第 3 节 诱导公式（★★）

内容提要

1．诱导公式主要用于化掉 $\sin(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$、$\cos(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$、$\tan(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$ 这类三角代数式中的 $\frac{k\pi}{2}$ 这个部分.

2．诱导公式的口诀：奇变偶不变，符号看象限；需要注意两点：

①奇变偶不变指要化掉的若是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，则函数名正弦变余弦，余弦变正弦；偶数倍则不变；

②符号看象限，是看原来的三角函数名在对应象限的符号，例如，对 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ 化简时，符号看象限，看的是 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 这个第二象限的角的余弦值的符号，显然为负，所以添负号，得到 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$.

典型例题

【例 1】$\sin 600^\circ=$.

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解法 1：$\sin 600^\circ=\sin(540^\circ+60^\circ)$，接下来用诱导公式化掉 540°，

首先，“奇变偶不变”，540° 是 90° 的 6 倍，属偶数倍，所以“偶不变”，化去 540° 后函数名仍为“sin”；其次，“符号看象限”，将 60° 看成锐角，$540^\circ+$锐角在第三象限，正弦为负，所以添个负号，

故 $\sin 600^\circ=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2：也可在 600° 上先减 720°，再用 $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ 求值，

$\sin 600^\circ=\sin(600^\circ-720^\circ)=\sin(-120^\circ)=-\sin 120^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【变式 1】设 $\cos 29^\circ=m$，则 $\sin 241^\circ\tan 151^\circ=$（　　）

（A）$\sqrt{1+m^2}$　（B）$\sqrt{1-m^2}$　（C）$-\sqrt{1+m^2}$　（D）$-\sqrt{1-m^2}$

答案：B

解析：已知的是 $\cos 29^\circ$，所以把 241° 和 151° 用诱导公式向 29° 转化，$241^\circ=270^\circ-29^\circ$，$151^\circ=180^\circ-29^\circ$，

$\sin 241^\circ\tan 151^\circ=\sin(270^\circ-29^\circ)\tan(180^\circ-29^\circ)=-\cos 29^\circ(-\tan 29^\circ)=\sin 29^\circ=\sqrt{1-\cos^2 29^\circ}=\sqrt{1-m^2}$.

【变式 2】已知 $f(x)=\dfrac{\sin(2\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\cos(3\pi-x)\sin(\frac{11\pi}{2}-x)}$，则 $f(-\frac{21\pi}{4})=$.

答案：-1

解析：所给解析式中 2π、$\frac{3\pi}{2}$、3π、$\frac{11\pi}{2}$ 均为 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍，可用诱导公式将其化简，再求值，

由题意，$f(x)=\dfrac{\sin(2\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\cos(3\pi-x)\sin(\frac{11\pi}{2}-x)}=\dfrac{-\sin x\sin x}{-\cos x(-\cos x)}=-\tan^2 x$，

而 $\tan(-\frac{21\pi}{4})=\tan(-5\pi-\frac{\pi}{4})=\tan(-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$，所以 $f(-\frac{21\pi}{4})=-\tan^2(-\frac{21\pi}{4})=-(-1)^2=-1$.

【变式 3】已知 $A=\frac{\sin(k\pi+\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\cos(k\pi+\alpha)}{\cos\alpha}(k\in\mathbf{Z})$，则 A 的值构成的集合是.

答案：$\{2,-2\}$

解析：表达式中的 $k\pi$ 可用诱导公式化掉，若 k 为偶数，则 $k\pi$ 是 2π 的整数倍，可直接去掉；若 k 为奇数，则可以通过加上 2π 的整数倍，将 $k\pi$ 变成 π，这两种情况化出的结果不同，故分奇偶讨论，

当 k 为偶数时，设 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$，则 $A=\frac{\sin(2m\pi+\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\cos(2m\pi+\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=2$；

当 k 为奇数时，设 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$，则 $A=\frac{\sin[(2n+1)\pi+\alpha]}{\sin\alpha}+\frac{\cos[(2n+1)\pi+\alpha]}{\cos\alpha}$

$=\frac{\sin(2n\pi+\pi+\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\cos(2n\pi+\pi+\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha}=-2$；

综上所述，A 的值构成的集合是 $\{2,-2\}$.

