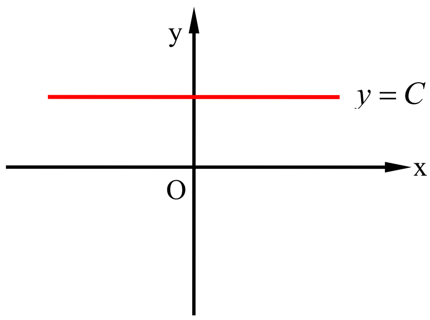
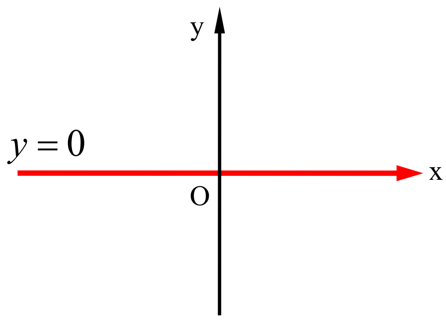
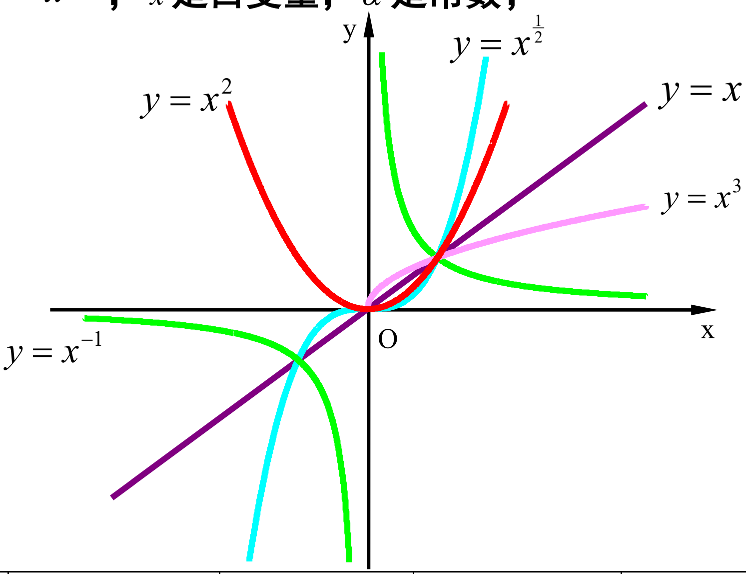
六大基本初等函数图像及其性质

一、常值函数（也称常数函数） y =C（其中 C 为常数）；

常数函数（$y=C$）	
$C\neq 0$	$C=0$
	
平行于 x 轴的直线	y 轴本身
定义域 R	定义域 R

二、幂函数 $y=x^{\alpha}$ ，x是自变量，α是常数；

1. 幂函数的图像：



2. 幂函数的性质；

性质 / 函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	R	R	R	[0, +∞)	{x|x≠0}
值域	R	[0, +∞)	R	[0, +∞)	{y|y≠0}
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	[0, +∞) 增 (−∞, 0] 减	增	增	(0, +∞) 减 (−∞, 0) 减
公共点	(1, 1)				

1）当α为正整数时，函数的定义域为区间为 $x\in(-\infty,+\infty)$，他们的图形都经过原点，并当α>1时在原点处与x轴相切。且α为奇数时，图形关于原点对称；α为偶数时图形关于y轴对称；

2）当α为负整数时。函数的定义域为除去x=0的所有实数；

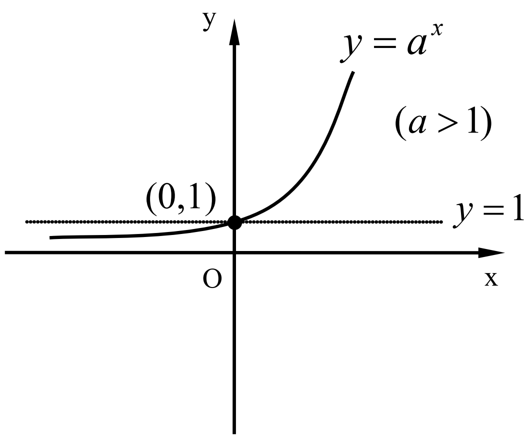
3）当α为正有理数 $\frac{m}{n}$ 时，n为偶数时函数的定义域为（0，+∞），n为奇数时函数的定义域为（-∞,+∞），函数的图形均经过原点和（1，1）；

