

Вопрос по выбору к устному экзамену по физике

Маятник с двумя модами: фигуры Лиссажу,
зависимость периода от параметров маятника

Касерес Гутьеррес Леонард

Б04-203

Январь 2023 г

1 Схема установки и теория

1.1 Цель работы

Измерить периоды колебаний в плоскости установки и в перпендикулярной плоскости установки. Измерить период маятника "запущенного" под углом 45 градусов, получить экспериментально зависимость $t(b)$, изменения b при постоянном значении L , получить экспериментально зависимость $t(L)$, изменения L при постоянном значении b . Получить формулу для t через L и b .

1.2 Схема установки

Так выглядит схема нашей установки.

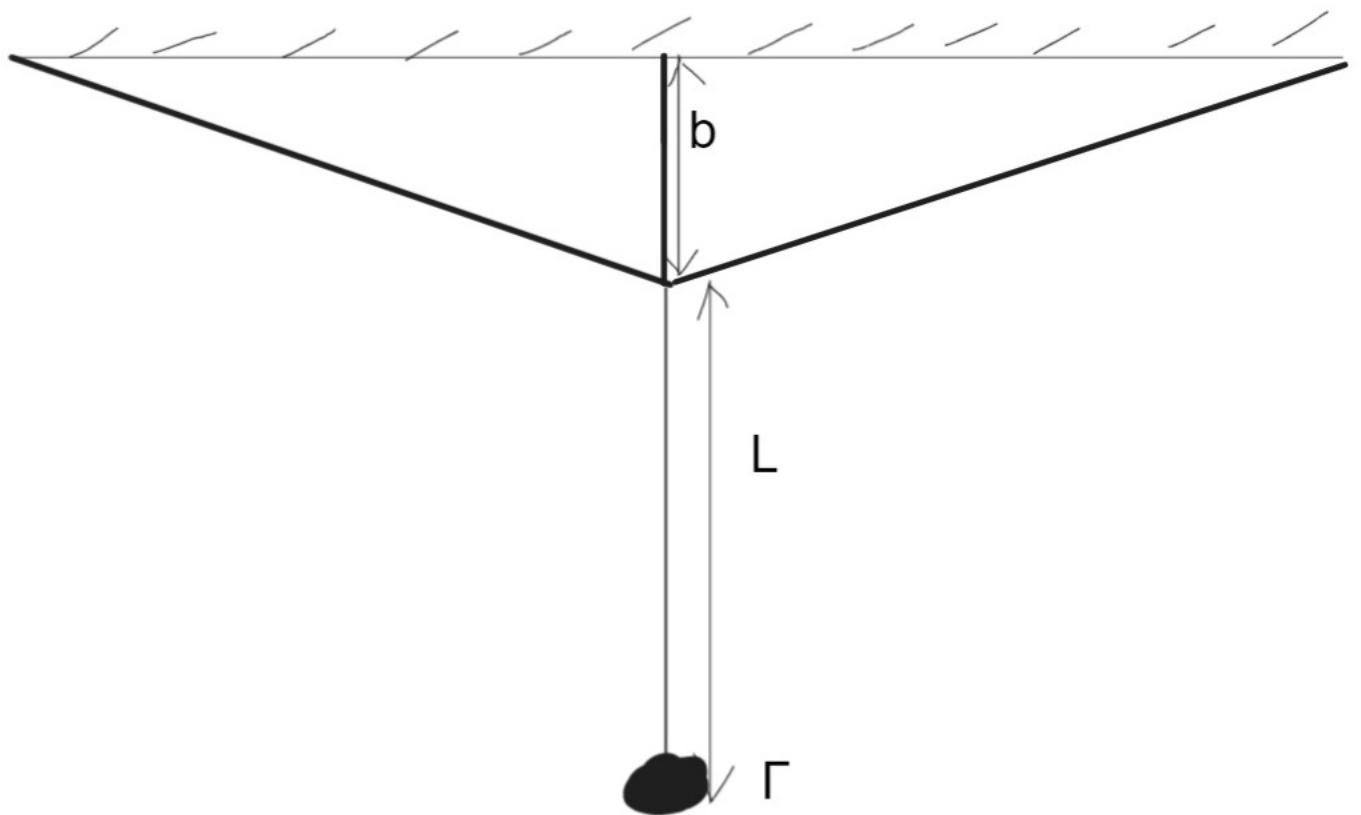


Рис. 1: Схема установки



Рис. 2: Сама установка в реальности

- В качестве грузика у нас будет фонарик который позже поможет нам восстановить траекторию наших колебаний.
- потолок в нашем случае послужит хорошо растянутой нитью (это одно из наших приближений которое не сильно повлияет на результат)

