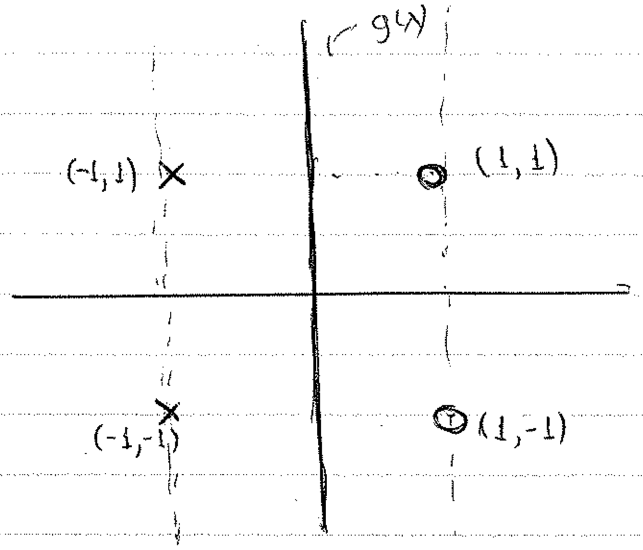
$\boxed{\text{Exercise 1}}$

(a)



$\boxed{\text{Exercise 2}}$ .ipynb

$\boxed{\text{Exercise 5}}$ .ipynb

Συνέχεια Exercise 1

$$J_1^*(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i x_j$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \frac{1}{2} \Big(\lambda_1^2 2 + \cancel{\lambda_1 \lambda_2 \cdot 0} + \lambda_1 \lambda_3 (-1) \cdot (-2) + \cancel{\lambda_1 \lambda_4 \cdot (-1) \cdot 0}$$

$$+ \cancel{\lambda_2 \lambda_1 0} + \lambda_2^2 \cdot 2 + \cancel{\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (-1)} \cdot 0 + \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot (-2) \cdot (-1)$$

$$+ \lambda_3 \cdot \lambda_1 (-1) \cdot (-2) + \cancel{\lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot (-1)} \cdot 0 + \lambda_3^2 \cdot 2 + \cancel{\lambda_3 \lambda_4 \cdot 0}$$

$$+ \cancel{\lambda_4 \cdot \lambda_1 \cdot (-1) \cdot 0} + \lambda_4 \cdot \lambda_2 \cdot (-1) \cdot (-2) + \cancel{\lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot 0} + 2\lambda_4^2$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2 - 2\lambda_1 \lambda_3 - 2\lambda_2 \lambda_4$$

$$\frac{\partial J_1^*(\lambda)}{\lambda_1} = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_3$$

$$\frac{\partial J_1^*(\lambda)}{\lambda_2} = 1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_4$$

$$\frac{\partial J_1^*(\lambda)}{\lambda_3} = 1 - 2\lambda_3 - 2\lambda_1$$

$$\frac{\partial J_1^*(\lambda)}{\lambda_4} = 1 - 2\lambda_4 - 2\lambda_2$$

Άρα για $\frac{\partial J_1^*(\lambda)}{\lambda_1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1-2\lambda_3}{2}$

και $\frac{\partial J_1^*(\lambda)}{\lambda_4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_4 = \frac{1-2\lambda_2}{2}$

Οπότε: $\theta = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i x_i$

$$= \frac{1-2\lambda_3}{2} \cdot (1) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot (1) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1-2\lambda_2}{2}\right) \cdot (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2\lambda_3 - 1}{2} \\ \frac{1-2\lambda_3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_2 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\lambda_2 - 1}{2} \\ \frac{2\lambda_2 - 1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cancel{\lambda_3} - \frac{1}{2} - \cancel{\lambda_3} \\ \frac{1}{2} - \cancel{\lambda_3} + \cancel{\lambda_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cancel{\lambda_2} - \frac{1}{2} - \cancel{\lambda_2} \\ \cancel{\lambda_2} - \frac{1}{2} - \cancel{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta$$

Παίρνουμε ένα support vector και το βάζουμε στην εξίσωση $\lambda_i [y_i(\theta^T \cdot x_i + \theta_0) - 1] = 0$ για να βρούμε το θ_0.

