

模块二 基本初等函数

基础知识回顾

一、指、对公式

指对运算的核心技巧是化同底，常用的公式有下面的这些：

1. 指数计算公式

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (2) (a^m)^n = a^{mn} \quad (3) (ab)^m = a^m b^m$$

$$(4) a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (5) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (6) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2. 对数计算公式

$$(1) a^n = m \Leftrightarrow n = \log_a m; \quad \log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1$$

$$(2) \log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$$

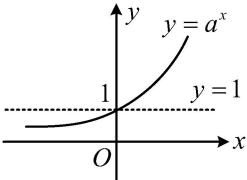
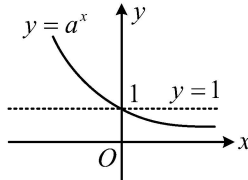
$$(3) \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$(4) \log_a M^n = n \log_a M \quad (\text{推广形式: } \log_{a^m} M^n = \frac{n}{m} \log_a M)$$

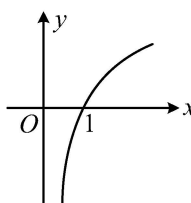
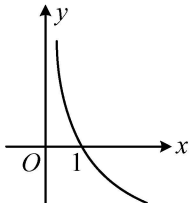
$$(5) \text{换底公式: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{特别地, 当 } c=b \text{ 时, } \log_a b = \frac{1}{\log_b a})$$

$$(6) a^{\log_a m} = m, \quad e^{\ln m} = m.$$

二、指数函数的图象及性质

| $y = a^x$ | $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|-----------|---|--|
| 图象 |  |  |
| 定义域 | \mathbf{R} | |
| 值域 | $(0, +\infty)$ | |
| 性质 | 过点 (0,1), 即当 $x=0$ 时, $y=1$ | |
| | 当 $x > 0$ 时, $y > 1$ 当 $x < 0$ 时, $0 < y < 1$ | 当 $x > 0$ 时, $0 < y < 1$ 当 $x < 0$ 时, $y > 1$ |
| | 在 \mathbf{R} 上单调递增 | 在 \mathbf{R} 上单调递减 |

三、对数函数的图象及性质

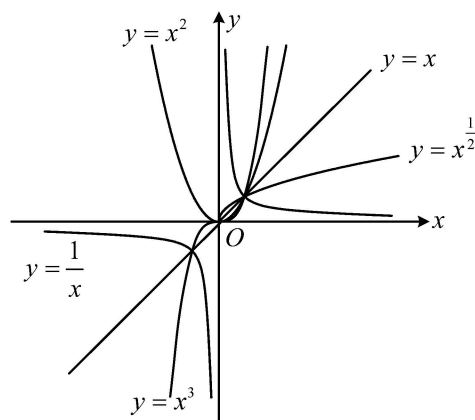
| $y = \log_a x$ | $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|----------------|---|--|
| 图象 |  |  |

| | | |
|-----|--|--|
| 定义域 | $(0, +\infty)$ | |
| 值域 | \mathbf{R} | |
| 性质 | 过点 $(1,0)$ ，即当 $x=1$ 时， $y=0$ | |
| | 当 $x>1$ 时， $y>0$ 当 $0<x<1$ 时， $y<0$ | 当 $x>1$ 时， $y<0$ 当 $0<x<1$ 时， $y>0$ |
| | 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 | 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 |

四、幂函数的图象及性质

我们把形如 $y = x^\alpha$ 的函数叫做幂函数，其中 α 是常数， x 是自变量，幂函数常见的性质有：

- (1) 图象始终过点 $(1,1)$ 。
- (2) 当 $\alpha > 0$ 时， $y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，具体来说，若 $\alpha \in (0,1)$ ，增长趋于平缓；若 $\alpha \in (1, +\infty)$ ，增长趋于陡峭。
- (3) 当 $\alpha < 0$ 时， $y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。
- (4) 五个常见幂函数的图象：



