模块一 同角三角函数关系与诱导公式

重点知识回顾

一、三角函数定义

1．如图 1，设 $P(x,y)$ 为角 α 终边与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的交点，则 $\sin\alpha=y$， $\cos\alpha=x$， $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

2．如图 2，设 $P(x,y)$ 为角 α 终边上一点， $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$ ，则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$， $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$， $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$.

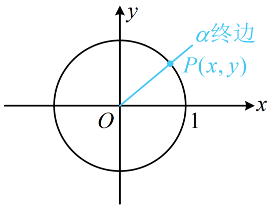


图1

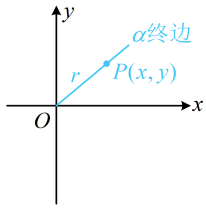


图2

二、同角三角函数基本关系

1．平方关系： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

2．商数关系： $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

三、诱导公式：奇变偶不变，符号看象限

（1）公式一： $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$， $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$， $\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

（2）公式二： $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

（3）公式三： $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

（4）公式四： $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

（5）公式五： $\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$， $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$.

（6）公式六： $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$， $\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$.

第 1 讲 三角函数的定义（★★）

内容提要

若题干给出角的终边上某点的坐标，或给出角的终边所在直线的方程，考虑用定义求三角函数值.

典型例题

【例题】已知角 α 的终边经过点 $P(3,-4)$，则 $\cos\alpha=$（　　）

（A）$-\frac{4}{5}$　　（B）$-\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{4}{5}$　　（D）$\frac{3}{5}$

答案：D

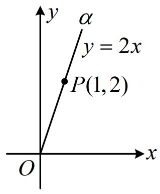
解析：由题意，$r=|OP|=5$，所以 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$.

【变式 1】已知角 α 的顶点是原点，始边为 x 轴的正半轴，终边是射线 $y=2x(x>0)$，则 $\sin\alpha=$，$\tan\alpha=$.

答案：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，2

解析：给出角的终边，可在终边上取一点，再由该点利用定义求三角函数值，

如图，可在 α 的终边上取一点 $P(1,2)$，则 $|OP|=\sqrt{5}$，所以 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=\frac{2}{1}=2$.



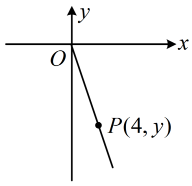
【变式 2】角 θ 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的正半轴，若 $P(4,y)$ 是角 θ 终边上一点，且 $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $y=$.

答案：-8

解析：给出角终边上的一点的坐标，联想到三角函数的定义，所以先用定义计算 $\sin\theta$，

如图，$\sin\theta=\frac{y}{|OP|}=\frac{y}{\sqrt{16+y^2}}$，又 $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\frac{y}{\sqrt{16+y^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由上式可看出 $y<0$，平方后可求得 $y=-8$.



【变式 3】已知角 α 的终边经过点 $P(\sin 47°,\cos 47°)$，则 $\sin(\alpha-13°)=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（C）$-\frac{1}{2}$　（D）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：A

解法 1：给出角终边上的一点的坐标，联想到三角函数的定义，先用定义计算 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，

因为 $|OP|=\sqrt{\sin^2 47^\circ+\cos^2 47^\circ}=1$，所以 P 是 α 的终边与单位圆的交点，故 $\sin\alpha=\cos 47^\circ$，$\cos\alpha=\sin 47^\circ$，

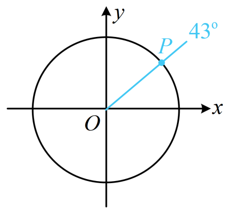
所以 $\sin(\alpha-13^\circ)=\sin\alpha\cos 13^\circ-\cos\alpha\sin 13^\circ=\cos 47^\circ\cos 13^\circ-\sin 47^\circ\sin 13^\circ=\cos(47^\circ+13^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

解法 2：将所给的点 P 的坐标用诱导公式转换成三角函数定义的格式 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，可直接求出 α，

因为 $\sin 47^\circ=\sin(90^\circ-43^\circ)=\cos 43^\circ$，$\cos 47^\circ=\cos(90^\circ-43^\circ)=\sin 43^\circ$，

所以点 P 的坐标可化为 $(\cos 43^\circ,\sin 43^\circ)$，如图，结合三角函数定义可得 α 的终边与 43° 的终边重合，

从而 $\alpha=k\cdot 360^\circ+43^\circ(k\in\mathbf{Z})$，故 $\sin(\alpha-13^\circ)=\sin(k\cdot 360^\circ+43^\circ-13^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.



