

第2节 非合一结构的图象性质综合题 (★★★★☆)

内容提要

本节收录一些不能化成 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ 这种形式的三角函数图象性质的综合题,常见的类型有带绝对值的、带根号的、复合嵌套的、非齐次的等.

1. 带绝对值: 常通过讨论去掉绝对值,若函数有周期,可在一个周期内考虑,缩小讨论的范围.
2. 带根号: 尝试将根号下的部分变形为完全平方,从而去掉根号.
3. 复合嵌套: 常用换元、求导等方法分析这类函数.
4. 非齐次: 可考虑统一函数名,换元处理.

提醒: 非合一结构的三角函数综合题的处理方法多种多样,有的需要画图求解,有的可以通过代数方法处理,没有固定的套路,上述归纳的几类问题的处理方法只是可以考虑的方向.

典型例题

【例1】(多选) 已知函数 $f(x) = |\sin x| \cos x$, 则下列说法正确的是 ()

- (A) $f(x)$ 的最小正周期是 4π
- (B) $f(x)$ 的值域是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- (C) $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上单调递减
- (D) $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称

【变式】(多选) 关于函数 $f(x) = \tan(|x| + \frac{\pi}{4})$, 则 ()

- (A) $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
- (B) $f(x)$ 的最小正周期为 π
- (C) $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增
- (D) $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ 对称

【例2】(多选) 已知函数 $f(x) = \sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$, 则下列说法正确的有 ()

- (A) 函数 $f(x)$ 是偶函数
- (B) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- (C) 函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2}, 2]$
- (D) 函数 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 π

【例 3】已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos x$ ，现有如下说法：

- ①直线 $x = \pi$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴；
- ②函数 $f(x)$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上单调递增；
- ③ $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

则上述说法中正确的个数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

强化训练

1. (2022 · 南昌二模 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + |\cos x|$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$)，则方程 $f(x) = \sqrt{3}$ 的解的个数

是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. (2022 · 深圳模拟 · ★★★★★) 若函数 $f(x) = |\tan(\omega x - \omega)|$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 4，则下列区间中 $f(x)$ 单调递增的是 ()

- (A) $(-1, \frac{1}{3})$ (B) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ (C) $(\frac{5}{3}, 3)$ (D) $(3, 4)$

3. (2022 · 山西二模 · ★★★★★) 下面关于函数 $f(x) = \sin 2x + 2|\sin x| \cos x$ 的结论，其中错误的是 ()

- (A) $f(x)$ 的值域是 $[-2, 2]$
(B) $f(x)$ 是周期函数
(C) $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
(D) 当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时， $f(x) = 0$

4. (2020 · 新课标III卷 · ★★★★★) 关于函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

- ① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；
- ② $f(x)$ 的图象关于原点对称；
- ③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称；

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

5. (2019 • 新课标 I 卷 • ★★★) 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增; ③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点; ④ $f(x)$ 的最大值为 2.

其中所有正确结论的编号是 ()

(A) ①②④ (B) ②④ (C) ①④ (D) ①③

6. (★★★) (多选) 已知函数 $f(x) = \cos(\sin x)$, 则下列关于该函数性质的说法中正确的是 ()

(A) $f(x)$ 的一个周期为 2π

(B) $f(x)$ 的值域是 $[-1, 1]$

(C) $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称

(D) $\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上唯一的极值点

7. (2022 • 景德镇模拟 • ★★★) (多选) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \tan x, & \tan x > \sin x \\ \sin x, & \tan x \leq \sin x \end{cases}$, 则 ()

(A) $f(x)$ 的最小正周期是 2π

(B) $f(x)$ 的值域是 $(-1, +\infty)$

(C) 当且仅当 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x) \leq 0$

(D) $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$

8. (★★★★) (多选) 已知函数 $f(x) = \sin x \cos 2x$, 则下列结论中正确的是 ()

(A) $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 成中心对称

(B) $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

(C) $f(x)$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{6}}{9}$

(D) $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数