第 2 节 复合函数不等式问题（★★★★）

内容提要

含有 $f(f(x))$、$f(g(x))$ 这类结构的不等式称为复合函数不等式，类似于上一节，复合函数不等式问题依然首选换元法求解，将内层的函数整体换元成 t，将一个双层的不等式问题化归成两个单层的不等式问题来处理.

典型例题

【例题】设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|,x\le 1\\ x^2-4x+3,x>1\end{cases}$，若 $f(f(x))\ge 0$，则实数 x 的取值范围为（　　）

（A）$[-2,2]$　（B）$[-2,2+\sqrt{2}]\cup[4,+\infty)$　（C）$[-2,2+\sqrt{2}]$　（D）$[-2,2]\cup[4,+\infty)$

答案：B

解析：看到复合结构的不等式 $f(f(x))\ge 0$，想到将内层的 $f(x)$ 换元成 t，化整为零，

设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))\ge 0$ 即为 $f(t)\ge 0$，函数 $y=f(t)$ 的图象好画，故直接画图来看 $f(t)\ge 0$ 的解，

函数 $y=f(t)$ 的大致图象如图 1，由图可知 $f(t)\ge 0\Leftrightarrow -1\le t\le 1$ 或 $t\ge 3$，所以 $-1\le f(x)\le 1$ 或 $f(x)\ge 3$，

函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图 2，要求解上面的两个不等式，先求出 $y=1$ 和 $y=3$ 与该图象交点的横坐标，

$\begin{cases}y=1\\ y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}$，$\begin{cases}y=3\\ y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=4$ 或 0，

由图可知直线 $y=1$ 和 $y=3$ 与 $y=f(x)$ 的图象的交点的横坐标分别为 $2+\sqrt{2}$ 和 4，

所以不等式 $-1\le f(x)\le 1$ 的解为 $-2\le x\le 2+\sqrt{2}$，不等式 $f(x)\ge 3$ 的解集为 $x\ge 4$，

故实数 x 的取值范围为 $[-2,2+\sqrt{2}]\cup[4,+\infty)$.

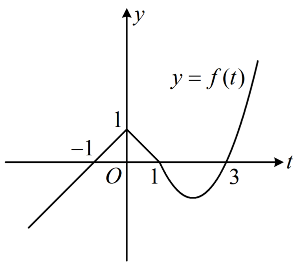


图1

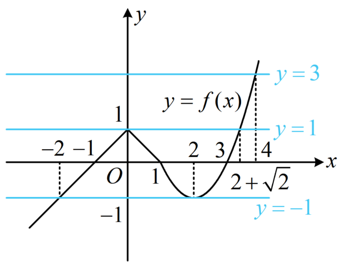


图2

【变式 1】设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|,x\le 1\\ x^2-4x+3,x>1\end{cases}$，则不等式 $f(f(x))-f(x)+1\le 0$ 的解集为.

答案：$\{0\}\cup[2+\sqrt{2},2+\sqrt{5}]$

解析：$f(f(x))-f(x)+1$ 仍是复合结构，它由 $y=f(t)-t+1$ 和 $t=f(x)$ 复合而成，所以先换元，

设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))-f(x)+1\le 0$ 即为 $f(t)-t+1\le 0$，也即 $f(t)\le t-1$，

如图 1，$\begin{cases}y=t-1\\ y=t^2-4t+3\end{cases}\Rightarrow t=1$ 或 4，由图可知不等式 $f(t)\le t-1\Leftrightarrow 1\le t\le 4$，所以 $1\le f(x)\le 4$，

如图 2，$\begin{cases}y=1\\y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}$，$\begin{cases}y=4\\y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=2+\sqrt{5}$ 或 $2-\sqrt{5}$，

由图可知，不等式 $1\le f(x)\le 4$ 的解集为 $\{0\}\cup[2+\sqrt{2},2+\sqrt{5}]$.

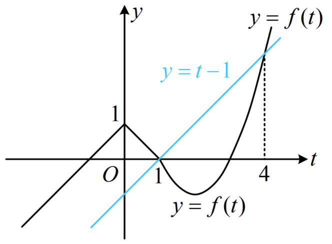


图1

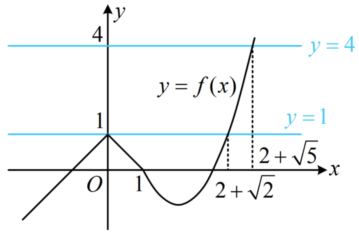


图2

【变式 2】设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|,x\le 1\\x^2-4x+3,x>1\end{cases}$，$g(x)=4^x-a\cdot 2^x+4(a\in\mathbf{R})$，若 $f(g(x))\ge 3$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围为.

