第 2 节 求无参函数的单调区间、极值、最值（★★）

内容提要

求单调区间、极值、最值是导数的高考导数题第 1 问的常考题型，这一节先研究不含参的情况，我们求出导函数后，若能直接判断正负，则直接判断；否则，可继续求导.

典型例题

【例 1】已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+5$，则（　　）

（A） $f(x)$ 有 2 个极值点

（B） $f(x)$ 有 3 个零点

（C）点 $(1,3)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

（D）直线 $y=-3x+6$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

答案：ACD

解析：由题意， $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，所以 $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<0$ 或 $x>2$， $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<2$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上↗，在 $(0,2)$ 上↘，在 $(2,+\infty)$ 上↗，所以 $f(x)$ 有 2 个极值点，故 A 项正确；

三次函数有 3 个零点的充要条件是 2 个极值异号，如图 1，

因为 $f(0)=5>0$， $f(2)=2^3-3\times2^2+5=1>0$，所以本题实际的情况如图 2，

由图可知 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点，故 B 项错误；

若点 $(1,3)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，则将该曲线左移 1 个单位，再下移 3 个单位，得到的曲线关于原点对称，应为奇函数，所以 C 项等价于 $y=f(x+1)-3$ 是奇函数，

因为 $f(x+1)-3=(x+1)^3-3(x+1)^2+5-3=x^3-3x$，所以 $f(x+1)-3$ 是奇函数，故 C 项正确；

直线 $y=-3x+6$ 的斜率为 -3，故只需求出 $f(x)$ 的斜率为 -3 的切线，与 $y=-3x+6$ 对比即可判断 D 项是否正确，令 $f'(x)=-3$ 可得： $3x^2-6x=-3$，解得： $x=1$，

又 $f(1)=3$，所以 $f(x)$ 的斜率为 -3 的切线方程为 $y-3=-3(x-1)$，整理得： $y=-3x+6$，故 D 项正确.

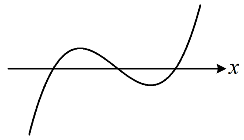


图1

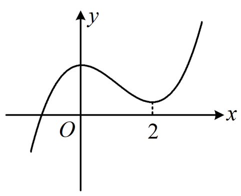
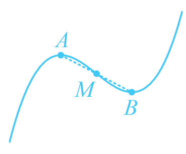


图2

【反思】三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 必有对称中心 $(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$，特别地，若 $f(x)$ 有极值点，则对称中心恰好为图象上极值点处的两个点的中点，如图，熟悉这一结论，选项 C 可直接判断.



【例 2】已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x-1}$，求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

解：由题意，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$，

从而 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，单调递增区间为 $(-1,+\infty)$，故 $f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-\mathrm{e}^{-2}$，无极大值.

【变式】已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{\mathrm{e}^x}$，求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

解：由题意，$f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-2)}{\mathrm{e}^x}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow -1<x<2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>2$，

从而 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,2)$，单调减区间为 $(-\infty,-1)$，$(2,+\infty)$，

故 $f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-\mathrm{e}$，极大值 $f(2)=\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$.

【反思】当函数有多个单调递增区间（或递减区间）时，不要用并集符号连接，用逗号隔开即可.

【例 3】（2022·全国乙卷）函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的最小值，最大值分别为（　　）

（A）$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$-\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$　　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}+2$　　（D）$-\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}+2$

答案：D

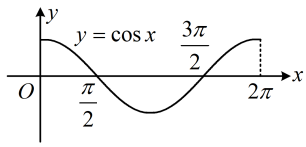
解析：欲研究最值，先求导，研究单调性，由题意，$f'(x)=-\sin x+\sin x+(x+1)\cos x=(x+1)\cos x$，

当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$x+1>0$，所以 $f'(x)$ 的正负与 $\cos x$ 相同，可画出 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象来看，

如图，$f'(x)>0\Leftrightarrow\cos x>0\Leftrightarrow 0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$，$f'(x)<0\Leftrightarrow\cos x<0\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$，

从而 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上↗，在 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$ 上↘，在 $(\dfrac{3\pi}{2},2\pi]$ 上↗，

又 $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}+2>f(2\pi)=2$，所以 $f(x)_{\max}=\dfrac{\pi}{2}+2$；$f(0)=2>f(\dfrac{3\pi}{2})=-\dfrac{3\pi}{2}$，所以 $f(x)_{\min}=-\dfrac{3\pi}{2}$.



【例 4】已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，求 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上的最大值.