【反思】从上面的求解过程可以总结出 $\sin(k\pi+\alpha)=(-1)^k\sin\alpha$，$\cos(k\pi+\alpha)=(-1)^k\cos\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

【变式 4】$\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cos3^\circ+\cdots+\cos180^\circ=$.

答案：-1

解析：所给的表达式中，像 $\cos1^\circ$，$\cos2^\circ$ 这些项都无法单独求出，只能考虑与其它项结合计算，注意到 $\cos1^\circ+\cos179^\circ=\cos1^\circ+\cos(180^\circ-1^\circ)=\cos1^\circ+(-\cos1^\circ)=0$，同理，$\cos2^\circ+\cos178^\circ=0$，$\cos3^\circ+\cos177^\circ=0$ 等等，所以采取两两组合的方法计算，为了更清晰地呈现计算过程，我们用倒序相加法，

记 $S=\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cos3^\circ+\cdots+\cos179^\circ$，则 $S=\cos179^\circ+\cos178^\circ+\cos177^\circ+\cdots+\cos1^\circ$，

两式相加可得 $2S=(\cos1^\circ+\cos179^\circ)+(\cos2^\circ+\cos178^\circ)+(\cos3^\circ+\cos177^\circ)+\cdots+(\cos179^\circ+\cos1^\circ)=0$，

所以 $S=0$，故 $\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cos3^\circ+\cdots+\cos180^\circ=S+\cos180^\circ=\cos180^\circ=-1$.

【例 2】已知 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）$\frac{4}{3}$（B）$\frac{3}{4}$（C）$-\frac{3}{4}$（D）$\pm\frac{3}{4}$

答案：B

解析：看到 $\frac{\pi}{2}+\alpha$，先用诱导公式把 $\frac{\pi}{2}$ 化掉，$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

又 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha<0$，从而 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$.

【变式 1】已知 $\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{2}{3}$，则 $\sin(\alpha-\frac{2\pi}{3})=$.

答案：$-\frac{2}{3}$

解析：给值求值问题，应先寻找已知角和求值角的联系，可将已知的角换元成 t，代入求值的角来看，

设 $t=\frac{\pi}{6}-\alpha$，则 $\alpha=\frac{\pi}{6}-t$，且 $\cos t=\frac{2}{3}$，所以 $\sin(\alpha-\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{6}-t-\frac{2\pi}{3})=\sin(-\frac{\pi}{2}-t)=-\cos t=-\frac{2}{3}$.

【反思】给值求值问题，不要盲目地将已知条件展开，可将已知的角换元，将求值的角用新元来表示，可迅速发现求值的角与已知角的关系.

【变式2】已知 $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=$.

答案：$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：先将已知的角 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ 换元，设 $t=\frac{\pi}{6}+\alpha$，则 $\alpha=t-\frac{\pi}{6}$，且 $\sin t=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=\sin(\frac{2\pi}{3}+t-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t$，

已知 $\sin t$ 求 $\cos t$，得研究 t 的范围，才能确定开平方该取正还是取负，

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $t\in(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6})$，从而 $\cos t<0$，故 $\cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，即 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

强化训练

1.（2022·北京东城区模拟·★★）若 α 为任意角，则满足 $\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=-\cos\alpha$ 的一个 k 的值为（　　）

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8

答案：B

解析：A 项，当 $k=2$ 时，$\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+2\times\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$，故 A 项错误；

B 项，当 $k=4$ 时，$\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+4\times\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$，故 B 项正确；

C 项，当 $k=6$ 时，$\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+6\times\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+\frac{3\pi}{2})=\sin\alpha$，故 C 项错误；

D 项，当 $k=8$ 时，$\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+8\times\frac{\pi}{4})=\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$，故 D 项错误.

