,6^2}}{0,03 \cdot 0,1054 s \left(1 + \frac{2,77 \cdot 10^{-3}}{0,1054} s\right)}$$

$$G_R = \frac{1 + \frac{0,4}{12,6} s + \frac{s^2}{12,6^2}}{3,162 \cdot 10^{-3} s (1 + 0,026 s)} = \frac{316 + 10,04 s + 2 s^2}{s (1 + 0,026 s)}$$

$$K_p = 10,04 ; K_I = 316 ; K_D = 2 ; T_n = 0,026 \text{ sek}$$

$$T_n = \frac{K_p}{K_I} = \frac{10,04}{316} = 0,032 \text{ sek.}$$

$$T_v = \frac{K_D}{K_p} = \frac{2}{10,04} = 0,2 \text{ sek.}$$

Kompensationsreglerentwurf für PT_n -Strecke

$$G_s = \frac{K_s}{(1+sT_1)(1+sT_2) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)} \quad T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_n$$

Allgemein können Kompensationsregler in Abhängigkeit von der Strecke eine sehr große Ordnung aufweisen. → Großer Aufwand.

Üblicherweise wird ein PID-Regler eingesetzt, welcher die beiden langsamsten (größten) Zeitkonstanten der Regelstrecke kompensiert.

Der PID-Regler ermöglicht für eine PT_n -Strecke keine vollständige Kompensation. Erfolgt allerdings die Kompensation der beiden größten Zeitkonstanten, dann ist in der Regel ein schnelles Übergangsverhalten des Regelkreises gewährleistet.

industrieller PID-Kompensationsreglerentwurf

Gesucht sind: K_p , T_n & T_v

Herleitung:

$$G_R = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = K_p \left(1 + \frac{K_I}{K_p \cdot s} + \frac{K_D}{K_p} \cdot s \right)$$

$$T_v = \frac{K_D}{K_p} \quad ; \quad T_n = \frac{K_p}{K_I}$$

$$G_R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n \cdot s} + T_v \cdot s \right) = K_p \left(\frac{T_n \cdot s + 1 + T_v \cdot T_n \cdot s^2}{T_n \cdot s} \right)$$

$$G_R = K \frac{1 + T_n \cdot s + T_v \cdot T_n \cdot s^2}{T_n \cdot s}$$

Das Polynom $1 + T_n s + T_n T_v s^2$ kann durch folgendes ersetzt werden:

$$(1 + s \cdot T_{R1})(1 + s \cdot T_{R2}) = 1 + s(T_{R1} + T_{R2}) + T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot s^2$$

Für die beiden Reglerzeitkonstanten T_{R1} & T_{R2} werden die beiden langsamsten (größten) Streckenzeitkonstanten gewählt.

$$\left. \begin{array}{l} T_{R1} = T_1 \\ T_{R2} = T_2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + s(T_1 + T_2) + T_1 \cdot T_2 \cdot s^2$$

Durch Koeffizienten-Vergleich ergibt sich:

$$1 + T_n \cdot s + T_n \cdot T_v \cdot s^2 = 1 + (T_1 + T_2) + T_1 \cdot T_2 \cdot s^2$$

$$\rightarrow T_n = T_1 + T_2$$

$$\rightarrow T_v = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_v} = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2}$$

Bsp.: $G_s = \frac{1}{(1+3s)(1+8s)(1+5s)} = \frac{1}{(1+3s)(1+2s)(1+5s)}$

$$G_s = \frac{1}{(1+3s)(1+2s)(1+5s)}$$

$$T_1 = 3 \text{ sek}$$

$$T_2 = 2 \text{ sek}$$

$$T_3 = 5 \text{ sek}$$

$$1) T_{R1} = T_1 = 3 \text{ sek}$$

$$T_{R2} = T_2 = 5 \text{ sek}$$

$$2) T_n = T_1 + T_2 = 8 \text{ sek}$$

$$T_v = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = \frac{15}{8} \text{ sek}$$

3)

$$G_R = K_p \frac{1 + T_n \cdot s + T_n \cdot T_v \cdot s^2}{T_n \cdot s} = K_p \frac{(1 + sT_{R1})(1 + sT_{R2})}{T_n \cdot s}$$

$$= K_p \frac{1 + 8s + 8 \cdot \frac{15}{8} s^2}{8s} = K_p \frac{(1+5s)(1+3s)}{8s}$$

$$4) G_W = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{Z_R \cdot Z_S}{Z_R \cdot Z_S + N_R \cdot N_S}$$

$$= \frac{\cancel{K_P} \cancel{(1+5s)(1+3s)} \cdot 1}{\cancel{K_P} \cancel{(1+5s)(1+3s)} \cdot 1 + 8s(1+5s)(1+3s)(1+2s)}$$

$$= \frac{K_P}{K_P + 8s(1+2s)}$$

$$G_W = \frac{K_P}{K_P + 8s + 16s^2} = \frac{1}{1 + \frac{8 \cdot s}{K_P} + \frac{16 \cdot s^2}{K_P}}$$

$$G_W = \frac{1}{1 + 2D \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad PS_2$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{K_P}} \rightarrow K_P = \frac{1}{D^2}$$

Für ein z.B. Überschwingen von 10% ergibt sich:

$$D = 0,6$$

$$\rightarrow K_P = \frac{1}{0,6^2} = 2,778$$

$$\rightarrow \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{K_P}} \rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{K_P}}{4} = 0,42 \frac{1}{\text{sek}}$$

$$G_R = 2,778 \frac{1+8s+15s^2}{8s} \quad K_P = 2,778$$

$$T_n = 8 \text{ sek}$$

$$T_v = \frac{8}{15} \text{ sek}$$

$$Bsp.: G_s = \frac{0,8}{(1+70s)(1+50s)(1+5s)(1+0,1s)}$$

ges.: PID-Regler (K_p, T_n, T_v)
damit $\bar{u} \leq 10\%$

$$1) T_{R1} = T_1 = 70 \text{ sek}$$

$$T_{R2} = T_2 = 50 \text{ sek}$$

$$2) T_n = T_1 + T_2 = 120 \text{ sek}$$

$$T_v = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = \frac{70 \cdot 50}{120} = \frac{350}{12} = 29,167$$