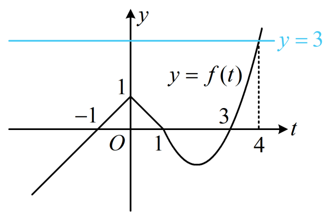
答案：$(-\infty,0]$

解析：看到复合结构 $f(g(x))$，先将内层的 $g(x)$ 换元，设 $t=g(x)$，则 $f(g(x))\ge 3$ 即为 $f(t)\ge 3$，

直线 $y=3$ 和函数 $y=f(t)$ 的图象如图，$\begin{cases}y=3\\y=t^2-4t+3\end{cases}\Rightarrow t=4$ 或 0，由图可知 $f(t)\ge 3\Leftrightarrow t\ge 4$，

所以问题等价于 $g(x)\ge 4$ 恒成立，即 $4^x-a\cdot 2^x+4\ge 4$，化简得：$2^x-a\ge 0$，故 $a\le 2^x$ 恒成立，

因为 $2^x\in(0,+\infty)$，所以 $a\le 0$.



【反思】处理复合结构的不等式，关键技巧是将内层换元，转化为两个简单结构的不等式求解.

【例 2】已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(4-x)$，且当 $x\in[0,4]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，若关于 x 的不等式 $f^2(x)-af(x)>0$ 在 $[-8,8]$ 上有且仅有 12 个整数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[4e^{-2},3e^{-\frac{3}{2}})$　（B）$[e^{-\frac{1}{2}},3e^{-\frac{3}{2}})$　（C）$[3e^{-\frac{3}{2}},2e^{-1})$　（D）$[4e^{-2},e^{-\frac{1}{2}})$

答案：D

解析：不等式 $f^2(x)-af(x)>0$ 不易直接解，所以先研究 $f(x)$ 的图象性质，再画图来看，

$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，$f(x+4)=f(4-x)\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=4$ 对称，

所以 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数，当 $x\in[0,4]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，所以 $f'(x)=(1-\frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}}$，

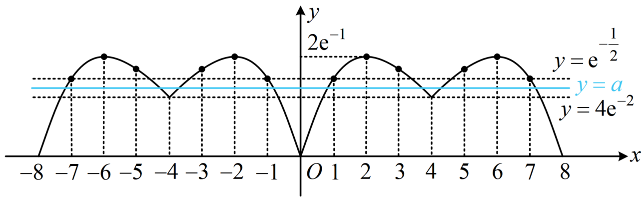
从而 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0\le x<2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 2<x\le 4$，故 $f(x)$ 在 $[0,2)$ 上↗，在 $(2,4]$ 上↘，

又 $f(0)=0$， $f(2)=2\mathrm{e}^{-1}$， $\dfrac{f(3)}{f(1)}=\dfrac{3\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{\mathrm{e}}>1\Rightarrow f(3)>f(1)$， $\dfrac{f(1)}{f(4)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{4\mathrm{e}^{-2}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{4}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^3}{16}}>1\Rightarrow f(1)>f(4)$，

所以 $f(x)$ 在 $[-8,8]$ 上的大致图象如图，

由图可知 $f(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $f^2(x)-af(x)>0\Leftrightarrow f(x)[f(x)-a]>0\Leftrightarrow f(x)>a$ 且 $f(x)\neq 0$，

其中 $f(x)\neq 0$ 可排除掉 $f(x)$ 图象上 $(-8,0)$、$(0,0)$、$(8,0)$ 这 3 个横坐标为整数的点，从而问题可以看成 $[-8,8]$ 上的其余横坐标为整数的点中，落在直线 $y=a$ 上方的有 12 个，由图可知，应有 $4\mathrm{e}^{-2}\leq a<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.



【反思】整数解问题，一般可转化为图象上横坐标为整数的点与动直线的位置关系问题来处理.

强化训练

1.（★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{x-1},x<1\\x^3+x,x\geq 1\end{cases}$，则不等式 $f(f(x))<2$ 的解集为.

答案：$(-\infty,1-\ln 2)$

解析：先将 $f(f(x))<2$ 内层的 $f(x)$ 换元，化整为零，设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))<2$ 即为 $f(t)<2$，

函数 $y=f(t)$ 的图象好画，所以结合图象来看不等式 $f(t)<2$ 的解，

如图 1，由图可知 $f(t)<2\Leftrightarrow t<1$，所以 $f(x)<1$，再结合图象来看不等式 $f(x)<1$ 的解，

如图 2，$\begin{cases}y=1\\y=2\mathrm{e}^{x-1}\end{cases}\Rightarrow x=1-\ln 2$，由图可知 $f(x)<1\Leftrightarrow x<1-\ln 2$.

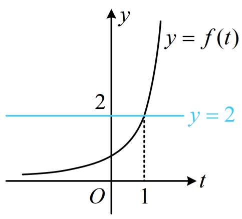


图1

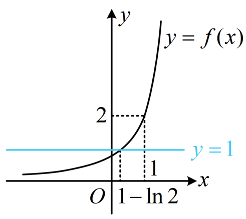


图2

2.（2022・成都模拟・★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x,x<0\\-x^2,x\geq 0\end{cases}$，若 $f(f(x))\leq 2$，则实数 x 的取值范围为.

