

第3节 比较指、对数的大小：构造函数

内容提要

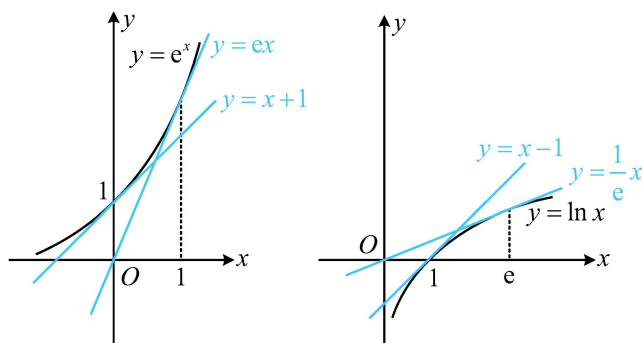
本节内容高考考得较难，所以本节诸多题目难度较高.

有的比较大小的题，所给数据非常接近，不易于通过简单的估算，或找一些中间量来比较大小，需要通过构造函数来解决问题，常见的题型可分为两类：

1. 基于结构：要比较的数据结构相同，或可以通过变形化为相同（有的需要简单放缩），我们可以从结构出发，构造函数比较大小.
2. 基于数字：要比较的数据结构不同，但某个数字多次重复出现，这种情况我们可以考虑把重复出现的数字换成 x ，构造函数比较大小.

提醒：本节解析中用到了一些常用的切线放缩不等式，如 $e^x \geq x+1$ ， $e^x \geq ex$ ， $\ln x \leq x-1$ ， $\ln(x+1) \leq x$ ， $\ln x \leq \frac{1}{e}x$

等，这些不等式证明都不复杂，也有清晰的图形背景（见下图），在本节后续的解析中，这些不等式都直接使用，不会给出证明.



典型例题

【例1】设 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$ ， $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$ ， $c = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系为（ ）

- (A) $c > a > b$ (B) $c > b > a$ (C) $a > c > b$ (D) $a > b > c$

【例2】已知 $a = \frac{\ln 3}{3}$ ， $b = \frac{\ln 2}{2}$ ， $c = \frac{1}{e}$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系为（ ）

- (A) $a > c > b$ (B) $b > c > a$ (C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$

【例 3】(2020 · 新课标 I 卷) 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则 ()

- (A) $a > 2b$ (B) $a < 2b$ (C) $a > b^2$ (D) $a < b^2$

【例 4】(2022 · 全国甲卷) 已知 $9^m = 10$, $a = 10^m - 11$, $b = 8^m - 9$, 则 ()

- (A) $a > 0 > b$ (B) $a > b > 0$ (C) $b > a > 0$ (D) $b > 0 > a$

【例 4】(2022 · 新高考 I 卷) 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则 ()

- (A) $a < b < c$ (B) $c < b < a$ (C) $c < a < b$ (D) $a < c < b$

强化训练

1. (2022 · 浙江月考 · ★★) 已知 $a = 2^{\frac{4}{5}}$, $b = 4^{\frac{2}{7}}$, $c = 25^{\frac{1}{5}}$, 则 ()

- (A) $b < a < c$ (B) $a < b < c$ (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

2. (2021 · 成都七中校级月考 · ★★★★★) 已知 $a = \log_{0.08} 0.04$, $b = \log_{0.3} 0.2$, $c = 0.3^{0.04}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为 ()

- (A) $c > b > a$ (B) $b > a > c$ (C) $b > c > a$ (D) $c > a > b$

3. (2022 · 重庆月考 · ★★★★★) 已知 $a = \frac{11}{10}$, $b = \ln 2$, $c = e^{\frac{1}{10}}$, 则 ()

- (A) $c > a > b$ (B) $a > c > b$ (C) $c > b > a$ (D) $a > b > c$

4. (2022 · 郑州模拟 · ★★★) 已知 $a = e^{0.3}$, $b = \frac{\ln 1.5}{2} + 1$, $c = \sqrt{1.5}$, 则 ()

- (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $c > b > a$

5. (2022 · 郑州月考 · ★★★★★) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $(a+1)^{b+1} = (b+3)^a$, 则 ()

- (A) $a > b+1$ (B) $a < b+1$ (C) $a < b-1$ (D) $a > b-1$

6. (2022 · 全国甲卷 · ★★★★★) 已知 $a = \frac{31}{32}$, $b = \cos \frac{1}{4}$, $c = 4 \sin \frac{1}{4}$, 则 ()

- (A) $c > b > a$ (B) $b > a > c$ (C) $a > b > c$ (D) $a > c > b$

7. (2021 · 全国乙卷 · ★★★★★) 设 $a = 2 \ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ()

- (A) $a < b < c$ (B) $b < c < a$ (C) $b < a < c$ (D) $c < a < b$