



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. A. Bedin, V. S. Patsko, A. A. Fedotov, A. V. Belyakov, K. V. Strokov, Restoration of aircraft trajectory from inaccurate measurements, *Avtomat. i Telemekh.*, 2010, Issue 2, 17–30

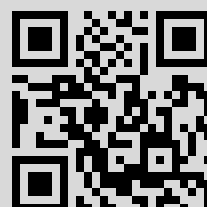
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 195.19.132.64

April 17, 2015, 13:12:25



© 2010 г. Д.А. БЕДИН,  
В.С. ПАЦКО, канд. физ.-мат. наук,  
А.А. ФЕДОТОВ, канд. физ.-мат. наук  
(Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург),  
А.В. БЕЛЯКОВ,  
К.В. СТРОКОВ  
(Фирма «НИТА», Санкт-Петербург)

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ САМОЛЕТА ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ<sup>1</sup>

Рассматривается задача восстановления траектории самолета по неточным замерам его положения. Считается, что движение самолета происходит практически в горизонтальной плоскости, а замеры поступают от радиолокатора. Алгоритм восстанавливает траекторию путем последовательной обработки замеров в передвигающейся выборке. Приведены результаты численного моделирования.

### 1. Введение

Работа посвящена задаче восстановления траектории самолета в процессе поступления замеров его геометрического положения. Предполагается, что движение самолета происходит с малым отклонением от горизонтальной плоскости. Известны характеристики точности замеров. Каждый замер позволяет просчитать множество неопределенности, соответствующее данному моменту времени. Множество неопределенности – совокупность всех геометрических положений, совместных с данным замером и его точностными характеристиками. Предполагается также, что на множестве неопределенности задана функция предпочтения («вероятностное распределение»), характеризующая меру возможного отклонения положения самолета от отметки замера. Замеры поступают с некоторым шагом по времени.

Задача состоит в построении траектории, проходящей через множества неопределенности замеров (или достаточно близко от них) с учетом заданных функций предпочтения.

В алгоритме восстановления используется модель динамики самолета в виде системы дифференциальных уравнений четвертого порядка. Две фазовые переменные задают положение на плоскости, третья координата – угол направления вектора скорости, четвертая – величина скорости. Имеются два управляющих воздействия: одно определяет нормальное ускорение, другое – линейное.

Исследуемую задачу с общей точки зрения можно связать с проблемой построения разворачивающейся во времени трубки информационных множеств [1, 2] и нахождением траектории, проходящей «недалеко» от центра каждого временного сечения. Главное препятствие к применению такого подхода – нелинейность динамики и необходимость построения информационных множеств в четырехмерном фазовом пространстве. Даже для случая, когда величина скорости самолета предполагается постоянной (фазовое пространство трехмерно), такая задача является очень сложной [3].

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-96085, № 09-01-00436).

В статье основу алгоритма восстановления составляет процедура построения траектории в некотором временном промежутке (окне), содержащем оговоренное количество последних из поступивших замеров. В окончательный ответ берется только начальная часть траектории в окне. Дальнейшие построения ведутся при помощи сдвинутого окна. Таким образом, за счет перемещаемого по времени окна происходит наращивание восстанавливаемой траектории.

Наращивание траектории на основе передвигающейся выборки последних замеров является стандартным инженерным приемом [4–6]. Особенность данной работы состоит в том, что такой прием применяется к существенно нелинейному объекту. При этом специфические свойства динамики используются для вывода соотношений, определяющих в пределах окна оптимум на множестве постоянных управлений.

Использование аналитических вычислений в алгоритме восстановления существенно влияет на сокращение времени расчета траектории. Кроме того, принципиально улучшаются свойства устойчивости восстанавливаемой траектории относительно изменения начальных условий.

В конце статьи приведены результаты численного моделирования процесса восстановления реальной траектории.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Модельное описание динамики

Для эффективной работы алгоритма восстановления и простоты аналитических построений была выбрана упрощенная модель динамики движения самолета в горизонтальной плоскости. Возможности управления связаны с выбором продольного и бокового ускорений. Описание динамики имеет вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \varphi, \\ \dot{z} &= v \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u/v, \\ \dot{v} &= w. \end{aligned}$$

Здесь  $x, z$  – координаты положения на плоскости;  $\varphi$  – угол наклона вектора скорости, отсчитываемый по часовой стрелке от оси  $x$ ;  $v$  – величина скорости;  $u$  – боковое ускорение;  $w$  – продольное ускорение. Считаем, что управления  $u, w$  стеснены геометрическими ограничениями:

$$u \in [u_*, u^*], \quad w \in [w_*, w^*].$$

При этом  $u_* = -u^*$ ,  $u^* > 0$ ,  $w_* < 0 < w^*$ . Кроме того, вводится ограничение на скорость:

$$0 < v_* \leq v \leq v^*.$$

Крайние значения, задающие ограничения на управляющие воздействия и величину линейной скорости, подбираются на основе представления о типе самолета, траекторию которого следует восстановить.

Цель решения задачи восстановления – нахождение траектории системы (1), близкой к неизвестной истинной траектории движения самолета. При этом управления  $u$  и  $w$  должны быть кусочно-постоянными функциями времени.

### 2.2. Множества неопределенности замеров.

*Расчет множеств неопределенности с учетом неизвестной высоты*

Предположим, что наблюдение за движением самолета осуществляется при помощи радиолокатора, от которого поступают замеры положения по дальности  $r$  и

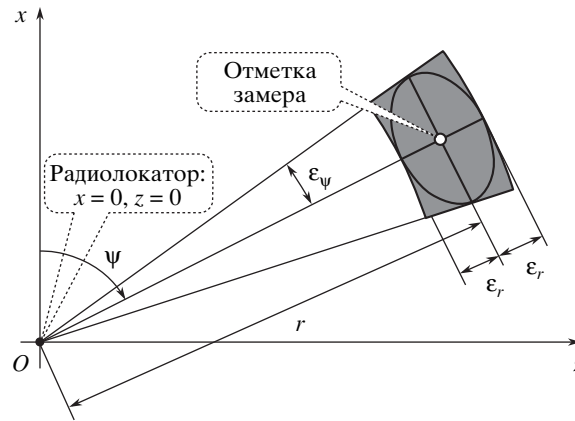


Рис. 1. Множество неопределенности на плоскости  $Ozx$  при движении самолета на малой высоте.

