

第2节 求无参函数的单调区间、极值、最值 (★★)

内容提要

求单调区间、极值、最值是导数的高考导数题第1问的常考题型，这一节先研究不含参的情况，我们求出导函数后，若能直接判断正负，则直接判断；否则，可继续求导.

典型例题

【例1】已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ ，则 ()

- (A) $f(x)$ 有 2 个极值点
- (B) $f(x)$ 有 3 个零点
- (C) 点 $(1, 3)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
- (D) 直线 $y = -3x + 6$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【例2】已知函数 $f(x) = xe^{x-1}$ ，求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

【例3】(2022·全国乙卷) 函数 $f(x) = \cos x + (x+1)\sin x + 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的最小值，最大值分别为 ()

- (A) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
- (B) $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
- (C) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$
- (D) $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$

【例4】已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ ，求 $f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上的最大值.

强化训练

1. (2022 · 重庆模拟 · ★★) 函数 $f(x) = x - \frac{6}{x} - 5 \ln x$ 的单调递减区间为 ()
(A) (0, 2) (B) (2, 3) (C) (1, 3) (D) (3, +∞)
2. (2022 · 郑州期末 · ★★) 已知函数 $f(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, 求函数 $f(x)$ 的极值.
3. (2021 · 全国甲卷节选 · ★★) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$, 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.
4. (★★) 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 - x$, 求 $f(x)$ 的单调区间.
5. (2022 · 汕头三模 · ★★) 已知函数 $f(x) = x - 2 \sin x$, 求 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的极值.

6. (2022 · 成都期末 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = 2x \ln x - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$, 求 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上的最小值.

7. (2022 · 天津模拟 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \ln x - x$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

8. (2022 · 北京卷 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性.