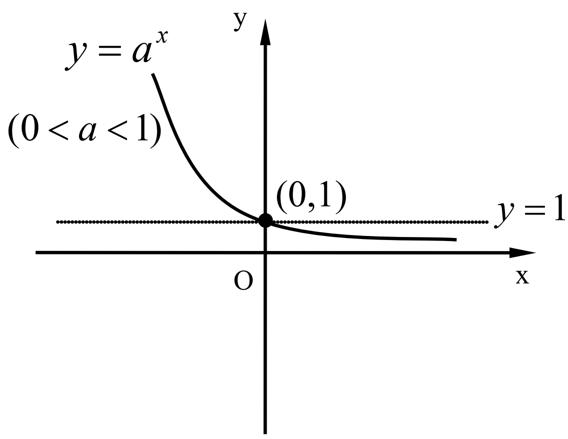
4）如果m>n图形于x轴相切，如果m<n,图形于y轴相切，且m为偶数时，还跟y轴对称；m，n均为奇数时，跟原点对称；

5）当α为负有理数时，n为偶数时，函数的定义域为大于零的一切实数；n为奇数时，定义域为去除x=0以外的一切实数。

三、指数函数 $y=a^x$（x 是自变量，a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$），定义域是R；[无界函数]

1.指数函数的图象：





2.指数函数的性质；

性质 / 函数	$y=a^x\ (a>1)$	$y=a^x\ (0<a<1)$
定义域	R	
值域	(0，+∞)	
奇偶性	非奇非偶	
公共点	过点(0，1)，即 $x=0$ 时，$y=1$	
单调性	在 $(-\infty,+\infty)$ 是增函数	在 $(-\infty,+\infty)$ 是减函数

1）当 $a>1$ 时函数为单调增，当 $0<a<1$ 时函数为单调减；

2）不论 x 为何值，y 总是正的，图形在 x 轴上方；

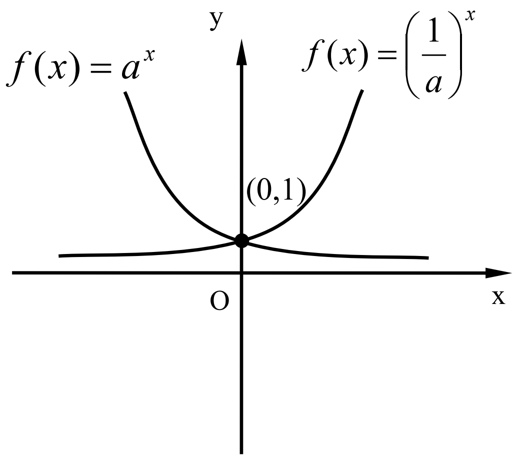
3）当 $x=0$ 时，$y=1$，所以它的图形通过(0,1)点。

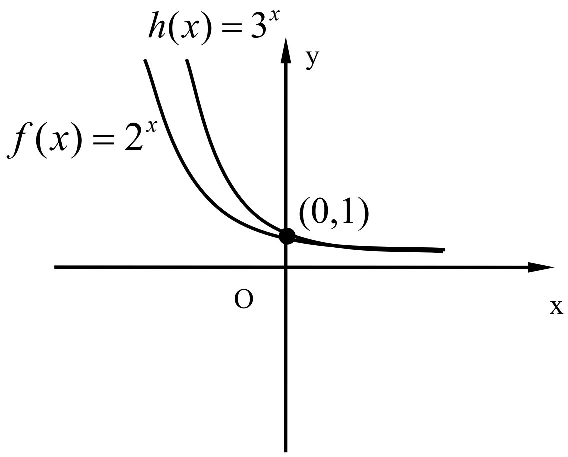
3.（选，补充）指数函数值的大小比较 $a \in \mathrm{N}^*$；

a. 底数互为倒数的两个指数函数

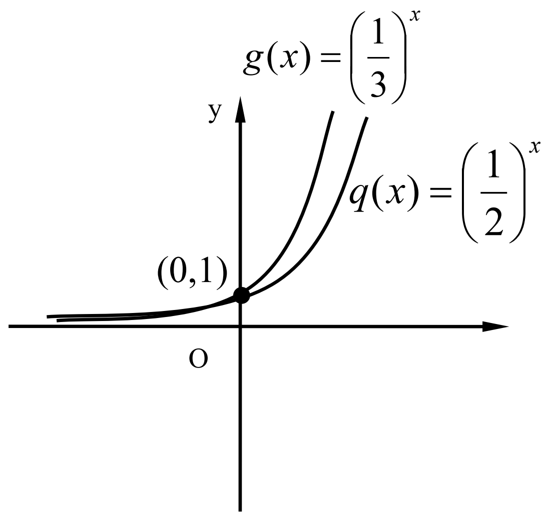
$f(x)=a^x$，$f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