$$3) G_R = K_p \frac{1 + s \cdot T_n + s^2 \cdot T_n \cdot T_v}{T_n \cdot s} = K_p \frac{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}{s \cdot T_n}$$

$$G_R = K_p \frac{(1+70s)(1+50s)}{120s}$$

$$4) G_w = \frac{Z_R \cdot Z_S}{Z_R Z_S + N_R \cdot N_S}$$

$$G_w = \frac{K_p \cancel{(1+70s)(1+50s)} \cdot 0,8}{K_p \cancel{(1+70s)(1+50s)} \cdot 0,8 + 120s \cancel{(1+70s)(1+50s)(1+5s)(1+0,1s)}}$$

$$G_w = \frac{0,8 \cdot K_p}{0,8 \cdot K_p + 120s(1+5s)(1+0,1s)}$$

Vereinfachung $(1+5s)(1+0,1s) \approx (1+5,1s)$

$$G_w = \frac{0,8 \cdot K_p}{0,8 \cdot K_p + 120s(1+5,1s)} = \frac{0,8 \cdot K_p}{0,8 \cdot K_p + 120s + 612s^2}$$

$$G_w = \frac{1}{1 + \frac{120s}{0,8K_p} + \frac{612s^2}{0,8K_p}}$$

$$G_w = \frac{1}{1 + 2D \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad PS_2$$

$$\frac{2D}{w_0} = \frac{120}{0,8 K_p}$$

$$\frac{1}{w_0^2} = \frac{612}{0,8 K_p}$$

$$\frac{1}{w_0} = \sqrt{\frac{612}{0,8 K_p}}$$

$$2D \sqrt{\frac{612}{0,8 K_p}} = \frac{120}{0,8 K_p}$$

$$4D^2 \frac{612}{0,8 K_p} = \frac{120^2}{0,8 K_p}$$

$$K_p = \frac{120^2}{4D^2 \cdot 612 \cdot 0,8}$$

für $n = 10\%$. $\rightarrow D = 0,6$

$$K_p = \frac{120^2}{4 \cdot 0,6^2 \cdot 612 \cdot 0,8} = 20,4$$

$$G_R = V_{kp} \frac{1+s \cdot T_n + s^2 \cdot T_n \cdot T_r}{s \cdot T_n} = 20,4 \cdot \frac{1+120s + 120 \cdot 29,2 s^2}{120s}$$

$$\text{Bsp.: } G_S = \frac{10}{(2+s)(1+2s)(1+4s)} = \frac{10}{2(1+0,5s)(1+2s)(1+4s)} = \frac{5}{(1+0,5s)(1+2s)(1+4s)}$$

PID mit $\bar{n} = 10\%$.

$$1) \quad T_{R1} = T_1 = 2$$

$$T_{R2} = T_2 = 4$$

$$2) \quad T_n = T_1 + T_2 = 6$$

$$T_r = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = \frac{8}{6} = 1,33$$

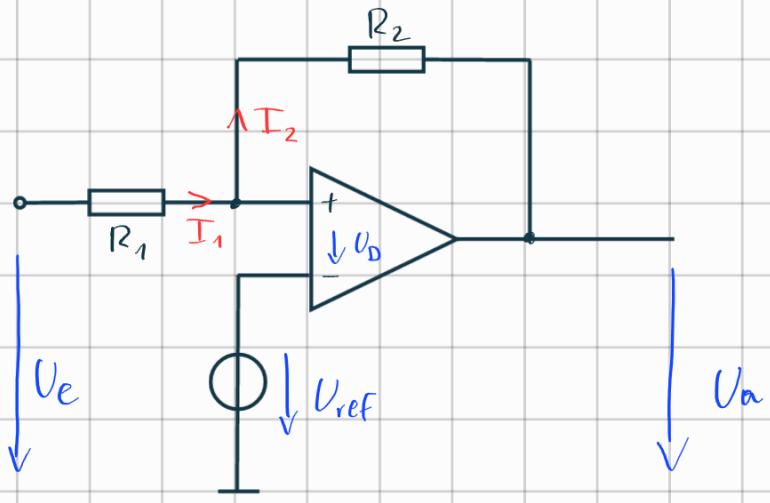
$$3) \quad G_R = K_p \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{T_n \cdot s} = V_{kp} \frac{(1+2s)(1+4s)}{6s}$$

$$4) G_w = \frac{Z_p \cdot Z_s}{Z_p \cdot Z_s + N_p \cdot N_s} = \frac{N_p (1+2s)(1+4s) \cdot 5}{N_p (1+2s)(1+4s) \cdot 5 + 6s(1+0,5s)(1+2s)(1+4s)}$$

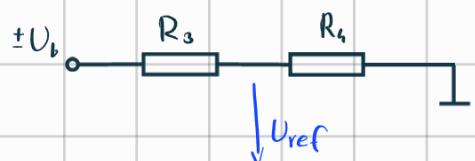
$$= \frac{5 N_p}{5 N_p + 6s(1+0,5s)}$$

Wiederholung Schmitttrigger

Nicht-invertierender ST



je nach Polung von U_{ref} kann Spg.-Quelle durch Spg.-Teiler ersetzt werden mit $\pm U_b$



$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

$$\frac{U_e - U_p}{R_1} = \frac{U_p - U_a}{R_2}$$

$$\frac{U_e - U_{ref}}{R_1} = \frac{U_{ref} - U_a}{R_2}$$

$$\text{da } U_D = 0V \rightarrow U_p = U_a = U_{ref}$$

$$U_e R_2 - U_{ref} R_2 = U_{ref} R_1 - U_a R_1$$

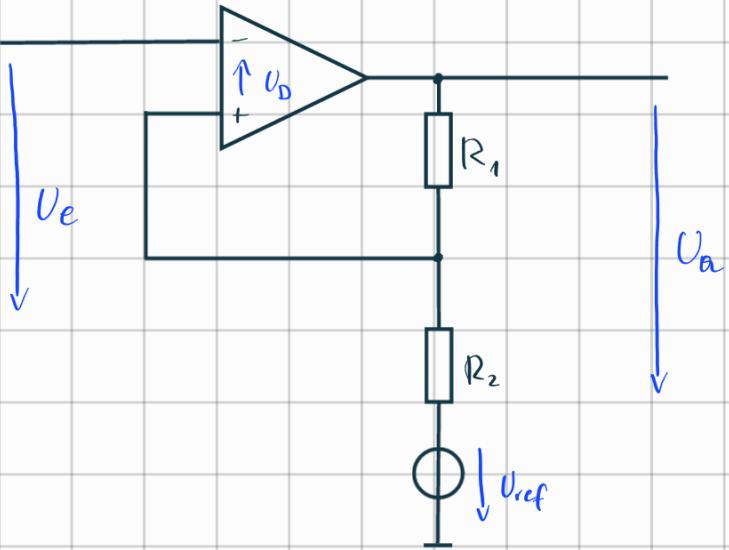
$$U_e R_2 = U_{ref} (R_1 + R_2) - U_a R_1$$

