模块二 三角恒等变换

重点知识回顾

一、和差角公式

1．$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；

2．$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

3．$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$；

4．辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$．在辅助角公式中，若$a>0$，则$\varphi\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$；若$a<0$，可先提负号到外面，再用辅助角公式合并.

二、二倍角公式

1．二倍角公式：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

2．降次公式：$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$.

3．升次公式：$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$，$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$，$1\pm\sin 2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$，$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

三、万能公式

1．$\sin\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$；2．$\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$；3．$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$.

第 1 节 和差角、辅助角、二倍角公式（★★）

内容提要

和差角、辅助角、二倍角公式是三角函数的核心公式，本节涉及一些有关公式应用的基础题.

典型例题

【例 1】已知 $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$.

答案：$-\frac{7}{9}$

解法 1：将 $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ 展开，会出现 $\sin\alpha+\cos\alpha$，平方即可求得 $\sin 2\alpha$，

由题意，$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{1}{3}$，所以 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

从而 $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha=1+\sin 2\alpha=\frac{2}{9}$，故 $\sin 2\alpha=-\frac{7}{9}$.

解法 2：给值求值问题，也可将已知的角换元，把求值的角转换成已知角，

设 $t=\frac{\pi}{4}+\alpha$，则 $\alpha=t-\frac{\pi}{4}$，且 $\sin t=\frac{1}{3}$，所以 $\sin 2\alpha=\sin 2(t-\frac{\pi}{4})=\sin(2t-\frac{\pi}{2})=-\cos 2t=2\sin^2 t-1=-\frac{7}{9}$.

【变式】(2022 • 新高考 II 卷）若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，则（　　）

（A）$\tan(\alpha+\beta)=1$　（B）$\tan(\alpha+\beta)=-1$　（C）$\tan(\alpha-\beta)=1$　（D）$\tan(\alpha-\beta)=-1$

答案：D

解法 1：可尝试将题干所给等式左右两侧都展开，看能否进一步变形，

由题意，$(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)\sin\beta$，

整理得：$(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=0$，

此时恰好又凑成了正弦、余弦的差角公式，故再将其合并，

所以 $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，故 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=-1$.

解法 2：注意到左侧的 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)$ 可以合并，故先将其合并，再看能否进一步变形，

$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})$，代入题干等式化简得：$\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$ ①，

注意到右侧的两个角是 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 和 β，所以把左侧的 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}$ 调整为 $(\alpha+\frac{\pi}{4})+\beta$，再展开看看，

又 $\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=\sin[(\alpha+\frac{\pi}{4})+\beta]=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta+\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，

所以代入式①可得：$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta+\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，

整理得：$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta=0$，故 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta)=0$，

所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta=k\pi$，从而 $\alpha-\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，故 $\tan(\alpha-\beta)=\tan(k\pi-\frac{\pi}{4})=\tan(-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$.

【反思】结构决定变形方向，我们在对三角代数式变形时，应先观察其结构特征，发现其与常用公式的联系，寻找变形方向.

【例 2】若 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$_____.

答案：$\frac{7}{5}$

解析：由题意，$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{6}$，解得：$\tan\alpha=\frac{7}{5}$.

【变式 1】已知 $\tan\alpha=-2$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{7}$，则 $\tan 2\beta$ 的值为.

答案：$-\frac{3}{4}$

解析：先把 $\tan(\alpha+\beta)$ 展开，结合已知的 $\tan\alpha$ 可求出 $\tan\beta$，再用二倍角公式求 $\tan 2\beta$，

由题意，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-2+\tan\beta}{1+2\tan\beta}=\frac{1}{7}$，解得：$\tan\beta=3$，所以 $\tan 2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\frac{3}{4}$.

