

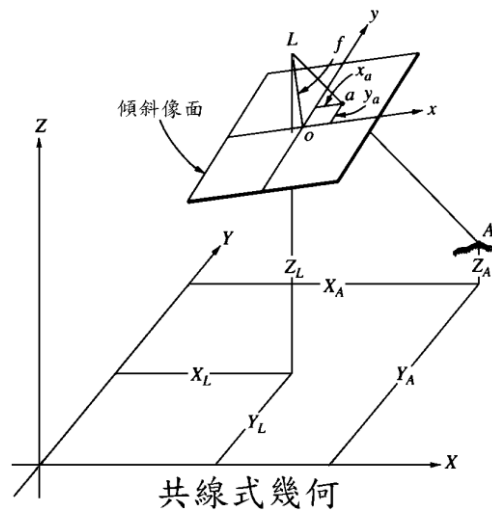
Photogrammetric Deformation

攝影測量變形成因及變形量探討

R05521121 陳立恒

一、前言

攝影測量(Photogrammetry)是一種利用被拍攝的物體來重建物體空間位置和三維形狀的技術，是利用共線條件，即曝光站、任意物點與其對應像點在三維空間中，位於同一線上，取得物體空間位置。如圖示，L、a 與 A 共線，而任意點的共線關係，可用下列二式表示。



圖一、共線式幾何示意圖

$$x_a = x_o - f \frac{m_{11}(X_A - X_L) + m_{12}(Y_A - Y_L) + m_{13}(Z_A - Z_L)}{m_{31}(X_A - X_L) + m_{32}(Y_A - Y_L) + m_{33}(Z_A - Z_L)}$$
$$y_a = y_o - f \frac{m_{21}(X_A - X_L) + m_{22}(Y_A - Y_L) + m_{23}(Z_A - Z_L)}{m_{31}(X_A - X_L) + m_{32}(Y_A - Y_L) + m_{33}(Z_A - Z_L)}$$

而在攝影測量裡的數學關係是根據下列假設：

1. 光線以直線行進
2. 框幅攝影機的焦面是平面的

故須針對各項畸變差效應，改正量測之像坐標。而改正過後，也包含透視投影的變形，故本篇分為透視投影變形以及不符共線特性所造成的變形，兩部分進行探討。

二、背離共線特性之變形探討

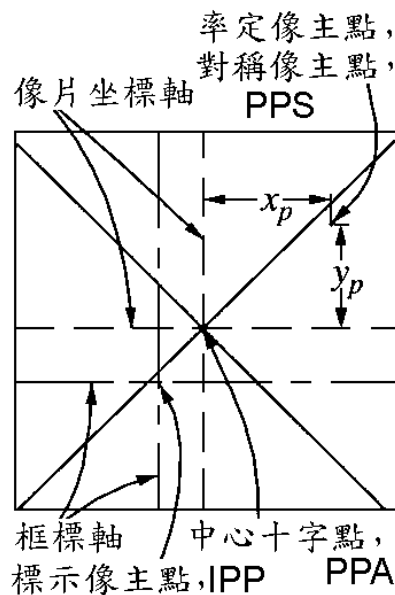
在攝影測量中，需要圖片當中點的真實位置。而像片坐標因為各種因素，仍然會包含系統性誤差，主要來源如下

1. (a)底片伸縮、不平坦變形
(b)由於電子訊號時序問題 CCD 陣列變形或晶片表面不平坦
2. (a)框標軸交點非像主點的誤差
(b)像主點與 CCD 陣列中心不對準之誤差
3. 透鏡畸變差
4. 大氣折光差