$$U_e = U_{ref} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) - U_a \frac{R_1}{R_2}$$

$$U_{e,\min} = U_{ref} \frac{R_1 + R_2}{R_2} - U_{a,\min} \frac{R_1}{R_2}$$

$$U_{e,\max} = U_{ref} \frac{R_1 + R_2}{R_2} - U_{a,\max} \frac{R_1}{R_2}$$

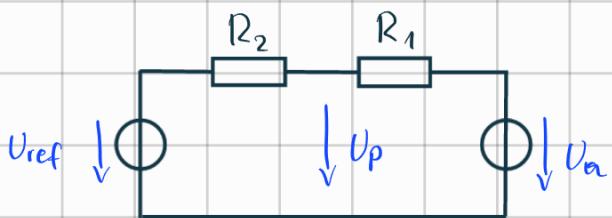
Invertierender Schmitttrigger



$$-U_D + U_p - U_e = 0$$

$$U_D = 0$$

$$U_e = U_p$$

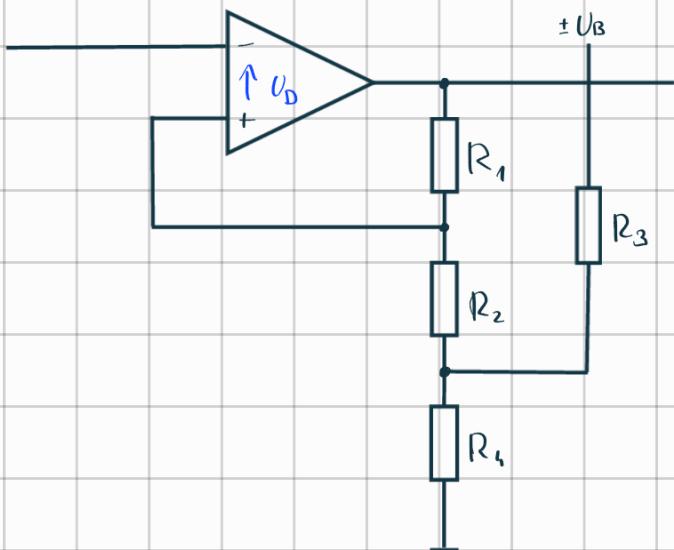


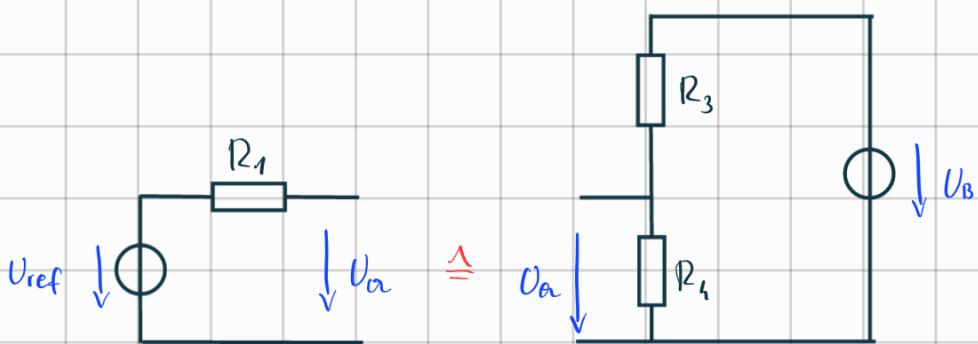
$$U_p = U_{ref} \frac{R_2}{R_1+R_2} + U_a \frac{R_1}{R_1+R_2} = U_e$$

$$U_{e,\min} = U_{ref} \frac{R_2}{R_1+R_2} + U_{a,\min} \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$U_{e,\max} = U_{ref} \frac{R_2}{R_1+R_2} + U_{a,\max} \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

U_{ref} durch Spg.-Teiler aus R_3 & R_4





im Leerlauf

$$\textcircled{I} \quad V_{\text{ref}} = U_a = U_B \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Innenwiderstand

$$\textcircled{II} \quad R_i = R_1 = R_4 \parallel R_3$$

Bsp.: Zur Überwinterung einer Schildkröte muss die Temperatur konstante 4-6°C betragen. Die Regelung soll mit einem PTC Widerstand erfolgen. Der zu erfassende Temperaturbereich beträgt 0-10°C. Hierfür ist eine Auswerte- und Verstärkerschaltung mit OPV zu entwickeln.

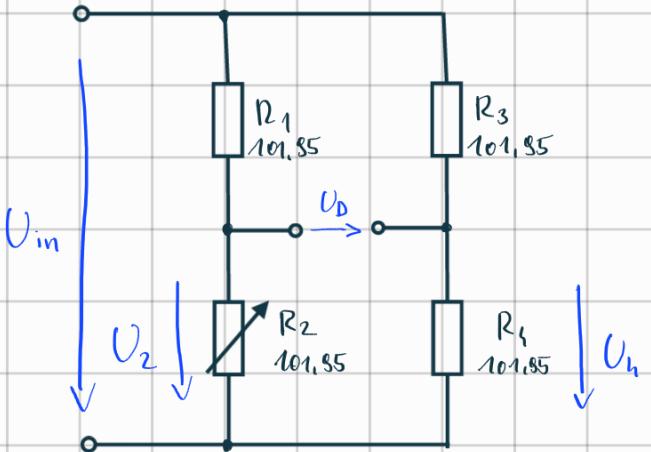
- Die Sensorbeschaltung, damit bei 5°C 0V mit einer Änderungsrate von 1V/°C erfolgt. Die Sensorkennlinie soll im Temperaturbereich 0-10°C realisiert werden.
- Die Aufbewahrung der Schildkröte erfolgt in der kalten Garage, daher wird eine Heizung implementiert.