的函数图像关于 y 轴对称。





b. 1. 当 $a>1$ 时，a 值越大，$y=a^x$ 的图像越靠近 y 轴；



b. 2. 当 $0<a<1$ 时，a 值越大，$y=a^x$ 的图像越远离 y 轴。

4. 指数的运算法则（公式）；

a. 整数指数幂的运算性质 $(a \ge 0, m, n \in Q)$；

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(3) $\left(a^m\right)^n = a^{nm} = \left(a^n\right)^m$

(4) $(ab)^n = a^n b^n$

b. 根式的性质；

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ ；(2) 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} \mathrm{a} & (\mathrm{a} \ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

c. 分数指数幂；

(1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \, (a>0, m, n \in Z^*, n>1)$

(2) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \, (a>0, m, n \in Z^*, n>1)$

四、对数函数 $y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0,a\neq 1$），定义域 $x\in(0,+\infty)$ [无界]

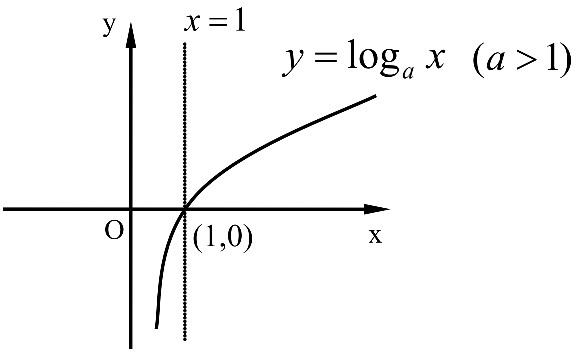
1.对数的概念：如果 a(a>0，a≠1)的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $\log_a N=b$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数，式子 $\log_a N$ 叫做对数式。

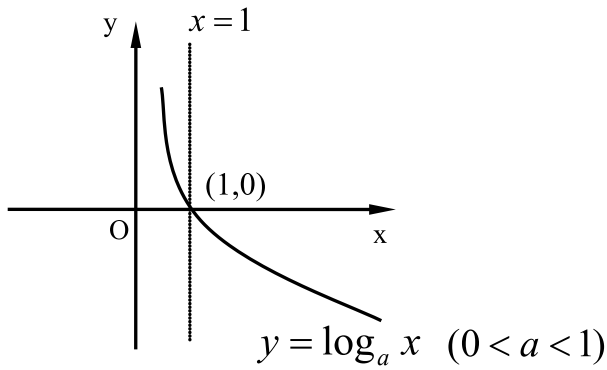
对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，所以 $y=\log_a x$ 的图象与 $y=a^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

2.常用对数：$\log_{10} N$ 的对数叫做常用对数，为了简便，N 的常用对数记作 $\lg N$。

3.自然对数：使用以无理数 $e=2.7182$ 为底的对数叫做自然对数，为了简便，N 的自然对数 $\log_e N$ 简记作 $\ln N$。

4.对数函数的图象：





5.对数函数的性质；

性质 \ 函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$
定义域	（0，+∞）	
值域	R	
奇偶性	非奇非偶	
公共点	过点(1，0)，即 $x=1$ 时，$y=0$	
单调性	在 $(0,+\infty)$ 上是增函数	在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

1）对数函数的图形为于 y 轴的右方，并过点(1,0)；

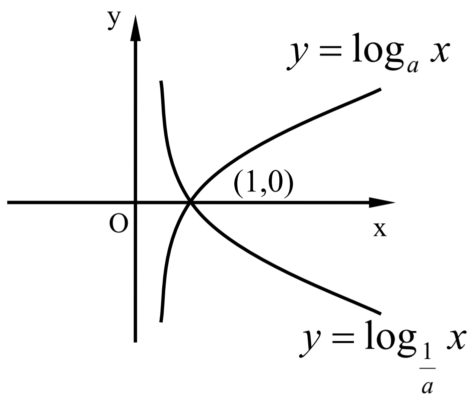
2）当 $a>1$ 时，在区间(0,1)，y 的值为负，图形位于 x 的下方；在区间(1，+∞)，y 值为正，图形位于 x 轴上方，在定义域是单调增函数。$a<1$ 在实际中很少用到。