然而，並非所有的改正都需要進行，改正與否可視所需精度和忽略某項改正所致之誤差相比。

1. 底片與像紙的畸變差、電子訊號時序問題 CCD 陣列變形或晶片表面不平坦

包含伸縮變形和不平坦所引起之誤差。因非均勻分佈，難以補償。像坐標必須改正這些誤差才能應用於攝影測量的計算中，底片畸變差通常小於 0.2%。像紙受溫度、濕度、本身種類與厚度等影響，伸縮差有大至 2~3%，較底片更不穩定。這些誤差所造成的像片坐標誤差需要被改正，在這些像片被用來做攝影測量的計算之前。如果使用的是數位相機，由於其上的電荷耦合元件 CCD 在製造時，雖然都會認為是固定大小，但事實上再精密的相機其 CCD 都不是每一個大小皆相同，其會存在著微小的差異，而這差異將會造成通過像點的光線會有些微的偏差，導致透視中心至像點的向量與透視中心至物點的向量非共線。



圖二、像主點偏移示意圖

2. 框標軸交點非像主點的誤差、像主點與 CCD 陣列中心不對準之誤差

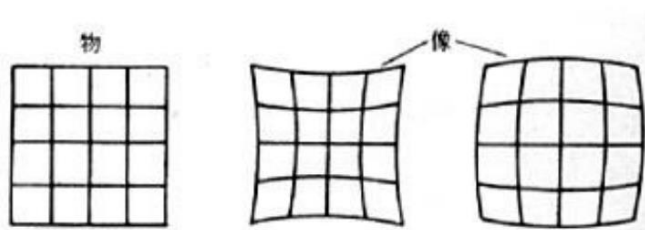
攝影測量公式所用像點坐標係根據投影幾何，並假設原點位於像主點，故需將量測像坐標或框標軸系統，化算至原點為像主點的像片坐標軸系統。

3. 透鏡畸變差

透鏡畸變差導致像點偏移其理想位置。一般分為兩項：系統輻射畸變差與離心畸變差。

輻射畸變差：系統輻射畸變差是在透鏡製造時無法避免的結果，雖然可以經由仔細的設計，將其影響降低至很低的數值，但仍是主要造成畸變差的原因。又輻射畸變差可分為對稱輻射畸變差與非對稱輻射畸變差，或可分為像點相對於光軸往外者的正輻射畸變差與內移的負輻射畸變差。一般利用橫軸為輻射距離、縱軸為變形位移之多項式曲線，如下式，以模式化、並求得輻射畸變差。

其中 Δr 為輻射畸變差改正量、 r 為由像主點起算之輻射距離， k_1, k_2, k_3, k_4 等為多項式曲線係數，可在率定時求得。



圖三．負輻射畸變差與正輻射畸變差

離心畸變差：離心畸變差造成的主要原因為，不完美的透鏡組成。一般利用橫軸為輻射距離、縱軸為變形位移之多項式曲線，如下式，可求得輻射畸變差及離心畸變差。

$$\delta x = \bar{x}(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8)$$

$$\delta y = \bar{y}(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8)$$

$$\Delta x = (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4)[p_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2p_2 \bar{x}\bar{y}]$$

$$\Delta y = (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4)[p_2(r^2 + 2\bar{y}^2) + 2p_1 \bar{x}\bar{y}]$$

$$x_c = \bar{x} + \delta x + \Delta x$$

$$y_c = \bar{y} + \delta y + \Delta y$$

其中 $\delta x \delta y$ 為輻射畸變差改正量、 r 為由像主點起算之輻射距離， $\bar{x} \bar{y}$ 為 x y 和像主點坐標的距離， k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 為輻射畸變差的多項式曲線係數，可在率定時求得。 $\Delta x \Delta y$ 為離心畸變差的改正量， p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 為離心畸變差的多項式曲線係數，也以可在率定時求得。最後 x_c y_c 為改正過後的坐標值。