【变式 2】已知 α，β 均为锐角，$(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=4$，则 $\alpha+\beta=$（　　）

（A）$\frac{\pi}{3}$　　（B）$\frac{2\pi}{3}$　　（C）$\frac{3\pi}{4}$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

答案：B

解析：先将所给等式的左侧展开，由题意，$(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=1-\sqrt{3}(\tan\alpha+\tan\beta)+3\tan\alpha\tan\beta=4$，

上式中有 $\tan\alpha+\tan\beta$、$\tan\alpha\tan\beta$ 这些结构，自然想到往 $\tan(\alpha+\beta)$ 的展开式去变形，

所以 $-(\tan\alpha+\tan\beta)=\sqrt{3}(1-\tan\alpha\tan\beta)$，从而 $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\sqrt{3}$，故 $\tan(\alpha+\beta)=-\sqrt{3}$，

又 α，β 都是锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，故 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.

【例 3】已知 $\theta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，且 $\cos 2\theta+\cos\theta=0$，则 $\sin 2\theta+\sin\theta=$（　　）

（A）0　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$-\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{2}$

答案：C

解析：将题干等式中的 $\cos 2\theta$ 换成 $2\cos^2\theta-1$，可统一角度和名称，求出 $\cos\theta$，

由题意，$\cos 2\theta+\cos\theta=2\cos^2\theta-1+\cos\theta=0$，解得：$\cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 -1，

又 $\theta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，所以 $\cos\theta>0$，$\sin\theta<0$，从而 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故 $\sin 2\theta+\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta=2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times\frac{1}{2}+(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\sqrt{3}$.

【反思】本题求得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 后，也可结合 $\theta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ 直接得出 $\theta=\frac{5\pi}{3}$，再计算 $\sin 2\theta+\sin\theta$.

【例 4】$\cos 15^\circ\cos 45^\circ-\cos 75^\circ\sin 45^\circ=$.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：看到这个式子，想到凑形式，把 $\cos 75^\circ$ 变成 $\sin 15^\circ$，就凑成了余弦和角公式，

$\cos 15^\circ\cos 45^\circ-\cos 75^\circ\sin 45^\circ=\cos 15^\circ\cos 45^\circ-\sin 15^\circ\sin 45^\circ=\cos(15^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

【变式 1】$\dfrac{\sin 110^\circ\sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ-\sin^2 155^\circ}=$.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：先看角之间的关联，$110^\circ=90^\circ+20^\circ$，所以分子诱导后可以利用正弦倍角公式合并，

原式 $=\dfrac{\sin(90^\circ+20^\circ)\sin 20^\circ}{\cos 310^\circ}=\dfrac{\cos 20^\circ\sin 20^\circ}{\cos(360^\circ-50^\circ)}=\dfrac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}{\cos 50^\circ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=\dfrac{1}{2}$.

【变式 2】$\tan 25^\circ+\tan 35^\circ+\sqrt{3}\tan 25^\circ\tan 35^\circ=$.

答案：$\sqrt{3}$

解析：看到 $\tan 25^\circ+\tan 35^\circ$ 和 $\tan 25^\circ\tan 35^\circ$，联想到 $\tan(25^\circ+35^\circ)$，而 $25^\circ+35^\circ=60^\circ$，恰好是特殊角，所以先用正切和角公式将 $\tan 60^\circ$ 按此拆分展开，

因为 $\tan 60^\circ=\tan(25^\circ+35^\circ)=\dfrac{\tan 25^\circ+\tan 35^\circ}{1-\tan 25^\circ\tan 35^\circ}=\sqrt{3}$，所以 $\tan 25^\circ+\tan 35^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 25^\circ\tan 35^\circ$，

故 $\tan 25^\circ+\tan 35^\circ+\sqrt{3}\tan 25^\circ\tan 35^\circ=\sqrt{3}$.

【反思】给具体角求值，关键是寻找角的关系，如相加、相减为特殊角可考虑用和差角公式，相加、相减为 90°、180° 等可考虑用诱导公式，或者角度之间有 2 倍关系，可考虑用二倍角公式.

【例 5】设 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，则 $f(x)$ 的最大值为.

