第 2 节 根据分段函数的单调性求参

内容提要

本节解决一类问题：给出分段函数在整个定义域上的单调性，让求参数的取值范围.

这类题考虑两点即可：①每一段的单调性；②分段点左右两侧的大小.

典型例题

【例题】已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x,x>1\\(4-\dfrac{a}{2})x+2,x\le 1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(1,+\infty)$　　（B）$[4,8)$　　（C）$(4,8)$　　（D）$(1,8)$

答案：B

解析：分段函数整体单调，分别考虑每一段的单调性，以及间断点处的拼接情况即可，

首先，$f(x)$ 在两段上均↗，所以 $\begin{cases}a>1\\4-\dfrac{a}{2}>0\end{cases}$，解得：$1<a<8$；

其次，间断点处，应有 $4-\dfrac{a}{2}+2\le a$，解得：$a\ge 4$，故实数 a 的取值范围为 $[4,8)$.

【变式 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax-1,x\le 1\\\ln(2x^2-ax),x>1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是.

答案：$(0,1]$

解析：本题因为 $x>1$ 那一段有对数，先考虑定义域的要求，对任意的 $x\in(1,+\infty)$，都有 $2x^2-ax>0$，所以 $2x-a>0$，从而 $a<2x$，显然 $2x$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$，故 $a\le 2$；

再考虑 $f(x)$ 两段各自为增函数，应有 $\begin{cases}a>0\\\dfrac{a}{4}\le 1\end{cases}$，所以 $0<a\le 4$，结合 $a\le 2$ 可得 $0<a\le 2$；

最后考虑间断点处左右两侧的要求，应有 $a-1\le\ln(2-a)$，所以 $a-1-\ln(2-a)\le 0$ ①，

$a=2$ 不满足不等式①，故只需在 $(0,2)$ 上求解不等式①，对于超越不等式或超越方程，若能判断单调性，观察出根，则可据此求得结果，

注意到函数 $\varphi(a)=a-1-\ln(2-a)$ 在 $(0,2)$ 上↗，且 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(a)\le 0\Leftrightarrow 0<a\le 1$.

【变式 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}(4-a)x-5,x\le 8\\a^{x-8},x>8\end{cases}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围为.

答案：$(3,4)$

解析：$\{a_n\}$ 是递增数列 $\Rightarrow a_n<a_{n+1}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立 $\Rightarrow f(n)<f(n+1)$ 恒成立，

除了 $f(x)$ 在两段上要分别↗外，此处由于是数列 $\{f(n)\}$ ↗，所以间断点处只需 $f(8)<f(9)$ 即可，

从而应有$\begin{cases}4-a>0\\a>1\\8(4-a)-5<a\end{cases}$，解得：$3<a<4$.

强化训练

1.（2022 • 甘肃模拟 • ★★）若函数$f(x)=\begin{cases}(a-1)x-2a,x<2\\\log_a x,x\ge 2\end{cases}$在 **R** 上单调递减，则实数 a 的取值范围为.

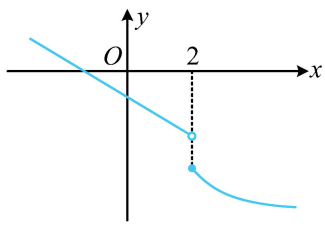
答案： $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

解析： 先考虑两段分别↘，当$x<2$时，$f(x)=(a-1)x-2a$要↘，应有$a-1<0$，所以$a<1$ ①；

当$x\ge 2$时，$f(x)=\log_a x$要↘，应有$0<a<1$ ②；

再考虑间断点处的拼接情况，如图，应有$(a-1)\cdot 2-2a\ge\log_a 2$，所以$\log_a 2\le -2=\log_a\frac{1}{a^2}$③，

由①②可得$0<a<1$，所以③等价于$\frac{1}{a^2}\le 2$，故$\frac{\sqrt{2}}{2}\le a<1$.



2.（2022 •安徽期中 •★★）若函数$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+\frac{a}{2},x\ge 1\\(2a+2)x-5,x<1\end{cases}$在 **R** 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-1,\frac{8}{5})$　　（B）$(-1,\frac{8}{5}]$　　（C）$(-1,2]$　　（D）$(-1,2)$

答案： B

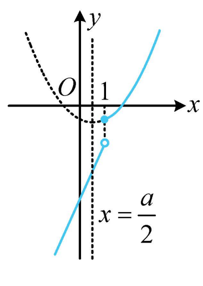
解析： 先让两段分别↗，当$x\ge 1$时，$f(x)=x^2-ax+\frac{a}{2}$要单调递增，

对称轴$x=\frac{a}{2}$应在 1 的左侧，所以$\frac{a}{2}\le 1$，故$a\le 2$ ①；

当$x<1$时，$f(x)=(2a+2)x-5$要单调递增，应有$2a+2>0$，所以$a>-1$ ②；

再考虑间断点处的拼接情况，如图，应有$1-\frac{a}{2}\ge 2a-3$，所以$a\le\frac{8}{5}$ ③；

综合①②③可得$-1<a\le\frac{8}{5}$.



3．（2021•淮安期末•★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-a+3|,x\ge 1\\ \log_a x,0<x<1\end{cases}$ 在 **R** 上是单调增函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$0<a<1$　　（B）$3<a<6$　　（C）$1<a\le 4$　　（D）$1<a\le 2$

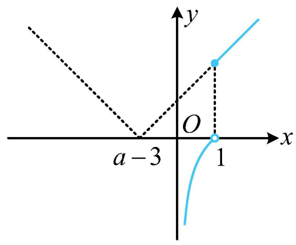
答案：C

解析：先让两段分别↗，当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=|x-a+3|$ 要↗，如图，$a-3$ 应在 1 左侧，

所以 $a-3\le 1$，故 $a\le 4$ ①；

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 要↗，应有 $a>1$ ②；

再考虑间断点处的拼接情况，如图，应有 $|1-a+3|\ge \log_a 1$，显然成立，结合①②可得 $1<a\le 4$．



4．（2022•达州二诊•★★★）已知单调递增的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}m^{n-9},n\ge 10\\ (\frac{2m}{9}+1)n-21,n<10\end{cases}$，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$[12,+\infty)$　　（B）$(1,12)$　　（C）$(1,9)$　　（D）$[9,+\infty)$

答案：B

解析：先要保证 $\{a_n\}$ 在两段上都单调递增，应有 $\begin{cases}m>1\\ \frac{2m}{9}+1>0\end{cases}$，所以 $m>1$；

其次，在分段处，应满足 $a_9<a_{10}$，所以 $(\frac{2m}{9}+1)\times 9-21<m$，解得：$m<12$，故 $1<m<12$．