解：由题意，$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，（无法直接判断 $f'(x)$ 的正负，直接二次求导又会变得更复杂，所以把分子拿出来再求导）

设 $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x(\mathrm{e}\le x\le\mathrm{e}^2)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}<0$，所以 $g(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上单调递减，

又 $g(\mathrm{e})=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\ln\mathrm{e}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，所以 $g(x)<0$，从而 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.

强化训练

1.（2022·重庆模拟·★★）函数 $f(x)=x-\frac{6}{x}-5\ln x$ 的单调递减区间为（　　）

（A）$(0,2)$　　（B）$(2,3)$　　（C）$(1,3)$　　（D）$(3,+\infty)$

答案：B

解析：由题意，$f'(x)=1+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}=\frac{x^2-5x+6}{x^2}=\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}$，$x>0$，

所以 $f'(x)<0\Leftrightarrow 2<x<3$，故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(2,3)$.

2.（2022·郑州期末·★★）已知函数 $f(x)=xe^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，求函数 $f(x)$ 的极值.

解：由题意，$f'(x)=(x+1)e^x-x-1=(x+1)(e^x-1)$，（注意到对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 e^x-1 和 x 同号，所以在只考虑正负的情况下，可将 $f'(x)=(x+1)(e^x-1)$ 等效成 $f'(x)=(x+1)x$）

从而 $f'(x)>0\Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>0$，$f'(x)<0\Leftrightarrow -1<x<0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$，极小值 $f(0)=-1$.

【反思】若 $f'(x)=g(x)(e^x-a)$，其中 $a>0$，则可将 $f'(x)$ 等效成 $g(x)(x-\ln a)$ 来判正负.

3.（2021·全国甲卷节选·★★）已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$，当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2^x}(x>0)$，所以 $f'(x)=\frac{2x\cdot 2^x-2^x\ln 2\cdot x^2}{(2^x)^2}=\frac{x(2-x\ln 2)}{2^x}$，

从而 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\frac{2}{\ln 2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>\frac{2}{\ln 2}$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\frac{2}{\ln 2})$，单调递减区间是 $(\frac{2}{\ln 2},+\infty)$.

4.（★★）已知函数 $f(x)=\ln x+x^2-x$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：由题意，$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}+2x-1\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 2x}-1=2\sqrt{2}-1>0$，

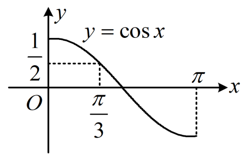
所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间.

5.（2022·汕头三模·★★）已知函数 $f(x)=x-2\sin x$，求 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值.

解：由题意，$f'(x)=1-2\cos x$，（可画出 $y=\cos x$ 的图象来看 $f'(x)$ 的正负，如图）

所以当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 时，$\cos x>\frac{1}{2}$，从而 $f'(x)<0$；当 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ 时，$\cos x<\frac{1}{2}$，从而 $f'(x)>0$；

故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递减，在 $(\frac{\pi}{3},\pi)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，无极大值.



6.（2022·成都期末·★★★）已知函数 $f(x)=2x\ln x-\frac{1}{2}x^2-x+2$，求 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值.

解：由题意，$f'(x)=2\ln x-x+1$，（此处 $f'(x)$ 不易直接判断正负，可二次求导）

$f''(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$，当 $x\in(0,2]$ 时，$f''(x)\ge 0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增，

又 $f'(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $1<x\le 2$ 时，$f'(x)>0$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

7.（2022·天津模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+\ln x-x$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：由题意，$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{(x-1)(e^x-x)}{x^2}$，$x>0$，（$x-1$ 和 x^2 的正负情况很明确，那 e^x-x 这部分呢？可构造函数分析）

设 $g(x)=e^x-x(x>0)$，则 $g'(x)=e^x-1>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=1>0$，所以 $g(x)>0$ 恒成立，从而 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,1)$.

8.（2022·北京卷·★★★）已知函数 $f(x)=e^x\ln(1+x)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性.

解：（1）由题意，$f'(x)=e^x\ln(1+x)+\frac{e^x}{1+x}$，所以 $f'(0)=1$，

又 $f(0)=0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$.

（2）由（1）可得 $g(x)=f'(x)=e^x\ln(1+x)+\frac{e^x}{1+x}$，

所以 $g'(x)=e^x\ln(1+x)+\frac{e^x}{1+x}+\frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=e^x[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}]$，（要判断 $g'(x)$ 的正负，只需判断 $\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}$ 的正负，这部分整体形式较复杂，可尝试拆成三项分别看正负）

因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\ln(1+x)\ge 0$，$\frac{1}{1+x}>0$，$\frac{x}{(1+x)^2}\ge 0$，所以 $\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}>0$，

从而 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.