1.3 Обоснование приближений при переходе к схеме

- Потолок будет параллелен верхним (сильно натянутым) резинкам, так как на резинки действует сила mg и T (сила растяжения) и так как $T \gg mg$ то синус угла $\sin(y) = 0$, а следовательно $y = 0$.
- Так как веревка сделана из резинок (2 линии пересекающие друг друга входящие через 1 (см. образец)) системой "захватиков" то можно считать что это нерастяжимая веревка так как колебания малы
- На установку никакие другие силы, кроме mg не действуют, таким образом, исключаем действие других сил

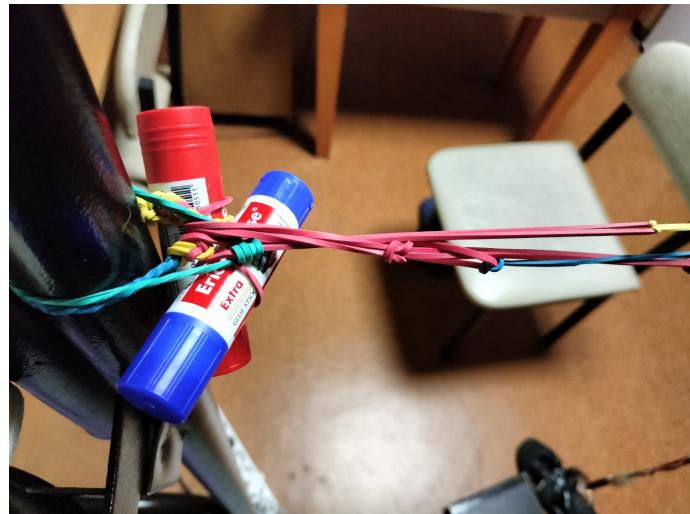


Рис. 3: Образец

- Так как масса груза много больше массы резинки можно считать что вся масса сосредоточена в грузе



Рис. 4: груз из установки (фонарик и 2 кроватные пружины по бокам)

Также будем считать, что колебания не затухают, т.к. у контура добротность достаточная для того чтобы амплитуда уменьшалась незначительно за время наших измерений

1.4 Теория

**Для удобства плоскость P - плоскость где находится установка, R - плоскость перпендикулярная P проходящая через груз Γ **

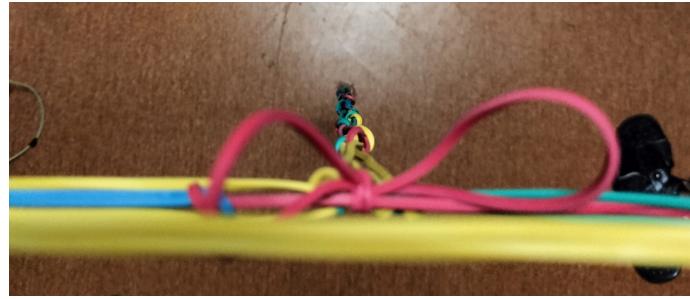


Рис. 5: Плоскость Р

Запуск в плоскости Р и R: В плоскости Р и R груз будет вести себя как математический маятник с длиной $L_1=L$ и $L_2=(L+b)$ соответственно. **Случай запуска под углом (45 градусов):** Движение груза в таком случае является суперпозицией колебаний во взаимно перпендикулярных: плоскости P,R. Так как мы "запускаем" груз под углом 45 градусов, то в начальный момент фаза равна 0. Но так как существует прибавка b к маятнику в плоскости R относительно P, то он будет 'запаздывать', таким образом отставая по фазе. Из-за отставания по фазе со временем траектория переходит в эллиптическую (отставание по фазе $\Pi/2$), а затем и вовсе в прямую перпендикулярную данной (отставание по фазе Π). Далее переходит в первоначальное положение, тогда отставание по фазе 2Π , таким образом если в плоскости R было сделано n колебаний, то в плоскости P n+1 .