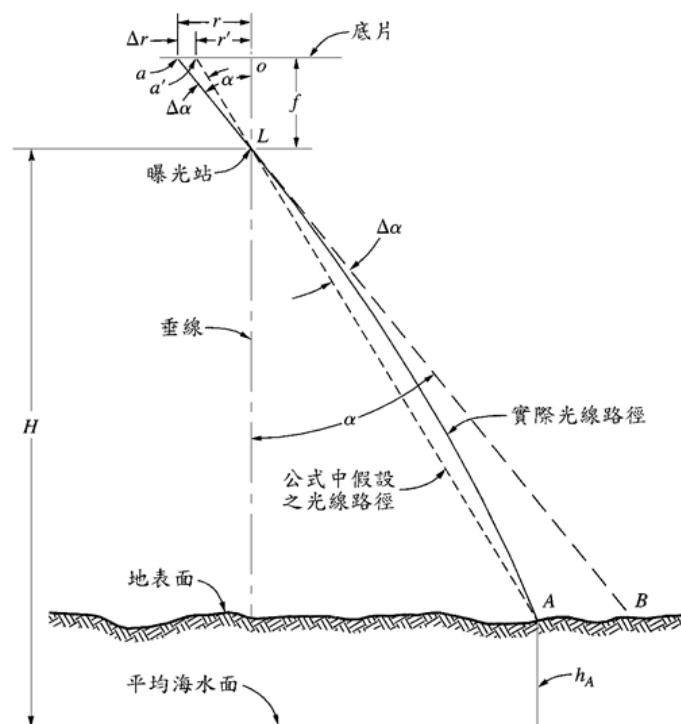
4. 大氣折光差

高度增加，大氣層密度減少，因此光線非以直線進行，惟依據司乃耳定律。如圖，自 A 點入射光線與垂線交角為 α ；若忽略折射，光線如同來自 B 點，攝影測量式則假設光線以直線行進，故需改正像點坐標。改正公式如下：

$\Delta\alpha = K \tan\alpha$ ；式中， K 值

$$K = (7.4 \times 10^{-4})(H - h)[1 - 0.02(2H - h)]$$

上式中， K 的單位為度 degree， H 為航高， h 為物點高程， H 與 h 均自平均海水面起算，單位均為 km。



圖四、大氣折光差示意圖

三、透視投影之變形探討

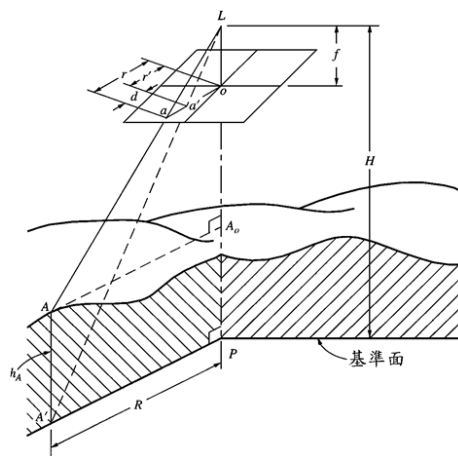
1. 垂直影像之高差位移

地物較基準面高或低導致影像於像面上的移位稱之為高差位移。垂直影像上，高差位移將導致起伏地面上的直線道路、圍籬等呈現彎曲狀，這類現象在影像邊緣更為明顯，彎曲程度依起伏而定。高差位移亦將造成遮蔽現象，在影像邊緣，較低地物易被較高地物遮蔽，公式如下：