Sensordaten:

Temp. [°C]:	0	5	10	15
Wdst. [Ohm]:	100	101,95	103,9	105,85

Aufgaben:

- 1) Messbrücke
- 2) Instrumentenverstärker
- 3) Schmitttrigger
- 4) Transistorschaltung (Transistor als Schalter)



$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$U_D + U_h - U_2 = 0$$

$$U_D = U_2 - U_h$$

$$U_2 = V_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_h = V_{in} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$U_D = V_{in} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) = V_{in} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$R_2 \Big|_{ta=0^\circ\text{C}} = 100 \Omega$$

$$R_2 \Big|_{ta=10^\circ\text{C}} = 103,9 \Omega$$

$$k = \frac{\Delta R}{\Delta ta} = \frac{3,9}{10} = 0,39 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}$$

$$R_2(4) = 100 + 4 \cdot 0,39 = 101,56 \Omega$$

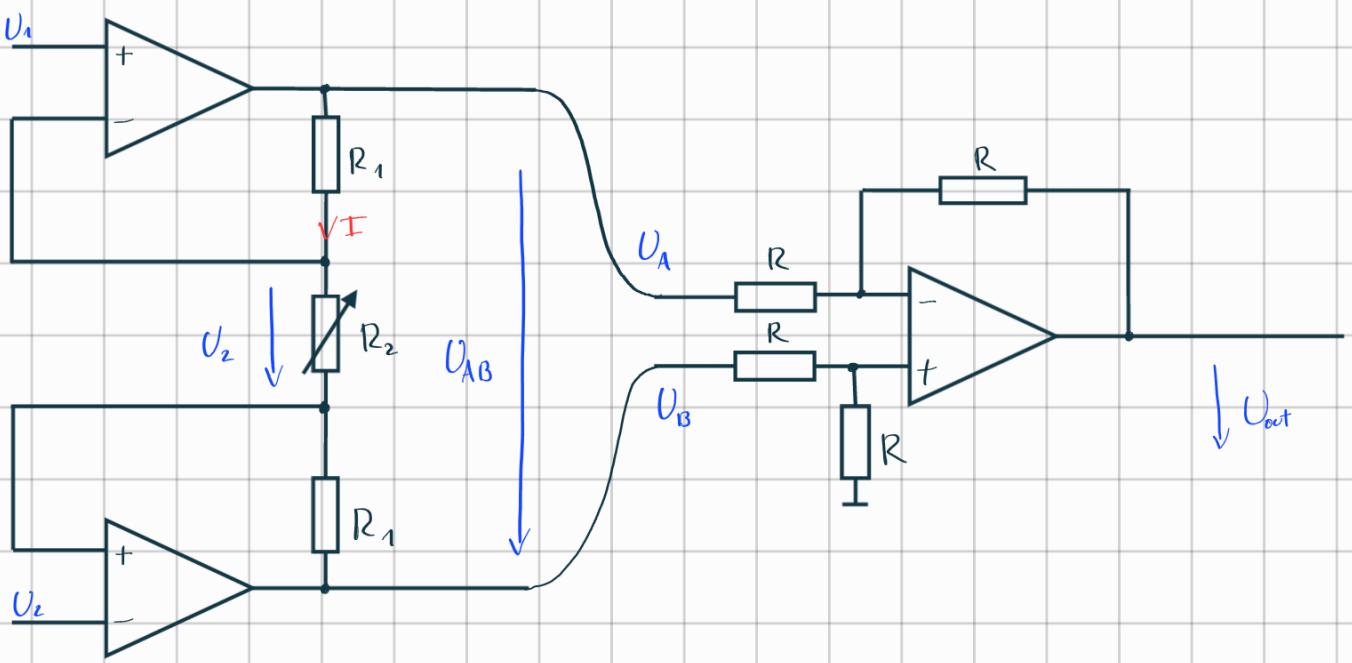
$$R_2(6) = 100 + 6 \cdot 0,39 = 102,34 \Omega$$

$$\begin{aligned} U_D \Big|_{ta=6^\circ\text{C}} &= U_2 \left(\frac{102,34}{202,28} - 0,5 \right) \\ &= 12 \left(\frac{102,34}{202,28} - 0,5 \right) \\ &= 0,0115 \text{ V} \end{aligned}$$

Versorgung: $\pm 12 \text{ V}$

$$\text{Verstärkung: } V = \frac{1 \frac{\text{V}}{^\circ\text{C}}}{0,0115 \frac{\text{V}}{^\circ\text{C}}} = 86,95 = 87$$

Instrumentenverstärker



$$U_{AB} = I (2R_1 + R_2) = \frac{U_2}{R_2} (2R_1 + R_2)$$

$$U_{AB} = U_2 \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2}\right) = (U_1 - U_2) \underbrace{\left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2}\right)}_v$$

$$v = 87 = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

$$43 R_2 = R_1 \quad R_2 = 10k\Omega$$

$$\rightarrow R_1 = 430k\Omega$$

Subtrahieren da alle Wohst. = R

$$\rightarrow U_{out} = U_B - U_A = U_{BA} = - U_{AB}$$

$$U_{out} = (U_2 - U_1) \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2}\right)$$

↓

bei einer Messbrücke U_2 über
R₂ (PTC) und U₁, die Spg. von R₁

Da das Beispiel so leicht angesetzt ist
messen wir:

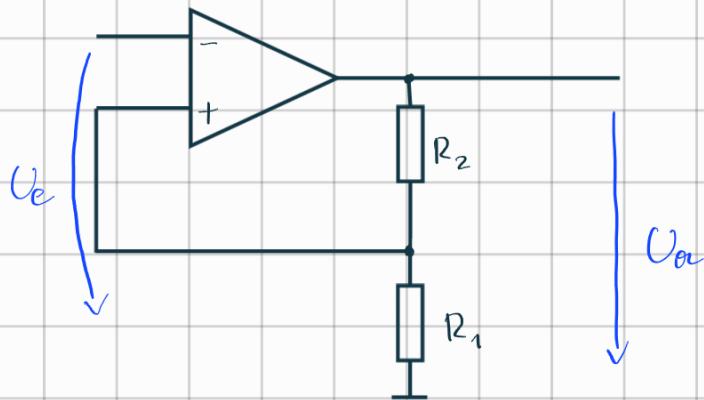
$$U_{out}|_{ta=1^\circ C} = -1V$$

für oben Schmitttrigger:

$$U_{e,\text{ein}} = -1V \quad U_{e,\text{aus}} = 1V$$

→ invert. ST

kein U_{ref} notwendig, da die Schaltschwellen symmetrisch sind und die Versorgung $\pm 12V$ beträgt.