Так как :

$$T = 2 * \pi * (n + 1) \sqrt{\frac{L_1}{g}} = 2 * \pi * (n + 1) \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 2 * \pi * (n) \sqrt{\frac{L_2}{g}} = 2 * \pi * n \sqrt{\frac{L + b}{g}}$$

Отсюда получаем очевидное соотношение:

$$\sqrt{\frac{L + b}{L}} = \frac{n + 1}{n}$$

Но так как в нашей установке $b \ll L$, то:

$$\sqrt{\frac{L + b}{L}} = 1 + \frac{b}{2 * L} = 1 + \frac{1}{n}$$

Тогда из последнего равенстваа:

$$n \approx \frac{2L}{b}$$

А для времени T:

$$T = 2\pi n \sqrt{\frac{L + b}{g}} \approx \frac{4\pi}{\sqrt{g}} L^{1,5} b^{-1}$$

1.5 Фигуры Лиссажу

Также нельзя не отметить, что если проследить за траекторией грузика, то эта траектория будет похожа на фигуру Лиссажу.

Появление таких фигур связано с отставанием по фазе. Также стоит отметить что при переходе траектории от прямой к прямой не будет получаться окружность так как $t_1 \neq t_2$

2 Результаты эксперимента и обработка данных

2.1 Фигуры Лиссажу

Запустим нашу установку в темноте с включенным фонариком. Выставим выдержку на максимум на камере (в нашем случае телефон это и есть камера).

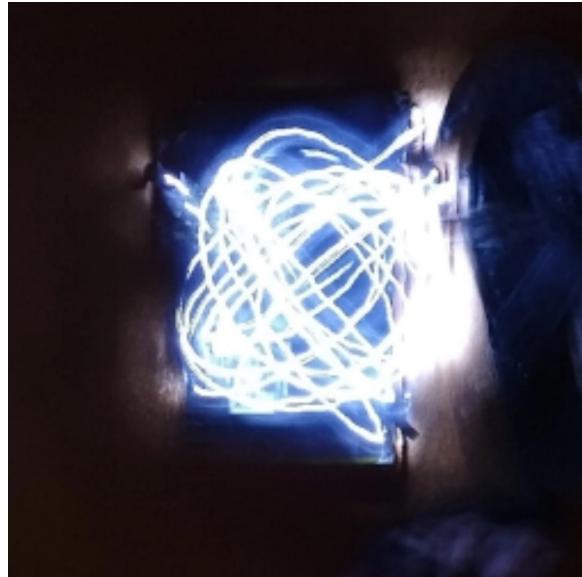


Рис. 6: Без зеркала

В данном случае получается немного размытое изображение из-за того что фонарик светит не из одного места и из-за строения отвечивает в области. Таким образом, можно с помощью зеркала "отдалить" ненужные изображения и получаем:

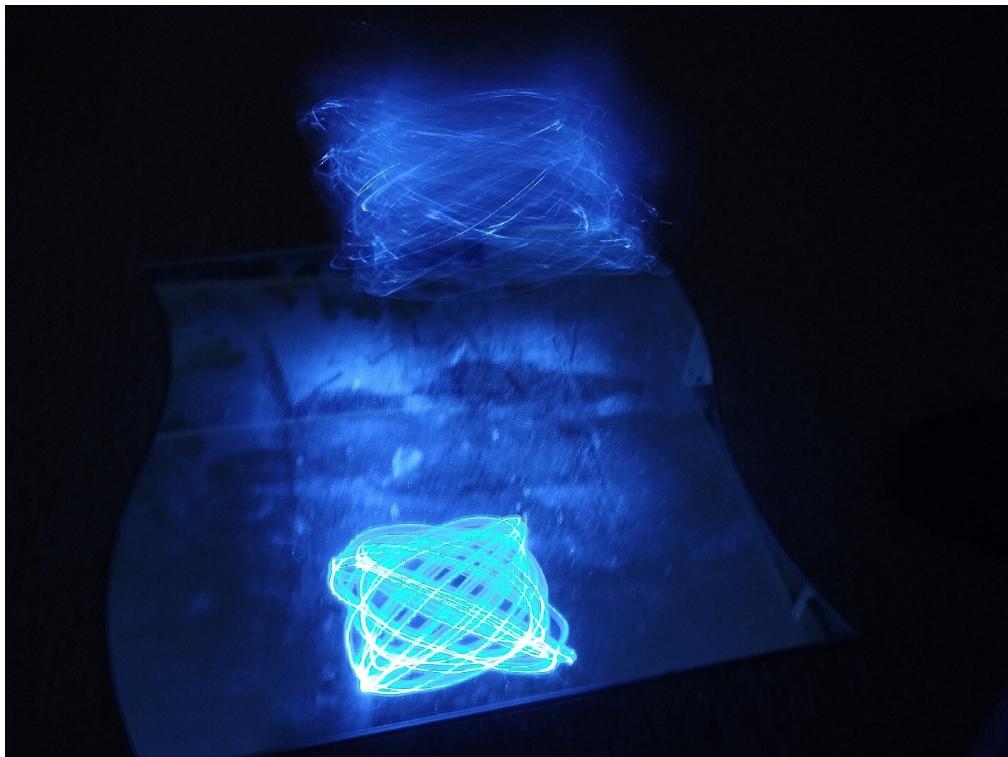


Рис. 7: С зеркалом

Тут можно заметить снизу - нужную траекторию, чуть выше засвет из-за формы фонарика, а еще выше - движение самого фонарика. Таким образом, зеркало помогло получить траекторию не только на плоскости но и в трехмерном пространстве.