азимуту  $\psi$ . Априорно известны максимальные погрешности измерения этих величин  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\psi$  соответственно. Считаем, что радиолокатор измеряет наклонную дальность, а истинная высота самолета неизвестна.

В практике решения задач аэронавигации по полученным от радиолокатора данным принято отмечать точки (соответствующие замерам) на горизонтальной плоскости  $Ozx$ , а именно: от точки плоскости, обозначающей радиолокатор, откладывается измеренная наклонная дальность по измеренному азимуту. Условимся в дальнейшем называть «замерами» именно эти точки на горизонтальной плоскости.

Указанный способ изображения движения на плоскости вполне оправдан, так как радиолокатор измеряет положение самолета на дальностях, где еще заметно не сказывается кривизна Земли, а также потому, что при наблюдениях на достаточно больших расстояниях неопределенность по высоте играет малую роль.

Если бы движение самолета проходило в плоскости, близкой к плоскости Земли, то множество неопределенности  $H(t)$  на плоскости  $Ozx$ , учитывающее ошибки  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\psi$ , представляло бы кольцевой сектор (рис. 1). Его разумно подменять более простой фигурой. Например, удобным является представление множества неопределенности  $H(t)$  некоторым эллипсом.

Для учета неизвестной истинной высоты требуется корректировка множества неопределенности. Это особенно важно, когда расстояние между самолетом и радиолокатором сравнительно мало.

Условимся не учитывать ошибки из-за влияния кривизны Земли. Примем в качестве рабочей модель множества неопределенности в виде эллипса.

Пусть высота  $h$  движения самолета не превышает величины  $h^*$ , а угол места  $\alpha$  не больше  $\alpha^*$ .

Поскольку истинные высота  $h$  и угол  $\alpha$  неизвестны, то дальний край множества неопределенности имеет вид

$$d^* = r + \varepsilon_r.$$

Если

$$(2) \quad (r - \varepsilon_r) \sin \alpha^* \leq h^*,$$

то ближний край рассчитывается по формуле

$$(3) \quad d_* = (r - \varepsilon_r) \cos \alpha^*.$$

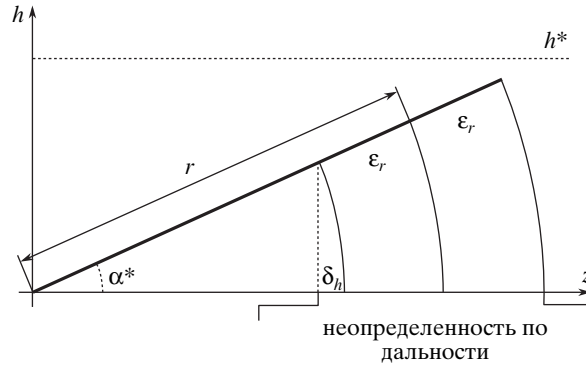


Рис. 2. Учет неизвестной высоты при расчете множества неопределенности.

Если

$$(4) \quad (r - \varepsilon_r) \sin \alpha^* > h^*,$$

то для расчета ближнего края применяем формулу

$$(5) \quad d_* = \sqrt{(r - \varepsilon_r)^2 - h^{*2}}.$$

Формулы (3), (5) можно написать единообразно, введя величину

$$\delta_h = (r - \varepsilon_r) (1 - \cos \alpha^*)$$

в случае (2) и

$$\delta_h = (r - \varepsilon_r) - \sqrt{(r - \varepsilon_r)^2 - h^{*2}}$$

в случае (4). Тогда вместо (3), (5) для ближней границы множества неопределенности можно написать

$$d_* = (r - \varepsilon_r) - \delta_h.$$

Величина  $\delta_h$  для случая (2) поясняется на рис. 2.

В дальнейшем считаем, что радиолокатор находится на плоскости  $Ozx$  в точке  $(0, 0)$ . На луче  $s$ , проведенном из начала координат через точку замера, отмечаем точку, отстоящую от нуля на расстоянии  $(d^* + d_*)/2$ . Ее и принимаем за центр множества неопределенности. Одна из полуосей эллипса направлена по лучу  $s$  и равна  $(d^* - d_*)/2$ . Вторая полуось равна  $\varepsilon_\psi (d^* + d_*)/2$ .

В случае, когда  $r$  велико,  $(d^* + d_*)/2 \approx r$  и  $(d^* - d_*)/2 \approx \varepsilon_r$ . При этом центр множества неопределенности практически совпадает с точкой замера.

### 2.3. Идеология окон

Для восстановления траектории применим идеологию окон. Каждое окно содержит оговоренное число моментов замеров. Используя соответствующие множества неопределенности, строим при помощи постоянных управлений  $u$  и  $w$  траекторию в первом окне. Далее окно сдвигается на некоторый промежуток времени вправо. Начальная часть траектории в первом окне до момента начала следующего окна считается окончательной, т.е. в дальнейшем не пересчитывается. Во втором окне строится новая траектория. Осуществляется непрерывная стыковка уже построенного участка и новой траектории. Затем происходит переход к третьему окну и т.д. Длина окна является параметром алгоритма, величина сдвига окна может регулироваться.

#### 2.4. Дополнительные требования к алгоритму

Считаем, что множества неопределенности имеют вид эллипсов и на каждом из них задана функция предпочтения, характеризующая «вероятность» нахождения истинного состояния в той или иной части множества. Максимальное значение функция предпочтения принимает в центре эллипса. Центр эллипса за счет неточного знания высоты незначительно отличается от точки замера.