Άρα για x_1: $\left([-1 \ \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \theta_0 \right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\theta_0 = 0}$$

Συνεπώς η $f_\theta(.)$ της μορφής $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_0 = 0$ είναι η $-x_1 + 0x_2 + 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 0}$

Δηλαδή ο άξονας $y'y$ όπως εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε και από το σχήμα.

Exercise 3

(i) Τα σημεία της κλάσης 1:

$[x_1, x_2, x_3] = [0,0,0] \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow \theta_0 > 0$ (1)

$[x_1, x_2, x_3] = [1,1,1] \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_0 > 0$ (5)

(ii) Τα σημεία της κλάσης 0:

$[x_1, x_2, x_3] = [0,0,1] \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow \theta_3 + \theta_0 < 0$ (2)

$[x_1, x_2, x_3] = [0,1,0] \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow \theta_2 + \theta_0 < 0$ (3)

$[x_1, x_2, x_3] = [1,0,0] \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_0 < 0$ (4)

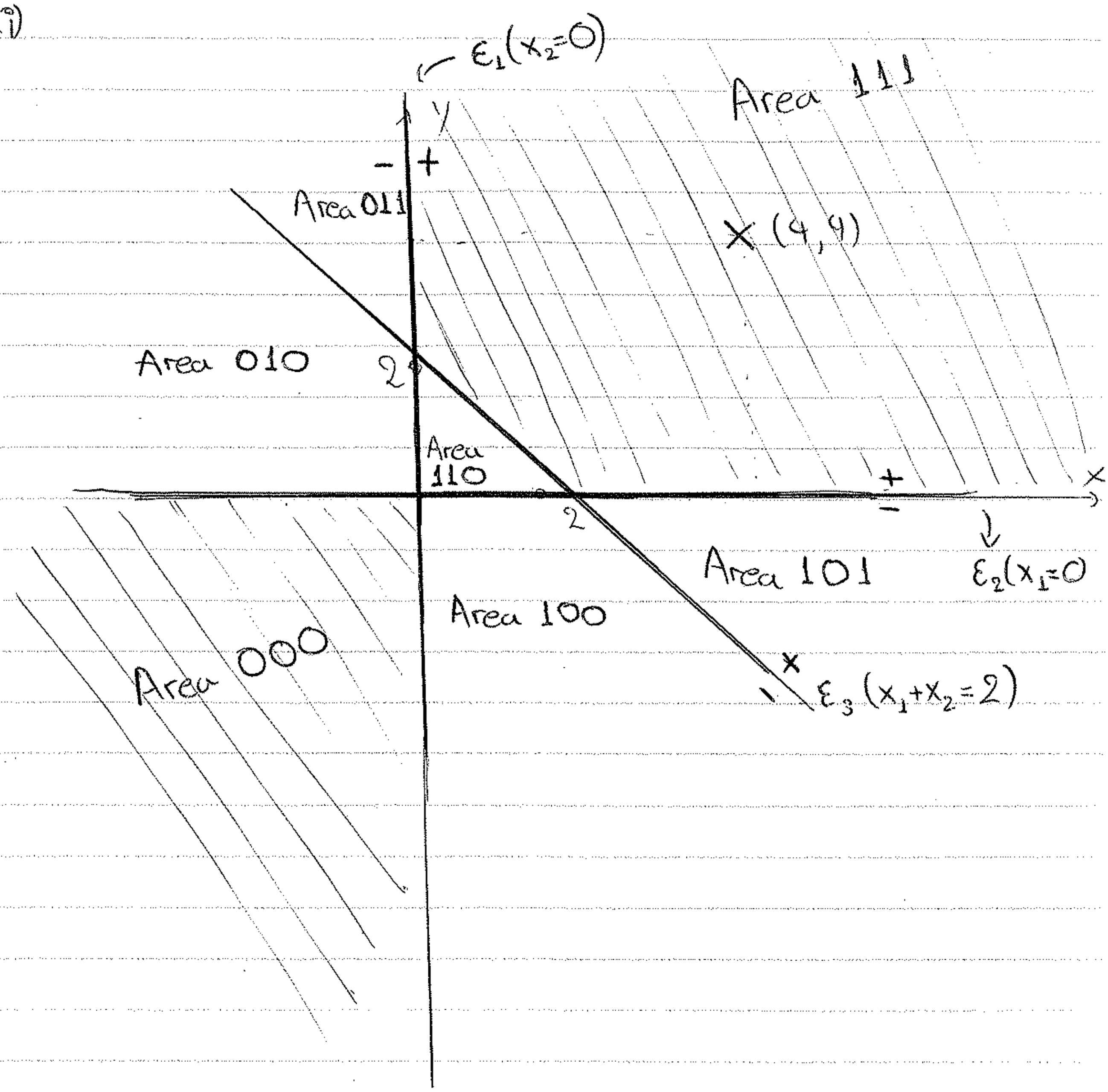
Από την (1) καταλήγουμε ότι και $\theta_1, \theta_2, \theta_3 < 0$