2.（2022·成都模拟·★★）已知 $\tan\theta=2$，则 $\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=$.

答案：-2

解析：$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=\frac{\cos\theta-(-\cos\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{2}{1-\tan\theta}=-2$.

3.（2022·襄阳模拟·★★）已知函数 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$，且 $f(3)=3$，则 $f(2022)$ 的值为（）

（A）-1　（B）1　（C）3　（D）-3

答案：D

解析：本题无法求出 a、b、α、β，故先看看由 $f(3)=3$ 能得到什么，和 $f(2022)$ 又有什么关系，

由题意，$f(3)=a\sin(3\pi+\alpha)+b\cos(3\pi+\beta)=-a\sin\alpha-b\cos\alpha=3$，所以 $a\sin\alpha+b\cos\beta=-3$，

故 $f(2022)=a\sin(2022\pi+\alpha)+b\cos(2022\pi+\beta)=a\sin\alpha+b\cos\beta=-3$.

4.（2021·北京卷·★★★）若点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$，则 θ 的一个取值为.

答案：$\frac{5\pi}{12}$（答案不唯一，详见解析）

解法 1：A、B 两点关于 y 轴对称，它们的坐标是有关系的，先把这个关系翻译出来，

由题意，$\begin{cases}\cos\theta=-\cos(\theta+\frac{\pi}{6})\\ \sin\theta=\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\end{cases}$，由诱导公式，$\begin{cases}\cos\alpha=-\cos(\pi-\alpha)\\ \sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)\end{cases}$，

对比上面的两组关系发现可令 $\begin{cases}\theta=\alpha\\ \theta+\frac{\pi}{6}=\pi-\alpha\end{cases}$，解得：$\theta=\frac{5\pi}{12}$.

解法 2：得到 $\begin{cases}\cos\theta=-\cos(\theta+\frac{\pi}{6})\\ \sin\theta=\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\end{cases}$ 这一组关系式后，解法 1 其实并没有求出所有满足题意的 θ，若想进一步求出所有的 θ，可将这两个式子的右侧展开来分析，

因为 $\cos\theta=-\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$，所以 $\cos\theta=-(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)$，整理得：$\tan\theta=2+\sqrt{3}$，

将 $\sin\theta=\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$ 的右侧展开，最终也得到 $\tan\theta=2+\sqrt{3}$，所以满足 $\tan\theta=2+\sqrt{3}$ 的 θ 都符合题意，

事实上，$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}=2+\sqrt{3}$，所以 θ 可取 $\frac{5\pi}{12}$，

再结合 $\tan(k\pi+\theta)=\tan\theta(k\in\mathbf{Z})$ 可得 $\theta=k\pi+\frac{5\pi}{12}$.

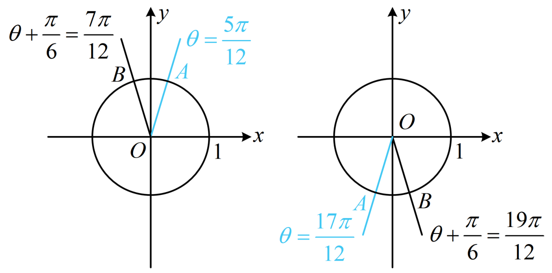
解法 3：由三角函数定义，点 A 和 B 就是 θ 和 $\theta+\frac{\pi}{6}$ 与单位圆的交点，故也可直接画图分析，

因为 A、B 两点关于 y 轴对称，所以 θ 和 $\theta+\frac{\pi}{6}$ 的终边也关于 y 轴对称，

如图，在 $[0,2\pi)$ 这个范围内，θ 可取 $\frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{17\pi}{12}$，

在这两个值上加 2π 的整数倍，不改变终边的位置，所以 $\theta=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ 或 $\frac{17\pi}{12}+2k\pi$，

注意到 $\frac{17\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}+\pi$，所以这两种结果也可以统一写成 $\theta=\frac{5\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.