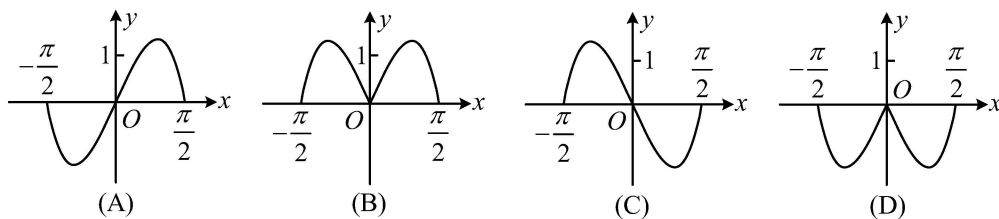
第1节 选解析式与选图象

内容提要

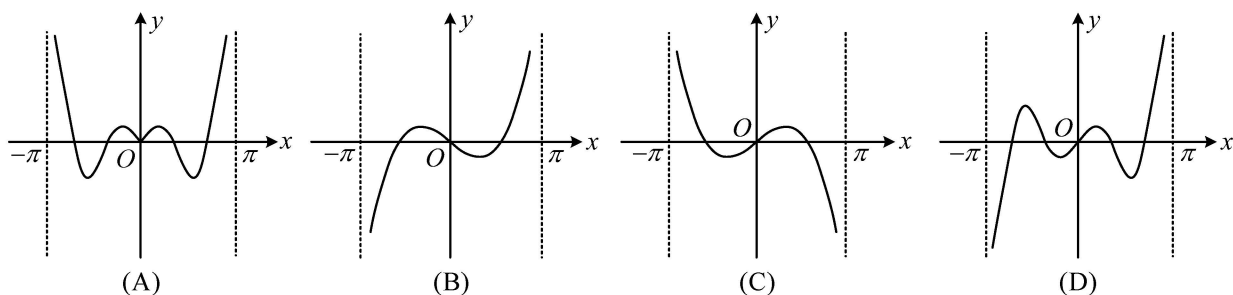
选解析式与选图象这种题，考查的是函数的性质，用排除法选答案是通法，我们一般可以从以下的一些角度考虑：①奇偶性；②特殊点（或某区间）的函数值；③单调性；④图象变化趋势（极限情况）等.

典型例题

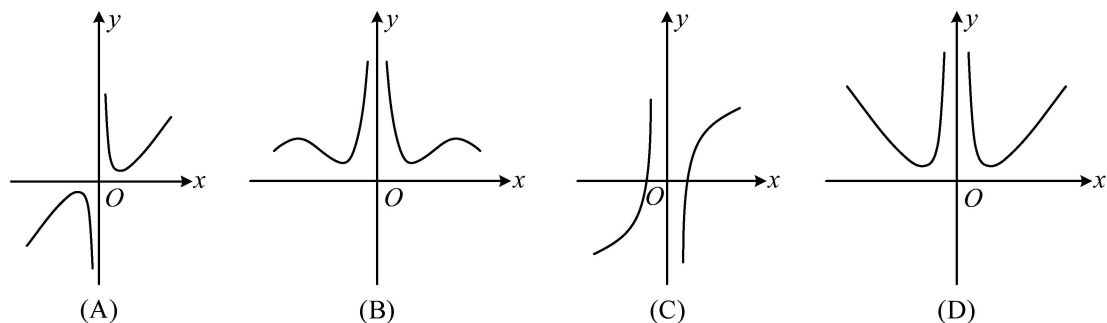
【例1】(2022·全国甲卷·★★) 函数 $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的大致图象为 ()



【例2】函数 $f(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos x}$ ($-\pi < x < \pi$) 的大致图象为 ()

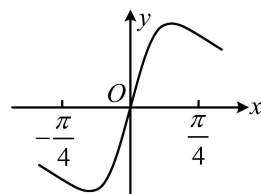


【例3】函数 $f(x) = \frac{|x|x^2 - \ln|x|}{x^2}$ 的大致图象为 ()



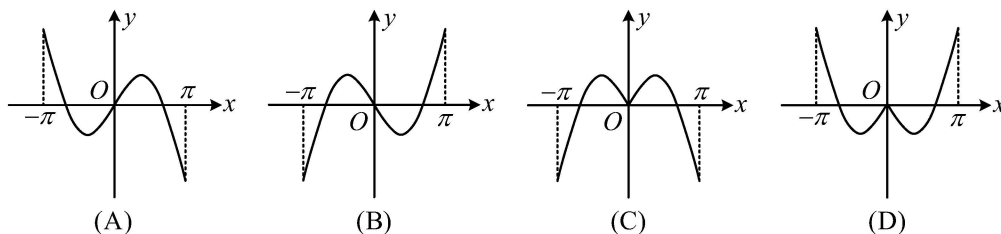
【例 4】(2021 · 浙江卷) 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$, $g(x) = \sin x$, 则图象为右图的函数可能是 ()

- (A) $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$ (B) $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4}$ (C) $y = f(x)g(x)$ (D) $y = \frac{g(x)}{f(x)}$

