模块四 零点问题

重点知识回顾

1．零点的定义：满足 $f(x)=0$ 的 x，叫做 $f(x)$ 的零点.（注意：零点不是点，而是数）

2．x_0 是 $f(x)$ 的零点 $\Leftrightarrow f(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.

3．零点存在定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图象是一条连续不间断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有零点. 需注意，在零点存在定理中，$f(a)f(b)<0$ 是 $f(x)$ 有零点的充分条件，不是必要条件，即使不满足 $f(a)f(b)<0$，$f(x)$ 在 (a,b) 上也可能有零点.

第 1 节 判断函数零点所在区间

内容提要

判断零点所在区间，抓住端点值、单调性这两点就可以了. 若遇到端点处函数值无意义的选项，可先判断其他选项，若一定要判断此选项，则使用极限分析趋势.

典型例题

【例题】函数 $f(x)=(\frac{1}{3})^x-x-5$ 的零点所在的一个区间是（　　）

（A）$(-3,-2)$　　（B）$(-2,-1)$　　（C）$(-1,0)$　　（D）$(0,1)$

【变式 1】函数 $f(x)=\ln x+x$ 的零点所在的区间是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{e^2})$　　（B）$(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$　　（C）$(\frac{1}{e},\frac{1}{2})$　　（D）$(\frac{1}{2},1)$

【变式 2】若函数 $f(x)=\ln x+x^2-a$ 在区间 $(1,e)$ 上存在零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(1,e^2)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(1,e^2+1)$　　（D）$(2,\frac{2}{e}+2)$

【变式 3】已知函数 $f(x)=\log_a x+x-b(a>0$ 且 $a\neq 1)$，若当 $2<a<3<b<4$ 时，$f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $n=$.

强化训练

1.（2022・焦作一模・★）设函数 $f(x)=2^x+\frac{x}{3}$ 的零点为 x_0，则 $x_0\in$（　　）

（A）$(-4,-2)$　　（B）$(-2,-1)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(2,4)$

2.（2022·临湘期末·★★）函数 $f(x)=x+\cos x$ 的零点所在的区间为（　　）

（A）$(-1,-\frac{1}{2})$　　（B）$(-\frac{1}{2},0)$　　（C）$(0,\frac{1}{2})$　　（D）$(\frac{1}{2},1)$

3.（2021·海南期末·★★）若函数 $f(x)=2^x+3x+a$ 在 $(0,1)$ 内存在零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-5)$　　（B）$(-5,-1)$　　（C）$(0,5)$　　（D）$(1,+\infty)$

4.（2022·沈阳模拟·★★）设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x-\ln x$，则 $f(x)$（　　）

（A）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$，$(1,\mathrm{e})$ 内均有零点

（B）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$，$(1,\mathrm{e})$ 内均没有零点

（C）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 内有零点，在 $(1,\mathrm{e})$ 内没有零点

（D）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 内没有零点，在 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点

5.（2021·安徽模拟·★★）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-2x-5$ 的零点位于区间 $(m,m+1)$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $2^m+\log_4|m|=$

()

（A）$-\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{3}{4}$