5．（★★）计算：

（1）$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ=$；（2）$\frac{\lg(\tan 1^\circ)+\lg(\tan 2^\circ)+\cdots+\lg(\tan 89^\circ)}{\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ}=$.

答案：（1）$\frac{89}{2}$；（2）0

解析：（1）$\sin^2 1^\circ$，$\sin^2 2^\circ$等无法直接计算，考虑组合计算，注意到$\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ=\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ=1$，类似的，$\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ=\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ=1$，…，计算的方法就出来了，

记$S=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ$ ①，

因为$\sin 1^\circ=\sin(90^\circ-89^\circ)=\cos 89^\circ$，$\sin 2^\circ=\sin(90^\circ-88^\circ)=\cos 88^\circ$，…，$\sin 89^\circ=\sin(90^\circ-1^\circ)=\cos 1^\circ$，

代入式①得：$S=\cos^2 89^\circ+\cos^2 88^\circ+\cos^2 87^\circ+\cdots+\cos^2 1^\circ=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ$ ②，

所以①+②可得：$2S=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+\cdots+(\sin^2 89^\circ+\cos^2 89^\circ)=89$，故$S=\frac{89}{2}$.

（2）先用对数的运算性质将分子合并，$\lg(\tan 1^\circ)+\lg(\tan 2^\circ)+\cdots+\lg(\tan 89^\circ)=\lg(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ)$，

因为$\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ=\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\cdot\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\cdots\frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ}=\frac{\sin 1^\circ}{\sin 89^\circ}\cdot\frac{\sin 2^\circ}{\sin 88^\circ}\cdots\frac{\sin 89^\circ}{\sin 1^\circ}=1$，

所以$\lg(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ)=\lg 1=0$，故原式$=0$.

6．（2022·自贡期末·★★）已知$\sin(\frac{\pi}{5}-x)=\frac{3}{5}$，则$\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=$.

答案：$-\frac{3}{5}$

解析：给值求值问题，先将已知的角换元，设$t=\frac{\pi}{5}-x$，则$x=\frac{\pi}{5}-t$，且$\sin t=\frac{3}{5}$，

所以$\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=\cos[\frac{7\pi}{10}-(\frac{\pi}{5}-t)]=\cos(\frac{\pi}{2}+t)=-\sin t=-\frac{3}{5}$.

7．（2022·湖南模拟·★★）已知$\cos(\frac{5\pi}{12}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则$\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=$（　）

（A）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$（B）$\frac{1}{3}$（C）$-\frac{1}{3}$（D）$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

答案：D

解析：设$t=\frac{5\pi}{12}+\alpha$，则$\alpha=t-\frac{5\pi}{12}$，且$\cos t=\frac{1}{3}$，所以$\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=\cos[\frac{\pi}{12}-(t-\frac{5\pi}{12})]=\cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin t$，

已知$\cos t$求$\sin t$，得研究t的范围，才能确定开平方该取正还是取负，

因为$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{7\pi}{12}<t=\frac{5\pi}{12}+\alpha<-\frac{\pi}{12}$，故$\sin t<0$，

所以$\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故$\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

8.（2022・山西二模・★★）若$\sin 10^\circ=a\sin 100^\circ$，则$\sin 20^\circ=$（）

（A）$\frac{a}{a^2+1}$　（B）$-\frac{a}{a^2+1}$　（C）$\frac{2a}{a^2+1}$　（D）$-\frac{2a}{a^2+1}$

答案：C

解析：注意到求值的角$20^\circ=2\times 10^\circ$，所以将已知等式中的$100^\circ$转换成$10^\circ$，

由题意，$\sin 10^\circ=a\sin 100^\circ=a\sin(90^\circ+10^\circ)=a\cos 10^\circ$，所以$\tan 10^\circ=a$，

故$\sin 20^\circ=2\sin 10^\circ\cos 10^\circ=\frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ}=\frac{2\tan 10^\circ}{\tan^2 10^\circ+1}=\frac{2a}{a^2+1}$.