$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2 + R_1}{R_1}$$

$$U_e = U_a \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1}$$

$$U_{e,\text{ein}} = U_{a,\text{min}} \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1}$$

$$U_{e,\text{aus}} = U_{a,\text{max}} \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1}$$

Annahme: $U_{a,\text{min}} = -11V$

$$-1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (-11)$$

$$1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot 11$$

$$R_1 + R_2 = 11 R_1$$

$$R_2 = 10 R_1$$

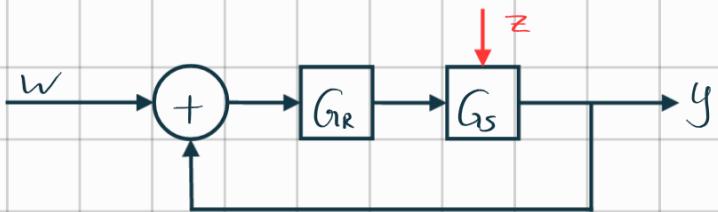
$$R_1 = 10k$$

$$R_2 = 100k$$

Gekauft: Ein 15W Heizkabel mit 12V Eingang

$$I = \frac{P}{U} = \frac{15W}{12V} = 1,25A$$

Einfluss von Störungen z oder d



$$y = (w + z) G_S = w \cdot G_S + z \cdot G_S = e \cdot G_R \cdot G_S + z \cdot G_S$$

$$= (w - y) G_o + z G_S = w \cdot G_o - y \cdot G_o + z \cdot G_S$$

a) Führungsübertragungsfunktion $z = 0$

$$y = w \cdot G_o - y \cdot G_o$$

$$y(1 + G_o) = w \cdot G_o \quad \rightarrow \quad G_w = \frac{y}{w} = \frac{G_o}{1 + G_o}$$

sollte 1 sein, dann
ist $y = w$

b) Störübertragungsfunktion $w = 0$

$$y = -y \cdot G_o + z \cdot G_S$$

$$y(1 + G_o) = z \cdot G_S \quad \rightarrow \quad G_z = \frac{y}{z} = \frac{G_S}{1 + G_o}$$

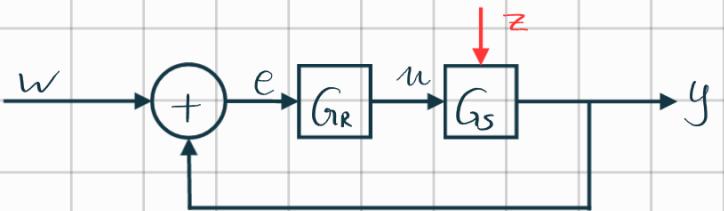
sollte 0 sein, d.h. die Störgröße hat keinen Einfluss auf ol. Ausgangsgröße

Beispiel: Gegeben ist eine PT1 Regelstrecke G_s . Diese wird mit einem P-Regler G_R geregelt. Mit einem P-Regler hat man immer einen Regelfehler. Wie groß ist der stationäre Regelfehler, wenn...

- die Störgröße eine Sprungfunktion ist?
- die Störgröße einen rampenförmigen Verlauf?

$$G_s = \frac{k_s}{1+sT_1}$$

$$G_R = k_p$$



Nebenbedingung: $w(t) = 0$

$$\text{ges.: } \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = ?$$

$$G_s = \frac{k_s}{1+sT_1}$$

$$w=0 \quad ; \quad G_z = \frac{G_s}{1+G_0}$$

$$e = w - y = 0 - y = -G_z \cdot z = -\frac{G_s}{1+G_0} \cdot z$$

$$e = -\frac{\frac{k_s}{1+sT_1}}{1+k_p \frac{k_s}{1+sT_1}} \cdot z = -\frac{k_s}{1+sT_1 + k_p k_s} \cdot z$$

a)

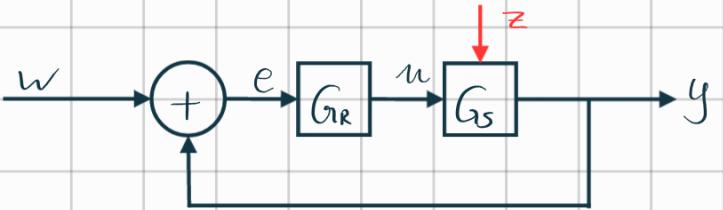
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-k_s}{1+sT_1 + k_p k_s} \cdot \frac{1}{s} \cdot s \\ &= \frac{-k_s}{1+sT_1 + k_p k_s} \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-k_s}{1+sT_1 + k_p k_s} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot s = -\infty$$

$$a) z(t) = \hat{e}(t) \rightarrow z(s) = \frac{1}{s}$$

$$b) z(t) = \hat{e}(t) \cdot t \rightarrow z(s) = \frac{1}{s^2}$$



$$\begin{aligned} e &= w - y = 0 - y = -G_Z \cdot z \\ &= -\frac{G_S}{1+G_0} \cdot z \end{aligned}$$

$$e = -\frac{\frac{K_S}{1+sT_1}}{1+\frac{K_S}{1+sT_1} \cdot \frac{K_I}{s}} \cdot z = \frac{-K_S}{1+sT_1 + K_S \frac{K_I}{s}} \cdot z = \frac{-K_S \cdot s}{s + s^2 T_1 + K_S K_I} \cdot z$$

$$G_R = \frac{K_I}{s} ; \quad G_S = \frac{K_S}{1+sT_1}$$

$$G_0 = G_R \cdot G_S$$

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_S \cdot s}{s + s^2 T_1 + K_S K_I} \cdot \cancel{\frac{1}{s} \cdot s} = 0$$

$$b) \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_S \cdot s}{s + s^2 T_1 + K_S K_I} \cdot \cancel{\frac{1}{s^2} \cdot s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_S}{s + s^2 T_1 + K_S K_I} = -\frac{K_S}{0+0+K_S K_I} = -\frac{K_S}{K_S K_I} = -\frac{1}{K_I}$$

