TEMA 1
ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN LINEALES Y NO LINEALES

Objetivo

El alumno identificará las ecuaciones diferenciales como modelo matemático de fenómenos físicos y geométricos y resolverá ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definición: Ecuación

Una ecuación es una proposición matemática que involucra una igualdad entre dos expresiones las cuales contienen uno o varios términos indefinidos. Estos términos son expresiones, comúnmente llamadas incógnitas, que pueden representar un número, un vector, una matriz, una función, etc.

Definición: Ecuación Diferencial

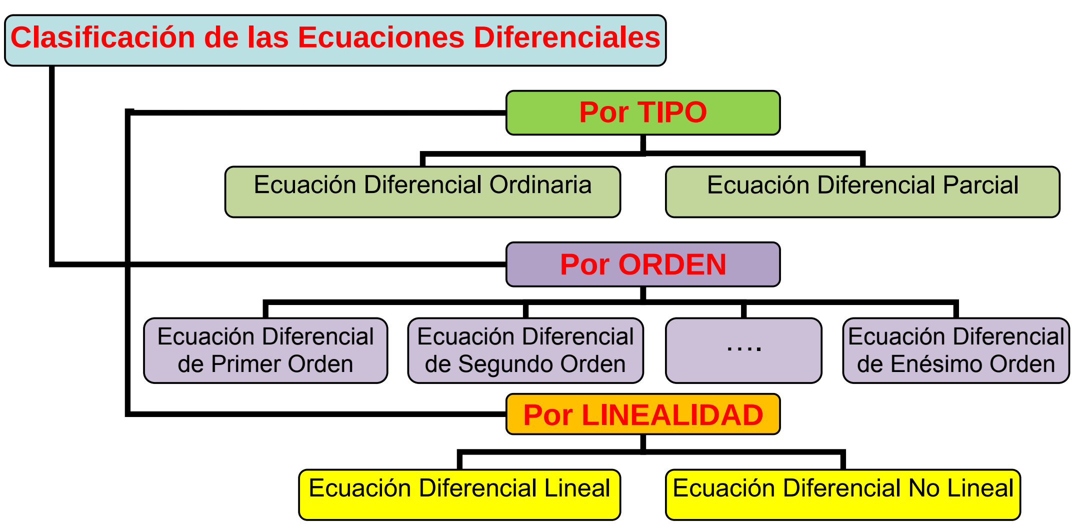
Una ecuación diferencial "ED" es una ecuación en la que se relaciona una variable independiente, una variable dependiente y alguna(s) de sus derivadas.

- A la variable dependiente también se le conoce como función incógnita.
- Al resolver la ecuación diferencial, se encuentra la función incógnita.
- Una forma de expresar las ecuaciones diferenciales de forma general es:

$$F\left(x\ ,\ y\ ,\ \frac{dy}{dx}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0$$

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Las ED pueden clasificarse de tres formas:



Clasificación por Tipo

Definición: Ecuación Diferencial Ordinaria "EDO"

Una ecuación diferencial es una ecuación diferencial ordinaria si la función incógnita depende únicamente de una sola variable independiente.

Definición: Ecuación Diferencial Parcial "EDP"

Una ecuación diferencial es una ecuación diferencial parcial si la función incógnita depende de dos o más variables independientes.

Ejercicio # 1

Catalogar las siguientes ecuaciones diferenciales mencionando si son ecuaciones diferenciales ordinarias ó parciales. Además mencionar sus variables dependientes e independientes.

	Ecuación Diferencial	V.I.	V.D.	EDO	EDP
a)	$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$				
b)	$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 6x = 0$				
c)	$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta u}{\delta y} = 0$				
d)	$2\frac{\delta r}{\delta s} = 1 - \frac{\delta r}{\delta t}$				

Solución:

	Ecuación Diferencial	V. I.	V. D.	EDO	EDP
a)	$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$	x	y	Si	No
b)	$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 6x = 0$	t	x	Si	No
c)	$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta u}{\delta y} = 0$	x, y	u	No	Si
d)	$2\frac{\delta r}{\delta s} = 1 - \frac{\delta r}{\delta t}$	s, t	r	No	Si

Clasificación por Orden

Definición: Orden de una Ecuación Diferencial

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

- ED de Primer Orden: $F\left(x\,,\,y\,,\,y'\right)=0$
- ED de Segundo Orden: $F\left(x\,,\,y\,,\,y',\,y''\right)=0$
- ED de Tercer Orden: $F\left(x\,,\,y\,,\,y',\,y'',\,y'''\right)=0$
- ED de Enésimo Orden: $F\left(x\,,\,y\,,\,y'\,,\dots,\,y^{n}\right)=0$

Definición: Grado de una Ecuación Diferencial

El grado de una ecuación diferencial es la potencia a la cual esta elevada la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ED esté dada en forma polinomial.