【反思】当条件给出终边 α 上的点的坐标时，可用定义求出 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

【变式 4】角 α 与角 β 均以 x 轴正半轴为始边，它们的终边关于 x 轴对称，若 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$.

答案：$\frac{3}{5}$

解法 1：先画出图形，用三角函数定义分析 α 与 β 的三角函数值的关系，

如图，α 和 β 的终边关于 x 轴对称，所以它们与单位圆的交点 P、Q 也关于 x 轴对称，

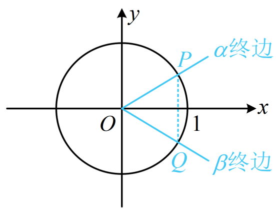
设 $P(x,y)$，则 $Q(x,-y)$，由三角函数定义，$\cos\alpha=\cos\beta=x$，$\sin\alpha=y$，$\sin\beta=-y$，所以 $\sin\beta=-\sin\alpha$，

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$.

解法 2：也可以先根据终边的对称性，找到 α 和 β 的等量关系，

因为 α 和 β 的终边关于 x 轴对称，所以 β 与 $-\alpha$ 的终边重合，从而 $\beta=-\alpha+k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha-(-\alpha+k\cdot 360^\circ)]=\cos(2\alpha-k\cdot 360^\circ)=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$.



强化训练

1.（2022 • 宁夏模拟 • ★★）已知角 θ 的终边上有一点 $P(-4a,3a)(a>0)$，则 $2\sin\theta+\cos\theta=$（）

（A）$-\frac{2}{5}$　（B）$\frac{2}{5}$　（C）$-\frac{2}{5}$ 或 $\frac{2}{5}$　（D）不确定

答案：B

解析：先由三角函数定义求出 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，由题意，$|OP|=\sqrt{(-4a)^2+(3a)^2}=5|a|=5a$，

所以 $\sin\theta=\frac{3a}{|OP|}=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{-4a}{|OP|}=-\frac{4}{5}$，故 $2\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{5}$.

2.（2022 • 安徽模拟 • ★★）已知角 α 终边上一点 $P(m,4)(m\neq 0)$，且 $\cos\alpha=\frac{m}{5}$，则 $\tan\alpha=$.

答案：$\pm\frac{4}{3}$

解析：根据点 P 的坐标，求出 $\cos\alpha$，建立方程解 m，再求 $\tan\alpha$，

由题意，$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+16}}=\frac{m}{5}$，解得：$m=\pm 3$，所以 $\tan\alpha=\frac{4}{m}=\pm\frac{4}{3}$.

3.（2022 •潍坊二模 •★★）已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，点 $A(x_1,2)$，$B(x_2,4)$ 在 α 的终边上，且 $x_1-x_2=1$，则 $\tan\alpha=$（）

（A）2　（B）$\frac{1}{2}$　（C）-2　（D）$-\frac{1}{2}$

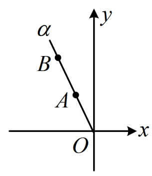
答案：C

解法 1：只要求出 x_1 或 x_2，就可以用三角函数定义求得 $\tan\alpha$，已知条件中已经有 $x_1-x_2=1$ 这一个方程了，可用 A、B 的坐标把 $\tan\alpha$ 表示出来，再建立一个 x_1 和 x_2 的方程，求解 x_1 或 x_2，

由题意，$\tan\alpha=\frac{2}{x_1}$，$\tan\alpha=\frac{4}{x_2}$，所以 $\frac{2}{x_1}=\frac{4}{x_2}$，故 $x_2=2x_1$，代入 $x_1-x_2=1$ 可得 $x_1=-1$，故 $\tan\alpha=\frac{2}{x_1}=-2$.

