第 1 节 利用图象数形结合解决三角函数问题（★★★☆）

内容提要

三角函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象性质的综合应用问题在高考中往往充当把关题的角色，难度较大，解题的关键是抓住图象上的一些特征来综合分析问题：

1．对称轴：函数的最值点处的与 x 轴垂直的直线；

2．对称中心：图象上满足 $\sin(\omega x+\varphi)=0$ 的点；

3．周期特征：相邻两对称轴之间的距离为半个周期，相邻两对称中心之间的距离为半个周期，相邻的对称轴和对称中心之间的距离为四分之一个周期；

4．单调区间：从左到右，最大值点到相邻最小值点为减区间，最小值点到相邻最大值点为增区间；

5．函数值相等：一个周期内，两个点的函数值相等，则它们中间必为对称轴；如图 1 中同周期内的 A、B 两点处函数值相等，则中间为对称轴；又如同周期内的 B、C 两点处函数值相等，中间也为对称轴；

6．函数值相反：半个周期内，两个点的函数值相反，则它们中点必为对称中心；如图 2 中的 D、E 两点在半个周期内，函数值相反，所以它们的中点 F 为对称中心.

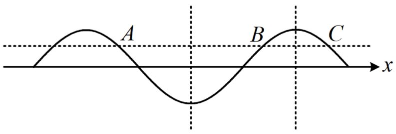


图1

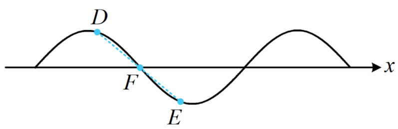


图2

典型例题

【例 1】设 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，且 $f(x)\le f(\frac{2\pi}{9})$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，记 $p=f(\frac{2\pi}{3})$，$q=f(\frac{5\pi}{6})$，$r=f(\frac{7\pi}{6})$，则 p、q、r 的大小关系是（　　）

（A）$r<p<q$ （B）$q<r<p$ （C）$p<q<r$ （D）$q<p<r$

【例 2】设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 满足 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{\pi}{3})=0$，且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上单调，则 $\omega=$_____.

【变式】已知 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，若 $x_1x_2<0$，且 $f(x_1)+f(x_2)=0$，则 $|x_2-x_1|$ 的取值范围为_____.

【例 3】设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$，若 $f(\frac{5\pi}{8})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{11\pi}{8})=0$，且相邻两个零点之间的距离大于 π，则（）

（A）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{24}$　　（B）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{12}$　　（C）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=\frac{7\pi}{24}$　　（D）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{12}$

【例 4】函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 在 $[\pi-m,m]$ 上单调递减，则 m 的最大值为_____.

【变式】已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的定义域为 $[a,b]$，值域为 $[-1,\sqrt{2}]$，则 $b-a$ 的取值范围是（）

（A）$[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}]$　　（B）$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$　　（C）$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$　　（D）$[\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$

【例 5】已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})-2\sin^2(x+\frac{\pi}{6})+1$，把 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 x_1、x_2 是 $g(x)=m$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内的两根，则 $\sin(x_1+x_2)$ 的值为（）

（A）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（D）$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

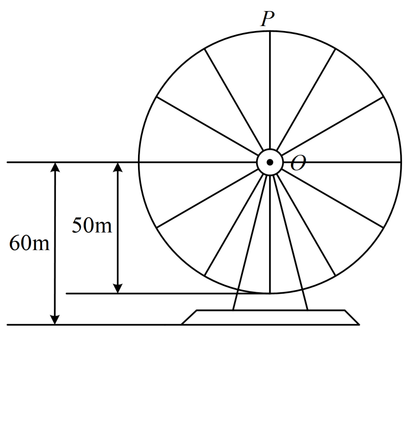
【例 6】如图，摩天轮的半径为 50m，其中心 O 距离地面的高度为 60m，摩天轮按逆时针方向匀速转动，且 20min 转一圈，若摩天轮上点 P 的初始位置为最高点，则摩天轮转动过程中下列说法正确的是（　　）

（A）转动 10min 后点 P 距离地面 8m

（B）若摩天轮转速减半，则转动一圈所需的时间变为原来的 $\frac{1}{2}$

（C）第 17min 和第 42min 点 P 距离地面的高度相同

（D）摩天轮转动一圈，点 P 距离地面的高度不低于 85m 的时间长为 $\frac{20}{3}$min



强化训练

1.（2018·北京卷·★★）设 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(x)\le f(\frac{\pi}{4})$ 对任意实数 x 都成立，则 ω 的最小值为_____.