### 3. Построение траектории в окне. Аналитические выкладки

#### 3.1. Формулы интегрирования

Система (1) в случае постоянных  $u$ ,  $w$  является интегрируемой.

Примем за начальный момент времени  $t = 0$ . Предположим, что в этот момент выполняются следующие начальные условия на фазовые координаты:

$$(6) \quad v(0) = v_0 > 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad x(0) = z(0) = 0.$$

Тогда для момента времени  $t > 0$  при условии, что  $v > 0$  на всем промежутке от 0 до  $t$ , будут выполнены соотношения:

$$(7) \quad \begin{aligned} v(t) &= v_0 + wt, \\ \varphi(t) &= \frac{u}{w} \ln \left( 1 + \frac{wt}{v_0} \right) = \frac{u}{w} \ln \frac{v(t)}{v_0}, \end{aligned}$$
$$(8) \quad \begin{aligned} x(t) &= \frac{u}{u^2 + 4w^2} v^2(t) \sin \varphi(t) + \frac{2w}{u^2 + 4w^2} (v^2(t) \cos \varphi(t) - v_0^2), \\ z(t) &= -\frac{u}{u^2 + 4w^2} (v^2(t) \cos \varphi(t) - v_0^2) + \frac{2w}{u^2 + 4w^2} v^2(t) \sin \varphi(t). \end{aligned}$$

Формула для угла  $\varphi$  в (7) теряет силу при обращении в нуль управления  $w$ . Правильное соотношение получается предельным переходом:

$$\varphi(t) = \frac{ut}{v_0}.$$

Формулы для координат (8) не определены при одновременном обращении в нуль управлений  $u$  и  $w$ . В таком случае справедливы простые соотношения (они также являются предельным случаем для общей формулы):

$$v(t) = v_0, \quad \varphi(t) = 0, \quad x(t) = x_0 + v_0 t, \quad z(t) = 0.$$

Формулы для других начальных условий могут быть получены при помощи замены

$$\varphi \rightarrow \varphi + \varphi_0, \quad x \rightarrow x + x_0, \quad z \rightarrow z + z_0.$$

#### 3.2. Вспомогательная задача о переводе в точку

Важной вспомогательной задачей является задача отыскания пары  $u$ ,  $w$  постоянных управлений, приводящих геометрическое положение в момент  $t$  в заданную точку  $(x, z)$  на плоскости. При этом, без ограничения общности, можно считать выполненными начальные условия вида (6).

В формулах (7), (8) зафиксируем  $t$  и примем в качестве независимых переменных  $u$  и  $w$ . Тогда соотношения (8) будут описывать положение конца траектории в момент  $t$  в виде функций от  $u$  и  $w$ :  $x = x(t, u, w)$ ,  $z = z(t, u, w)$ . Множество, состоящее из всех точек, задаваемых этими функциями при  $u \in [u_*, u^*]$  и  $w \in [w_*, w^*]$ ,

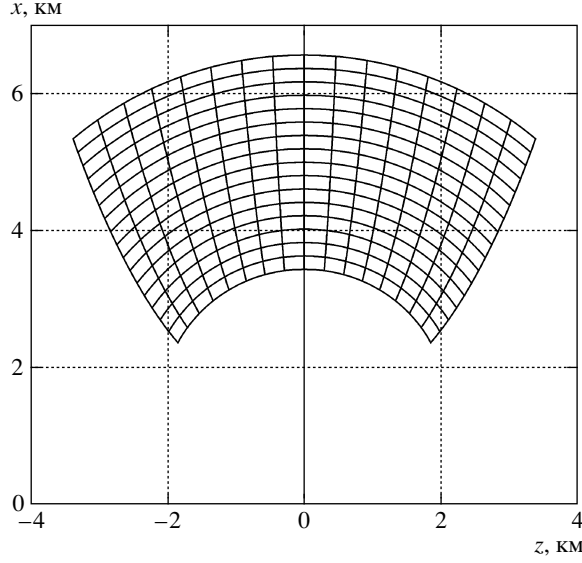


Рис. 3. Множество достижимости в плоскости  $Ozx$  на постоянных управлениях.

является множеством достижимости системы (1) в момент времени  $t$  на плоскости геометрических координат при постоянных управлениях  $u$  и  $w$ .

Множества достижимости системы (1) на плоскости геометрических координат  $x, z$  для случая  $v = \text{const}$  (т.е. когда  $w \equiv 0$ ) при переборе кусочно-постоянных управлений  $u(t)$  исследованы в [7]. Структура их нетривиальна. Она является еще более сложной при  $w \neq 0$ . Ограничившись постоянными управлениями  $u, w$  и не слишком большим промежутком времени, получаем множество несложной структуры (рис. 3).

1. Введем обозначения криволинейных отрезков на плоскости:

$$\begin{aligned} E_u(t, w) &= \{x = x(t, u, w), z = z(t, u, w) : u \in [u_*, u^*]\}, \\ E_w(t, u) &= \{x = x(t, u, w), z = z(t, u, w) : w \in [w_*, w^*]\}. \end{aligned}$$

При малых абсолютных значениях величин  $u_*, u^*, w_*, w^*$  (или если  $t$  невелико) дуги  $E_u(t, w_1)$  и  $E_u(t, w_2)$  в случае  $w_1 \neq w_2$ , а также дуги  $E_w(t, u_1)$  и  $E_w(t, u_2)$ , где  $u_1 \neq u_2$ , не имеют пересечений. Вследствие этого дуги  $E_u(t, w)$  при  $w = \text{const}$  и  $E_w(t, u)$  при  $u = \text{const}$  можно рассматривать как координатные линии на множестве достижимости (в плоскости) при постоянных управлениях.