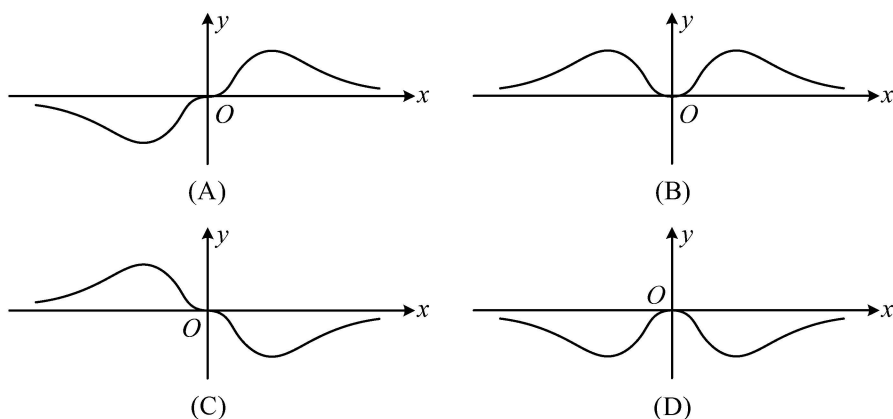


强化训练

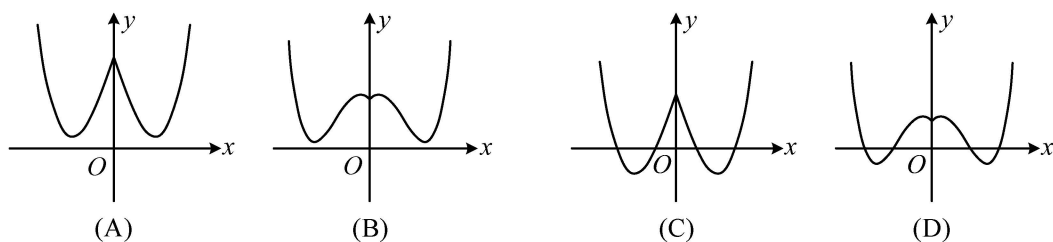
1. (2020 · 浙江卷 · ★★) 函数 $y = x \cos x + \sin x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的图象可能是 ()



2. (2022 · 湖北月考 · ★★) 函数 $f(x) = \frac{x^3}{3^x + 3^{-x}}$ 的部分图象大致为 ()

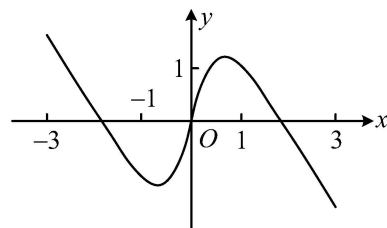


3. (2022 · 浙江期中 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = e^{|x|} - 2x^2$, 则 $f(x)$ 的图象可能是 ()

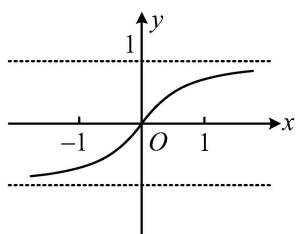


4. (2022 · 全国乙卷 · ★★★★★) 右图是下列四个函数中的某个函数在 $[-3, 3]$ 的大致图象, 则该函数是 ()

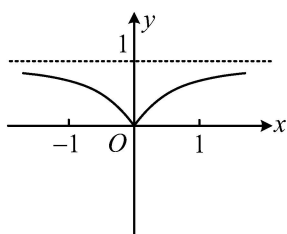
(A) $y = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$ (B) $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ (C) $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$ (D) $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$



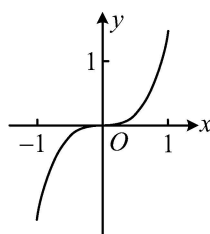
5. (2022 · 衢州期末 · ★★) 函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^{|x|}}$ 的部分图象大致为 ()



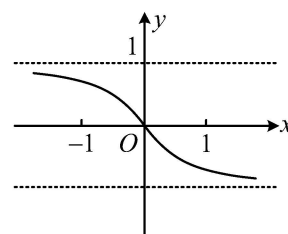
(A)



(B)

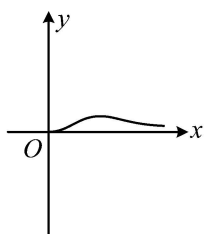


(C)

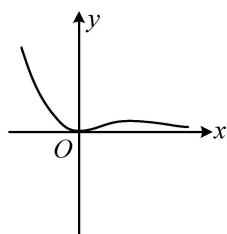


(D)

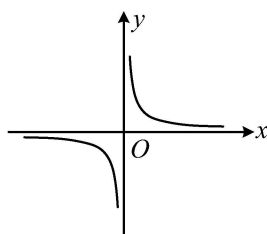
6. (2022 · 温州模拟 · ★★★★★) 已知 $\alpha \in \mathbf{R}$, 则函数 $f(x) = \frac{x^\alpha}{e^x + 2}$ 的图象不可能是 ()



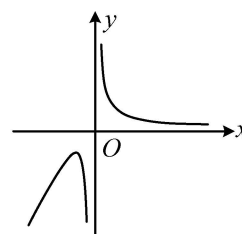
(A)



(B)



(C)



(D)