Exercise 1

(a) ipynb

(b) ipynb

(c) Από το διάγραμμα στην python καταλαβαίνουμε ότι είναι μία συνάρτηση 3ου βαθμού του τύπου $y = \theta_0 + \theta_1 x^3 + \theta_2 x^2 + \theta_3 x$ $\quad f: R \to R$.
Εμπειρικά βλέπουμε ότι $y \approx 10x^3$.

(d) Θέλουμε να μετασχηματίσουμε τη συνάρτηση τρίτου βαθμού
σε περισσότερες διαστάσεις $(R \to R^3)$ ώστε να γίνεται γραμμικά διαχωρίσιμη από ένα υπερεπίπεδο.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Οπότε: $y = \theta_0' + \theta_1' \varphi_3(x) + \theta_2' \varphi_2(x) + \theta_3' \varphi_1(x) + n$

+ python ipynb

(e) python ipynb.

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 9,97 \\ 0,15 \\ 0,03 \end{bmatrix}$$

Exercise 2:

$$y = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 + 7x_1 + 5x_2 + n \qquad f: R^2 \to R$$

Μετασχηματισμός σε γραμμικό μοντέλο: από $R^2 \to R^4$

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \\ x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

Οπότε: $$y = \theta_0 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_4(x) + \theta_2 \cdot \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) + \theta_3 \cdot \phi_1(x) + \theta_4 \cdot \phi_3(x) + \theta_5$$

$f: R^4 \to R$

με $\theta \in R^6$

Exercise 3:

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 > (<) 3 \to \boldsymbol{x} \in \omega_1 (\omega_2)$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \\ \phi_5(x) \\ \phi_6(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$\theta_0 \phi_4(x) + \theta_1 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x) + \theta_3 \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) + \theta_4 \phi_2(x) \cdot \phi_3(x) + \theta_5 > (<) 3 \to \boldsymbol{x} \in \omega_1 (\omega_2)$$

Exercise 4

Sum rule:

διαφ. 24

Γνωρίζουμε ότι: $n_i^x = \sum_{j=1}^{n_y} n_{ij} \overset{n}{\Longleftrightarrow}$ διαιρούμε και τα δύο μέλη με n

$$\frac{n_i^x}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n_y} n_{ij}}{n} \Longleftrightarrow$$ ξέρουμε $P(x_i) = \frac{n_i^x}{n}$ και $P(x,y) = \frac{n_{ij}}{n}$ } διαφάνεια 23

$$\boxed{P(x) = \sum_{y \in Y} P(x,y)}$$

Product rule:

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $P(x,y) = P(x|y) \cdot P(y)$ ή $P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$

Θα πάρουμε το 2º μέλος και θα προσπαθήσουμε να φτάσουμε στο 1º.

$$\frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{n_{ij}/n}{n_j^y/n} = \frac{n_{ij} \cdot \cancel{n}}{n_j^y \cdot \cancel{n}} = \frac{n_{ij}}{n_j^y} = P(x|y) \circledast$$

(*) n_{ij} αριθμός επιτυχιών y μαζί με x, διά (n_j) αριθμός επιτυχιών y. Συνεπώς: $\frac{n_{ij}}{n_j} = P(x|y)$

Bayes rule:

Η πιθανότητα 2 γεγονότων A και B, $P(A \cap B)$, είναι η πιθανότητα του A, $P(A)$, πολλαπλασιασμένη με τη πιθανότητα του B δοθέντος του A, $P(B|A)$.
Άρα έχουμε: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ (1)

Αντιστοίχως: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ (2)

Απο (1),(2) έχουμε $P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \Leftrightarrow$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Exercise 5

(a)

$$A = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} 100 & 10 & 40 & 30 \\ 200 & 20 & 30 & 10 \\ 300 & 30 & 20 & 40 \\ 400 & 40 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Total = [1000, 100, 100, 100]

