

第3节 分段函数中的动态分段点问题

内容提要

上一节我们学习了当分段函数解析式含参时，怎样根据函数的单调性求参数的范围，本节我们会学习参数在分段函数的分段点上的情形，此时分段点是随着参数的变化而变化的，由此衍生出的函数问题，如研究零点、最值等，往往采用分类讨论或数形结合的方法求解.

典型例题

【例1】已知 $a > 0$ ，若函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq a \\ \ln x + 2, & x > a \end{cases}$ 有两个不同的零点，则 a 的取值范围是 ()

- (A) $(0, \frac{1}{e^2})$ (B) $(0, 1)$ (C) $(\frac{1}{e^2}, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$

【变式】已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-m| + 2m, & x \leq 2m \\ -x^2 + 4mx - 2m^2, & x > 2m \end{cases}$ ，其中 $m > 0$ ，若存在实数 b ，使得方程 $f(x) = b$ 有三个不同的实数解，则 m 的取值范围为 ()

- (A) $(0, 1)$ (B) $(1, +\infty)$ (C) $(0, \frac{3}{2})$ (D) $(\frac{3}{2}, +\infty)$

【例 2】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 + 1, & x \leq a \\ \ln x, & x > a \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 存在最小值，则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $[1, +\infty)$ (C) $(e, +\infty)$ (D) $[e, +\infty)$

【变式】(2022 · 北京卷) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax + 1, & x < a \\ (x - 2)^2, & x \geq a \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个值为 a 的最大值为.

强化训练

1. (★★) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ \sqrt{x}, & x > a \end{cases}$ ，其中 $a > 0$ ，若存在实数 b ，使得函数 $g(x) = f(x) - b$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为.

2. (★★) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > a \\ x - x^2, & x \leq a \end{cases}$, 其中 $a > 0$, 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值, 则实数 a 的取值范围为.

3. (★★★★) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x \leq a \\ |x-3|-1, & x > a \end{cases}$, 其中 $a > 0$, 若 $f(x)$ 有两个零点, 则 a 的取值范围为.

4. (2022 • 北京模拟 • ★★★★★) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ x^2 - 2ax + a, & x > a \end{cases}$, 若存在实数 b , 使得函数 $g(x) = f(x) - b$ 有 3 个零点, 则 a 的取值范围为.