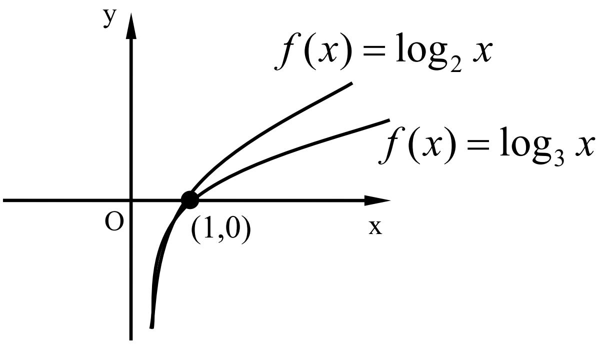
6.（选，补充）对数函数值的大小比较 $a \in \mathrm{N}^*$；

a. 底数互为倒数的两个对数函数

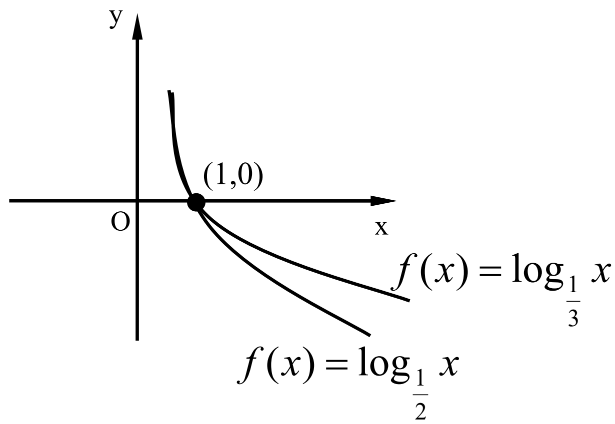
$y = \log_a x$，$y = \log_{\frac{1}{a}} x$

的函数图像关于 x 轴对称。





b. 1. 当 $a > 1$ 时，a 值越大，$f(x) = \log_a x$ 的图像越靠近 x 轴；



b. 2. 当 $(0 < a < 1)$ 时，a 值越大，$f(x) = \log_a x$ 的图像越远离 x 轴。

7. 对数的运算法则（公式）；

a. 如果 a＞0，a≠1，M＞0，N＞0，那么：

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^n = n\log_a M$$

b. 对数恒等式：

$$a^{\log_a N} = N \quad (a > 0且a \neq 1，N > 0)$$

c. 换底公式：

(1) $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ （$a > 0, a \neq 1$，一般常常换为 e 或 10 为底的对数, 即 $\log_b N = \dfrac{\ln N}{\ln b}$ 或 $\log_b N = \dfrac{\lg N}{\lg b}$ ）

(2) 由公式和运算性质推倒的结论：

$$\log_{a^n} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$$

d. 对数运算性质

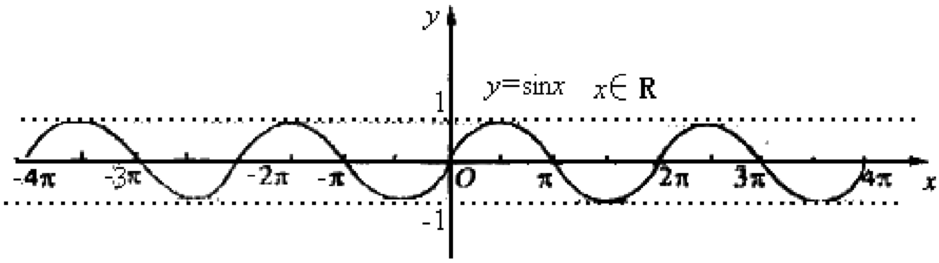
(1) 1 的对数是零，即 $\log_a 1 = 0$；同理 $\ln 1 = 0$ 或 $\lg 1 = 0$