Άρα ξέρουμε ότι $\theta_0 < -\theta_1$

Συνεπώς $\theta_0 < -\theta_1 - \theta_2 - \theta_3$ Άτοπο
γιατί στην (5) είχαμε ότι $\theta_0 > -\theta_1 - \theta_2 - \theta_3$

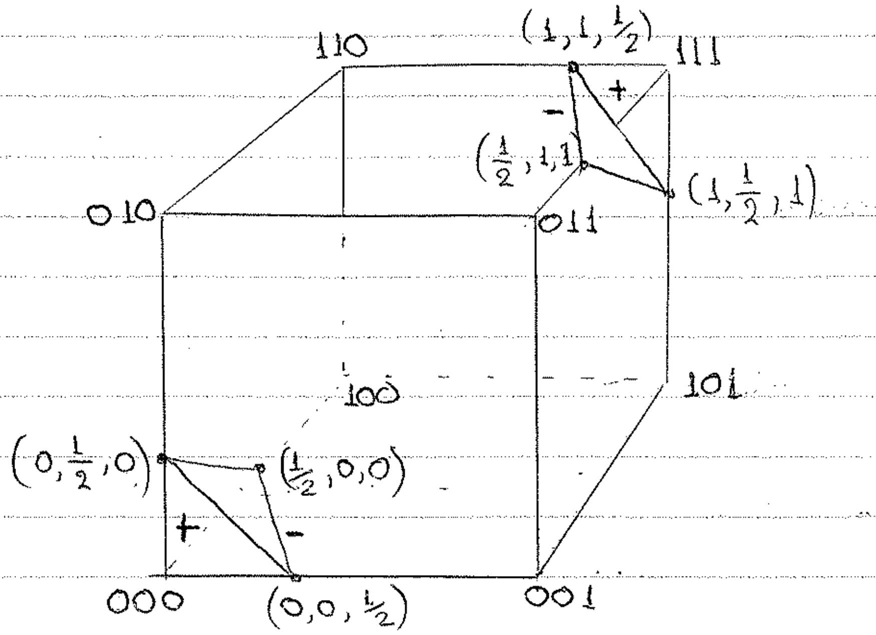
Exercise 4

(i)



Class 1 = Area 111 + Area 000

Class 2 = Area 011 + Area 010 + Area 110 + Area 100 + Area 101



Άρα το ένα υπερεπίπεδο είναι:

$P(0,\frac{1}{2},0)$, $Q(0,0,\frac{1}{2})$, $R(\frac{1}{2},0,0)$

η φόρμουλα είναι $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Όπου (x_0,y_0,z_0) είναι ένα σημείο στο επίπεδο.