Также можно получить это изображение в другой "температуре":

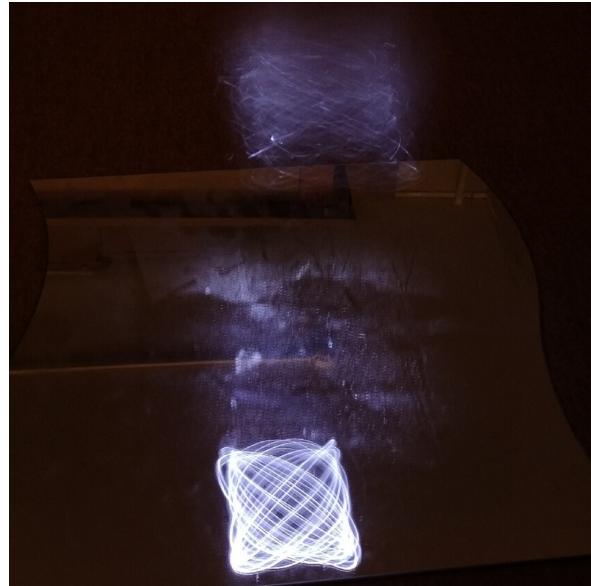


Рис. 8: Фото с другой "температурой" @

Для увеличения фигуры увеличим амплитуду:

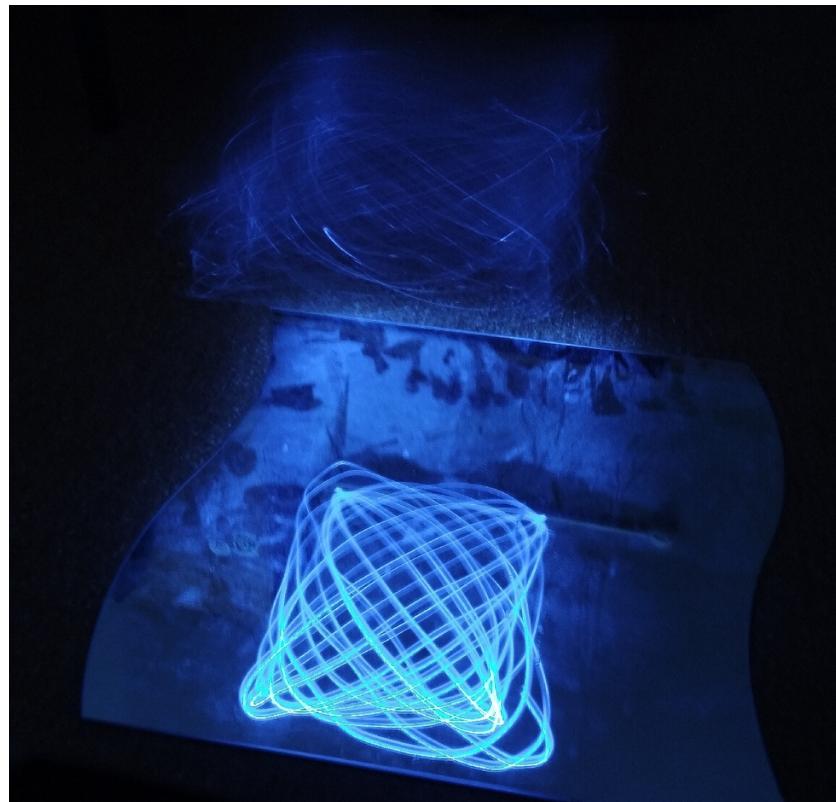


Рис. 9: Фото с увеличенной амплитудой

Можно заметить, что фигура немного несимметричная - это связано с тем что с той стороны был произведен запуск(правый нижний угол) и в силу того что запуск не идеален.