答案：$(-\infty,\sqrt{2}]$

解析：看到 $f(f(x))$ 这种结构，想到将内层的 $f(x)$ 换元，设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))\leq 2$ 即为 $f(t)\leq 2$，

函数 $y=f(t)$ 的图象好画，所以结合图象来看不等式 $f(t)\leq 2$ 的解，

如图 1，$\begin{cases} y=2 \\ y=x^2+x \end{cases} \Rightarrow x=-2$ 或 1，由图可知 $f(t)\le 2 \Leftrightarrow t\ge -2$，所以 $f(x)\ge -2$，

直线 $y=-2$ 和函数 $y=f(x)$ 的图象如图 2，$\begin{cases} y=-2 \\ y=-x^2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$，由图可知 $f(x)\ge -2 \Leftrightarrow x\le \sqrt{2}$.

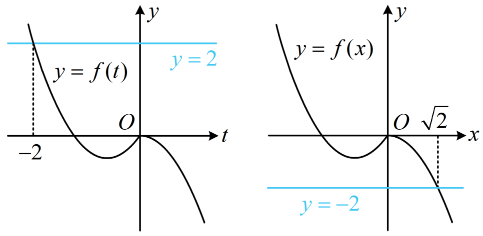


图1　　图2

3．（★★★）设 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, x<1 \\ x^3+x-1, x\ge 1 \end{cases}$，$g(x)=e^x-a(x+1)+1$，若 $f(g(x))\ge 1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为.

答案：$[0,1]$

解析：先将 $f(g(x))\ge 1$ 内层的 $f(x)$ 换元，化整为零，设 $t=g(x)$，则 $f(g(x))\ge 1$ 即为 $f(t)\ge 1$，函数 $y=f(t)$ 的图象好画，所以结合图象来看不等式 $f(t)\ge 1$ 的解，

如图 1，由图可知 $f(t)\ge 1 \Leftrightarrow t\ge 1$，所以 $g(x)\ge 1$，即 $e^x-a(x+1)+1\ge 1$，所以 $e^x\ge a(x+1)$，

如图 2，注意到曲线 $y=e^x$ 和直线 $y=x+1$ 相切，故当且仅当 $0\le a\le 1$ 时，$e^x\ge a(x+1)$ 恒成立.

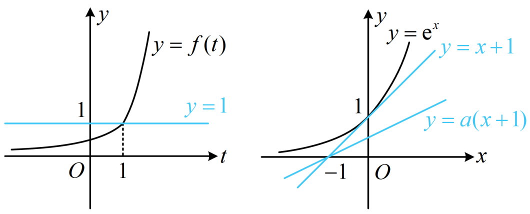


图1　　图2

4．（★★★★）已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(3-x)$，且当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，若关于 x 的不等式 $f^2(x)-tf(x)>0$ 在 $[-150,150]$ 上有且仅有 150 个整数解，则实数 t 的取值范围是（　　）

（A）$(0,e^{-\frac{1}{2}})$　（B）$[e^{-\frac{1}{2}},3e^{-\frac{3}{2}})$　（C）$(3e^{-\frac{3}{2}},2e^{-1})$　（D）$(e^{-\frac{1}{2}},2e^{-1})$

答案：B

解析：先研究 $f(x)$ 的图象性质，再看不等式 $f^2(x)-tf(x)>0$ 解的情况，

$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，$f(x+3)=f(3-x)\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=3$ 对称，

所以 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数，当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，所以 $f'(x)=(1-\frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}}$，

从而 $f'(x)>0 \Leftrightarrow 0\le x<2$，$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2<x\le 3$，故 $f(x)$ 在 $[0,2)$ 上↗，在 $(2,3]$ 上↘，

又 $f(0)=0$， $f(2)=2\mathrm{e}^{-1}$， $f(1)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<f(3)=3\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$，所以 $f(x)$ 在 y 轴右侧上的部分图象如图，

由图可知 $f(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $f^2(x)-tf(x)>0 \Leftrightarrow f(x)[f(x)-t]>0 \Leftrightarrow f(x)>t$ 且 $f(x)\neq 0$，

其中 $f(x)\neq 0$ 可排除掉 $f(x)$ 图象上位于 x 轴上的这些点，从而问题可以看成 $[-150,150]$ 上的其余横坐标为整数的点中，落在直线 $y=t$ 上方的有 150 个，由于题设的区间范围较宽，所以结合对称性和周期性，化归到一个周期上来考虑，

因为 $f(x)$ 的图象和直线 $y=t$ 都关于 y 轴对称，所以在 $(0,150]$ 上，满足 $f(x)>t$ 的整数应有 75 个，

而 $(0,150]$ 恰好为 25 个周期，所以每个周期上满足 $f(x)>t$ 的整数应有 3 个，

如图，直线 $y=t$ 应在直线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$（可取）和 $y=3\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$（不可取）之间，所以 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\leq t<3\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.