(2) 底数的对数等于 1，即 $\log_a a = 1$；同理 $\ln e = 1$ 或 $\lg 10 = 1$

五、三角函数

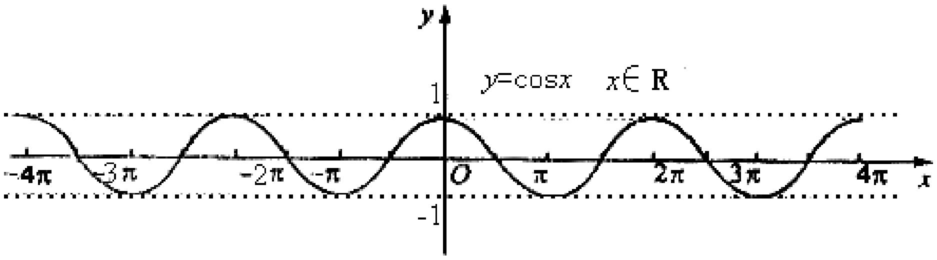
1. 正弦函数 $y=\sin x$ **, 有界函数，定义域** $x\in(-\infty,+\infty)$ **，值域** $y\in[-1,+1]$

图象：五点作图法：0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π



2. 余弦函数 $y=\cos x$ **，有界函数，定义域** $x\in(-\infty,+\infty)$ **，值域** $y\in[-1,+1]$

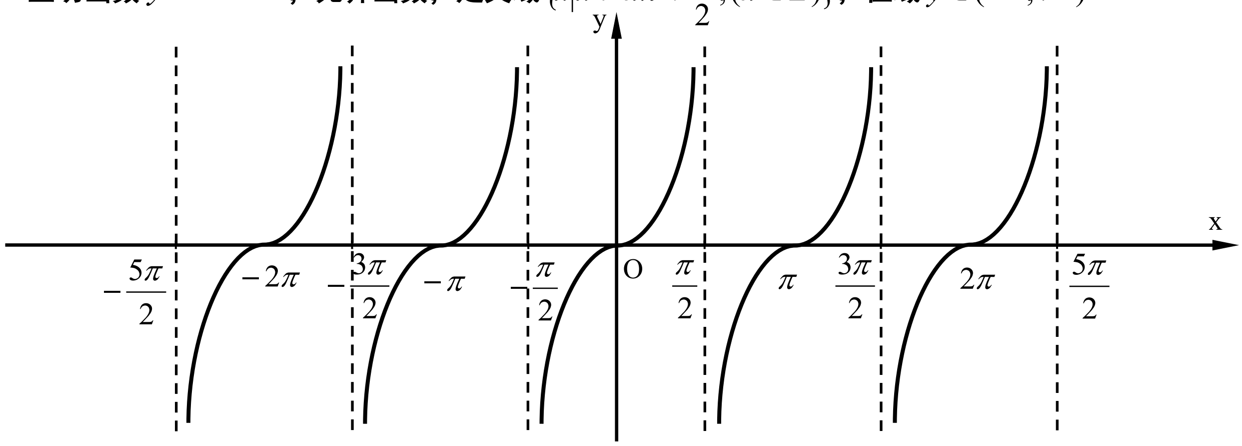
图象：五点作图法：0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π



3. 正、余弦函数的性质；

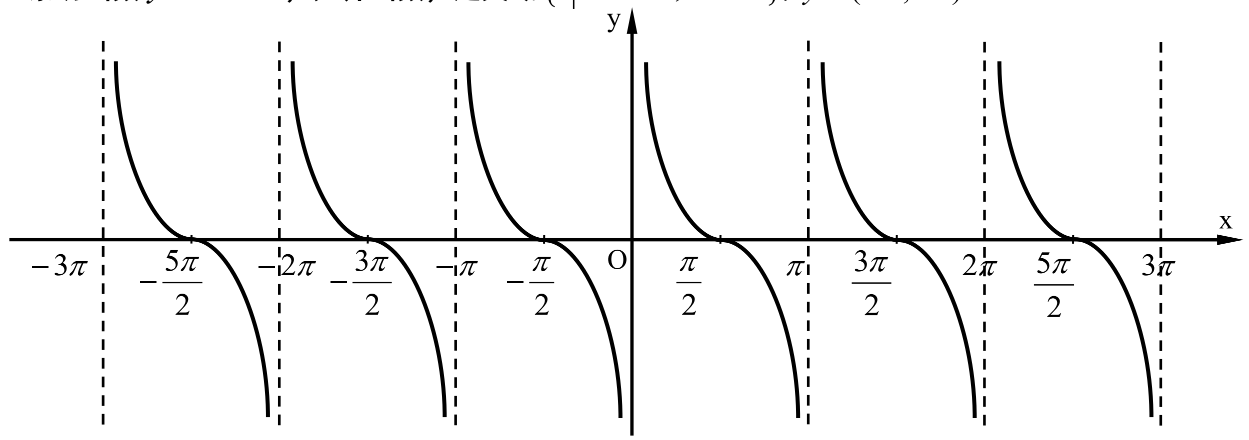
性质 函数	$y=\sin x$ $(k\in Z)$	$y=\cos x$ $(k\in Z)$
定义域	R	
值域	[−1, 1]	[−1, 1]
奇偶性	奇函数	偶函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$
对称中心	$(k\pi,0)$	$(k\pi\frac{\pi}{2},0)$
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$
单调性	在 $x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数 在 $x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减函数	在 $x\in[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 上是增函数 在 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上是减函数
最值	$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\max}=1$ $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\min}=-1$	$x=2k\pi$ 时，$y_{\max}=1$ $x=2k\pi+\pi$ 时，$y_{\min}=-1$

