第 3 节 函数零点小题策略：含参

内容提要

题干给出带参的函数 $f(x)$ 的零点个数，让求参数 a 的取值范围，这是不是我们在复习过程中经常遇到的一类题？这类题我们有两种常用的处理方法：

（1）全分离：将方程 $f(x)=0$ 等价变形成 $a=g(x)$ 的形式，研究水平直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 图象的交点的个数；

（2）半分离：将方程 $f(x)=0$ 等价变形成 $g(x)=h(x)$ 的形式，研究 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 这两个函数图象交点个数，这种解法中切线和端点的位置往往是临界状态，需要重点关注.

典型例题

【例 1】已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为.

【变式】已知函数 $f(x)=a\ln x-x+1$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为.

【例 2】若函数 $f(x)=\dfrac{|x-a|}{\mathrm{e}^x}-1$ 在 $[-2,+\infty)$ 上有三个零点，则实数 a 的取值范围为.

答案： $[\mathrm{e}^{-2}-2,-1)$

【例 3】（2018·新课标Ⅰ卷）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)+x+a$，若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围为（）

（A）$[-1,0)$（B）$(0,+\infty)$（C）$[-1,+\infty)$（D）$[1,+\infty)$

【例 4】若函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{ax}-1$ 有 2 个零点，则实数 $a=$.

强化训练

1．（2022·赤峰模拟·★★）已知函数 $f(x)=3x-a\mathrm{e}^x$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(-\infty,\frac{3}{\mathrm{e}})$　（B）$(0,\frac{3}{\mathrm{e}})$　（C）$(0,\frac{\mathrm{e}}{3})$　（D）$(-\infty,\frac{\mathrm{e}}{3})$

2．（2021·聊城模拟·★★★）（多选）设函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,x>0\\(x+1)\mathrm{e}^x,x\le 0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则实数 b 的取值可能是（　　）

（A）0　（B）$\frac{1}{2}$　（C）1　（D）2

3．（2022·济宁二模·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\le 0\\a\ln x,x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 有 5 个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\mathrm{e},0)$　（B）$(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$　（C）$(-\infty,-\mathrm{e})$　（D）$(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}})$

4．（2019·天津·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\le x\le 1\\\frac{1}{x},x>1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=-\frac{1}{4}x+a$ 恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为（）

（A）$[\frac{5}{4},\frac{9}{4}]$（B）$(\frac{5}{4},\frac{9}{4}]$（C）$(\frac{5}{4},\frac{9}{4}]\cup\{1\}$（D）$[\frac{5}{4},\frac{9}{4}]\cup\{1\}$

5．（2022·烟台模拟·★★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,x>0\\x^2+2x-1,x\le 0\end{cases}$，若方程 $f(x)=ax-1$ 有 3 个实根，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,1)$　（B）$(0,2)$　（C）$(1,+\infty)$　（D）$(2,+\infty)$

6．（2022•安徽模拟•★★★★）已知函数 $f(x)=ax-\ln x(a\in\mathbf{R})$ 有两个零点，分别为 x_1， x_2，且 $2x_1<x_2$，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,\frac{\ln 2}{2})$　　（B）$(0,\frac{\ln 2}{2})$　　（C）$(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{\mathrm{e}})$　　（D）$(\frac{\ln 2}{2},+\infty)$