2.2 Исследование траектории

- В момент запуска траектория - прямая (Сдфиг фазы 0):

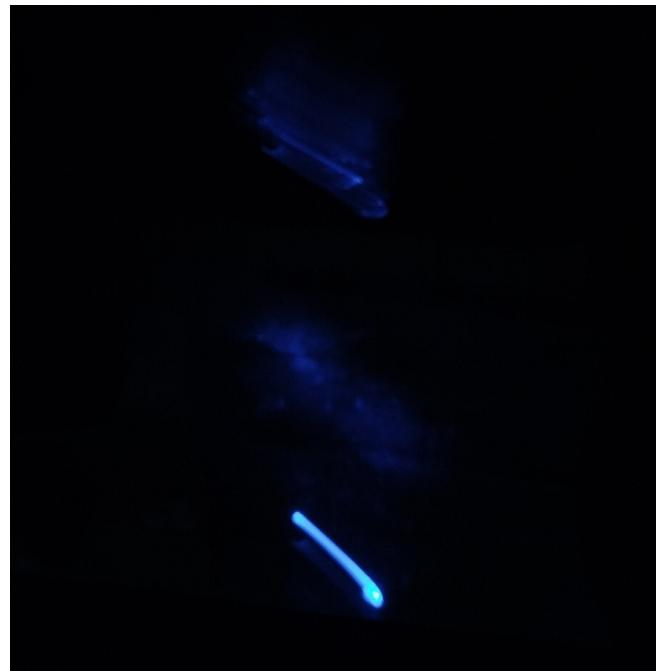


Рис. 10: Прямая

- Далее она переходит в эллипс(Сдфиг фазы $\pi/2$) :

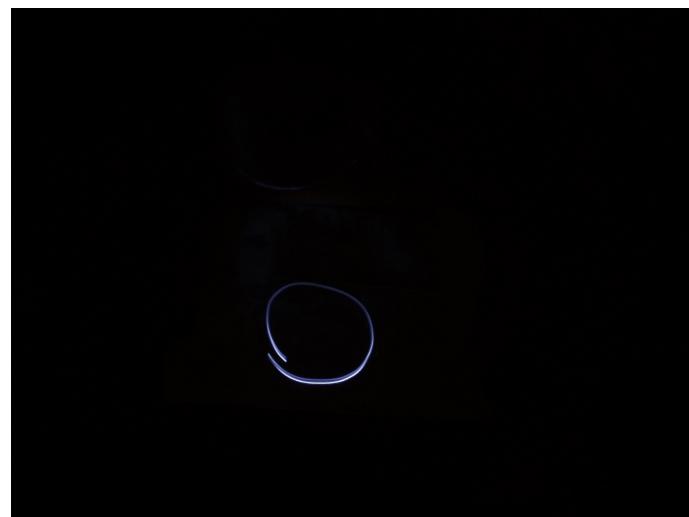


Рис. 11: Эллипс

А на данной картинке можно видеть, что сверху находится траектория и что фонарик неидеален:



Рис. 12: Траектория 3D

- Затем траектория переходит в прямую перпендикулярную начальной (Сдвиг фазы π):

