LINGUAGENS REGULARES - EXPRESSÕES REGULARES

Prof. Alexandre Agustini
alexandre.agustini@pucrs.br

Material original desenvolvido pelos profs. Júlio Machado, Renata Vieira, Alexandre Agustini e outros

Linguagens Regulares - definição

(Linguagens Regulares) Seja Σ um alfabeto. Então uma linguagem regular sobre Σ é definida de acordo com o as seguintes regras (definição indutiva):

1. Base: $\varnothing$, $\{\varepsilon\}$ e $\{a\}$ são linguagens regulares, para todo $a \in \Sigma$.
2. Indução: Se L e M são linguagens regulares, então as seguintes linguagens são também regulares: $L \cup M$, LM, L^* (união, concatenação e concatenação sucessiva).

Exemplos de linguagens regulares

Exemplos de Linguagens Regulares

- $\{\varepsilon, 1\} = \{\varepsilon\} \cup \{1\}$.
- $\{0,01\} = \{0\}\{\varepsilon,1\}$.
- $\{\varepsilon,1,11,\ldots,1^n,\ldots\} = \{1\}^*$
- $\{0,01,011,\ldots,01^n,\ldots\} = \{0\}\{1\}^*$
- $\{\varepsilon,0,1,00,11,\ldots,0^n,1^n,\ldots\} = \{0\}^* \cup \{1\}^*$

Expressões Regulares (ER)

- Linguagens Regulares podem ser descritas de forma algébrica por expressões regulares.
- O significado de uma expressão regular é uma Linguagem Regular.

Expressões Regulares (ER)

- **Conceito**

  Seja Σ um alfabeto.

  Então, expressões regulares sobre Σ são definidas de acordo com as seguintes regras (definição indutiva):
  1. Base: ε, $\varnothing$ e a são expressões regulares para todo $a \in \Sigma$.
  2. Indução: se R e S são expressões regulares então as seguintes expressões também são regulares: (R), $R+S$, RS e R^*.

Exemplos de expressões regulares

Assumindo $\Sigma = \{0,1\}$, as seguintes expressões são regulares sobre Σ : ε, $\varnothing$, 0, 1, ε+1,1*, 0+(10), (0+1)0, 01*, 0*+1*.

- Para evitar parênteses em excesso, assumimos a seguinte ordem de prioridade:
  1. concatenação sucessiva (liga mais forte)
  2. concatenação
  3. união (liga mais fraco)
- Por exemplo, a expressão 0+10*, pode ser escrita com todos os parênteses da seguinte forma: (0+(1(0*))).

Semântica de expressões regulares

(Computação de Linguagem Regular) Seja ∑ um alfabeto. Para cada expressão regular *R* sobre ∑, podemos associar a linguagem regular *L*(*R*) associada a *R*, da seguinte forma:

1. $L(\varnothing) = \varnothing$
2. $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
3. $L(a) = \{a\}$, para todo $a \in \Sigma$
4. $L(R+S) = L(R) \cup L(S)$
5. $L(RS) = L(R)L(S)$
6. $L(R^*) = L(R)^*$

Linguagem de uma expressão regular

$L(0+12^*)$	$= L(0) \cup L(12^*)$	(4)
	$= \{0\} \cup (L(1)L(2^*))$	(3,5)
	$= \{0\} \cup (\{1\}L(2)^*)$	(3,6)
	$= \{0\} \cup (\{1\}\{2\}^*)$	(3)
	$= \{0\} \cup (\{1\}\{\varepsilon, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\})$	(def. de L*)
	$= \{0\} \cup \{1, 12, 12^2, \ldots, 12^n, \ldots\}$	(def. L1L2)
	$= \{0, 1, 12, 12^2, \ldots, 12^n, \ldots\}$	(def. de ∪)

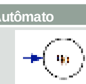
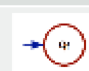
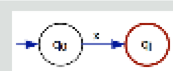
ER	Linguagem Gerada ???
aa	
ba*	
(a + b)*	
(a + b)*aa(a + b)*	
a*ba*ba*	
(a + b)*(aa + bb)	
(a + ε)(b + ba)*	

ER	Linguagem Gerada
aa	somente a palavra aa
ba*	todas as palavras que iniciam por b, seguido por zero ou mais a
(a + b)*	todas as palavras sobre { a, b }
(a + b)*aa(a + b)*	todas as palavras contendo aa como subpalavra
a*ba*ba*	todas as palavras contendo exatamente dois b
(a + b)*(aa + bb)	todas as palavras que terminam com aa ou bb
(a + ε)(b + ba)*	todas as palavras que não possuem dois a consecutivos

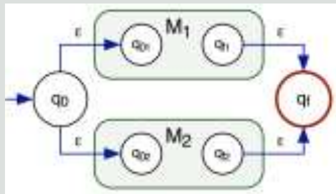
Linguagem gerada pela ER (a+b)*(aa + bb)

- a e b denotam {a} e {b}, respectivamente
- a+b denota {a} ∪ { b } = { a, b }
- (a + b)* denota { a, b }*
- aa e bb denotam { a } { a } = { aa } e { b } { b } = { bb }, respectivamente
- (aa + bb) denota { aa } ∪ { bb } = { aa, bb }
- (a + b)*(aa + bb) denota { a, b }* { aa, bb }
- Portanto, *L*((a + b)*(aa + bb)) é { aa, bb, aaa, abb, baa, bbb, aaaa, aabb, abaa, abbb, baaa, babb, bbaa, bbbb,… }

Conversão: ER → AFNε

Expressão Regular	Autômato
∅	
ε	
x (onde x ∈ Σ)	

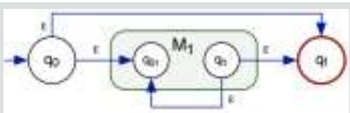
Conversão: ER → AFNε

Expressão Regular	Autômato
R_1+R_2	

Conversão: ER → AFNε

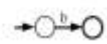
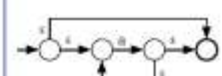
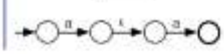
Expressão Regular	Autômato
R_1R_2	

Conversão: ER → AFNε

Expressão Regular	Autômato
R_1*	

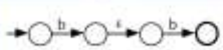
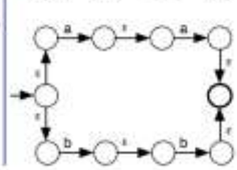
Conversão: ER → AFNε

Exemplo: AFN a partir da ER a*(aa + bb)

ER	AFNε
a	
b	
a*	
aa	

Conversão: ER → AFNε

Exemplo: AFN a partir da ER a*(aa + bb) (cont.)

ER	AFNε
bb	
(aa + bb)	

- Autômato resultante: a*(aa + bb)