Lead Lag Reglerentwurf

Bsp.: geg.: DC-Motor $G_s = \frac{1}{s(1+s)}$
 gefordert: $\bar{u} \leq 25\%$
 $t_r = 0,5 \text{ sek}$
 $e_{\infty} |_{w(t)=s(t) \cdot t} = 0,1$

$$1) w(t) = s(t) \cdot t \rightarrow w(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$2) \varphi_{\text{res}} + \bar{u} [\checkmark] = 70 \rightarrow \varphi_{\text{res}} = 70 - \bar{u} = 70 - 25 = 45^\circ$$

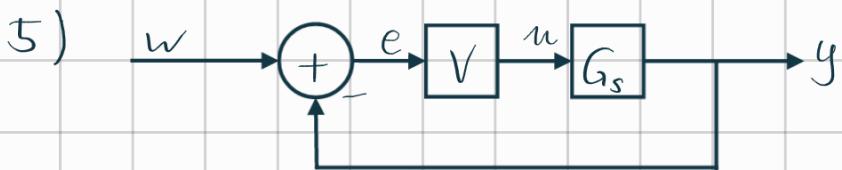
$$3) w_0 \cdot t_r = 1,5 \rightarrow w_0 \cdot t_r \approx 1,5 \rightarrow w_0 = \frac{1,5}{t_r} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \frac{1}{\text{sek}}$$

$$4) G_R = G_R(0) = V (\hat{=} K_p)$$

$$\begin{aligned} e &= w - y = w - G_w \cdot w = w \left(1 - G_w\right) = w \left(1 - \frac{G_o}{1+G_o}\right) \\ &= w \cdot \frac{1}{1+G_o} = w \frac{1}{1+V \frac{1}{s(1+s)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot w(s) \cdot \frac{1}{1+V \frac{1}{s(1+s)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+V \frac{1}{s(1+s)}} = 0,1 \quad \text{U. Abfrage} \end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+V \frac{1}{s(1+s)}} = \frac{1}{V} = 0,1 \rightarrow V = 10$$



Das Bode-Diagramm für G_0 zeichnen und die Phase bei $w = 3 * 1/\text{sek}$ prüfen.

Aus dem Bode-Diagramm erkennt man:

$$\varphi = -162^\circ$$

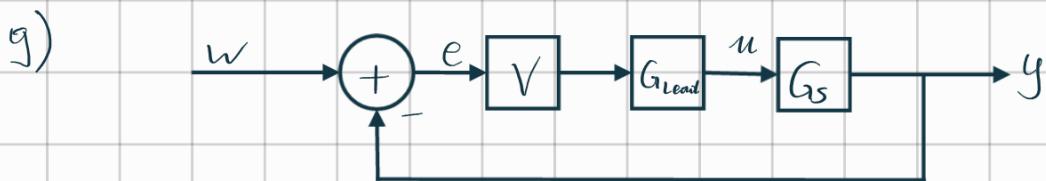
$$\varphi_{\text{res}} = 180^\circ - 162^\circ = 18^\circ \quad \text{gefordert sind } 45^\circ$$

$$\Delta \varphi_{\text{lead}} = 45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$$

$$6) \quad \alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_{\text{lead}})}{1 + \sin(\varphi_{\text{lead}})} = \frac{1 - \sin(27^\circ)}{1 + \sin(27^\circ)} = 0,376$$

$$7) \quad T_{\text{lead}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_0} = \frac{1}{\sqrt{0,376} \cdot 3} = 0,544$$

$$8) \quad G_{\text{Lead}} = \frac{1+s \cdot T_{\text{lead}}}{1+s \cdot \alpha \cdot T_{\text{lead}}} = \frac{1+s \cdot 0,544}{1+s \cdot 0,376 \cdot 0,544}$$



Aus dem Bode-Diagramm erkennt man, dass bei einer Frequenz von 3 Hz die Phase -135° beträgt und somit:

$$\rightarrow \varphi_{\text{res}} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \quad \checkmark$$

Allerdings beträgt die Verstärkung bei dieser Frequenz 4,69 dB anstelle von 0 dB. Daher benötigt man einen Lag-Regler.

Der Lag-Regler bewirkt, dass sich die Verstärkung beim gewünschten w (omega) auf 0 dB senken kann. Allerdings will er dafür 10° .

$$10) \quad \text{neues } \Delta\varphi_{\text{lead}} = 45^\circ - 18^\circ + 10^\circ = 37^\circ$$

$$11) \quad \alpha = \frac{1 - \sin(37^\circ)}{1 + \sin(37^\circ)} = 0,249$$

$$12) \quad T_{\text{lead}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_0} = \frac{1}{\sqrt{0,249} \cdot 3} = 0,668$$

$$13) \quad G_{\text{Lead}} = \frac{1 + 0,668 s}{1 + s \cdot 0,249 \cdot 0,668}$$

14) Bode-Diagramm von $F_o(j\omega)$ & Kontrolle bei $\omega = 3 \text{ Hz}$

$$\varphi = -125^\circ \rightarrow \varphi_{\text{res}} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

$$V = 6,2 \text{ dB} \hat{=} 10^{\frac{6,2}{20}} = 2$$

$$15) \Delta \alpha = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$16) \Delta \varphi_{\text{Lag}} = -10^\circ$$

$$17) T_{\text{Lag}} = \frac{\Delta \alpha \sqrt{1 + [\tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}})]^2} - 1}{w_0 \cdot \tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}})} = \frac{0,5 \sqrt{1 + [\tan(-10^\circ)]^2} - 1}{3 \cdot \tan(-10^\circ)} = 0,83 \text{ sek}$$

$$18) \beta = \frac{w_0 \cdot T_{\text{Lag}} - \tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}})}{w_0 \cdot T_{\text{Lag}} (1 + w_0 \cdot T_{\text{Lag}} \cdot \tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}}))} = \frac{3 \cdot 0,83 - \tan(-10^\circ)}{3 \cdot 0,83 (1 + 3 \cdot 0,83 \cdot \tan(-10^\circ))} = 2,1$$

$$19) G_{\text{Lag}} = \frac{1+s \cdot T_{\text{Lag}}}{1+s \cdot \beta \cdot T_{\text{Lag}}} = \frac{1+s \cdot 0,83}{1+s \cdot 2,1 \cdot 0,83}$$

20)

Aus dem Bode-Diagramm erkennt man, dass bei w (omega) = 3 Hz die Phasenreserve 45° und die Verstärkung 0 dB beträgt.