Криволинейный отрезок  $E_u(t, w)$  хорошо приближается дугой окружности с центром в точке  $\tilde{x} = \frac{1}{4}v_0t, \tilde{z} = 0$  и радиусом  $\tilde{R} = \frac{3}{4}v_0t + \frac{1}{2}wt^2$ :

$$(9) \quad \left(x - \frac{1}{4}v_0t\right)^2 + z^2 = \left(\frac{3}{4}v_0t + \frac{1}{2}wt^2\right)^2.$$

Таким образом, зная координаты точки  $(x, z)$ , момент времени  $t$ , а также начальную скорость  $v_0$ , можем легко приближенно восстановить управление  $w$ . Это приближение затем используем для вычисления управления  $u$ .

Из уравнений (8) при помощи линейных преобразований получаем соотношения:

$$\begin{aligned} ux(t) + 2wz(t) &= v^2(t) \sin \varphi(t), \\ 2wx(t) - uz(t) + v_0^2 &= v^2(t) \cos \varphi(t). \end{aligned}$$

Возводя каждое из них в квадрат и складывая, получаем уравнение, не содержащее тригонометрических функций (квадратное уравнение), пригодное для определения управления  $u$  по заданным координатам  $x, z$  точки на плоскости и выбранному  $w$ :

$$(10) \quad (x^2 + z^2)u^2 - (2v_0^2 z)u + (4(x^2 + z^2)w^2 + 4v_0^2 xw - (v^4 - v_0^4)) = 0.$$

2. Уравнение (9) дает лишь приближенное значение  $w$ . Вследствие этого и уравнение (10) не точно определяет  $u$ . Будем обозначать значения, полученные с помощью этих уравнений, как  $u^{(1)}$  и  $w^{(1)}$ . Численные расчеты показывают небольшую величину ошибки такого приближения. Тем не менее с целью достижения лучшей точности разумно производить корректировку. Для этого можно применить следующую алгоритмическую процедуру:

1) просчитывается точка  $(x^{(1)}, z^{(1)})$  на плоскости, в которую в момент  $t$  приходит движение в силу системы (1) при управлениях  $u^{(1)}, w^{(1)}$ ;

2) в точке  $(x^{(1)}, z^{(1)})$  вычисляются производные геометрического положения по управлениям  $u$  и  $w$ :

$$\frac{\partial x}{\partial u}(t, u^{(1)}, w^{(1)}), \quad \frac{\partial z}{\partial u}(t, u^{(1)}, w^{(1)}), \quad \frac{\partial x}{\partial w}(t, u^{(1)}, w^{(1)}), \quad \frac{\partial z}{\partial w}(t, u^{(1)}, w^{(1)});$$

3) если задать малые поправки  $\delta u, \delta w$  на управления, то в момент времени  $t$  отличие геометрических координат  $(x', z')$  на новой траектории от координат при управлениях  $u^{(1)}, w^{(1)}$  будет описываться следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x' - x^{(1)} \\ z' - z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta w \end{pmatrix} + o(\sqrt{(\delta u)^2 + (\delta w)^2}).$$

Значения поправок найдем из решения линейного уравнения

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^{(1)} \\ z - z^{(1)} \end{pmatrix};$$

4) уточненные управления возьмем в виде:

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \delta u, \quad w^{(2)} = w^{(1)} + \delta w.$$

Идея этой процедуры состоит в подмене в окрестности точки  $(x^{(1)}, z^{(1)})$  криволинейной системы координат, задаваемой дугами  $E_u(t, w)$  и  $E_w(t, u)$ , косоугольной системой, определяемой касательными направлениями к дугам.

Процедуру можно применять многократно, каждый раз добиваясь уточнения результата. На практике достаточно одной коррекции.

### 3.3. Построение траектории при постоянных управлениях для нескольких замеров

Рассмотрим задачу построения траектории на плоскости  $Ozx$  в силу модельной динамики (1) по нескольким замерам. Постоянные управления задаются парой  $u, w$ .

Приближение будет осуществляться при помощи алгоритма минимизации заданного функционала. Пусть  $m$  означает количество замеров,  $t_i$  – их моменты,  $x_i, z_i$  –



соответствующие центры множеств неопределенности ( $i = \overline{1, m}$ ). Опишем элементы алгоритма.

**1.** Задачу приближения можно сформулировать следующим образом. Пусть задан набор величин  $t_i, x_i, z_i, i = \overline{1, m}$ . Требуется построить траекторию при постоянных управлениях так, чтобы минимизировать значение некоторого функционала.

В качестве такого функционала можно взять функционал среднеквадратического отклонения

$$(11) \quad R_1(u, w) = \sum_{i=1}^m ((x(t_i, u, w) - x_i)^2 + (z(t_i, u, w) - z_i)^2).$$

Более адекватно учитывает характер ошибок замеров радиолокатора функционал в виде квадратичной формы

$$(12) \quad R_2(u, w) = \sum_{i=1}^m \left( a(x_i, z_i)(x(t_i, u, w) - x_i)^2 + \right. \\ \left. + 2b(x_i, z_i)(x(t_i, u, w) - x_i)(z(t_i, u, w) - z_i) + c(x_i, z_i)(z(t_i, u, w) - z_i)^2 \right).$$

При помощи специального выбора коэффициентов  $a, b$  и  $c$  можно моделировать структуру ошибки радиолокатора, а именно можно добиться того, чтобы линии уровня функционала  $R_2$  были эллипсами с полуосями подобными полуосям эллипсов множеств неопределенности. Размеры полуосей вычисляются по формулам из раздела 2:

$$A_i = \varepsilon_\psi(d_i^* + d_{*i})/2, \quad B_i = (d_i^* - d_{*i})/2.$$

Справедливы соотношения:

$$\cos \psi_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + z_i^2}}, \quad \sin \psi_i = \frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + z_i^2}}.$$

Для обеспечения подобия эллипсов зададим коэффициенты следующим образом:

$$a(x_i, z_i) = \frac{\sin^2 \psi_i}{A_i^2} + \frac{\cos^2 \psi_i}{B_i^2}, \\ b(x_i, z_i) = \sin \psi_i \cos \psi_i \left( \frac{1}{A_i^2} - \frac{1}{B_i^2} \right), \\ c(x_i, z_i) = \frac{\cos^2 \psi_i}{A_i^2} + \frac{\sin^2 \psi_i}{B_i^2}.$$

В дальнейшем для простоты будет использован функционал среднеквадратического отклонения  $R_1(u, w)$ . Результаты, полученные для этого функционала, переносятся на случай функционала  $R_2(u, w)$ .