2.（2021·福建模拟·★★★）已知 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且关于 $(-\frac{\pi}{8},0)$ 对称，则（　　）

（A）$f(0)<f(2)<f(1)$　（B）$f(2)<f(1)<f(0)$　（C）$f(2)<f(0)<f(1)$　（D）$f(1)<f(0)<f(2)$

3.（2022·上海模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 满足 $f(x)\le f(\frac{\pi}{6})$，若 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上单调，且 $f(x_1)+f(x_2)=0$，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为（）

（A）$\frac{\pi}{6}$　（B）$\frac{\pi}{3}$　（C）$\frac{2\pi}{3}$　（D）$\frac{4\pi}{3}$

4.（★★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=\frac{3\pi}{8}$，设函数 $f(x)=(4\cos^2\frac{x}{2}-2)\sin x+\cos 2x+2$，记 $y_n=f(a_n)$，则数列 $\{y_n\}$ 的前 9 项和为（　　）

（A）0　（B）10　（C）16　（D）18

5.（2022·潍坊一模·★★★）设函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 在 $[a,a+\frac{\pi}{4}]$ 的最大值为 $g_1(a)$，最小值为 $g_2(a)$，则 $g_1(a)-g_2(a)$ 的最小值为（　　）

（A）1　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　（D）$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

6.（2022·绵阳模拟·★★）若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，则 $\omega=$_____.

7.（2022·全国大联考·★★★）已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，若 $f(\frac{\pi}{3})=f(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，则 $\varphi=$（　　）

（A）$2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$　　（B）$2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$　　（C）$2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$　　（D）$2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

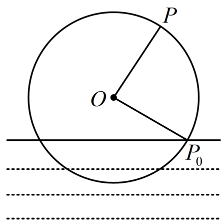
8.（2022·确山月考·★★★）一半径为4.8m的水轮如图所示，水轮圆心 O 距离水面2.4m，已知水轮每60s逆时针转动一圈，如果当水轮上点 P 从水中浮现时（图中点 P_0）开始计时，则（　　）

（A）点 P 离水面的距离 d（单位：m）与时间 t（单位：s）的函数解析式为 $d=4.8\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})-2.4$

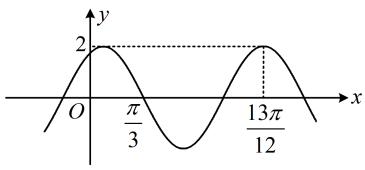
（B）点 P 第一次到达最高点需要10s

（C）在水轮转动的一圈内，点 P 离水面的高度不低于4.8m共有10s时间

（D）当水轮转动50s时，点 P 在水面下方，距离水面2.4m



9.（2021·全国甲卷·★★★）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则满足条件 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$ 的最小正整数 x 为_____.



10.（★★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，若 $-\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的图象的对称轴，且对任意的 $x\in(\frac{11\pi}{36},\frac{17\pi}{36})$，$|f(x)|<1$，则 ω 的最大值为（）

（A）5　（B）4　（C）3　（D）2

11.（★★★★）（多选）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象与 x 轴相邻的两个交点的横坐标分别为 $\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象，则下列结论中正确的有（　　）

（A）函数 $y=f(x+\frac{\pi}{3})$ 的图象关于原点对称

（B）在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上，$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

（C）$x=-\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴

（D）若 A、B、C 为两个函数图象的不共线的交点，则 ΔABC 面积的最小值为 $\sqrt{2}\pi$