Devoir Masion Logique Et Preuve

Romain Delpy

5 décembre 2020

Exercice 1:

1. dressons les tables de vérités de A et de A'

A	$\sim A$	$\sim\sim A$
V	F	V
F	V	F

   On observe que les valeurs de v(A) et de v(A') sont identiques.

2. Observons la valuation des hypothèses Γ et Γ' : prenons X une hypothèse de Γ, on a donc dans Γ' une hypothèse X', et v(X) = v(X'). Ainsi toutes les hypothèses de Γ' ont la même valuation que leur penchant dans Γ.
   Observons de plus que la validité du séquent Γ' ⊢ A' implique que quand toutes les hypothèses sont vraies, A' est vrai. Hors quand les hypothèses de Γ' sont vraies, alors les hypothèses de Γ le sont aussi. Aussi lorsque A' est vrai, alors A l'est aussi. Ainsi lorsque les hypothèses de Γ sont vraies, alors A est vrai.
   Ainsi si le séquent Γ' ⊢ A' est valide alors le séquent Γ ⊢A l'est aussi.

3. On Suppose le séquent Γ' ⊢ A' prouvable en logique intuitionniste, Il est donc prouvable en logique classique. Avant toute chose, prouvons en logique classique le séquent $\vdash P \Leftrightarrow \sim\sim P$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{(1)}
\UnaryInfC{$\vdash \sim\sim P \to P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{hyp}
\UnaryInfC{$P, P \to \bot \vdash P \to \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{hyp}
\UnaryInfC{$P, P \to \bot \vdash P$}
\RightLabel{mp}
\BinaryInfC{$P, P \to \bot \vdash \bot$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$\vdash P \to \sim\sim P$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\vdash P \leftrightarrow \sim\sim P$}
\end{prooftree}
$$

(1) :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{hyp}
\UnaryInfC{$\sim\sim P, \sim P \vdash \sim P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{hyp}
\UnaryInfC{$\sim\sim P, \sim P \vdash \sim\sim P$}
\RightLabel{abs}
\BinaryInfC{$\sim\sim P, \sim P \vdash P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{hyp}
\UnaryInfC{$\sim\sim P, P \vdash P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{exm_i}
\UnaryInfC{$\sim\sim P \vdash P \vee \sim P$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\sim\sim P \vdash P$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$\vdash \sim\sim P \to P$}
\end{prooftree}
$$

   Donc le séquent $\vdash P \Leftrightarrow \sim\sim P$ est valide en logique classique.
   De plus le séquent $\Gamma' \vdash A'$ est prouvable en logique intuitionniste, et donc poruvable en logique classique. Donc en appliquant le métha-théorème de remplacement avec le fait que tout élément de Γ' est équivalent à son penchant dans Γ et que A' est équivalent à A en logique classique, on a que le séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable en logique classique.

Exercice 2:

1. Montrons que les trois règles sont bien des règles dérivés de LK :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \sim A}\, exm_i \qquad \Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \sim A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\, \vee_e$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B \qquad \dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash A}\, hyp}{\Gamma \vdash A}\, \wedge_e$$

La troisième se montre par commutativité du $\wedge$ sur la deuxième.

2. Montrons que les deux règles sont bien des règles dérivés de LK' :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash A \to B \to C}\, \to_i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\, \wedge'_{e,d}}{\Gamma, A \vdash B}\, aff}{\Gamma \vdash A \to B}\, \to_i}{\Gamma \vdash C}\, mp$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \sim A \vdash \sim A}\, hyp}{\Gamma, \sim A \vdash A \vee \sim A}\, \vee_{i,2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\, hyp}{\Gamma, A \vdash A \vee \sim A}\, \vee_{i,1}}{\Gamma \vdash A \vee \sim A}\, exm_e$$

3. Soit S un séquent prouvable en LK. Toutes les règles de LK' dérivent de LK, ainsi le séquent S est prouvable avec le jeu de règle de LK', il est donc prouvable en LK'. On peut interchanger LK et LK' dans la proposition précédente, et ainsi tout séquent prouvable dans LK' est prouvable dans LK. On a donc bien un séquent est prouvable dans LK si et seulement si il est prouvable dans LK'.

