Aplicaciones de las ecuaciones fundamentales

Sesión 8: Ecuación de Bernoulli y Líneas de Corriente

Unidad 3: Aplicaciones de las ecuaciones fundamentales: Ecuación de Bernoulli y Líneas de Corriente

1. Derivación de la ecuación de Bernoulli

Partimos de la ecuación de Navier-Stokes (NS):

$$\frac{\rho \partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \cdot \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Usando la derivada total o derivada material:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}\,.$$

Para un fluido invíscido (no viscoso) la ecuación de NS toma la forma:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

La derivada material considera tanto la aceleración local como la aceleración convectiva del fluido.

Donde:

$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) =$ es la derivada material de la velocidad $\vec{v}$.

El término $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ representa la aceleración convectiva, donde $\vec{v} \cdot \nabla$ es la derivada direccional a lo largo del campo de velocidad.

Para un flujo estacionario, el término de aceleración local desaparece ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$). Por lo tanto, la derivada material se simplifica a:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

1. Derivación de la ecuación de Bernoulli

Entonces al lado izquierdo de la ecuación de NS nos queda solo $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ que representa la aceleración convectiva, donde $\vec{v}\cdot\nabla$ es la derivada direccional a lo largo del campo de velocidad.

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \rho\vec{g}$$

El término convectivo $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ puede reescribirse utilizando una identidad vectorial:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v}) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$$

Aquí, $\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v})$ es el gradiente del cuadrado de la magnitud de la velocidad ($|\vec{v}|^2$), y $\nabla\times\vec{v}$ es el rotacional de la velocidad, a menudo denotado como la vorticidad $\vec{\omega} = \nabla\times\vec{v}$

Sustituyendo en la ecuación de arriba: $\frac{1}{2}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v}) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = -\nabla p + \rho\vec{g}$

Reorganizando los términos y asumiendo $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ tenemos:

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = \vec{v}\times\vec{\omega}$$

$$\nabla z = \vec{e}_x\frac{\partial z}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial z}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\nabla z = \vec{e}_z$$

Donde: $\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} + \frac{p}{\rho} + gz$ es la Función de Bernoulli.

1. Lineas de corriente y la ecuación de Bernoulli

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+\frac{p}{\rho}+gz\right)=\vec{v}\times\overrightarrow{\omega}$$

Donde: $\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+\frac{p}{\rho}+gz$ es la Función de Bernoulli.

Las líneas de corriente son líneas tangentes al campo de velocidad $\vec{v}$. A lo largo de una línea de corriente, la velocidad $\vec{v}$ es paralela a la línea de corriente, y se cumple la siguiente condición:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)(\text{Función de Bernoulli})=\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\overrightarrow{\omega})=0$$

El término $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\overrightarrow{\omega})$ es cero porque $\vec{v}\times\overrightarrow{\omega}$ es perpendicular a $\vec{v}$.

$$\vec{v}\,.\,\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+\frac{p}{\rho}+gz\right)=0$$

Y como la derivada direccional en la dirección de $\vec{v}$ es $\vec{v}\,.\,\nabla$, que es tangente al campo velocidad.

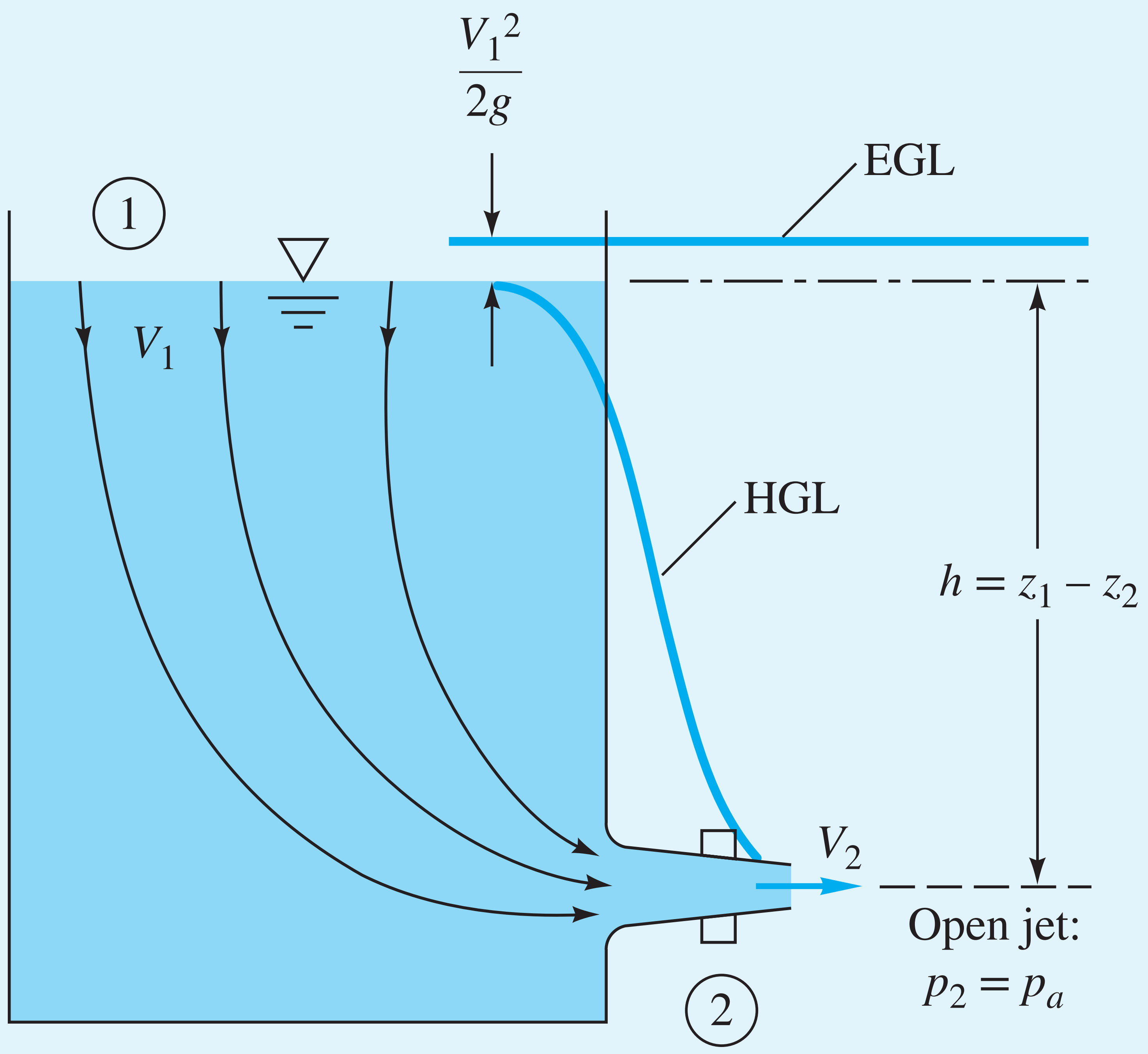
Esto implica que la función de Bernoulli es constante a lo largo de una línea de corriente:

$$\boxed{\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+\frac{p}{\rho}+gz=\text{constante}}$$

1. Aplicación de Bernoulli

EXAMPLE 3.13

Find a relation between nozzle discharge velocity V_2 and tank free surface height h as in Fig. E3.13. Assume steady frictionless flow.



Mass conservation is usually a vital part of Bernoulli analyses. If A_1 is the tank cross section and A_2 the nozzle area, this is approximately a one-dimensional flow with constant density, Eq. (3.30):

$$A_1V_1 = A_2V_2 \tag{1}$$

Bernoulli's equation (3.54) gives

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

But since sections 1 and 2 are both exposed to atmospheric pressure $p_1 = p_2 = p_a$, the pressure terms cancel, leaving

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z_2) = 2gh \tag{2}$$

Eliminating V_1 between Eqs. (1) and (2), we obtain the desired result:

$$V_2^2 = \frac{2gh}{1 - A_2^2/A_1^2} \qquad \textit{Ans.} \ (3)$$

Generally the nozzle area A_2 is very much smaller than the tank area A_1, so that the ratio A_2^2/A_1^2 is doubly negligible, and an accurate approximation for the outlet velocity is

$$V_2 \approx (2gh)^{1/2} \qquad \textit{Ans.} \ (4)$$

This formula, discovered by Evangelista Torricelli in 1644, states that the discharge velocity equals the speed that a frictionless particle would attain if it fell freely from point 1 to point 2. In other words, the potential energy of the surface fluid is entirely converted to kinetic energy of efflux, which is consistent with the neglect of friction and the fact that no net pressure work is done. Note that Eq. (4) is independent of the fluid density, a characteristic of gravity-driven flows.

Teoría

Tabla 3

Aspecto	Ecuación de Conservación de Masa	Ecuación de Difusión (Advección-Difusión)	Ecuación de Conservación de Momento
Cantidad Física	Masa (densidad ρ)	Concentración (c)	Momento ($\rho\vec{u}$)
Ecuación Principal	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0$	$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\vec{u}) = D\nabla^2 c$	$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\vec{u}\, dV = \int_V \rho\vec{F}\, dV + \int_A \vec{R}\, dS$
Forma Diferencial	Igual a la anterior	Igual a la anterior	$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{F}$
Términos Clave	• $\frac{\partial \rho}{\partial t}$: Tasa de cambio de densidad • $\nabla \cdot (\rho\vec{u})$: Flujo neto de masa	• $\frac{\partial c}{\partial t}$: Tasa de cambio de concentración • $D\nabla^2 c$: Difusión	• $-\nabla p$: Gradiente de presión • $\mu\nabla^2\vec{u}$: Viscosidad • $\rho\vec{F}$: Fuerza de cuerpo
Principio de Conservación	Conservación de masa	Conservación de un escalar (e.g., masa de especie)	Conservación de momento
Término Difusivo	Ninguno	$D\nabla^2 c$ (difusión de concentración)	$\mu\nabla^2\vec{u}$ (difusión de momento)
Rol de la Velocidad $\vec{u}$	Determina el transporte de masa	Es proporcionada externamente	Determinada por la ecuación; representa el movimiento del fluido
Contexto Físico	Garantiza la continuidad de masa	Modela transporte escalar (e.g., dispersión de contaminantes)	Describe el movimiento del fluido bajo fuerzas
Ejemplo de Aplicación	Flujo en una tubería	Dispersion de aerosoles en la atmósfera	Flujo de fluido alrededor de un perfil aerodinámico

Diccionario

- Estratificación
- Turbulencia
- Linea de corriente
- Volumen de control y material
- Ecuaciones de Navier Stokes
- Ecuaciones Governantes
- Ecuacion hidrostatica
- Centro de presión

Actualización de la práctica dirigida

Final de la sesión.