Aus der Rampenantwort erkennt man, dass bei $w = 100$ $y = 99,9$ ist

$$\rightarrow e = w - y = 100 - 99,9 = 0,1$$

Aus der Sprungantwort erkennt man, dass das Überschwingen ca. 30% und die Anstiegszeit 0,37 Sekunden beträgt.

Bewertung 1. Umgabe:

$$t_r = 0,37 < 0,5 \quad \checkmark$$

$$\zeta = 30\% > 20\% \quad \times$$

$$\text{Bsp.: } G_s = \frac{10}{s(s+5)(s+10)}$$

$$\bar{u} \leq 20\%$$

$$t_r = 0,5 \text{ sek}$$

$$|e_\omega|_{w=t} = 0,1$$

$$1) w(t) = g(t) \cdot t \rightarrow w(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$2) \varphi_{\text{res}} + \bar{u} [\%] = 70 \rightarrow \varphi_{\text{res}} = 70 - \bar{u} = 70 - 20 = 50^\circ$$

$$3) \omega_D \cdot t_r = 1,5 \rightarrow \omega_D = \frac{1,5}{t_r} = \frac{1,5}{0,5} = 3$$

$$4) G_R = G_R(0) = V$$

$$e = w \frac{1}{1+G_0} = w \frac{1}{1+V \frac{10}{s(s+10)(s+5)}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot w \cdot \frac{1}{1+V \frac{10}{s(s+10)(s+5)}}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+V \frac{10}{s(s+10)(s+5)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+V \cancel{s} \frac{10}{s(s+10)(s+5)}}$$

$$= \frac{1}{0+V \frac{10}{50}} = 0,1 \quad \text{lt. Angabe}$$

$$\frac{50}{10} = V \cdot 0,1$$

$$50 = V$$

$$5) \text{ Aus Bode-Diagramm bei } w = 3 \frac{1}{\text{sek}}$$

$$\varphi = -138^\circ$$

$$\varphi_{\text{res}} = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ \quad 50^\circ \text{ sind gefordert} \rightarrow \text{Lead-Regler}$$

$$V = 3,28 \text{ dB}$$



Wie allseits bekannt, bewirkt die Verwendung eines Lead-Reglers eine Amplitudenanhebung. Daher können wir zu diesem Zeitpunkt sagen, dass zu 100% ein Lag-Regler notwendig sein wird.

$$\Delta \varphi_{\text{Lead}} = 50^\circ - 42^\circ + 10^\circ = 18^\circ$$

↑
für Lag-R.

$$6) \alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_{\text{lead}})}{1 + \sin(\varphi_{\text{lead}})} = \frac{1 - \sin(18^\circ)}{1 + \sin(18^\circ)} = 0,527$$

$$7) T_{\text{Lead}} = \frac{1}{\sqrt{2} \omega_0} = \frac{1}{\sqrt{0,527} \cdot 3} = 0,458 \text{ sek}$$

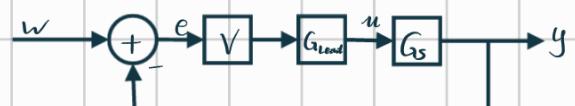
$$8) G_{\text{Lead}} = \frac{1 + s T_{\text{lead}}}{1 + s \alpha T_{\text{lead}}} = \frac{1 + 0,458s}{1 + 0,458 \cdot 0,527s}$$

9) bei $\omega = 3$:

$$\varphi = -120^\circ$$

$$A = 11,5 \text{ dB} \quad \varphi_{\text{res}} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$A \hat{=} 10^{\frac{11,5}{20}} = 3,76$$



$$10) \Delta \alpha = \frac{1}{3,76} = 0,27$$

$$\Delta \varphi_{\text{Lag}} = -10^\circ$$

$$11) T_{\text{Lag}} = \frac{\Delta \alpha \sqrt{1 + [\tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}})]^2} - 1}{\omega_0 \cdot \tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}})} = \frac{0,27 \sqrt{1 + \tan^2(-10^\circ)} - 1}{3 \cdot \tan(-10^\circ)} = 1,38 \text{ Sek.}$$

$$12) \beta = \frac{\omega_0 \cdot T_{\text{Lag}} - \tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}})}{\omega_0 \cdot T_{\text{Lag}} (1 + \omega_0 \cdot T_{\text{Lag}} \cdot \tan(\Delta \varphi_{\text{Lag}}))} = \frac{3 \cdot 1,38 - \tan(-10^\circ)}{3 \cdot 1,38 (1 + 3 \cdot 1,38 \cdot \tan(-10^\circ))} = 3,86$$

$$13) G_{\text{Lag}} = \frac{1 + s \cdot T_{\text{Lag}}}{1 + s \cdot \beta \cdot T_{\text{Lag}}} = \frac{1 + 1,38s}{1 + 3,86 \cdot 1,38s}$$

Aus dem Bode-Diagramm erkennt man für w (omega) = 3Hz:

$$\varphi_{\text{res}} = 50^\circ \quad \checkmark$$

$$V = 0 \text{ dB} \quad \checkmark$$

Aus der Rampenantwort erkennt man:

$$e_\infty = 88,3 - 88,2 = 0,1 \quad \checkmark$$

Aus der Sprungantwort erkennt man:

$$t_r = 0,528 - 0,167 = 0,361 < 0,5 \quad \checkmark$$

$$\bar{u} = 23\% > 20\% \quad \times$$

Bsp.: $G_s = \frac{1}{s(s+1)}$ $\bar{u} \leq 10\%$
 $t_r = 0,15 \text{ sek}$
 $e_\infty \Big|_{w(t)=s(t) \cdot t} = 0,1$