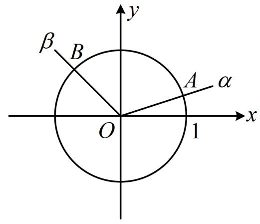
解法 2：题干给出 A、B 两点的坐标，以及 $x_1-x_2=1$，想到两点连线的斜率公式，于是先画图看看，

如图，由图可知 $\tan\alpha$ 等于直线 AB 的斜率，所以 $\tan\alpha=\frac{2-4}{x_1-x_2}=\frac{-2}{x_1-x_2}$，又 $x_1-x_2=1$，所以 $\tan\alpha=-2$.



4.（2022 • 湛江期末 • ★★★）如图，角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $A(x_1,y_1)$，角 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$ 的始边与角 α 的始边重合，且终边与单位圆交于点 $B(x_2,y_2)$，记 $f(\alpha)=y_1-y_2$，若 α 为锐角，则 $f(\alpha)$ 的取值范围是（　　）

（A）$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　（B）$(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$　　（C）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　（D）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$



答案：D

解析：给出角的终边与单位圆的交点坐标，想到用三角函数的定义把$\sin\alpha$， $\sin\beta$都表示出来，

由三角函数定义，$\sin\alpha = y_1$， $\sin\beta = \sin(\alpha+\frac{2\pi}{3}) = y_2$，

所以$f(\alpha) = y_1 - y_2 = \sin\alpha - \sin(\alpha+\frac{2\pi}{3}) = \sin\alpha - (\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \sqrt{3}\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$，

因为α为锐角，所以$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，从而$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，故$-\frac{1}{2}<\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$f(\alpha)\in(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$.

5.（2022・湖北武昌区模拟・★★）已知角α的始边与x轴非负半轴重合，终边上一点$P(\sin 3,\cos 3)$，若$0\le\alpha\le 2\pi$，则$\alpha=$（　　）

（A）3　　（B）$\frac{\pi}{2}-3$　　（C）$\frac{5\pi}{2}-3$　　（D）$3-\frac{\pi}{2}$

答案：C

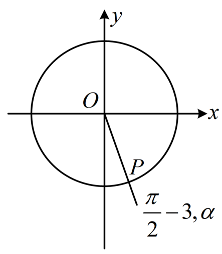
解析：给出终边上一点，先把三角函数的定义式写出来，

因为$\sin^2 3+\cos^2 3=1$，所以点P在单位圆上，故$\begin{cases}\cos\alpha = \sin 3\\ \sin\alpha = \cos 3\end{cases}$，

接下来把右侧的函数名化为和左侧一致，就可以找到α的终边，再化到$[0,2\pi]$上即可选答案，

因为$\sin 3 = \cos(\frac{\pi}{2}-3)$， $\cos 3 = \sin(\frac{\pi}{2}-3)$，所以$\begin{cases}\cos\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}-3)\\ \sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-3)\end{cases}$，故$\alpha$与$\frac{\pi}{2}-3$有相同的终边，如图，

所以$\alpha = \frac{\pi}{2}-3+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为$0\le\alpha\le 2\pi$，所以$k=1$， $\alpha=\frac{5\pi}{2}-3$.



6.（2022・湖北模拟・★★★）（多选）已知角α的终边经过点$P(8,3\cos\alpha)$，则（）

（A）$\sin\alpha=\frac{1}{3}$　　（B）$\cos2\alpha=\frac{7}{9}$　　（C）$\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$　　（D）$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

答案：ABD

解析：看到角终边上的点，想到三角函数的定义，这里用正切来建立关于α的方程比较方便，

由题意，$\tan\alpha=\frac{3\cos\alpha}{8}$，所以$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3\cos\alpha}{8}$，故$3\cos^2\alpha=8\sin\alpha$，将$\cos^2\alpha$换成$1-\sin^2\alpha$，可化同名，

从而$3-3\sin^2\alpha=8\sin\alpha$，解得：$\sin\alpha=\frac{1}{3}$或$-3$（舍去），

接下来求$\cos\alpha$，开平方是取正还是取负？可由所给的点P的坐标来判断，

因为点P横坐标为正数，所以α必在第一或第四象限，故$\cos\alpha>0$，所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

从而$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故选项A、B、D正确.