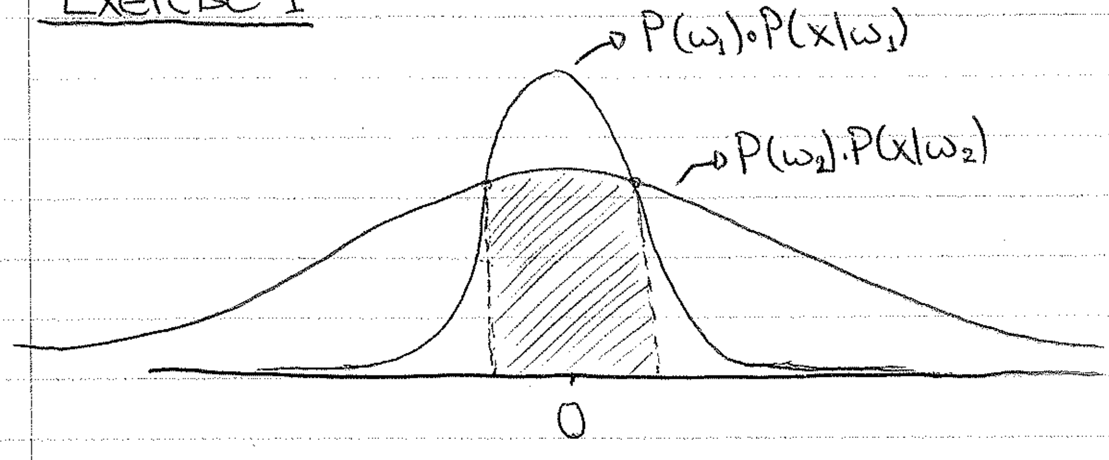
Exercise 1



Για να βρούμε τα σημεία που τέμνονται οι pdf θέλουμε:

$$P(\omega_1)\cdot P(x|\omega_1) = P(\omega_2)\cdot P(x|\omega_2)$$

Επειδή ξέρουμε ότι $P(\omega_1)=P(\omega_2)$ θέλουμε:

$$P(x|\omega_1) = P(x|\omega_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{20\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{20}} \overset{\times \ln}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\cdot \cancel{\ln e}^{1}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{20\pi}}\right) + \left(-\frac{x^2}{20}\cdot \cancel{\ln e}^{1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\ln 1}^{0} - \ln\sqrt{2\pi} - \frac{x^2}{2} = \cancel{\ln 1}^{0} - \ln\sqrt{20\pi} - \frac{x^2}{20} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\ln 2\pi - \frac{x^2}{\cancel{2}} = -\frac{1}{\cancel{2}}\ln 20\pi - \frac{x^2}{\cancel{20}\,10} \Leftrightarrow$$

