第 3 节 整体换元法的应用（★★★）

内容提要

整体换元法是三角函数这一章的核心方法之一，在处理函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的图象性质问题时，常将 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体，换元成 t，借助 $y=\sin t$ 的图象性质来解决问题，这种处理问题的方法在求值域、单调区间、对称轴、对称中心、解不等式等诸多问题中有着广泛的应用，它可以将复杂函数问题转化为简单函数问题来解决.

典型例题

【例 1】函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x(\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{6})$ 的最小值为_____.

【例 2】已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})+2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$，则不等式 $f(x)\le 2\sqrt{3}$ 的解集为_____.

【例 3】函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的单调递增区间是_____，单调递减区间是_____.

【变式 1】函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$ 的单调递增区间是_____.

【变式 2】函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 在 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上的单调递增区间是_____.

【变式 3】若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上是单调函数，则 ω 的取值范围为_____.

【变式 4】若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，则 ω 的取值范围为.

【变式 5】若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，则 ω 的取值范围为_____.

【变式6】已知函数$f(x)=a\sin x+2\cos x$在$[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}]$上单调递减，则实数$a$的取值范围是_____.

【例4】函数$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})-2\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}$的对称轴方程是_____，对称中心是_____.

【变式1】（2022·全国乙卷）记函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的最小正周期为$T$，若$f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点，则$\omega$的最小值为_____.

【变式2】已知奇函数$f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的最小正周期为$4\pi$，将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位得到函数$g(x)$的图象，则函数$g(x)$的图象（）

（A）关于点$(-\frac{5\pi}{3},0)$对称　（B）关于点$(\frac{\pi}{2},0)$对称

（C）关于直线$x=-\frac{\pi}{3}$对称　（D）关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

【变式3】已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2})$，$x=-\frac{\pi}{4}$为$f(x)$的零点，$x=\frac{\pi}{4}$为$y=f(x)$图象的对称轴，且$f(x)$在$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$上单调，则$\omega$的最大值是（）

（A）12　（B）11　（C）10　（D）9

【例5】若函数$f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})(\omega>0)$在$(0,\pi)$上有且仅有1个零点和1个极值点，则$\omega$的取值范围为_____.

【变式】定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})(\omega>0)$有零点，且$f(x)$的值域$M\subseteq[-\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$，则$\omega$的取值范围是_____.