答案：2

解析：先利用辅助角公式将解析式合并，$f(x)=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\sin(x+\varphi)=2\sin(x+\varphi)$，所以 $f(x)_{\max}=2$.（因为 $f(x)$ 的定义域为 **R**，所以不用去求辅助角 φ 的值）

【变式 1】设 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x(0\le x\le\frac{2\pi}{3})$，则 $f(x)$ 的最大值为.

答案：$\sqrt{3}$

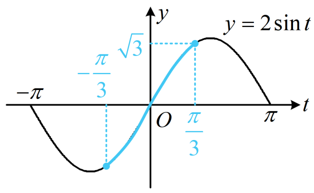
解析：先利用辅助角公式将解析式合并，$f(x)=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\sin(x+\varphi)=2\sin(x+\varphi)$，

这里因为规定了 $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$，所以必须求出 φ 的值，因为 $\tan\varphi=-\sqrt{3}$ 且 $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

从而 $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，接下来可将 $x-\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助 $y=2\sin t$ 的图象来求最值，

设 $t=x-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=2\sin t$，当 $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$ 时，$-\frac{\pi}{3}\le t=x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$，

函数 $y=2\sin t$ 的部分图象如图所示，由图可知当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.



【变式 2】已知 $f(x)=\sin x+2\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 的值域为.

答案：$[1,\sqrt{5}]$

解析：由题意，$f(x)=\sqrt{1^2+2^2}\sin(x+\varphi)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，为了求值域，可先将 $x+\varphi$ 换元成 t，

设 $t=x+\varphi$，则 $f(x)=\sqrt{5}\sin t$，因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi\le t\le\frac{\pi}{2}+\varphi$，

接下来必须研究辅助角 φ，才能求出 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi]$ 上的值域，

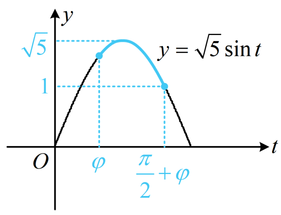
由辅助角公式知 $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 φ 在第一象限，不妨设 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，（注意此处 φ 不是变量，而是一个确定的非特殊角）

从而 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\frac{\pi}{2}]$ 上↗，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\varphi]$ 上↘，故当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{5}$；

对于最小值，根据单调性，只需比较左右端点谁更小即可，

又 $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}>\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi]$ 上的图象如图所示，

由图可知，当 $t=\frac{\pi}{2}+\varphi$ 时，$f(x)$ 取得最小值 1，故 $f(x)$ 的值域为 $[1,\sqrt{5}]$.



【反思】即使辅助角 φ 不是特殊角，我们也可以通过求出 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$，并用它们来解决问题.

强化训练

1.（2022・南充模拟・★★）锐角 α 满足 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=$.

答案：$\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

解析：由题意，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

2.（2022·安徽模拟·★★）若 α 是第二象限的角，且 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$.

答案：$-\frac{24}{7}$

解析：由题意，$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$，又 α 是第二象限的角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

从而 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，故 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

3.（2022·北京模拟·★★★）若 $\cos(\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，则 β 可以为.（写出一个满足条件的 β）

答案：$-\frac{\pi}{4}$（答案不唯一，满足 $\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 的 β 均可）

解析：先用诱导公式把 $\cos(\pi-\alpha)$ 化简，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

又 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$，

我们要写出一个 β，可以先计算 $\tan\beta$，直接把已知的 $\tan(\alpha+\beta)$ 展开即可，

由题意，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3+\tan\beta}{1-3\tan\beta}=\frac{1}{2}$，解得：$\tan\beta=-1$，所以 $\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

4.（2022·全国二模·★★★）若 $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=2\tan(\frac{\pi}{4}+x)$，则 $\sin 2x=$（　　）