**2.** Алгоритм приближения в случае нескольких замеров состоит из двух частей: выбора начального приближения на постоянные управления системы (1) и процедуры коррекции управляющих воздействий.

Обозначим начальную пару управлений через  $\hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}$ . В принципе, допустимо использование управлений  $\hat{u}^{(1)} = 0, \hat{w}^{(1)} = 0$ , но при этом число шагов процедуры коррекции может быть большим. Хорошо зарекомендовал себя следующий вариант. Он требует предварительного вычисления  $m$  пар управлений  $u_i, w_i$ , таких что  $i$ -я пара проводит траекторию в момент  $t_i$  через точку  $(x_i, z_i), i = \overline{1, m}$ . Вычисление управлений производится по алгоритму, описанному в подразделе 3.2. Среди всех пар  $u_i, w_i$  в качестве  $\hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}$  выбирается пара, наилучшая по функционалу (11).

3. Зададимся начальным приближением  $\hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}$ . Построим траекторию движения  $\hat{x}^{(1)}(t) = x(t, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)})$ ,  $\hat{z}^{(1)}(t) = z(t, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)})$  системы (1) с этими постоянными управлениями.

Опишем процедуру коррекции, являющуюся некоторым аналогом процедуры для задачи попадания в заданную точку. В результате коррекции находится новая пара управлений  $\hat{u}^{(2)}, \hat{w}^{(2)}$ , для которой значение функционала меньше:

1) в моменты  $t_i$  вычисляются производные геометрического положения по управлениям  $u$  и  $w$  для движения  $\hat{x}^{(1)}(t)$ ,  $\hat{z}^{(1)}(t)$ :

$$\frac{\partial x}{\partial u}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}), \quad \frac{\partial z}{\partial u}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}), \quad \frac{\partial x}{\partial w}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}), \quad \frac{\partial z}{\partial w}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)});$$

2) обозначим движение в силу управлений с поправками  $\delta u, \delta w$  через  $\hat{x}'(t) = x(t, \hat{u}^{(1)} + \delta u, \hat{w}^{(1)} + \delta w)$ ,  $\hat{z}'(t) = z(t, \hat{u}^{(1)} + \delta u, \hat{w}^{(1)} + \delta w)$ . Выражение функционала для такой траектории принимает вид

$$(13) \quad R_1(\hat{u}^{(1)} + \delta u, \hat{w}^{(1)} + \delta w) = \sum_{i=1}^m ((\hat{x}'(t_i) - x_i)^2 + (\hat{z}'(t_i) - z_i)^2) = \\ = \sum_{i=1}^m \left( \left( \frac{\partial x}{\partial u}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta u + \frac{\partial x}{\partial w}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta w + o(\sqrt{(\delta u)^2 + (\delta w)^2}) + \hat{x}^{(1)}(t_i) - x_i \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial z}{\partial u}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta u + \frac{\partial z}{\partial w}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta w + o(\sqrt{(\delta u)^2 + (\delta w)^2}) + \hat{z}^{(1)}(t_i) - z_i \right)^2 \right).$$

Отбрасывая члены второго порядка малости, получим:

$$(14) \quad R'_1(\hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}, \delta u, \delta w) = \\ = \sum_{i=1}^m \left( \left( \frac{\partial x}{\partial u}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta u + \frac{\partial x}{\partial w}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta w + \hat{x}^{(1)}(t_i) - x_i \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial z}{\partial u}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta u + \frac{\partial z}{\partial w}(t_i, \hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}) \delta w + \hat{z}^{(1)}(t_i) - z_i \right)^2 \right).$$

В выражении функционала  $R'_1(\hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}, \delta u, \delta w)$  сгруппируем члены, содержащие  $\delta u, \delta w$  в одинаковой степени:

$$(15) \quad R'_1(\hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}, \delta u, \delta w) = \\ = a_{uu}(\delta u)^2 + 2a_{uw}\delta u\delta w + a_{ww}(\delta w)^2 + 2a_u\delta u + 2a_w\delta w + a_0.$$

Здесь коэффициенты  $a_{uu}, a_{uw}, a_{ww}, a_u, a_w, a_0$  зависят от  $\hat{u}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}$ ;

3) вычисляем оптимальные поправки  $\delta u, \delta w$ , минимизируя функционал (15).

Для такого функционала существует единственная точка минимума. Это следует из того, что квадратичная форма  $a_{uu}(\delta u)^2 + 2a_{uw}\delta u\delta w + a_{ww}(\delta w)^2$  является положительно-определенной. Точка минимума  $(\delta u^*, \delta w^*)$  дается формулой

$$\begin{pmatrix} \delta u^* \\ \delta w^* \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} a_u \\ a_w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{uu} & a_{uw} \\ a_{uw} & a_{ww} \end{pmatrix}.$$

Уточненные управления берутся в виде:

$$\hat{u}^{(2)} = \hat{u}^{(1)} + \delta u^*, \quad \hat{w}^{(2)} = \hat{w}^{(1)} + \delta w^*.$$

Для функционала  $R_2$ , определяемого по (12), приведенные выкладки остаются в силе с соответствующим изменением формул (13), (14). Для каждого момента времени  $t_i$  квадрат отклонения по  $x$  будет домножен на коэффициент  $a(x_i, z_i)$ , а квадрат

отклонения по  $z$  – на  $c(x_i, z_i)$  и появится также произведение отклонений по  $x$  и  $z$  с коэффициентом  $b(x_i, z_i)$ . В результате коэффициенты в (15) в этом случае будут зависеть от координат центров множеств неопределенности  $(x_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

#### 4. Алгоритм скользящего окна

Для восстановления траектории самолета использован алгоритм перемещаемого (скользящего) окна.

