模块六 导数基础

重点知识回顾

一、导数的计算

<table>
<tr><td rowspan="2">基本初等函数求导公式</td><td>$C'=0$</td><td>$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$</td><td>$(\sin x)'=\cos x$</td></tr>
<tr><td>$(\cos x)'=-\sin x$</td><td>$(a^x)'=a^x\ln a$，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$</td><td>$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">和差积商求导准则</td><td colspan="2">$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$</td><td>$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$</td><td>$[\dfrac{f(x)}{g(x)}]'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$</td></tr>
<tr><td>复合函数求导准则</td><td colspan="3">$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$</td></tr>
</table>

二、导数的几何意义

我们知道，$f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

三、导数的应用

1．导数与函数的单调性

一般地，在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)>0$ ，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增；如果 $f'(x)<0$ ，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递减.

2．求极值的基本步骤：

①求 $f'(x)$，并给出函数的定义域；

②解不等式 $f'(x)>0$ 和 $f'(x)<0$ ，得到 $f(x)$ 的单调递增区间，和单调递减区间；

③根据函数的单调性给出极值.

3．求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值的基本步骤：

①求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的极值；

②将 $f(x)$ 的各极值与 $f(a)$ ，$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

第 1 节 函数图象切线的计算（★★）

内容提要

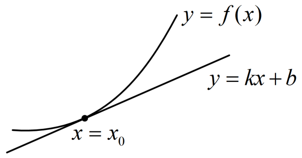
函数的切线方程相关计算在高考中主要有以下几类题型：

1．求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线：切线的斜率 $k=f'(x_0)$，结合切点坐标可知切线的方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

2．求曲线 $y=f(x)$ 过点 $Q(m,n)$ 的切线：由于不知道切点坐标，故需设切点为 $P(x_0,f(x_0))$，写出切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，将点 $Q(m,n)$ 代入得到 $n-f(x_0)=f'(x_0)(m-x_0)$，由此方程解出 x_0，得到切点坐标，即可求出切线的方程.

3．已知直线 $y=kx+b$（k、b 为已知的常数）与含有参数 a 的函数 $y=f(x)$ 的图象相切，求 a 和切点. 这类问题的处理方法是：如图，设切点横坐标为 x_0，可从切线斜率即为 $f'(x_0)$ 以及切点为切线与函数图象交点两方面建立方程组 $\begin{cases}k=f'(x_0)\\kx_0+b=f(x_0)\end{cases}$，解此方程组即可求出 a 和 x_0 的值.

4．两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象有公切线，这类题一般先设公切线与两个图象的切点分别为 $P(x_1,f(x_1))$、$Q(x_2,g(x_2))$，再写出 $f(x)$ 在点 P 处和 $g(x)$ 在点 Q 的切线方程，比较系数建立方程组，研究方程组解的情况.



典型例题

【例 1】函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为.

【变式 1】（2020·新课标Ⅰ卷）曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2，则该切线的方程为_____.

【变式 2】已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 $a=$.

【变式 3】已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-2x)+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的切线方程为（　　）

（A） $y=x-4$　　（B） $y=x$　　（C） $y=-2x$　　（D） $y=-2x+2$

【例 2】（2022・新高考Ⅱ卷）曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为_____，_____.

【变式 1】曲线 $y=x^3-x-2$ 过点 $P(2,4)$ 的切线方程为.

【变式 2】（2021・新高考Ⅰ卷）若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则（　　）

（A） $\mathrm{e}^b<a$　　（B） $\mathrm{e}^a<b$　　（C） $0<a<\mathrm{e}^b$　　（D） $0<b<\mathrm{e}^a$

【例 3】已知直线 l 是曲线 $y=\mathrm{e}^x-1$ 与 $y=\ln x+1$ 的公切线，则 l 的方程为_____.

强化训练

1.（2022・河南名校联盟・★）曲线 $y=x\ln(2x+5)$ 在点 $x=-2$ 处的切线方程为（）

（A） $4x-y+8=0$　　（B） $4x+y+8=0$　　（C） $3x-y+6=0$　　（D） $3x+y+6=0$

2.（2022・阜阳期末・★★）函数 $f(x)=\sin 2x+4\cos x$ 的图象在 $x=x_0$ 处切线斜率的最小值为（　　）

（A） -6　　（B） -5　　（C） 2　　（D） 3

3.（2022·成都模拟·★★）直线 $y=kx-2$ 与曲线 $y=x\ln x$ 相切，则实数 $k=$.

4.（2022·黄山模拟·★★★）若 $f(x)=\ln x$ 图象上 $(1,0)$ 处的切线与 $g(x)=\dfrac{\ln x+a}{x}(a\in\mathbf{R})$ 的图象也相切，则 $a=$.

5.（2022·亳州模拟·★★★）已知 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}+\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在点 $(-\dfrac{1}{2},f(-\dfrac{1}{2}))$ 处的切线方程为_____.

6.（2019·江苏·★★）点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$，则点 A 的坐标是.

7.（2022·蓉城名校联盟·★★）若过点 $(\dfrac{1}{2},0)$ 的直线与函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的图象相切，则所有可能的切点的横坐标之和为（）

（A）$\mathrm{e}+1$　（B）$-\dfrac{1}{2}$　（C）1　（D）$\dfrac{1}{2}$

8.（2021·广西模拟·★★★）过点 $M(-1,0)$ 作曲线 $y=2x^3+ax+a$ 的两条切线，这两条切线分别与 y 轴交于 A、B 两点，若 $|MA|=|MB|$，则 $a=$（　　）

（A）$-\dfrac{25}{4}$　（B）$-\dfrac{27}{4}$　（C）$-\dfrac{25}{12}$　（D）$-\dfrac{49}{12}$

9.（2022·新高考Ⅰ卷·★★★）若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围为.

10.（2022 • 深圳模拟 • ★★★）已知$a>0$，若过点$P(a,b)$可作曲线$y=x^3$的三条切线，则（　　）

（A）$b<0$　　（B）$0<b<a^3$　　（C）$b>a^3$　　（D）$b(b-a^3)=0$

11.（2022 • 金华期末 • ★★★）已知函数$f(x)=|\ln x|$的图象在点$(x_1,f(x_1))$与$(x_2,f(x_2))$处的切线互相垂直且交于点$P(x_0,y_0)$，则（　　）

（A）$x_1x_2=-1$　　（B）$x_1x_2=\mathrm{e}$　　（C）$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$　　（D）$x_0=\dfrac{2}{x_1+x_2}$

12.（2022 •江苏模拟 •★★★★）若曲线$y=x^2-1$与$y=a\ln x-1(a>0)$存在公切线，则a的取值范围是（　　）

（A）$(0,2\mathrm{e}]$　　（B）$(0,\mathrm{e}]$　　（C）$[2\mathrm{e},+\infty)$　　（D）$(\mathrm{e},2\mathrm{e}]$