（A）$-\frac{3}{5}$　（B）$\frac{3}{5}$　（C）$-\frac{1}{3}$　（D）$\frac{1}{3}$

答案：C

解析：注意到 $(\frac{\pi}{4}-x)+(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{\pi}{2}$，故若将 $\frac{\pi}{4}-x$ 换元成 t，则 $\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}-t$，可将已知等式用诱导公式化简，

令 $t=\frac{\pi}{4}-x$，则 $x=\frac{\pi}{4}-t$，所以 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-t$，代入 $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=2\tan(\frac{\pi}{4}+x)$ 可得 $\tan t=2\tan(\frac{\pi}{2}-t)$，

从而 $\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{2\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}=\frac{2\cos t}{\sin t}$，故 $\sin^2 t=2\cos^2 t$，结合 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ 可求得 $\cos^2 t=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin 2x=\sin 2(\frac{\pi}{4}-t)=\sin(\frac{\pi}{2}-2t)=\cos 2t=2\cos^2 t-1=-\frac{1}{3}$.

5.（2022·全国乙卷·★★）$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=$（　　）

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

解法 1：两项都有平方，可降次，且降次后恰好都化为特殊角，

由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}-\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{1+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2：注意到 $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，故用诱导公式将角统一成 $\frac{\pi}{12}$，可利用倍角公式求值，

由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.（2022·黑龙江模拟·★★）数学家华罗庚倡导的“0.618 优选法”在各领域都有广泛应用，0.618 就是黄金分割比 $m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值，黄金分割比还可以表示成 $2\sin 18^\circ$，则 $\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ-1}=$（　）

(A) 4　(B) $\sqrt{5}+1$　(C) 2　(D) $\sqrt{5}-1$

答案：A

解析：由题意，$\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ-1}=\frac{4\sin 18^\circ\sqrt{4-4\sin^2 18^\circ}}{\cos 54^\circ}=\frac{4\sin 18^\circ\sqrt{4\cos^2 18}}{\cos 54^\circ}=\frac{8\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}$

$=\frac{4\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ}=\frac{4\sin(90^\circ-54^\circ)}{\cos 54^\circ}=\frac{4\cos 54^\circ}{\cos 54^\circ}=4$.

7.（2022·常州模拟·★★★）已知 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)$，$b=\frac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}$，$c=\sin 22^\circ\cos 24^\circ+\cos 22^\circ\sin 24^\circ$，则 a、b、c 的大小关系为（　）

(A) $b>a>c$　(B) $c>b>a$　(C) $c>a>b$　(D) $b>c>a$

答案：B

解析：要比较 a、b、c 的大小，应先把 a、b、c 化为同名三角函数值，

由题意，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)=\sin 45^\circ\cos 1^\circ-\cos 45^\circ\sin 1^\circ=\sin(45^\circ-1^\circ)=\sin 44^\circ$，

$b=\frac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}=\frac{1-\frac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ}}{1+\frac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ}}=\frac{\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ+\sin^2 22.5^\circ}=\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ=\cos 45^\circ=\sin 45^\circ$，

$c=\sin 22^\circ\cos 24^\circ+\cos 22^\circ\sin 24^\circ=\sin(22^\circ+24^\circ)=\sin 46^\circ$，

因为 $y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上↗，所以 $\sin 46^\circ>\sin 45^\circ>\sin 44^\circ$，故 $c>b>a$.

8.（★★★）设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$.

答案：$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：先用辅助角公式，将 $f(x)$ 合并，求出其最大值，$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，所以 $f(x)_{\max}=\sqrt{5}$，

由题意，$f(\theta)=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{5}$，所以$\sin(\theta+\varphi)=1$，要求$\cos\theta$，可先由此式将$\theta$求出来，

从而$\theta+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故$\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi(k\in\mathbf{Z})$，所以$\cos\theta=\cos(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$，

由辅助角公式，$\sin\varphi=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故$\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【反思】在辅助角公式$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$中，若需要用到辅助角$\varphi$，但$\varphi$又不是特殊角，则我们可以利用$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$来解决问题.