

第3节 求带参函数的单调区间、极值、最值 (★★★)

内容提要

当函数解析式中有参数时，求函数的单调区间往往需要讨论，这类题函数可能千变万化，但本质上讨论的流程可归纳为如下的流程图：

$$f'(x) \rightarrow \begin{cases} \text{无零点} \\ \text{有零点} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{有一个零点} \\ \text{有多个零点} \end{cases} \rightarrow \text{讨论零点的大小}$$

典型例题

【例1】设 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【变式1】设 $f(x) = e^{2x} - (a-2)e^x - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【变式2】已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$ ， $m > 0$ ，讨论 $f(x)$ 在 $[m, +\infty)$ 上的单调性.

【变式3】已知函数 $f(x) = ax - (a-1)\ln x + 1 (a \in \mathbf{R})$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【例 2】已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2a-1}{2}x^2 - 2ax + 1 (a \in \mathbf{R})$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【变式 1】（2021·全国乙卷节选）已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【变式 2】（2021·全国乙卷）设 $a \neq 0$ ，若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则（ ）

- (A) $a < b$ (B) $a > b$ (C) $ab < a^2$ (D) $ab > a^2$

【例 3】（2021·新高考 II 卷节选）已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【变式】已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}ax^2 - x$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【例 4】（2022·新高考 I 卷节选）已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值，求 a .

强化训练

1. (2022 · 四川模拟 · ★★) 设 $f(x) = a \ln x - x + 1 (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
2. (2021 · 绵阳模拟 · ★★) 设 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (2-a)e^x - 2ax - 1 (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
3. (2021 · 浙江卷节选 · ★★) 设 a, b 为实数, 且 $a > 1$, 函数 $f(x) = a^x - bx + e^2 (x \in \mathbf{R})$, 求 $f(x)$ 的单调区间.
4. (★★) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{a-2}{2}x^2 - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
5. (2022 · 郑州期末 · ★★) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - ax + a \ln x + 1 (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
6. (★★) 已知函数 $f(x) = (x-3)e^x - ax^2 + 4ax + 1 (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.