

第4节 分段下的函数值关系

内容提要

本节解决分段函数下，给出函数值之间的不等关系或等量关系，研究一些取值范围问题：

1. 不等关系：例如，题干给出分段函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) > f(x^2)$ ，让求 x 的取值范围，这类题常用 $f(x)$ 的单调性，将 $f(2-x) > f(x^2)$ 转化为 $2-x$ 与 x^2 的大小来解.
2. 等量关系：例如，题干给出分段函数 $f(x)$ 满足 $f(m) = f(n)$ ，让研究某个关于 m 和 n 的代数式的取值范围，这类题常设 $f(m) = f(n) = t$ ，将 m 与 n 都用 t 表示，再代入目标代数式求取值范围.

典型例题

【例1】设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + x, & x \leq 1 \\ x + \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ ，则满足 $f(1-x) > f(2^x)$ 的 x 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, -1]$ (B) $(0, +\infty)$ (C) $(-1, 0)$ (D) $(-\infty, 0)$

【例2】已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$ ，若 $m < n$ ，且 $f(m) = f(n)$ ，则 $n - m$ 的最大值是 ()

- (A) $\ln 2$ (B) 1 (C) 2 (D) $\ln 3$

【变式】已知 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e \\ 4 - \ln x, & x > e \end{cases}$ ，若 $f(a) = f(b) = f(c)$ 且 $a < b < c$ ，则 $16a + \frac{e^4 b}{c}$ 的取值范围是 ()

- (A) $(0, 17)$ (B) $[12, 16e^{-1} + e^2]$ (C) $[16e^{-1} + e^2, 17)$ (D) $[12, 17)$

强化训练

1. (2022 · 西安一模 · ★) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 1 \\ \ln x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 则不等式 $f(3x-1) < f(2x+1)$ 的解集为 ()

- (A) $(0, 2)$ (B) $(0, \frac{1}{3})$ (C) $(\frac{1}{3}, 2)$ (D) $(2, +\infty)$

2. (2022 · 漳州模拟 · ★★) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(1-a) < f(a)$, 则 a 的取值范围为.

3. (2022 · 赣州期末 · ★★★) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}(x+2), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 且 $x_2 > x_1$, 则 $x_2 - x_1$ 的最

小值为.

4. (2021 · 石家庄期末 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & x \leq 0 \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$, 若存在不相等的实数 a 、 b 、 c 、 d 满足

$|f(a)| = |f(b)| = |f(c)| = |f(d)|$, 则 $a+b+c+d$ 的取值范围为 ()

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $(-2, \frac{81}{10}]$ (C) $(-2, \frac{61}{10}]$ (D) $(0, \frac{81}{10}]$