

第2节 三角函数图象的变换 (★★)

内容提要

求解三角函数图象变换题，需要注意两点：

1. 化同名：当两个函数的函数名不同时，应先用诱导公式化同名，且化完后应保证 x 的系数正负一致.
2. 系数化“1”：例如求 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 和 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 之间的平移关系时，应把 x 前的系数 2 提出去，将 x 的系数化 1，即化为 $y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6})$ 和 $y = \sin 2(x - \frac{\pi}{8})$ ，再来观察平移量.

典型例题

【例1】要得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象，只需要将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ()

- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ (B) 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ (C) 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (D) 向右平移 $\frac{\pi}{4}$

【变式1】为了得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象，需把 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象上所有点至少向右平移_____个单位长度.

【变式2】为了得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象，需把 $y = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ 的图象上所有点至少向右平移_____个单位长度.

【例2】将 $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再把所得图象所有点的横坐标变为原来的一半，最后将所得图象向上平移 2 个单位，则得到的函数的解析式为.

【变式1】为了得到 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，需将 $y = \sin x$ 的图象进行怎样的变换？

【变式2】(2021·全国乙卷)把函数 $y = f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图象，则 $f(x) =$ ()

- (A) $\sin(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12})$ (B) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$ (C) $\sin(2x - \frac{7\pi}{12})$ (D) $\sin(2x + \frac{\pi}{12})$

【例 3】已知将函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 ω 的最小值为 ()

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) 5

【变式】将函数 $f(x) = \sin(3x + \varphi) (|\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{9}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 $\varphi =$ ()

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

强化训练

1. (2022 · 成都模拟 · ★) 要得到函数 $y = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ 的图象，只需要将函数 $y = \cos 2x$ 的图象 ()

- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位
- (C) 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 (D) 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

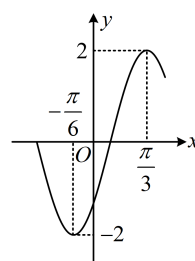
2. (2022 · 山西模拟 · ★★) 为了得到函数 $y = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象，需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上的所有点至少向左平移 _____ 个单位.

3. (2022 · 河南模拟 · ★★★) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π ，且满足 $f(x + \varphi) = f(\varphi - x)$ ，则要得到函数 $f(x)$ 的图象，可将 $g(x) = \cos \omega x$ 的图象 ()

- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- (C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (D) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

4. (2022 · 陕西二模 · ★★★) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, -\pi < \varphi < 0$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()

- (A) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得到 $g(x) = A \cos \omega x$ 的图象
- (B) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得到 $g(x) = A \cos \omega x$ 的图象
- (C) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到 $g(x) = A \cos \omega x$ 的图象
- (D) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到 $g(x) = A \cos \omega x$ 的图象



5. (2022 · 潍坊模拟 · ★★★) 为了得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 需把 $y = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ 的图象上所有点至少向右平移 _____ 个单位.

6. (2022 · 厦门模拟 · ★★★) 将 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移两个单位, 最后将所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 则所得的函数图象的解析式为 ()

- (A) $y = \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + 2$ (B) $y = \sin(4x - \frac{2\pi}{3}) + 2$ (C) $y = \cos 4x + 2$ (D) $y = \sin(4x + \frac{2\pi}{3}) + 2$

7. (2022 · 安徽模拟 · ★★★) 为了得到 $y = 2 \tan(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象, 只需把 $y = 2 \tan(\frac{\pi}{4} - 2x)$ 的图象 ()

- (A) 先沿 x 轴翻折, 在向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
- (B) 先沿 x 轴翻折, 再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位
- (C) 先沿 y 轴翻折, 再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

(D) 先沿 y 轴翻折, 再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位

8. (2022 · 湖北模拟 · ★★) (多选) 要得到 $y = \cos 2x$ 的图象 C_1 , 只要将 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象 C_2 ()

(A) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

(B) 向右平移 $\frac{11\pi}{12}$ 个单位

(C) 先沿 x 轴对称得到图象 C_3 , 再将 C_3 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位

(D) 先沿 x 轴对称得到图象 C_3 , 再将 C_3 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

9. (2022 · 长春模拟 · ★★) 将函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 再把横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到 $g(x)$ 的图象, 则 ()

(A) $g(x)$ 为奇函数 (B) $g(x)$ 为偶函数 (C) $g(x)$ 的最小正周期为 2π (D) $g(\frac{2\pi}{3} - x) = g(x)$

10. (2022 · 石嘴山模拟 · ★★) 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 则下列结论错误的是 ()

(A) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 可得到 $f'(x)$ 的图象

(B) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{2}$ 个单位, 可得到 $f'(x)$ 的图象

(C) $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

(D) $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称

11. (2022 · 山西三模 · ★★) 将曲线 $C: y = \sin 2x + \cos 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到曲线 C_1 , 将曲线 C 向右平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位长度得到曲线 C_2 , 若 C_1 与 C_2 关于 x 轴对称, 则 φ 的最小值为 ()

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