1) $w(s) = \frac{1}{s^2}$

2) $\varphi_{\text{res}} + \bar{u} = 70 \rightarrow \varphi_{\text{res}} = 70 - \bar{u} = 60^\circ$

3) $w_0 \cdot t_r = 1,5 \rightarrow w_0 = \frac{1,5}{0,15} = 10 \frac{1}{\text{sek}}$

4) $e = w \frac{1}{1+G_0} = w \frac{1}{1+V \frac{1}{s(s+1)}}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} w \frac{1}{1+V \frac{1}{s(s+1)}} \cdot s \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1+V \frac{1}{s(s+1)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+V \cancel{s} \frac{1}{s(s+1)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+V \frac{1}{s+1}} \\ &= \frac{1}{0+V} = 0,1 \\ V &= 10 \end{aligned}$$

5)

Aus dem Bode-Diagramm erkennt man:

$$\varphi_{\text{res}} = 6^\circ$$

$$V = -20 \text{ dB}$$

$$\Delta \varphi_{\text{lead}} = 60^\circ - 6^\circ = 54^\circ$$

6) $\alpha = \frac{1-\sin(\varphi_{\text{lead}})}{1+\sin(\varphi_{\text{lead}})} = \frac{1-\sin(54^\circ)}{1+\sin(54^\circ)} = 0,106$

7) $T_{\text{lead}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} w_0} = \frac{1}{\sqrt{0,106} \cdot 10} = 0,307$

8) $G_{\text{Lead}} = \frac{1+sT_{\text{lead}}}{1+s\alpha T_{\text{lead}}} = \frac{1+0,307s}{1+0,307 \cdot 0,106s}$

g) bei $\omega = 10$

Aus dem Bode-Diagramm erkennt man bei $w (\omega) = 10 \text{ Hz}$:

$$\varphi_{\text{res}} = 60^\circ \quad \checkmark$$

$$V = -10 \text{ dB} \quad \checkmark$$

Daher ist kein Lag-Regler notwendig.

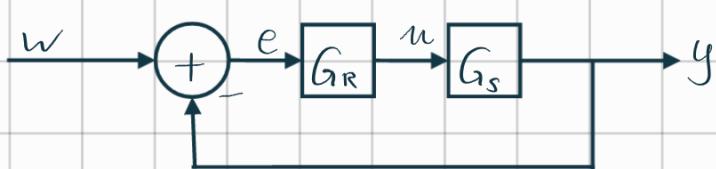
Aus der Rampenantwort:

$$e_\infty = 79,8 - 79,7 = 0,1 \quad \checkmark$$

Aus der Sprungantwort:

t_r & \ddot{u} konnten nicht bewerkstelligt werden.

Reglerentwurf durch Eigenwertvorgabe



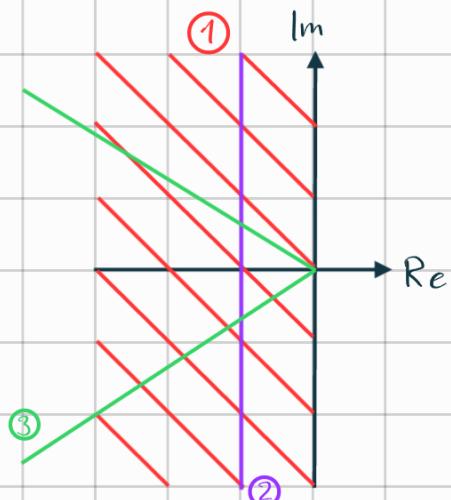
$$G_R = \frac{Z_R}{N_R}$$

$$G_s = \frac{Z_s}{N_s}$$

$$G_w = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{Z_R \cdot Z_s}{Z_R Z_s + N_R \cdot N_s}$$

charakteristisches Polynom oder Führungsübertragungsfunktion
 $Z_R Z_s + N_R N_s \leftarrow$ hier gibt man die Eigenwerte oder
 Polstellen vor $(s-s_1)(s-s_2)\dots$,
 wobei s_1, s_2 die Polstellen sind.

Günstige Lage der Polstelle



- ① neg. Realteil
- ② schnelles Verhalten
 \rightarrow je weiter links die Polstelle von der imag. Achse liegt, desto schneller $s = \frac{1}{T}$
- ③ Verhältnis $\frac{\text{imag}}{\text{real}}$ sollte nicht zu groß sein
 \rightarrow je größer d. Imag. teil, desto größer das Überschwingen

$G_s = \frac{3}{1+5s}$ für stationäre Genauigkeit wird ein PI-Regler benötigt $G_R = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p \cdot s + K_I}{s}$

$$G_W = \frac{Z_R Z_S}{Z_R Z_S + N_R N_S} = \frac{3(K_p \cdot s + K_I)}{3(K_p \cdot s + K_I) + s(1+5s)} = \frac{3K_p \cdot s + 3K_I}{5s^2 + s(1+3K_p) + 3K_I}$$

↙

Grund 2. Ordnung \rightarrow 2 Polstellen vorgeben

$$s_{1,2} = -2 \pm j$$

$$5s^2 + s(1+3K_p) + 3K_I = (s-s_1)(s-s_2) = (s+2-j)(s+2+j)$$

$$s^2 + s \frac{(1+3K_p)}{5} + \frac{3K_I}{5} = s^2 + 2s + s\cancel{j} + 2s + \cancel{4} + \cancel{2j} - \cancel{sj} - \cancel{2j} - j^2$$

$$s^2 + s \frac{(1+3K_p)}{5} + \frac{3K_I}{5} = s^2 + 4s + 5$$

$$s^2 + s \frac{(1+3K_p)}{5} + \frac{3K_I}{5} = s^2 + 4s + 5$$

$$\frac{1+3K_p}{5} = 4 \rightarrow K_p = \frac{10}{3}$$

$$\frac{3K_I}{5} = 5 \rightarrow K_I = \frac{25}{3}$$

Simulationsschrittweite

Kontinuierliche Systeme werden in Rechnern als diskrete Systeme nachgebildet. Die Abtastschritte haben eine endliche Schrittweite.
 \Rightarrow Führt zu Fehlern in der Berechnung.