$$d=rh/H$$

d 為高差位移、h 為由基準面起算高程、r 為自像主點之移位距離、H 為基準面起算之航高

依此可計算地物高，惟先決條件是：待量測之直立地物的頂與底均需出現於影像上，如此才能量測 d，基準面則可假設位於直立地物的基底。



圖五、垂直影像之高差位移

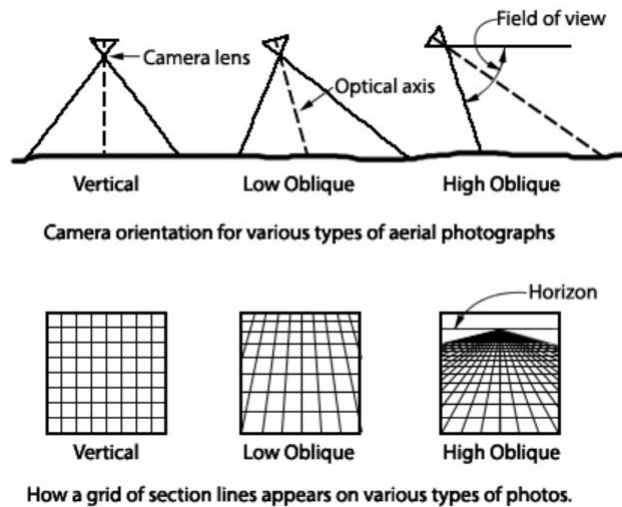


圖六、紐約航空影像，高差位移圖解說明(Upper Playground, Inc)

2. 傾斜位移

在執行航拍時，由於種種原因像是氣流不穩定等，都會使得我們不可能做

到真正的垂直攝影，或多或少都會有偏離垂直的情況，以下圖所示為高傾斜與低傾斜攝影時對於規則網格所產生的變形狀況。傾斜移位可以透過相機姿態的解算來加以改正。



圖七、高、低傾斜攝影對規則網格之影響

四、變形量實際探討

以 opencv 提供的 14 張照片並率定做為例子。



圖八、率定圖例(總共 14 張)

經由率定所得之 $[k1 \ k2 \ p1 \ p2 \ k3]$ 分別為

$$k1 = -0.2946306434$$

$$k2 = 0.111685629$$

$$p1 = 0.0015537912$$

$$p2 = -0.0000436276$$

$$k3 = 0.0409948812$$

原始像主點位置為(320,240)，率定過後像主點位置為(342.319, 233.464)



圖、修正透鏡畸變差後重新投影的成果(左:修正前；右:修正後)

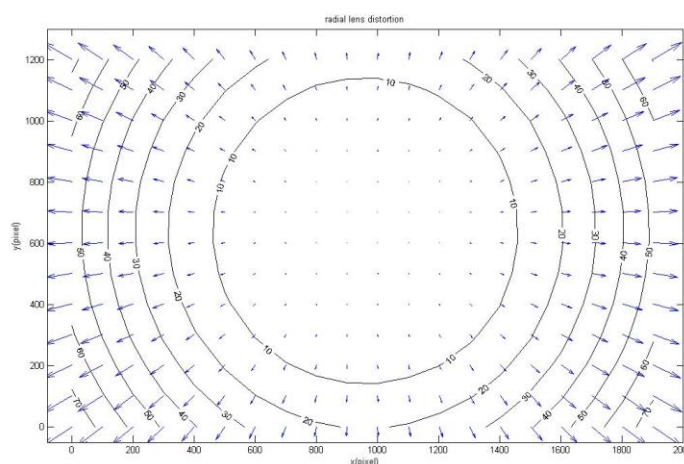
由上圖以及公式可以發現，離像主點越遠，其透鏡畸變差越大。

假設現在有一台相機，像平面為 1920x1280(pixel)

$$k_1 = 6.107 \times 10^{-4} (1/mm^2)$$

$$k_2 = -1.350 \times 10^{-6} (1/mm^6)$$

Pixel size = 11.8 μm



圖、輻射畸變差

輻射畸變差最大值為 77.015 pixel：最大的透鏡畸變差位於圖像的四個角落，分別為 1X1、1X1280、1920X1 和 1920X1280 四個點上；原因根據公式，距離透視中心越遠的點 Δx 和 Δy 越大，因此透鏡畸變差的值也會越大，故最大的透鏡畸變差值便是在圖像的四個角落。

五、參考資料

1. Wolf, P. R., & Dewitt, B. A. (2000). *Elements of Photogrammetry: with applications in GIS* (Vol. 3). New York: McGraw-Hill.
2. 趙健哲，2016，數值攝影測量上課講義
3. 邱式鴻，2013，航空攝影測量上課講義