

模块一 同角三角函数关系与诱导公式

重点知识回顾

一、三角函数定义

- 如图 1，设 $P(x, y)$ 为角 α 终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的交点，则 $\sin \alpha = y$ ， $\cos \alpha = x$ ， $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 。
- 如图 2，设 $P(x, y)$ 为角 α 终边上一点， $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，则 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ ， $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ， $\tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$ 。

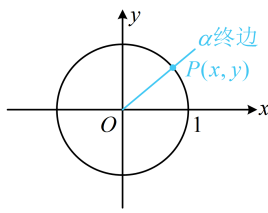


图1

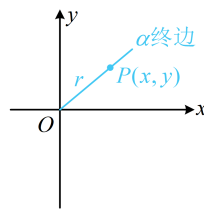


图2

二、同角三角函数基本关系

- 平方关系： $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ；
- 商数关系： $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 。

三、诱导公式：奇变偶不变，符号看象限

- 公式一： $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$ ， $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$ ， $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha$ ，其中 $k \in \mathbf{Z}$ 。
- 公式二： $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ ， $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ， $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ 。
- 公式三： $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ， $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ， $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ 。
- 公式四： $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ， $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ， $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ 。
- 公式五： $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ ， $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ 。
- 公式六： $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ ， $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ 。

第 1 讲 三角函数的定义 (★★)

内容提要

若题干给出角的终边上某点的坐标, 或给出角的终边所在直线的方程, 考虑用定义求三角函数值.

典型例题

【例题】已知角 α 的终边经过点 $P(3, -4)$, 则 $\cos \alpha =$ ()

- (A) $-\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

【变式 1】已知角 α 的顶点是原点, 始边为 x 轴的正半轴, 终边是射线 $y = 2x (x > 0)$, 则 $\sin \alpha =$, $\tan \alpha =$.

【变式 2】角 θ 的顶点为坐标原点, 始边为 x 轴的正半轴, 若 $P(4, y)$ 是角 θ 终边上一点, 且 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $y =$.

【变式 3】已知角 α 的终边经过点 $P(\sin 47^\circ, \cos 47^\circ)$, 则 $\sin(\alpha - 13^\circ) =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【变式 4】角 α 与角 β 均以 x 轴正半轴为始边, 它们的终边关于 x 轴对称, 若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$.

强化训练

1. (2022·宁夏模拟·★★) 已知角 θ 的终边上有一点 $P(-4a, 3a)(a > 0)$, 则 $2\sin\theta + \cos\theta =$ ()

- (A) $-\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $-\frac{2}{5}$ 或 $\frac{2}{5}$ (D) 不确定

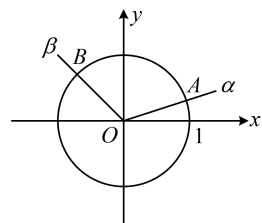
2. (2022·安徽模拟·★★) 已知角 α 终边上一点 $P(m, 4)(m \neq 0)$, 且 $\cos\alpha = \frac{m}{5}$, 则 $\tan\alpha =$.

3. (2022·潍坊二模·★★) 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 点 $A(x_1, 2)$, $B(x_2, 4)$ 在 α 的终边上, 且 $x_1 - x_2 = 1$, 则 $\tan\alpha =$ ()

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$

4. (2022·湛江期末·★★★★) 如图, 角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与单位圆交于点 $A(x_1, y_1)$, 角 $\beta = \alpha + \frac{2\pi}{3}$ 的始边与角 α 的始边重合, 且终边与单位圆交于点 $B(x_2, y_2)$, 记 $f(\alpha) = y_1 - y_2$, 若 α 为锐角, 则 $f(\alpha)$ 的取值范围是 ()

- (A) $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (B) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (C) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ (D) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$



5. (2022 · 湖北武昌区模拟 · ★★) 已知角 α 的始边与 x 轴非负半轴重合, 终边上一点 $P(\sin 3, \cos 3)$, 若 $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, 则 $\alpha =$ ()

- (A) 3 (B) $\frac{\pi}{2} - 3$ (C) $\frac{5\pi}{2} - 3$ (D) $3 - \frac{\pi}{2}$

6. (2022 · 湖北模拟 · ★★★★★) (多选) 已知角 α 的终边经过点 $P(8, 3\cos \alpha)$, 则 ()

- (A) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ (B) $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$ (C) $\tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$