Под окном понимаем совокупность из оговоренного количества подряд идущих замеров (моменты времени и геометрические положения).

Расширенным окном назовем пару, состоящую из начальной точки (начальный момент и начальное фазовое состояние) и некоторого окна. При этом начальный момент окна есть ближайший справа момент замера.

Считаем, что постоянные управления  $u$ ,  $w$  в текущем расширенном окне рассчитываются по алгоритму раздела 3. На полученной траектории выделим точки (моменты времени и фазовые состояния), которые могут стать начальными для очередного (после текущего) расширенного окна. К ним отнесем точки, соответствующие временам замеров, а также дополнительные точки на траектории, расставленные с некоторым стандартным шагом по времени начиная с момента первого замера в окне. Введение дополнительных точек объясняется возможными пропусками замеров в окне и желанием увеличить число вариантов переключения с одного управления на другое на восстанавливаемой в целом траектории. Каждой точке поставим в соответствие окно, которое начинается с момента замера, ближайшего справа к моменту данной точки. Получаем набор расширенных окон. Назовем их пробными.

Для каждого пробного окна вычисляем оптимальные постоянные управления и соответствующее значение критерия, рассчитываемого по замерам окна. Перебирая пробные расширенные окна, находим такое, для которого значение критерия минимально. Это расширенное окно и становится следующим текущим расширенным окном.

Передвигая окно по описанному правилу, строим траекторию в целом. Реализации  $u(t)$  и  $w(t)$  управляющих воздействий получаются кусочно-постоянными функциями времени.

В качестве первого расширенного окна на траектории берем окно, начинающееся с момента первого замера. Геометрические координаты первого замера принимаем за геометрические координаты начальной точки. Вектор начальной скорости рассчитывается по первым двум замерам с учетом ограничения на величину скорости. Нет необходимости в более сложных вариантах, поскольку алгоритм восстановления показал малую зависимость строящейся траектории от начальных условий.

#### 5. Тестирование алгоритма восстановления

Тестирование разработанного алгоритма восстановления проводилось на модельных и реальных примерах. Модельная траектория строилась на плоскости  $Ozx$  как траектория системы (1) при управлениях  $u(t)$  и  $w(t)$ , которые подбирались так, чтобы на траектории было несколько поворотов и участков с заметным изменением величины скорости. Считалось, что  $h^* = \alpha^* = 0$ . Выбиралась точка расположения радиолокатора. Такт поступления замеров соответствовал радиолокатору кругового обзора. Вектор ошибки измерения добавлялся к истинному положению модельной системы. Использовалось нормальное распределение вектора ошибки на плос-

Рис. 4. Общий вид трека в плоскости геометрических координат. Показаны эллипсы множеств неопределенности.

Рис. 5. Фрагмент восстановленной траектории с нижним поворотом.

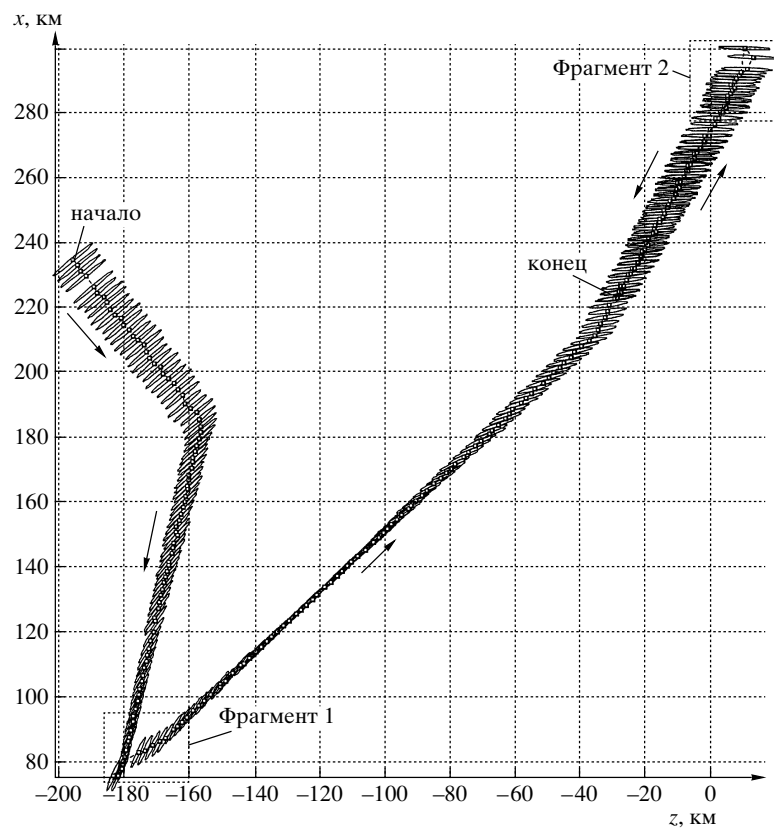


Рис. 4.

