Homework 7

Exercise 1

(a) $\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[x_1] \\ E[x_2] \end{bmatrix}$

$E[x_1] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i1} = \frac{1}{10} \cdot (3{,}2 + 2{,}4 + 0{,}7 + 1{,}9 + 2{,}2 + 1{,}2 + 1{,}5 + 2{,}6$

$+ 4{,}2 - 1{,}5) = \frac{18{,}4}{10} = 1{,}84$

$E[x_2] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{i2} = \frac{1}{10} \cdot (2{,}9 + 6.0 + 4{,}3 + 3{,}5 + 4{,}8 + 2{,}1 + 2{,}1 + 4{,}8$

$+ 7{,}5 + 3{,}5) = \frac{41{,}5}{10} = 4{,}15$

Άρα $\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 1{,}84 \\ 4{,}15 \end{bmatrix}$

$\Sigma = E\left[(X - E[X]) \cdot (X - E[X])^T \right]$

$= \frac{1}{N} \left(\begin{bmatrix} x_{11} - \mu_1 \\ x_{12} - \mu_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} - \mu_1 & x_{12} - \mu_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} x_{N1} - \mu_1 \\ x_{N2} - \mu_2 \end{bmatrix} \right)$

$= \frac{1}{10} \left(\begin{bmatrix} 1{,}36 \\ -1{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}36 & -1{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}56 \\ 1{,}85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}56 & 1{,}85 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}14 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}14 & 0{,}15 \end{bmatrix} \right.$

$+ \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ -0{,}65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}06 & -0{,}65 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}65 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}64 \\ -2{,}05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}64 & -2{,}05 \end{bmatrix}$

$+ \begin{bmatrix} -0{,}34 \\ -2{,}05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}34 & -2{,}05 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}76 \\ 0{,}65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}76 & 0{,}65 \end{bmatrix} +$

$$\begin{bmatrix}2,36\\3,35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2,36 & 3,35\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3,34\\-0,65\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3,34 & -0,65\end{bmatrix}\Bigg)$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}21,37 & 11,931\\11,931 & 26,3\end{bmatrix}$$

Άρα $\Sigma=\begin{bmatrix}2,137 & 1,1931\\1,1931 & 2,63\end{bmatrix}$ +.ipynb

(b) $P(x_1,x_2)\neq p(x_1)\cdot p(x_2)$ Γιατί ο covariance matrix <u>δεν</u> είναι διαγώνιος πίνακας, άρα δεν ισχύει ότι τα x_1, x_2 είναι ανεξάρτητα.
Το σωστό είναι:

$$P(x_1,x_2)=N\left(\mu=[1,84,\ 4,15],\ \Sigma=\begin{bmatrix}2,14 & 1,194\\1,194 & 2,63\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\cdot|\Sigma|}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\cdot\Sigma^{-1}(X-\mu)}=\ldots$$