

## 第2节 三大统一思想：角度、名称、次数（★★★）

### 内容提要

解决求值、求角、化简等问题的三大核心思想：角度统一、名称统一、次数统一，在具体的问题中，它们都是值得尝试的方向，把握好这三个统一，可以解决一系列问题.

1. 角度统一：包括二倍角与单倍角之间的统一；要求的角与已知的角之间的统一；题干中涉及多个角，向某一个或几个角统一等.
2. 名称统一：问题中涉及正弦、余弦、正切多个函数名的，若能将函数名统一起来，往往有利于分析问题. 例如正弦、余弦的齐次分式，可统一化为正切计算.
3. 次数统一：三角代数式中各项次数不统一的，可尝试利用降次公式或升次公式将次数统一.

### 典型例题

思想一：角度统一

【例1】(2020·新课标I卷) 已知  $\alpha \in (0, \pi)$ ，且  $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$ ，则  $\sin \alpha =$  ( )

- (A)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{5}}{9}$

【变式1】已知  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ， $3\cos 2\alpha = \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ ，则  $\sin 2\alpha =$  .

【变式2】已知  $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ ，且  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$ ，则  $\cos \alpha =$  .

【变式3】已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ， $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$ ， $\sin \beta = \frac{1}{3}$ ，则  $\cos \alpha =$  .

【变式4】已知  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\tan 2\beta = \frac{1}{2}$ ，则  $\cos(\frac{\alpha}{2} - \beta) =$  ( )

- (A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (B)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (C)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  (D)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【变式5】已知  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ ， $\sin \beta = 3\sin(2\alpha + \beta)$ ，则  $\tan(\alpha + \beta) =$  ( )

- (A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $-\frac{4}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $-\frac{2}{3}$

【变式 6】  $\frac{2\sin 43^\circ - \sqrt{3}\sin 13^\circ}{\cos 13^\circ} = .$

【变式 7】  $\sin(\theta + 75^\circ) + \cos(\theta + 45^\circ) - \sqrt{3}\cos(\theta + 15^\circ) = .$

思想二：名称统一

【例 2】已知  $\tan 2\theta = -4\tan(\theta + \frac{\pi}{4})$ ，则  $\sin 2\theta = ( )$

(A)  $-\frac{2}{5}$  (B)  $-\frac{4}{5}$  (C)  $\frac{2}{5}$  (D)  $\frac{4}{5}$

【变式 1】  $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ = .$

【变式 2】函数  $f(x) = \sin^3 x + 3\cos^2 x (-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  的最大值为.

思想三：次数统一

【例 3】函数  $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x (x \in \mathbf{R})$  的最大值为.

【变式 1】(2021·新高考 I 卷) 若  $\tan \theta = -2$ ，则  $\frac{\sin \theta(1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = ( )$

(A)  $-\frac{6}{5}$  (B)  $-\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{2}{5}$  (D)  $\frac{6}{5}$

【变式 2】(2022·新高考 I 卷节选) 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ ，

若  $C = \frac{2\pi}{3}$ ，求  $B$ .

思想四：三大统一思想综合应用

【例 4】(2021·全国甲卷) 若  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ , 则  $\tan \alpha =$  ( )

- (A)  $\frac{\sqrt{15}}{15}$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【变式 1】已知  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 则  $f(x) = \frac{1 + \cos 2x + 8 \sin^2 x}{\sin 2x}$  的最小值为.

【变式 2】已知  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ , 设  $a = \tan 2\theta$ ,  $b = \frac{\cos 2\theta}{2(1 - \sin 2\theta)}$ ,  $c = \sin 2\theta$ , 则  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小关系是 ( )

- (A)  $a > b > c$  (B)  $b > c > a$  (C)  $b > a > c$  (D)  $c > a > b$