

第3节 诱导公式 (★★)

内容提要

1. 诱导公式主要用于化掉 $\sin(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$ 、 $\cos(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$ 、 $\tan(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$ 这类三角代数式中的 $\frac{k\pi}{2}$ 这个部分.
2. 诱导公式的口诀: 奇变偶不变, 符号看象限; 需要注意两点:
 - ① 奇变偶不变指要化掉的若是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍, 则函数名正弦变余弦, 余弦变正弦; 偶数倍则不变;
 - ② 符号看象限, 是看原来的三角函数名在对应象限的符号, 例如, 对 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ 化简时, 符号看象限, 看的是 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 这个第二象限的角的余弦值的符号, 显然为负, 所以添负号, 得到 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$.

典型例题

【例 1】 $\sin 600^\circ =$.

【变式 1】设 $\cos 29^\circ = m$, 则 $\sin 241^\circ \tan 151^\circ =$ ()

(A) $\sqrt{1+m^2}$ (B) $\sqrt{1-m^2}$ (C) $-\sqrt{1+m^2}$ (D) $-\sqrt{1-m^2}$

【变式 2】已知 $f(x) = \frac{\sin(2\pi - x)\cos(\frac{3\pi}{2} + x)}{\cos(3\pi - x)\sin(\frac{11\pi}{2} - x)}$, 则 $f(-\frac{21\pi}{4}) =$.

【变式 3】已知 $A = \frac{\sin(k\pi + \alpha)}{\sin \alpha} + \frac{\cos(k\pi + \alpha)}{\cos \alpha} (k \in \mathbf{Z})$, 则 A 的值构成的集合是.

【变式 4】 $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 180^\circ =$.

【例 2】已知 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\tan \alpha =$ ()

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $\pm \frac{3}{4}$

【变式 1】已知 $\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{2}{3}$ ，则 $\sin(\alpha-\frac{2\pi}{3})=$.

【变式 2】已知 $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\frac{1}{3}$ ，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ ，则 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=$.

强化训练

1. (2022·北京东城区模拟·★★) 若 α 为任意角，则满足 $\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=-\cos\alpha$ 的一个 k 的值为 ()

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

2. (2022·成都模拟·★★) 已知 $\tan\theta=2$ ，则 $\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=$.

3. (2022·襄阳模拟·★★) 已知函数 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$ ，且 $f(3)=3$ ，则 $f(2022)$ 的值为 ()

(A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) -3

4. (2021·北京卷·★★★★) 若点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$ ，则 θ 的一个取值为.

5. (★★) 计算:

(1) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ =$; (2) $\frac{\lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \cdots + \lg(\tan 89^\circ)}{\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ} =$.

6. (2022·自贡期末·★★) 已知 $\sin(\frac{\pi}{5}-x)=\frac{3}{5}$ ，则 $\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=$.

7. (2022 · 湖南模拟 · ★★) 已知 $\cos(\frac{5\pi}{12} + \alpha) = \frac{1}{3}$, 且 $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$, 则 $\cos(\frac{\pi}{12} - \alpha) =$ ()

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

8. (2022 · 山西二模 · ★★) 若 $\sin 10^\circ = a \sin 100^\circ$, 则 $\sin 20^\circ =$ ()

- (A) $\frac{a}{a^2+1}$ (B) $-\frac{a}{a^2+1}$ (C) $\frac{2a}{a^2+1}$ (D) $-\frac{2a}{a^2+1}$