AVG = [250, 25, 25, 25]

$$\text{Covariance Matrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{Cov(x_1,x_1)}_{Var(x_1)} & Cov(x_1,x_2) & Cov(x_1,x_3) & Cov(x_1,x_4) \\ Cov(x_2,x_1) & Cov(x_2,x_2) & Cov(x_2,x_3) & Cov(x_2,x_4) \\ Cov(x_3,x_1) & Cov(x_3,x_2) & Cov(x_3,x_3) & Cov(x_3,x_4) \\ Cov(x_4,x_1) & Cov(x_4,x_2) & Cov(x_4,x_3) & Cov(x_4,x_4) \end{bmatrix}$$

$$Cov(x_i,x_j) = E\Big[\big(x_i - E[x_i]\big)\big(x_j - E[x_j]\big)\Big]$$

$$Cov(x_1,x_1) = Var(x_1) = \Big((100-250)^2 + (200-250)^2 + (300-250)^2 + (400-250)^2\Big)/(4-1)$$
$= 16.666,66$

$$Cov(x_1,x_2) = \frac{(100-250)(10-25)+(200-250)(20-25)+(300-250)(30-25)+(400-250)(40-25)}{3}$$

$= 1.666,66$

$$Cov(x_1,x_3) = \frac{(100-250)(40-25)+(200-250)(30-25)+(300-250)(20-25)+(400-250)(10-25)}{4-1}$$

$= -1.666,66$

$$Cov(x_1,x_4) = \frac{(100-250)(30-25)+(200-250)(10-25)+(300-250)(40-25)+(400-250)(20-25)}{3}$$

$= 0$

Αντιστοίχως: $Cov(x_2,x_2) = 166,66$, $Cov(x_1,x_2) = 1.666,66$,
$Cov(x_3,x_2) = -166,66$, $Cov(x_4,x_2) = 0$, ...

Συνεπώς:

$$A\_covariance = \begin{bmatrix} 16.666,66 & 1.666,6 & -1.666,66 & 0 \\ 1.666,66 & 166,66 & -166,66 & 0 \\ -1.666,66 & -166,66 & 166,66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 166,67 \end{bmatrix}$$

(b) Correlation matrix $\left(R_X = E[XX^T]\right)$

$$R_{x_1x_1} = \overset{\rightarrow Var(x_1)}{Cov(x_1,x_1)} + E(x_1)\cdot E(x_1^T) = 16.666,66 + 250*250$$
$$= 79166,67$$

$$R_{x_1x_2} = Cov(x_1,x_2) + E(x_1)\cdot E(x_2) = 7916,67$$

$$R_{x_1x_3} = Cov(x_1,x_3) + E(x_1)\cdot E(x_3) = 4.583,34$$

$$R_{x_1x_4} = 6250$$

$$R_{x_2x_3} = 453,39$$

$$R_{x_3x_3} = 791,66$$

$$R_{x_3x_4} = 625$$

$$R_{x_4x_4} = 791,67$$

$$\text{Correlation matrix } A = \begin{bmatrix} 79166,67 & 7916,66 & 4.583,33 & 6250 \\ 7916,66 & 791,66 & 458,33 & 625 \\ 4583,33 & 453,33 & 791,66 & 625 \\ 6250 & 625 & 625 & 791,66 \end{bmatrix}$$

(c) Correlation coefficient matrix:

$$cor(x_i, x_j) = \frac{cov(x_i, x_j)}{\sqrt{var(x_i)} \cdot \sqrt{var(x_j)}}$$

$$cor(x_1, x_1) = \frac{16.666,66}{\sqrt{16.666,66}\ \sqrt{16.666,66}} = 1$$

$$cor(x_1, x_2) = \frac{1.666,66}{\sqrt{16.666,66} \cdot \sqrt{166,66}} = \frac{1.666,66}{1.663,32} \approx 1$$

$$cor(x_1, x_3) = -1$$

$$cor(x_1, x_4) = 0$$

$$cor(x_2, x_3) = -1$$

$$cor(x_2, x_4) = 0$$

$$cor(x_3, x_4) = 0$$

$$\text{Corr. Coef.} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς: Από το correlation coefficient matrix μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε πως τα γνωρίσματα συσχετίζονται μεταξύ τους γιατί παίρνει μονάδες από -1 εώς 1. Όπως παρατηρούμε από τα αποτελέσματα κάποια γνωρίσματα είναι "τέλεια" θετικά συσχετισμένα (π.χ. $x_1 x_2$) κάποια άλλα πλήρως αρνητικά συσχετισμένα (π.χ. $x_1 x_3$, $x_2 x_3$) και τέλος το x_4 δεν σχετίζεται με κανένα γνώρισμα και η μεταβολή του είναι ανεξάρτητη.