模块二 三角恒等变换

重点知识回顾

一、和差角公式

1．$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$， $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；

2．$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$， $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

3．$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$， $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$；

4．辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$．在辅助角公式中，若$a>0$，则$\varphi\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$；若$a<0$，可先提负号到外面，再用辅助角公式合并.

二、二倍角公式

1．二倍角公式：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$， $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$， $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

2．降次公式：$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$， $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$， $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$.

3．升次公式：$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$， $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$， $1\pm\sin 2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$， $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

三、万能公式

1．$\sin\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$；2．$\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$；3．$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$.

第 1 节　和差角、辅助角、二倍角公式（★★）

内容提要

和差角、辅助角、二倍角公式是三角函数的核心公式，本节涉及一些有关公式应用的基础题.

典型例题

【例 1】已知 $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$.

【变式】（2022・新高考 II 卷）若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，则（　　）

（A） $\tan(\alpha+\beta)=1$　（B） $\tan(\alpha+\beta)=-1$　（C） $\tan(\alpha-\beta)=1$　（D） $\tan(\alpha-\beta)=-1$

【例 2】若 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$______.

【变式 1】已知 $\tan\alpha=-2$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{7}$，则 $\tan 2\beta$ 的值为.

【变式 2】已知 α，β 均为锐角，$(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=4$，则 $\alpha+\beta=$（　　）

（A） $\frac{\pi}{3}$　（B） $\frac{2\pi}{3}$　（C） $\frac{3\pi}{4}$　（D） $\frac{\pi}{2}$

【例 3】已知 $\theta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，且 $\cos 2\theta+\cos\theta=0$，则 $\sin 2\theta+\sin\theta=$（　　）

（A）0　（B）$\sqrt{3}$　（C）$-\sqrt{3}$　（D）$\sqrt{2}$

【例 4】$\cos 15^{\circ}\cos 45^{\circ}-\cos 75^{\circ}\sin 45^{\circ}=$.

【变式 1】$\dfrac{\sin 110^{\circ}\sin 20^{\circ}}{\cos^{2}155^{\circ}-\sin^{2}155^{\circ}}=$.

【变式 2】$\tan 25^{\circ}+\tan 35^{\circ}+\sqrt{3}\tan 25^{\circ}\tan 35^{\circ}=$.

【例 5】设 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，则 $f(x)$ 的最大值为.

【变式 1】设 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x(0\le x\le \dfrac{2\pi}{3})$，则 $f(x)$ 的最大值为.

【变式 2】已知 $f(x)=\sin x+2\cos x(0\le x\le \dfrac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 的值域为.

强化训练

1.（2022・南充模拟・★★）锐角 α 满足 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})=$.

2.（2022・安徽模拟・★★）若 α 是第二象限的角，且 $\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$.

3.（2022・北京模拟・★★★）若 $\cos(\pi-\alpha)=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$，则 β 可以为.（写出一个满足条件的 β）

4.（2022 • 全国二模 • ★★★）若 $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=2\tan(\frac{\pi}{4}+x)$，则 $\sin 2x=$（　　）

（A）$-\frac{3}{5}$　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$-\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{3}$

5.（2022 • 全国乙卷 • ★★）$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.（2022 • 黑龙江模拟 • ★★）数学家华罗庚倡导的“0.618 优选法”在各领域都有广泛应用，0.618 就是黄金分割比 $m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值，黄金分割比还可以表示成 $2\sin 18^\circ$，则 $\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ-1}=$（　　）

（A）4　　（B）$\sqrt{5}+1$　　（C）2　　（D）$\sqrt{5}-1$

7.（2022 •常州模拟 •★★★）已知 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)$，$b=\frac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}$，$c=\sin 22^\circ\cos 24^\circ+\cos 22^\circ\sin 24^\circ$，则 a、b、c 的大小关系为（　　）

（A）$b>a>c$　　（B）$c>b>a$　　（C）$c>a>b$　　（D）$b>c>a$

8.（★★★）设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$.