Exercice 3:

cf dm.v

Exercice 4:

1. Voici la liste des traductions négatives des règles d'inférence de LK' :

   (a) introduction de l'implication :

   $$\dfrac{\Gamma, \sim\sim A \vdash \sim\sim B}{\Gamma \vdash \sim\sim (A \to B)}$$

   (b) modus ponens :

   $$\dfrac{\Gamma \vdash \sim\sim (A \to B) \qquad \Gamma \vdash \sim\sim A}{\Gamma \vdash \sim\sim B}$$

   (c) exfalso :

   $$\dfrac{\Gamma \vdash \sim\sim \bot}{\Gamma \vdash \sim\sim A}$$

(d) absurde :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim\sim A \qquad \Gamma \vdash \sim\sim (\sim A)}{\Gamma \vdash \sim\sim B}$$

(e) introduction de la négation :

$$\frac{\Gamma, \sim\sim A \vdash \sim\sim \bot}{\Gamma \vdash \sim\sim (\sim A)}$$

(f) introductions de la disjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim\sim A}{\Gamma \vdash \sim\sim (A \vee B)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sim\sim B}{\Gamma \vdash \sim\sim (A \vee B)}$$

(g) élimination de la disjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim\sim (A \vee B) \qquad \Gamma, \sim\sim A \vdash \sim\sim C \qquad \Gamma, \sim\sim B \vdash \sim\sim C}{\Gamma \vdash \sim\sim C}$$

(h) introduction de la conjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim\sim A \qquad \Gamma \vdash \sim\sim B}{\Gamma \vdash \sim\sim (A \wedge B)}$$

(i) éliminations de la conjonction bis :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim\sim (A \wedge B)}{\Gamma \vdash \sim\sim A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sim\sim (A \wedge B)}{\Gamma \vdash \sim\sim B}$$

(j) tiers exclu bis :

$$\frac{\Gamma, \sim\sim (\sim A) \vdash \sim\sim B \qquad \Gamma, \sim\sim A \vdash \sim\sim B}{\Gamma \vdash \sim\sim B}$$

2. cf dm.v

Exercice 5:

1. La règle d'inférence qui peut être utilisée à la racine d'un arbre de preuve de taille 1 dans LK' est la règle d'hypothèse.

2. Soit A une thèse, soit Γ un ensemble d'hypothèse. Supposons A$\in$ Γ. Prenons Γ'. Par définition, cela correspond à l'ensemble des hypothèses traduite en négation de l'ensemble Γ. Ainsi si A est dans Γ alors il sera traduit en négation (donc de la forme A') dans Γ'. On a donc A' $\in \Gamma'$.

3. On peut donc en conclure la propriété H_1 :
Pour tout séquent Γ $\vdash$A, si ce séquent admet un arbre de preuve de taille 1 dans le système LK', il possède à la racine une règle d'hypothèse. On a donc A$\in$ Γ, et de se fait A' $\in \Gamma'$.Alors sa traduction négative Γ' $\vdash$A' admet une preuve en logique intuitionniste (représenté par un arbre de taille 1 possédant une règle d'hypothèse à la racine).

4. Soit i le nombre de sous-arbres de $\mathcal{A}$. Notons B l'ensemble des sous-arbres de $\mathcal{A}$, et notons B_k chaque élément de B (avec k$\in[\![0; i]\!]$). Soit k$\in[\![0; i]\!]$. B_k est donc un arbre de preuve de taille au plus n. Ainsi d'après (H_n) on donc a que la traduction négative de l'arbre B_k, noté B'_k est prouvable en logique intuitionniste. Ainsi toutes les sous-arbres de $\mathcal{A}$ peuvent subir la traduction de la négation.
   Maintenant Observons la racine de $\mathcal{A}$. la règle d'inférence qui y est appliqué appartient aux règles de LK'. Ainsi on sait que ces règles ont des traductions en négation qui sont des règles dérivés de la logique intuitionniste. On peut donc appliquer la traduction en négation sur la racine de $\mathcal{A}$, et sur toutes ses sous-arbres, et on aura un arbre de preuve en logique intuitionniste avec comme séquent à la racine $\Gamma' \vdash A'$.
   Ainsi le séquent $\Gamma' \vdash A'$ est prouvable en logique intuitionniste.

5. Dans la partie 2, on a prouvé qu'un séquent était prouvable en logique classique si et seulement si il est prouvable dans LK'. dans cette partie on a prouvé que tout séquent prouvable dans LK' a sa traduction négative prouvable dans la logique intuitionniste.
   Ainsi tout séquent prouvable en logique classique a sa traduction négative prouvable en logique intuitionniste.