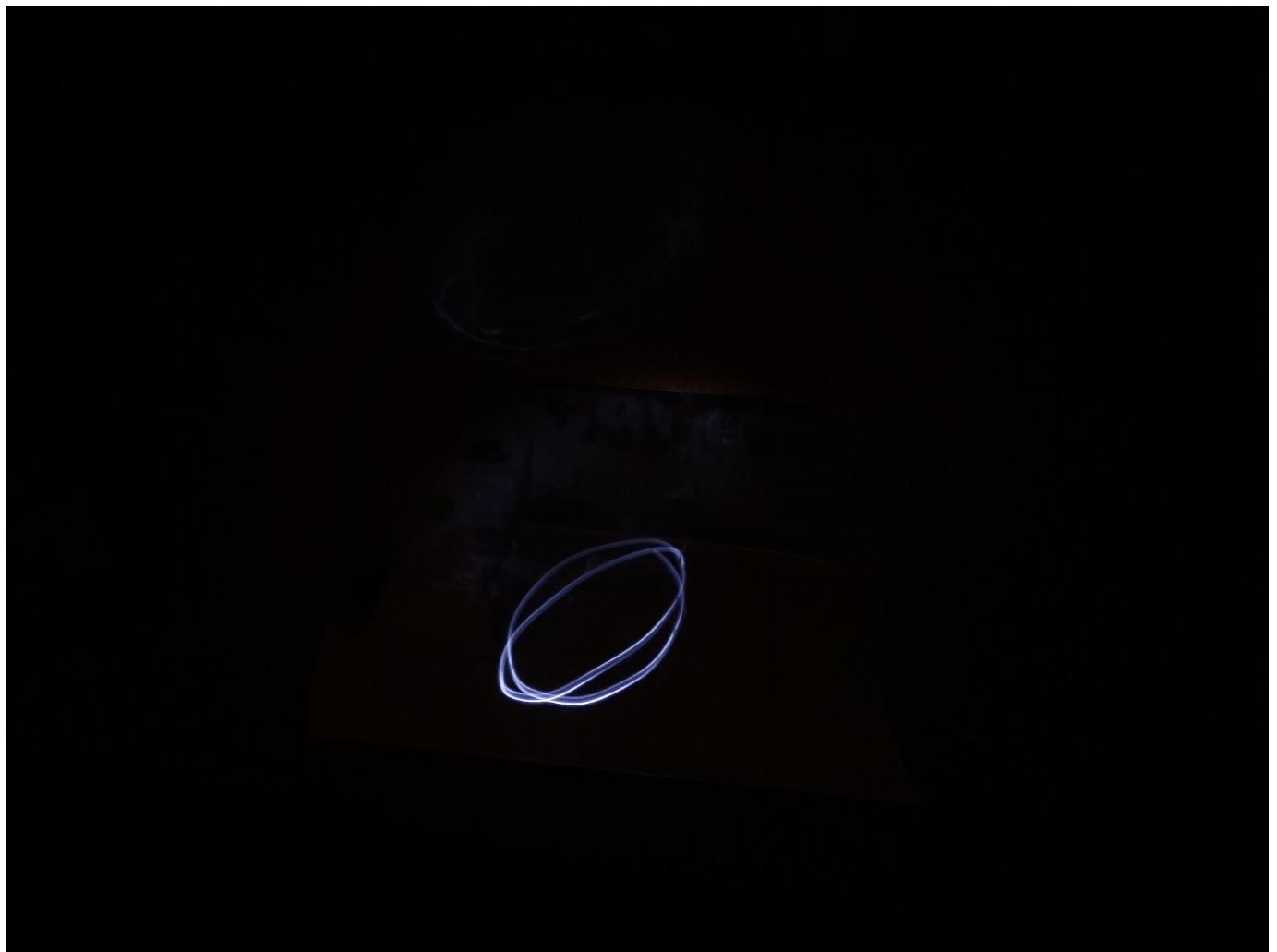


Рис. 13: Переход из окружности в прямую



Рис. 14: Прямая

- Далее прямая опять перейдет в эллипс с сдвигом фазы $\frac{3}{2}\pi$, а затем опять в начальную прямую
- Таким образом, траектория будет повторяться пока колебания не затухнут

2.3 Измерение периодов

Так как веревка очень длинная будем считать погрешность миллиметровки равной ≈ 0 (для измерения L). $L = 0.85 \text{ m}$. $b = 14.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$

- Так как у маятника амплитуда уменьшилась в $\approx e$ раз через ≈ 230 с, то декремент затухания $y = 230^{-1}$, следовательно $Q = \pi * (y * T)^{-1} \approx 350$, что является достаточным для того, чтобы считать колебания незатухающими.
- Найдем периоды в $P(t_1)$ и $R(t_2)$ (запишем все в таблицу):

№	$t_1 * k, \text{ с}$	$k, (\text{кол-во})$	$t_1, \text{ с}$	$\varepsilon_{t_1}(0.5\%) \%$
1	55.9	30	1.86	0.5
2	55.8	30	1.86	0.5
3	56	30	1.87	0.5

Таблица 1: Период для t_1

$$t_1 = 1.86 \pm 0.5\%$$

№	$t_2 * k, \text{ с}$	$k, (\text{кол-во})$	$t_2, \text{ с}$	$\varepsilon_{t_2}(0.5\%) \%$
1	60	30	2	0.8
2	60	30	2	0.8
3	60	30	2	0.8

Таблица 2: Период для t_2

$$t_2 = 2 \pm 1.5\%$$

Таким образом, период теоретический период математических маятников совпадает с реальным значением

- Теперь найдем зависимость t от L При фиксированном b :

№	$t^2, \text{ с}$	t	$L, \text{ см}$	b	$\varepsilon_t(2\%) \%$	$\ln t$	$\ln b$
1	57	28	85	14	4	3.33	4.44
2	47	23.5	75	14	5	3.157	4.317
3	52	26	81	14	4	3.258	4.394
4	53	26.5	82.5	14	4	3.27	4.413

Таблица 3: Период для t (при фиксированном b)

- Теперь найдем зависимость t от b При фиксированном L :

№	t^*2 , с	t	L, cm	b	$\varepsilon_t, 2s\%$	$\varepsilon_b\%$	$\ln t$	$\ln b$
1	60	30	82.5	11	3	1	3.4	2.39
2	72	36	82.5	8.5	2	2	3.58	2.14
3	110	55	82.5	5.5	2	2	4	1.704
4	52.6	26.3	82.5	14	3	1	3.269	2.639

Таблица 4: Период для t (при фиксированном L)

Выводы по результатам измерений: из таблиц видно что период пропорционален в некоторой степени длине L и обратно пропорционален b с некоторым коэф. Таким образом, подставим точки в логарифмический график и найдя угол наклона найдем "степень" зависимости.

