

第1节 复合函数方程问题 (★★★★)

内容提要

含有 $f(f(x))$ 、 $f(g(x))$ 这类结构的方程称为复合函数方程，复合函数方程问题一般用换元法来求解，可设内层的函数为 t ，将一个双层的方程问题化归成两个单层的方程问题来处理。由于复合函数方程相关模拟题颇难，所以本节整体难度较高。

典型例题

【例1】已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$ ，则函数 $g(x) = f(f(x)) - 2$ 的零点个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【变式】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x - \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则函数 $y = f(f(x) + 1)$ 的零点个数是 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

【例2】已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ 5 - x, & x > 2 \end{cases}$ ，若方程 $[f(x)]^2 - (m+1)f(x) + m = 0$ 有 5 个不同的实数根，则实数 m

的取值范围为 ()

- (A) 0 (B) (0,1) (C) [0,1) (D) (1,3)

【变式 1】已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $g(x) = f^2(x) + kf(x) + 2$ 有 5 个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, -3)$ (B) $(-\infty, -3]$ (C) $(-\infty, -2\sqrt{3})$ (D) $(-3, -2\sqrt{2})$

【变式 2】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x \geq \frac{1}{e} \\ -\frac{e^2}{2}x - \frac{e}{2}, & x < \frac{1}{e} \end{cases}$, 设关于 x 的方程 $f^2(x) + af(x) - 1 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 有 m 个不同的实数

解, 则 m 的所有可能的值为 ()

- (A) 3 (B) 4 (C) 2 或 3 或 4 或 5 (D) 2 或 3 或 4 或 5 或 6

【变式 3】设函数 $f(x) = \begin{cases} x+4, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 若方程 $g(f(x)) - k = 0 (k \in \mathbf{R})$ 有 4 个实根, 则实数 k 的

取值范围为.

强化训练

1. (2022 · 郑州期末 · ★★★★★) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f(f(x)) - 1$ 的零点个数为.
2. (2022 · 安徽期中 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(f(x) + 2) + 2$ 的零点个数为 ()
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
3. (2022 · 闽中期中 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + af(x) + a - 1 = 0$ 仅有 1 个实数解, 则实数 a 的取值范围是 ()
(A) $(-2e, 1 - e)$ (B) $(1 - e, 1] \cup \{2\}$ (C) $(1 - e, 1)$ (D) $(1 - e, 2e)$
4. (2021 · 成都模拟 · ★★★★★) 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = 2f^2(x) + 1$ 与 $y = af(x)$ 的图象有 8 个交点, 则实数 a 的取值范围为.
5. (★★★★★) 已知 $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(f(x)) + 1$ 有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围为.
6. (2021 · 江苏模拟 · ★★★★★) 若关于 x 的方程 $2e^{2x} = \frac{a}{x^2} - \frac{e^x}{x} (a \in \mathbf{R})$ 有 4 个不同的实根, 则 a 的取值范围为.