第 2 节同角三角函数基本关系（★★）

内容提要

1．同角三角函数基本关系主要用于 $\sin\alpha$ 、 $\cos\alpha$ 、 $\tan\alpha$ 三者的知一求二，特别注意由 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ 或 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ 求 $\sin\alpha$ 、 $\cos\alpha$ ，开平方时需根据角 α 所在的象限决定取正还是取负.

2． $\sin\alpha$ 、 $\cos\alpha$ 的和、差、积的转化：

①$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin 2\alpha$；

②$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha$；

③$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

3． $\sin\alpha$ 、 $\cos\alpha$ 的齐次分式化正切：

①计算$\dfrac{A\sin\alpha+B\cos\alpha}{C\sin\alpha+D\cos\alpha}$，可上下同除以 $\cos\alpha$ ，化为$\dfrac{A\tan\alpha+B}{C\tan\alpha+D}$；

②计算 $A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$ ，可先凑分母，化为$\dfrac{A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$，再上下同除以 $\cos^2\alpha$ ，化为$\dfrac{A\tan^2\alpha+B\tan\alpha+C}{\tan^2\alpha+1}$.

典型例题

【例 1】已知 α 是第二象限的角，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\alpha=$.

【变式 1】设 $\cos\alpha=k(k\in\mathbf{R})$， $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，则 $\sin\alpha=$（　　）

（A）$-\sqrt{1-k^2}$ （B）$\sqrt{1-k^2}$ （C）$\pm\sqrt{1-k^2}$ （D）$\sqrt{1+k^2}$

【变式 2】设 α 为第二象限的角，且 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$.

【变式 3】若 $\tan\alpha=\cos\alpha$ ，则 $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=$.

【例 2】已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（）

（A）$-\frac{7}{9}$（B）$-\frac{2}{9}$（C）$\frac{2}{9}$（D）$\frac{7}{9}$

【变式 1】已知 $\alpha\in(0,\pi)$， $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$（）

（A）$-\frac{\sqrt{5}}{3}$（B）$-\frac{\sqrt{5}}{9}$（C）$\frac{\sqrt{5}}{9}$（D）$\frac{\sqrt{5}}{3}$

【变式 2】若 $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$，则函数 $y=\sin x+\cos x-2\sin x\cos x$ 的最大值为（　　）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）2　（D）$\sqrt{2}+1$

【例 3】已知 $\tan\alpha=2$，则 $\frac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}=$.

【变式 1】已知 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，则 $\frac{\sin^3\theta+\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=$（）

（A）6　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）2

【变式 2】已知 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则 $2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$ 的值是.

【变式 3】若 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$， $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\alpha=$（）

（A）-2　（B）2　（C）$\frac{2}{11}$　（D）$-\frac{2}{11}$

【变式 4】（2019・江苏）已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\frac{2}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值是.

强化训练

1.（2022·成都模拟·★★）若$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，则$\cos\alpha=$.

2.（2021·辽宁模拟·★★）已知$\tan\alpha=k$，α为钝角，则$\sin\alpha=$.（用k表示）

3.（2022·南昌三模·★★★）若角α的终边不在坐标轴上，且$\sin\alpha+2\cos\alpha=2$，则$\tan\alpha=$（）

（A）$\frac{4}{3}$ （B）$\frac{3}{4}$ （C）$\frac{2}{3}$ （D）$\frac{3}{2}$

4.（2022·湖北模拟·★★）已知$2\sin\alpha\tan\alpha=3$，则$\cos\alpha=$.

5.（2022·泸县模拟·★★★）已知$\sin x+\cos y=\frac{1}{4}$，则$\sin x-\sin^2 y$的最大值为.

6.（2022·江苏模拟·★★★）（多选）已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，以下选项正确的是（）

（A）$\sin 2\alpha=\pm\frac{24}{25}$ （B）$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\frac{7}{5}$ （C）$\cos 2\alpha=\pm\frac{7}{25}$ （D）$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\pm\frac{7}{25}$

7.（2022·湖北四校联考·★★★）若$a(\sin x+\cos x)\le 2+\sin x\cos x$对任意的$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，则实数$a$的最大值为.

8.（2022·上海模拟·★★）若$\sin\theta=k\cos\theta$，则$\sin\theta\cos\theta=$.（用k表示）

9.（2022·湖南模拟·★★）已知$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则$\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$.

10.（2022·四川模拟·★★）已知$\sin\theta=2\cos\theta$，则$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}+\sin^2\theta=$（　　）

（A）$\dfrac{19}{5}$（B）$\dfrac{16}{5}$（C）$\dfrac{23}{10}$（D）$\dfrac{17}{10}$