- График при фиксированном b:

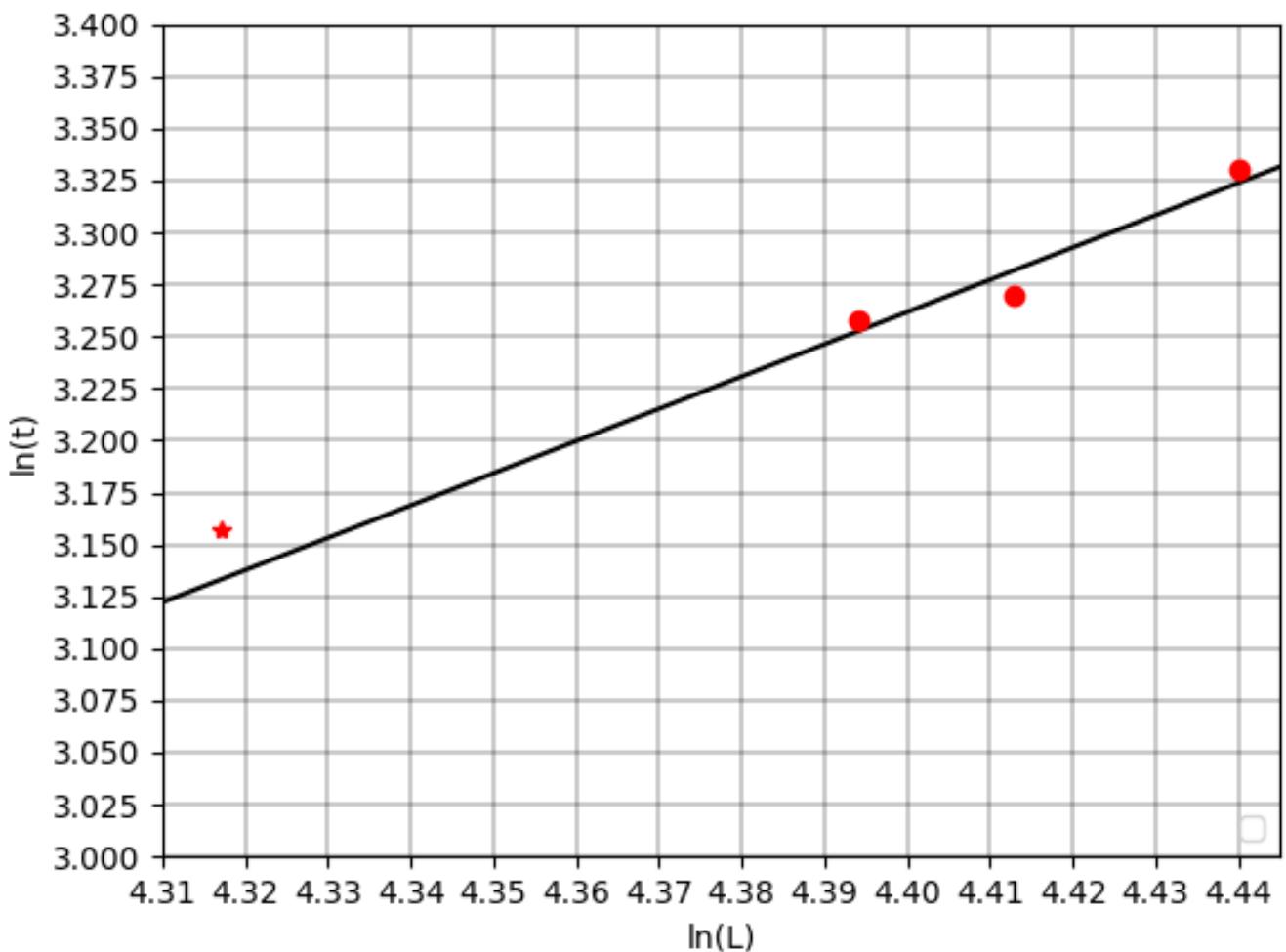


Рис. 15: $t(L)$

В данном графике получаем угол наклона $k = 1.5 \pm 11\%$, что согласуется с теоретическим обоснованием. Однако, видно, что при малых L возникает нелинейная зависимость (точка-звездочка) логарифмического графика - это объясняется тем что формулы получены приближением.

