

## 第2节 复合函数不等式问题 (★★★★)

### 内容提要

含有  $f(f(x))$ 、 $f(g(x))$  这类结构的不等式称为复合函数不等式，类似于上一节，复合函数不等式问题依然首选换元法求解，将内层的函数整体换元成  $t$ ，将一个双层的不等式问题化归成两个单层的不等式问题来处理。

### 典型例题

【例题】设函数  $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$ ，若  $f(f(x)) \geq 0$ ，则实数  $x$  的取值范围为 ( )

- (A)  $[-2, 2]$  (B)  $[-2, 2 + \sqrt{2}] \cup [4, +\infty)$  (C)  $[-2, 2 + \sqrt{2}]$  (D)  $[-2, 2] \cup [4, +\infty)$

【变式1】设函数  $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$ ，则不等式  $f(f(x)) - f(x) + 1 \leq 0$  的解集为。

【变式2】设函数  $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$ ， $g(x) = 4^x - a \cdot 2^x + 4 (a \in \mathbf{R})$ ，若  $f(g(x)) \geq 3$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立，

则  $a$  的取值范围为。

【例2】已知偶函数  $f(x)$  满足  $f(x+4) = f(4-x)$ ，且当  $x \in [0, 4]$  时， $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ ，若关于  $x$  的不等式  $f^2(x) - af(x) > 0$  在  $[-8, 8]$  上有且仅有 12 个整数解，则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- (A)  $[4e^{-2}, 3e^{-\frac{3}{2}})$  (B)  $[e^{-\frac{1}{2}}, 3e^{-\frac{3}{2}})$  (C)  $[3e^{-\frac{3}{2}}, 2e^{-1})$  (D)  $[4e^{-2}, e^{-\frac{1}{2}})$

### 强化训练

1. (★★) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 1 \\ x^3 + x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 则不等式  $f(f(x)) < 2$  的解集为.

2. (2022 · 成都模拟 · ★★★) 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ , 若  $f(f(x)) \leq 2$ , 则实数  $x$  的取值范围为.

3. (★★★★) 设  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1 \\ x^3 + x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = e^x - a(x+1) + 1$ , 若  $f(g(x)) \geq 1$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为.

4. (★★★★★) 已知偶函数  $f(x)$  满足  $f(x+3) = f(3-x)$ , 且当  $x \in [0, 3]$  时,  $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ , 若关于  $x$  的不等式  $f^2(x) - tf(x) > 0$  在  $[-150, 150]$  上有且仅有 150 个整数解, 则实数  $t$  的取值范围是 ( )

- (A)  $(0, e^{-\frac{1}{2}})$       (B)  $[e^{-\frac{1}{2}}, 3e^{-\frac{3}{2}})$       (C)  $(3e^{-\frac{3}{2}}, 2e^{-1})$       (D)  $(e^{-\frac{1}{2}}, 2e^{-1})$