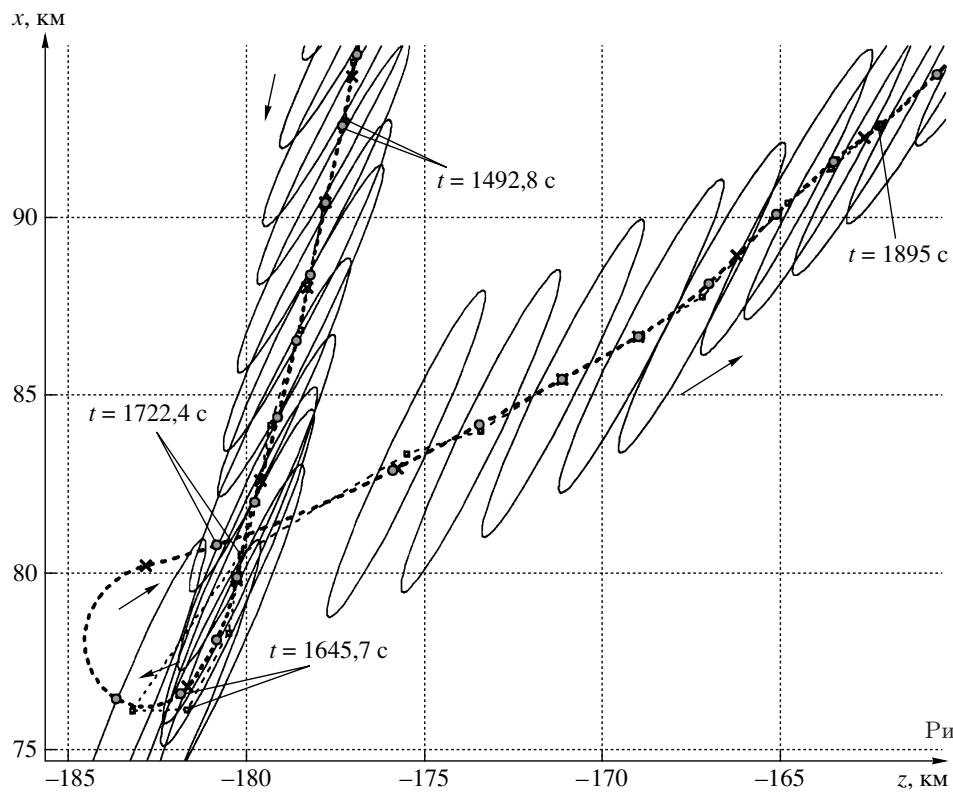


Рис. 5.

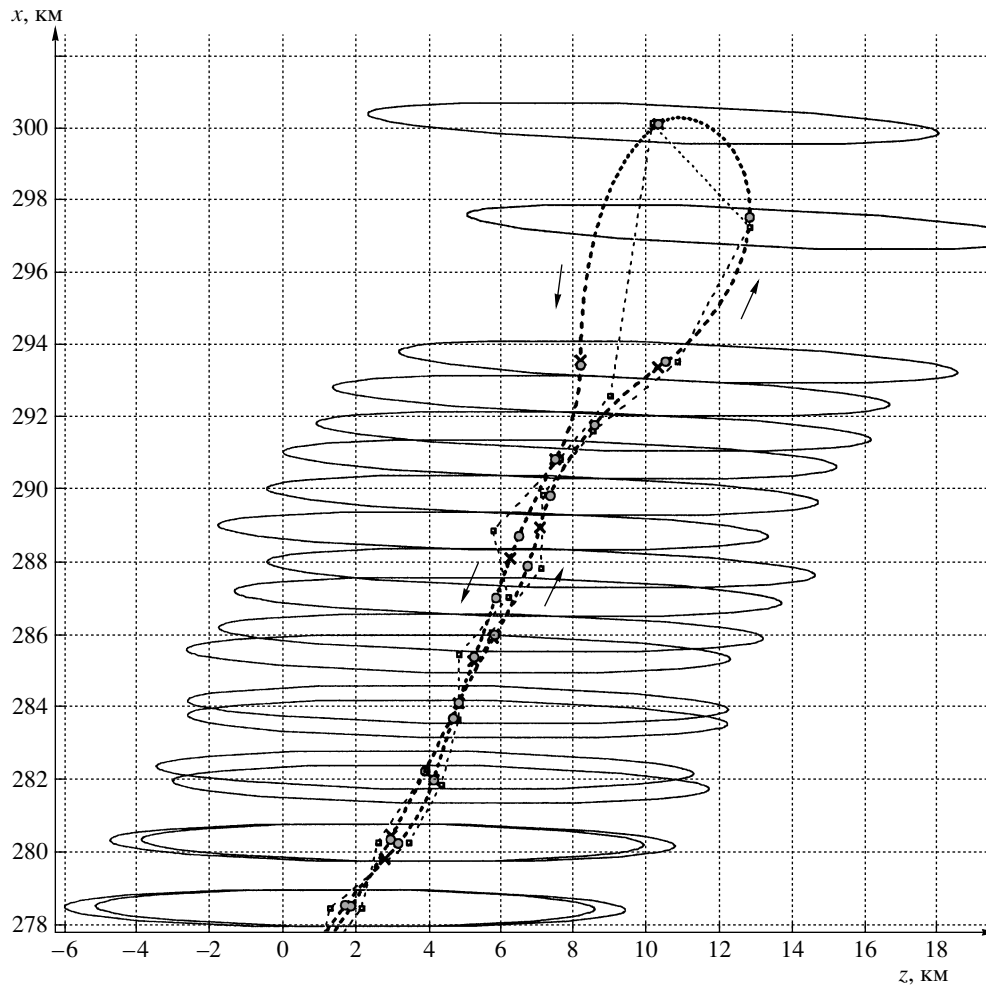


Рис. 6. Фрагмент с верхним поворотом.

кости  $Ozx$ . При этом обеспечивалось, чтобы множества уровня функции плотности вероятности представляли собой эллипсы, подобные множествам неопределенности радиолокатора и одинаково с ними ориентированные. По завершению работы алгоритма восстановления для одинаковых моментов времени сравнивались фазовые координаты на модельной и восстановленной траекториях. Проводилось также статистическое моделирование [8].

Приведем результаты восстановления реальной траектории.

