模块三 三角函数的图象性质

重点知识回顾

一、平移与伸缩变换

1．平移（口诀：左加右减，上加下减）

$$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}x+a]{\text{向左平移}a\text{个单位}} y=f(x+a)\\ y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}x-a]{\text{向右平移}a\text{个单位}} y=f(x-a)\end{cases}\qquad \begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[\text{解析式整体加}a]{\text{向上平移}a\text{个单位}} y=f(x)+a\\ y=f(x)\xrightarrow[\text{解析式整体减}a]{\text{向下平移}a\text{个单位}} y=f(x)-a\end{cases}$$

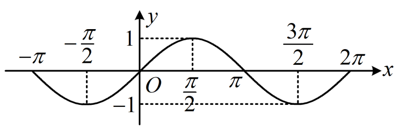
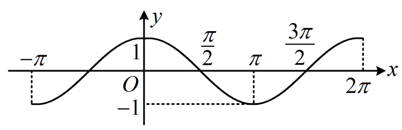
注意：左右平移的量是加在 x 上的，不是加在整个括号里的．例如，将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 右移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到的是 $y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]$，而不是 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})$；上下平移的量是加在整个解析式后面的．

2．伸缩

$$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}\frac{x}{2}]{\text{横坐标变为原来的2倍}} y=f(\frac{x}{2})\\ y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}2x]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{2}\text{倍}} y=f(2x)\end{cases}\qquad \begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[f(x)\text{前乘以2}]{\text{纵坐标变为原来的2倍}} y=2f(x)\\ y=f(x)\xrightarrow[f(x)\text{前乘以}\frac{1}{2}]{\text{纵坐标变为原来的}\frac{1}{2}\text{倍}} y=\frac{1}{2}f(x)\end{cases}$$

二、三角函数的图象性质

1．正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的性质

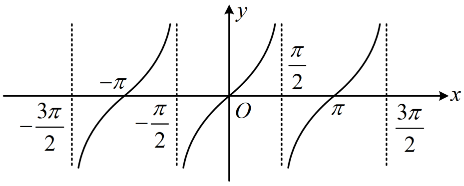
函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
周期性	最小正周期为 2π	最小正周期为 2π
奇偶性	奇函数	偶函数
单调性	单调递增区间：$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$ 单调递减区间：$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$	单调递增区间：$[2k\pi-\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 单调递减区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$
最值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$ 当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$	当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$ 当 $x=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$
对称中心	$(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$

2．设 $A>0$，$\omega>0$，则函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的性质如下表：

函数	$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	$y=A\cos(\omega x+\varphi)$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-A,A]$	$[-A,A]$
周期性	最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$	最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$
单调性	增区间：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 减区间：$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	增区间：$2k\pi-\pi\le\omega x+\varphi\le 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 减区间：$2k\pi\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$
最值	当 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=A$ 当 $\omega x+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-A$	当 $\omega x+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=A$ 当 $\omega x+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-A$
对称轴	$\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$
对称中心	$(\frac{1}{\omega}(k\pi-\varphi),0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{1}{\omega}(k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi),0)(k\in\mathbf{Z})$

3．正切函数的图象及性质

（1）正切函数 $y=\tan x$ 的图象：



（2）正切函数的性质：

函数	$y=\tan x$	$y=A\tan(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$
定义域	$\{x\mid x\ne k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x\mid \omega x+\varphi\ne k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
最小正周期	π	$\frac{\pi}{\omega}$
奇偶性	奇函数	当 $\varphi=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时为奇函数，否则为非奇非偶函数
增区间	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{1}{\omega}(k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi),\frac{1}{\omega}(k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi))(k\in\mathbf{Z})$
对称中心	$(\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{1}{\omega}(\frac{k\pi}{2}-\varphi),0)(k\in\mathbf{Z})$

第 1 节 求三角函数解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$（★★★）

内容提要

求三角函数解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的常见题型有恒等变换化简、根据图象求解析式等.

1．恒等变换化简得到 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$：一般分“拆”、“降”、“合”三步.

①拆：若解析式中有 $\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 这类结构，通常先拆开；

②降：遇到 $\sin^2 x$ 、 $\cos^2 x$ 、 $\sin x\cos x$ 这些结构，可降次；（“拆”和“降”的顺序要视情况而定）

③合：完成前两步后，通常就化为了 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x+B$ 这类结构，最后可利用辅助角公式合并.

2．根据图象求解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$：

①用最大值或最小值求 A： $f(x)_{\max}=|A|$；

②用最大值和最小值求 B： $\begin{cases}f(x)_{\max}=|A|+B\\ f(x)_{\min}=-|A|+B\end{cases}\Rightarrow B=\dfrac{f(x)_{\max}+f(x)_{\min}}{2}$；

③用最小正周期 T 求 ω： $|\omega|=\dfrac{2\pi}{T}$；

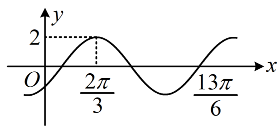
④最值点求 φ：将函数图象上的最大值或最小值点代入解析式，求出 φ. 若图象上没有标出最值点，也无法通过简单的推理得出最值点，则考虑代图象上的其它已知点求 φ. 之所以首选最值点，是因为一个周期内，只有最大值或最小值点是唯一的，若代其它点，可能会有增根需要舍去.