4. 正切函数 $y=\tan x$ **，无界函数，定义域** $\left\{x \middle| x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},(k\in Z)\right\}$**，值域** $y\in(-\infty,+\infty)$



$y=\tan x$ 的图像

5. 余切函数 $y=\cot x$ **，无界函数，定义域** $\left\{x \middle| x\neq k\pi,k\in Z\right\}$, $y\in(-\infty,+\infty)$

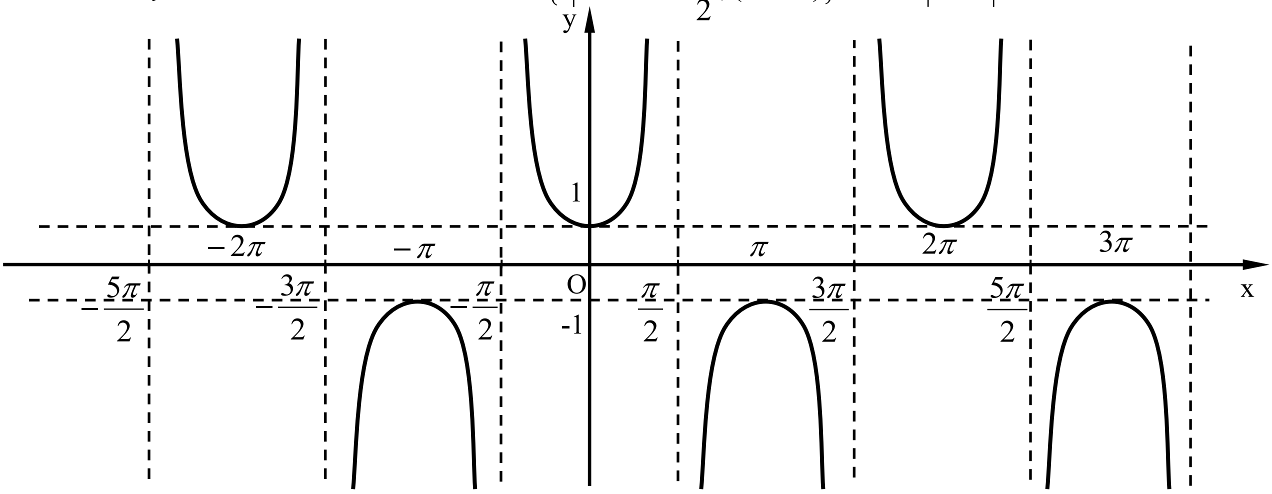


$y=\cot x$ 的图像

6. 正、余切函数的性质；

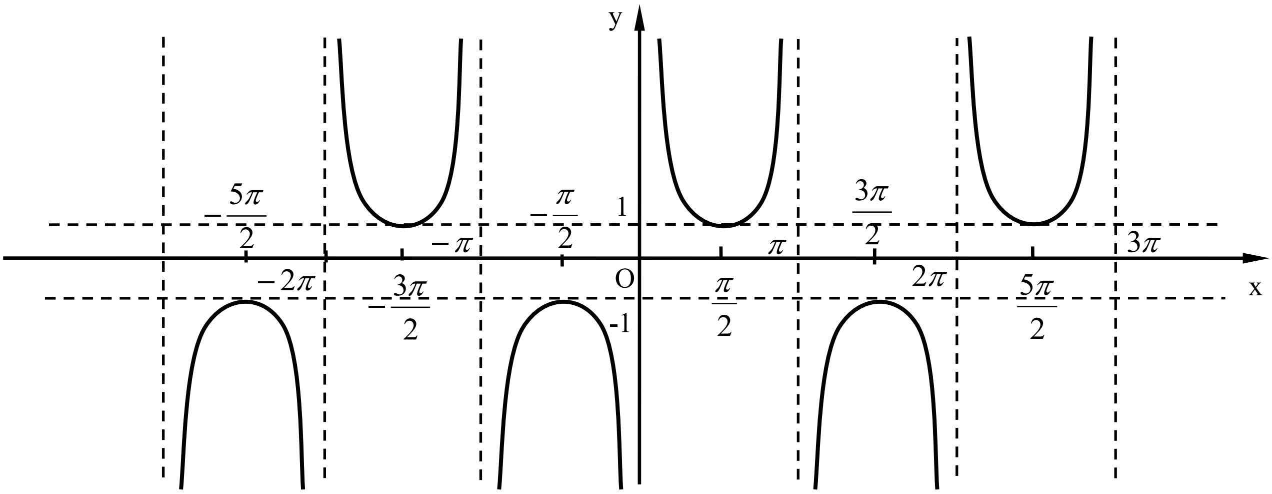
性质 / 函数	$y=\tan x\ (k\in Z)$	$y=\cot x\ (k\in Z)$
定义域	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x\neq k\pi$
值域	**R**	**R**
奇偶性	奇函数	奇函数
周期性	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性	在 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ 上都是增函数	在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 上都是减函数
对称中心	$(\frac{k\pi}{2},0)$	$(\frac{k\pi}{2},0)$
零点	$(k\pi,0)$	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$

7. 正割函数 $y=\sec x$ **，无界函数，定义域** $\left\{x \middle| x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k\in Z)\right\}$**，值域** $|\sec x|\geq 1$



$y=\sec x$ 的图像

8. 余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$**，无界函数，定义域** $\left\{x \middle| x\neq k\pi,(k\in Z)\right\}$**，值域** $|\csc x|\geq 1$



$y=\csc x$ 的图像

9. 正、余割函数的性质；

性质 / 函数	$y=\sec x\ (k\in Z)$	$y=\csc x\ (k\in Z)$