- График при фиксированном L:

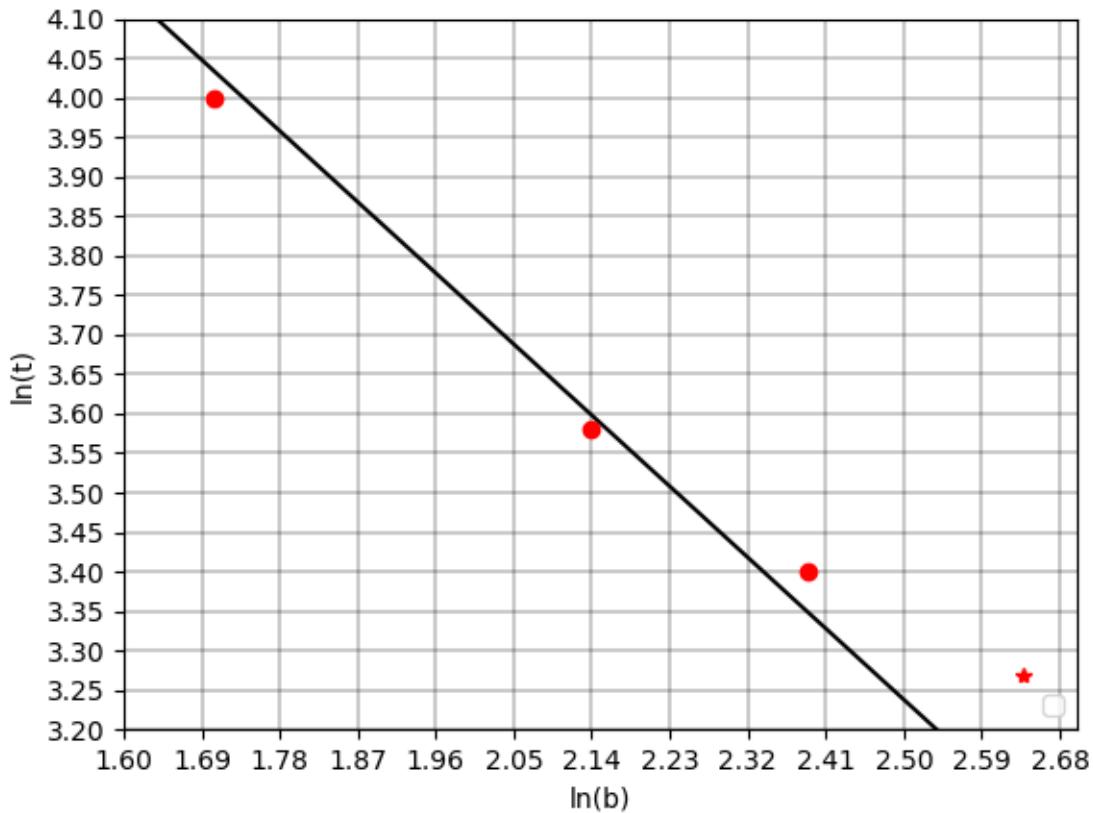


Рис. 16: $t(b)$

На данном графике угол наклона $k = -1 \pm 9\%$, что согласуется с теоретическим обоснованием. Но при больших b приближение становится менее верным с точки математики, тем объясняются отклонения 2 последних точек, если первая еще лежит рядом с прямой, то вторая уже не рядом.

3 Вывод

Таким образом, мы изучили движение маятника с двумя модами, а именно: его траекторию, теоретически и экспериментально - получились фигуры Лиссажу, и период, пользуясь формулами приближения нашли зависимость периода не от количества колебаний, а от длины нити и расстояния до потолка, показали что это приближение есть приближение и при "крайних" положениях системы оно уже не совсем подчиняется нашему выведеному закону и, конечно же, показали, что формула для периода: $T = 2\pi n \sqrt{\frac{L+b}{g}} \approx \frac{4\pi}{\sqrt{g}} L^{1.5} b^{-1}$, теоретически совпадает с практическим значением (коэффицент наклона прямых $K1 = 1.5 \pm 11\%$ и $K2 = -1 \pm 9\%$ в логарифмических координатах совпадает с теоретическим значением степени).