$<a,b,c>$: ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

Άρα $\vec{v}_1 = \vec{PQ} = <(0-0),(0-\frac{1}{2}),(\frac{1}{2}-0)> = \boxed{<0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}>}$

$\vec{v}_2 = \vec{PR} = \boxed{<\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0>}$

οπότε: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = i(+\frac{1}{4}) - j(-\frac{1}{4}) + k(+\frac{1}{4})$

$= \frac{1}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{1}{4}k$

$\boxed{<\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}> = <a,b,c>}$

Άρα

$$\frac{1}{4}(x - x_0) + \frac{1}{4}(y - y_0) + \frac{1}{4}(z - z_0) = 0$$

Παίρνουμε ένα σημείο του επιπέδου (π.χ. το P) και η συνάρτηση του επιπέδου είναι:

$$\frac{1}{4}(x-0) + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x + y + z - \frac{1}{2} = 0} \quad (1)$$

Το δεύτερο επίπεδο υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο από τα σημεία:

$$C = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right),\ D = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right),\ K = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{CD} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

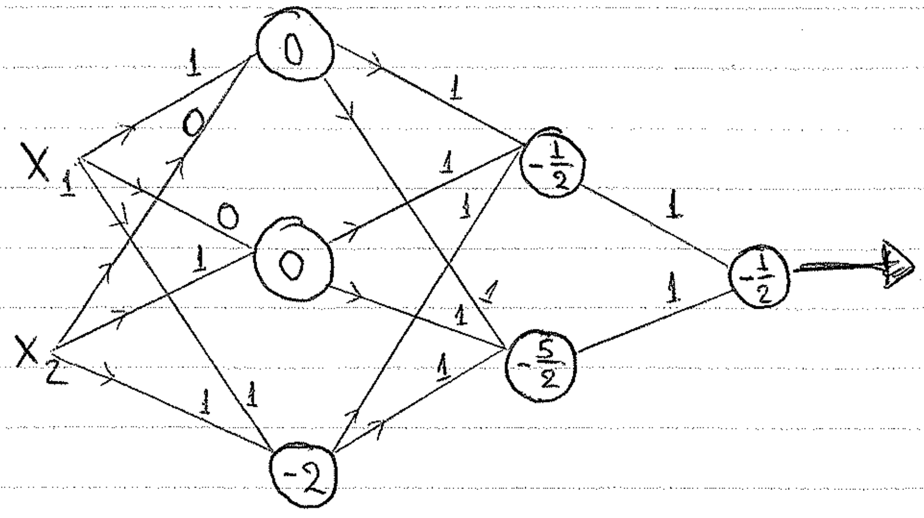
$$\vec{v}_4 = \vec{CK} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = i\left(+\frac{1}{4}\right) + j\frac{1}{4} + k\frac{1}{4}$$

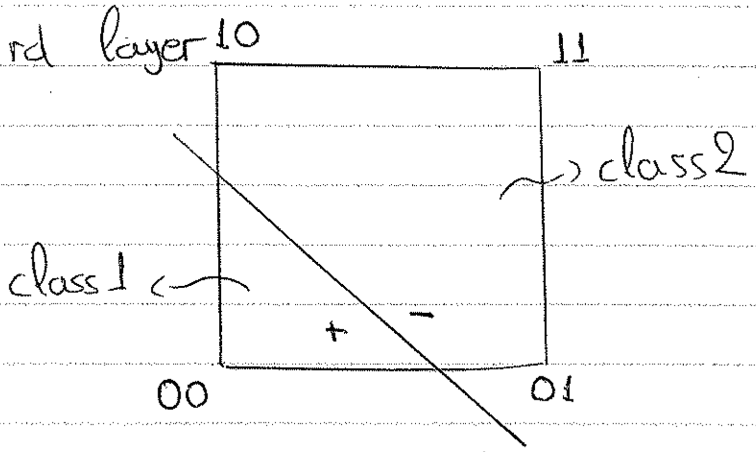
Άρα το υπερεπίπεδο είναι:

$$\frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1) + \frac{1}{4}\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x + y + z - \frac{5}{2} = 0} \quad (2)$$



3 rd layer



← ~~xxxxx~~ π.χ. $x_1 + x_2 - \frac{1}{2} = 0$