定义域	$\left\{x \middle| x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$\left\{x \middle| x\neq k\pi\right\}$
值域	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
奇偶性	偶函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$
单调性	$(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi)\cup(2k\pi+\pi,2k\pi+\dfrac{3\pi}{2})$ 减 $(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2})\cup(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi)$ 增	$(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2})\cup(2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi)$ 减 $(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi)\cup(2k\pi+\pi,2k\pi+\dfrac{3\pi}{2})$ 增

续表：

性质 函数	$y=\sec x\ (k\in Z)$	$y=\csc x\ (k\in Z)$
对称中心	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$	$(k\pi,0)$
对称轴	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
渐近线	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$

六、反三角函数

1. 反正弦函数 $y=\arcsin x$，无界函数，定义域[−1, 1]，值域$[0,\pi]$

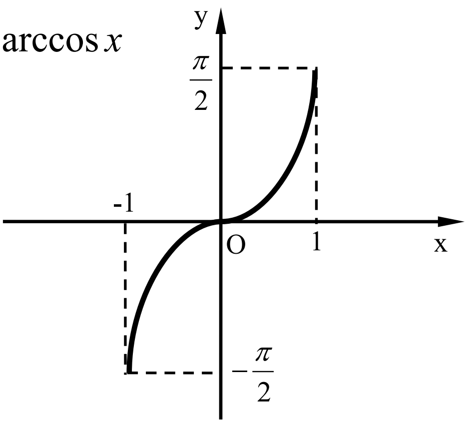
A. 反正弦函数的概念：正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数称为反正弦函数，记为

$y=\arcsin x$

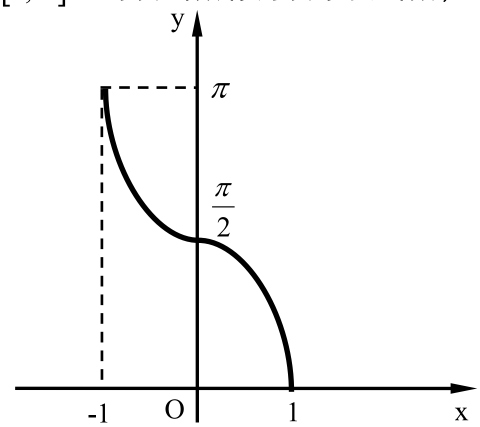
2. 反余弦弦函数 $y=\arccos x$，无界函数，定义域[−1, 1]，值域$[0,\pi]$