Использовались следующие параметры модельной динамики:

$$[u_*, u^*] = [-7, 7] \text{ м/с}^2, \quad [w_*, w^*] = [-2, 3] \text{ м/с}^2, \quad [v_*, v^*] = [30, 330] \text{ м/с}.$$

Такт измерений геометрического положения самолета соответствовал обороту радиолокатора и составлял примерно 19 с. Имелись пропуски замеров, в основном на сложных участках движения. Точность радиолокатора по дальности  $\varepsilon_r = 500$  м, по углу  $\varepsilon_\psi = 1,5^\circ$ . Предельный угол места  $\alpha^*$  полагался равным  $60^\circ$ . Предельная высота  $h^*$  движения самолета 15000 м.

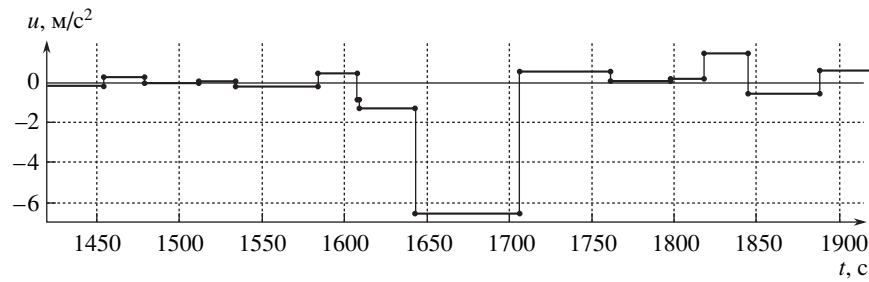


Рис. 7. Фрагмент с нижним поворотом. Боковое управление.

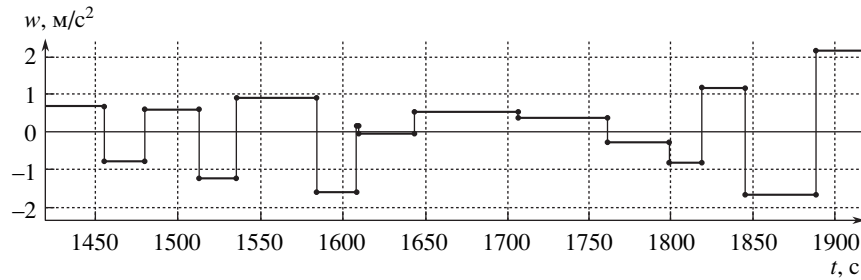


Рис. 8. Фрагмент с нижним поворотом. Продольное управление.

Поясним графические символы, используемые на рис. 4–8. На этих рисунках с траекториями показаны эллипсы множеств неопределенности. Их центры изображены маленькими квадратиками, которые соединены тонким прямолинейным пунктиром. Ориентация и размер эллипсов определяются направлением на радиолокатор, расположенный в точке (0,0), и расстоянием от него. Восстановленная траектория размечена жирным пунктиром. Крестики – положения самолета на восстановленной траектории в моменты замеров. Крестики соответствуют моментам переключения хотя бы одного из управлений  $u$ ,  $w$ .

Моделирование проводилось на ПЭВМ с процессором AMD Athlon 3000+.

Общий вид трека представлен на рис. 4. Его продолжительность по времени 5057 с. Имеются два сложных участка: разворот примерно на  $220^\circ$  в нижней части и разворот на  $180^\circ$  в верхней. На этих участках много «пропавших» замеров.

Выборка обрабатывалась при помощи окон длиной 3–5 замеров. При большей длине окна результаты на указанных трудных участках ухудшаются. Время расчета всей восстанавливаемой траектории 6,0–6,3 с, что значительно быстрее «реального» времени. Фрагменты расчетов восстановленной траектории с длиной окна 3 показаны на рис. 5 (нижний поворот, фрагмент 1) и рис. 6 (верхний поворот, фрагмент 2). Графики бокового и продольного управлений для фрагмента нижнего поворота даны на рис. 7 и 8.

Дополнительные материалы по восстановлению реальных траекторий приведены в [9].

## 6. Заключение

Рассмотренная задача восстановления траектории самолета характерна тем, что замеры геометрического положения самолета поступают через значительные промежутки времени, ошибка замера не является малой, возможны пропуски измере-

ний, причем, как правило, на ответственных участках движения. Предложенный в статье алгоритм тестирован на реальных данных, полученных от радиолокатора кругового обзора. Экспериментально установлена устойчивость восстанавливаемой траектории по отношению к малому изменению начальных данных. Пока не удалось получить теоретическую или алгоритмическую (вычисляемую по ходу процесса) оценку, характеризующую отличие восстанавливаемой траектории от неизвестной истинной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
2. Bounding approaches to system identification / Ed.: Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. London: Plenum Press, 1996.
3. *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 51–61.
4. *Кузьмин С.З.* Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. М.: Радио и связь, 1986.
5. Автоматизированные системы управления воздушным движением / Под ред. С.Г. Пятко, А.И. Красова. СПб.: Политехника, 2004.
6. Радиотехнические системы: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Под ред. Ю.М. Казаринова. М.: Изд. центр «Академия», 2008.
7. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. V. 13. № 1. P. 197–220.
8. *Бедин Д.А., Беляков А.В., Кумков С.И. и др.* Обработка и представление спутниковых замеров системы АЗН на ПЭВМ. Результаты статистического моделирования в задаче восстановления траектории самолета / Отчет по научно-экспериментальной работе. Ин-т мат. и механики УрО РАН. Екатеринбург. 2009. Материал представлен на сайте: <http://home.imm.uran.ru/sector3/otchetIMM0905/nita2009-5.html>
9. *Бедин Д.А., Беляков А.В., Кумков С.И. и др.* Пакет алгоритмов для задачи восстановления траектории самолета / Отчет по научно-экспериментальной работе. Ин-т мат. и механики УрО РАН. Екатеринбург. 2008. Материал представлен на сайте: <http://home.imm.uran.ru/sector3/otchetIMM0804/nita2008-4.html>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 02.03.2009