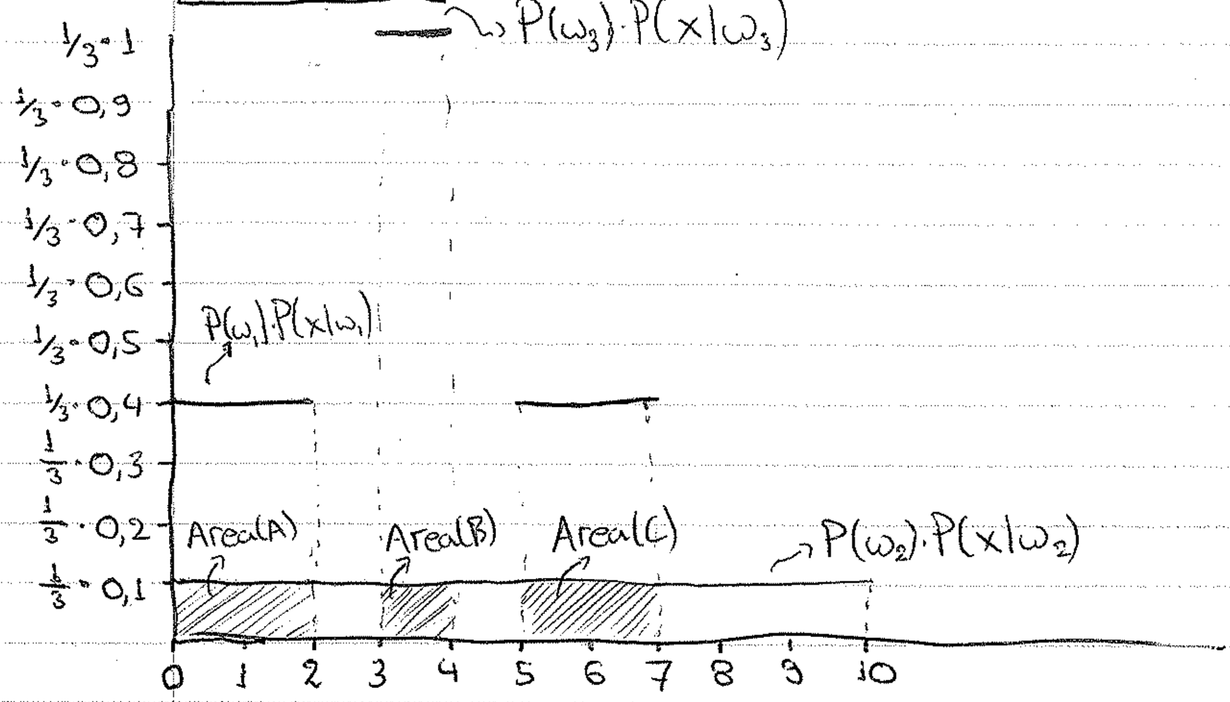
$$x^2 - \frac{x^2}{10} = \ln 20\pi - \ln 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{10}x^2 = \ln\frac{\cancel{20\pi}^{10}}{\cancel{2\pi}} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \frac{10}{9}\cdot \ln 10 \qquad \Leftrightarrow x = \pm 1{,}6$$

Άρα $R_1 = \{x : -1{,}6 \le x \le 1{,}6\}$
και $R_2 = \{x : -\infty \le x < -1{,}6 \cup 1{,}6 < x < +\infty\}$

$\boxed{\text{Exercise 2}}$



(a) (i) $x \in R_1 \, ((0<x<2) \cup (5<x<7))$

$x \in R_3 \, (3<x<4)$

$x \in R_2 \, ((2<x<3) \cup (4<x<5) \cup (7<x<10))$

(ii)

$$P_{error}(x) = \text{Area}(A) + \text{Area}(B) + \text{Area}(C)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{10}\,dx + \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{10}\,dx + \frac{1}{3}\int_5^7 \frac{1}{10}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\left([2-0]+[4-3]+[7-5]\right) = \cancel{5}\cdot\frac{1}{\cancel{30}6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

(iii) Για $x' = 3{,}5$ τότε $x \in R_3$ δηλαδή στην κλάση ω_3

(β)

(i) Θέλουμε

$$P(\omega_2)' \cdot P(x|\omega_2) > P(\omega_3)' \cdot P(x|\omega_3) \Leftrightarrow$$
$$P(\omega_2)' \cdot \frac{1}{10} > P(\omega_3)' \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{n_2}{\cancel{N}} > \frac{n_3}{\cancel{N}} \Leftrightarrow n_2 > 10 n_3$$

Άρα για να αναθέσουμε το $x' = 3,5$ στη κλάση ω_2 θα έπρεπε $P(\omega_2)'$ να είναι τουλάχιστον 10 φορές μεγαλύτερη από τη $P(\omega_3)'$.
Δηλαδή να έχουμε τουλάχιστον 10 φορές περισσότερα σημεία του ω_2 στο διάστημα $(3,4)$ από αυτά του ω_3.

(ii) Για $x' = 3,5$ $P(x=3,5|\omega_1) = 0$
Συνεπώς δεν υπάρχει prior πληροφορία με την οποία θα μπορούσαμε να αναθέσουμε το σημείο $x' = 3,5$ στην ω_1 γιατί το γινόμενο των πιθανοτήτων $P(\omega_1) \cdot P(x=3,5|\omega_1)$ θα ισούται πάντα με μηδέν.