典型例题

【例 1】已知函数 $f(x)=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____，值域为_____.

【变式】(2019·浙江卷节选）设函数 $f(x)=\sin x(x\in\mathbf{R})$，求函数 $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2$ 的值域.

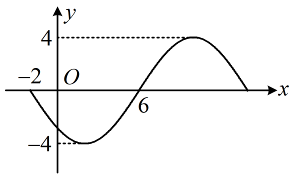
【例 2】如图是 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象，则 $f(x)=$.



【变式 1】已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则（　　）

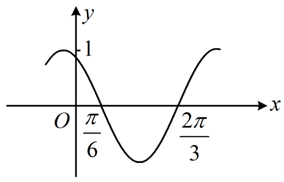
（A） $f(x)=-4\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4})$　　（B） $f(x)=4\sin(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4})$

（C） $f(x)=-4\sin(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4})$ （D） $f(x)=4\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4})$

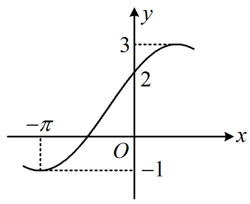


【变式 2】（2020·新高考Ⅰ卷）（多选）右图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$（）

（A） $\sin(x+\frac{\pi}{3})$ （B） $\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$ （C） $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ （D） $\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$



【变式 2】下图是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象，则 $f(\frac{3\pi}{4})=$.

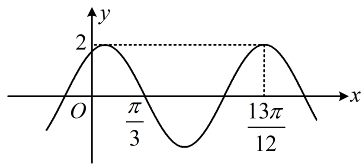


强化训练

1．（★★）设 $f(x)=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})\sin 2x$ ，则函数 $y=f(x)$ 的值域为.

2．（★★）已知函数 $f(x)=\sin^2(x+\frac{\pi}{3})+\cos^2 x(x\in\mathbf{R})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____，值域为_____.

3．（2021·全国甲卷·★★★）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{\pi}{2})=$.



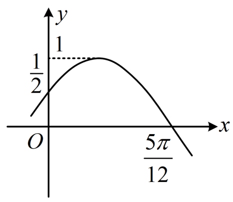
4．（2022 • 酒泉模拟 • ★★★）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则（　　）

（A） $f(x+\dfrac{\pi}{6})$ 为偶函数，且最小正周期为 2π

（B） $f(x+\dfrac{\pi}{3})$ 为偶函数，且最小正周期为 2π

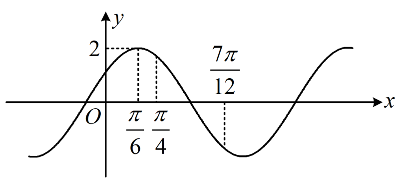
（C） $f(x+\dfrac{\pi}{3})$ 为偶函数，且最小正周期为 π

（D） $f(x+\dfrac{\pi}{6})$ 为偶函数，且最小正周期为 π

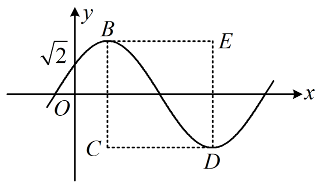


5．（2022 • 成都嘉祥模拟 • ★★★）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的部分图象如图所示，且 $f(\dfrac{\pi}{4})+f(\dfrac{7\pi}{12})=0$，则 $f(\dfrac{\pi}{12})=$（）

（A） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B） $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C） $\sqrt{2}$　　（D） $\sqrt{3}$

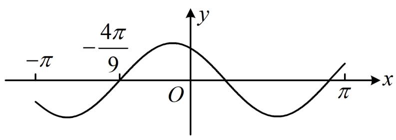


6．（2022 • 青岛模拟 • ★★★）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，B、D 两点为 $f(x)$ 图象上的一个最高点和最低点，直线 BC、DE 与 x 轴垂直，四边形 $BCDE$ 是边长为 4 的正方形，则 $f(x)=$.



7.（2020•新课标Ⅰ卷•★★★）设 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为（）

（A）$\frac{10\pi}{9}$（B）$\frac{7\pi}{6}$（C）$\frac{4\pi}{3}$（D）$\frac{3\pi}{2}$



8.（2020•晋城三模•★★★）如图，A、B 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象与 x 轴的两个交点，若 $|OB|-|OA|=\frac{4\pi}{3}$，则 $\omega=$（　　）

（A）1　（B）$\frac{1}{2}$　（C）2　（D）$\frac{2}{3}$