B. 反余弦函数的概念：余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数称为反余弦函数，记为

$y=\arccos x$



$y=\arcsin x$ 的图像



$y=\arccos x$ 的图像

3. 反正、余弦函数的性质；

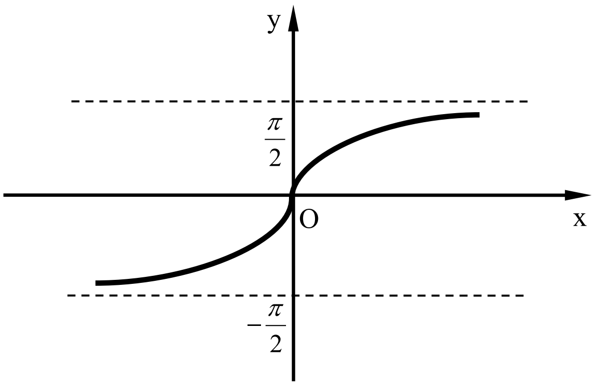
性质 函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
定义域	[−1, 1]	[−1, 1]
值域	$[0,\pi]$	$[0,\pi]$
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数
单调性	增函数	减函数

4. 反正切函数 $y=\arctan x$ **，有界函数，定义域** $x\in(-\infty,+\infty)$ **，值域** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

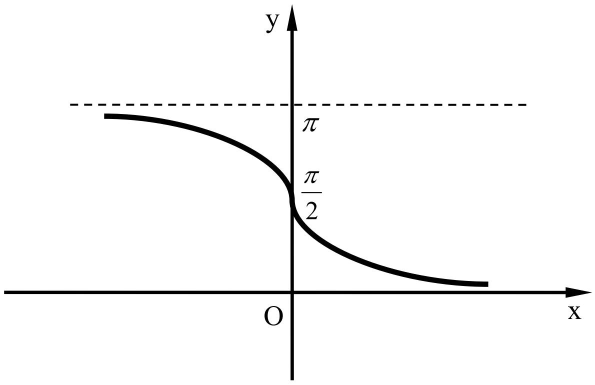
C. 反正切函数的概念： 正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数，记为 $y=\arctan x$

5. 反余切函数 $y=arc\cot x$ **，有界函数，定义域** $x\in(-\infty,+\infty)$ **，值域** $(0,\pi)$

D. 反余切函数的概念： 余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数称为反余切函数，记为 $y=arc\cot x$



$y=\arctan x$ 的图像



$y=arc\cot x$ 的图像

6. 反正、余弦函数的性质；

函数 性质	$y=\arctan x$	$y=arc\cot x$
定义域	R	
值域	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
奇偶性	奇函数	非奇非偶
单调性	增函数	减函数

三角函数公式汇总

一、任意角的三角函数

在角α的终边上任取一点$P(x,y)$，记：$r=\sqrt{x^2+y^2}$。

正弦：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$　余弦：$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

正切：$\tan\alpha=\frac{y}{x}$　余切：$\cot\alpha=\frac{x}{y}$

正割：$\sec\alpha=\frac{r}{x}$　余割：$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

二、同角三角函数的基本关系式

倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

三、诱导公式

x轴上的角，口诀：函数名不变，符号看象限；

y轴上的角，口诀：函数名改变，符号看象限。

四、和角公式和差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

五、二倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

二倍角的余弦公式常用变形：（规律：降幂扩角，升幂缩角）

$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$　　$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$　　$1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\frac{1+\sin2\alpha}{2}$，$\tan\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}$

六、三倍角公式

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3=4\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3-3\cos\alpha=4\cos\alpha\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)$$

$$\tan3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\tan\alpha\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)\tan(\frac{\pi}{3}+\alpha)$$

七、和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

八、辅助角公式

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

其中：角φ的终边所在的象限与点(a,b)所在的象限相同，

$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\varphi=\frac{b}{a}$

九、三角函数的周期公式

函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in R$及函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$x\in R$（A，$\omega,\varphi$，为常数，且$A\neq0,\omega>0$）

周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$

函数$y=A\tan(\omega x+\varphi)$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$（A，$\omega,\varphi$，为常数，且$A\neq0,\omega>0$）

周期：$T=\frac{\pi}{\omega}$

十、正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$为$\Delta ABC$外接圆半径）

十一、余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$