Ejercicio # 2

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales en cuanto a orden y grado.

	Ecuación Diferencial	Orden	Grado
a)	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = \frac{e^x}{x}$		
b)	$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5x = 0$		
c)	$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$		
d)	$2\frac{\delta r}{\delta s} = 1 - \frac{\delta r}{\delta t}$		

Solución:

	Ecuación Diferencial	Orden	Grado
a)	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = \frac{e^x}{x}$	1	3
b)	$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5x = 0$	3	1
c)	$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta u}{\delta y} = 0$	2	1
d)	$2\frac{\delta r}{\delta s} = 1 - \frac{\delta r}{\delta t}$	1	1

Clasificación por Linealidad

Ecuación Diferencial Lineal

Debe cumplir con todas y cada una de las siguientes características:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado y no aparecen como argumento de funciones trascendentes.
- Cada coeficiente de la variable dependiente y sus derivadas depende solamente de la variable independiente (o también pueden ser constantes).
- No existen productos entre la variable dependiente y sus derivadas.

Ecuación Diferencial No Lineal

Son aquellas que no cumplen por lo menos una de las características de una ecuación diferencial lineal.

Ejercicio # 3

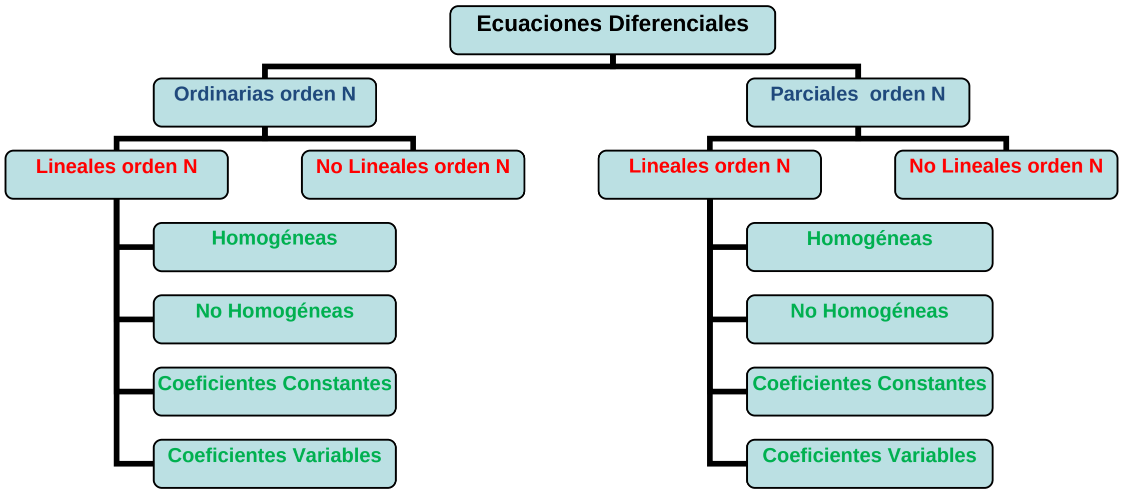
Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales.

	Ecuación Diferencial	V. I.	V. D.	EDL
a)	$2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-5y=0$			
b)	$\frac{d^3x}{dt^3}-t\frac{dx}{dt}+6x=e^t$			
c)	$4y^{IV}-3y'''+y''-5y'=xy$			
d)	$y'''+\frac{1}{x}y''=y'y$			

Solución:

	Ecuación Diferencial	V. I.	V. D.	EDL
a)	$2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-5y=0$	x	y	Sí
b)	$\frac{d^3x}{dt^3}-t\frac{dx}{dt}+6x=e^t$	t	x	Sí
c)	$4y^{IV}-3y'''+y''-5y'=xy$	x	y	Sí
d)	$y'''+\frac{1}{x}y''=y'y$	x	y	No

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales



Soluciones de una Ecuación Diferencial

Definición: Solución de una Ecuación Diferencial

La solución de una ecuación diferencial con función desconocida “y” y variable independiente “x” en un intervalo “I” es una función φ(x) que satisface la ecuación diferencial para todos los valores de x en el intervalo.

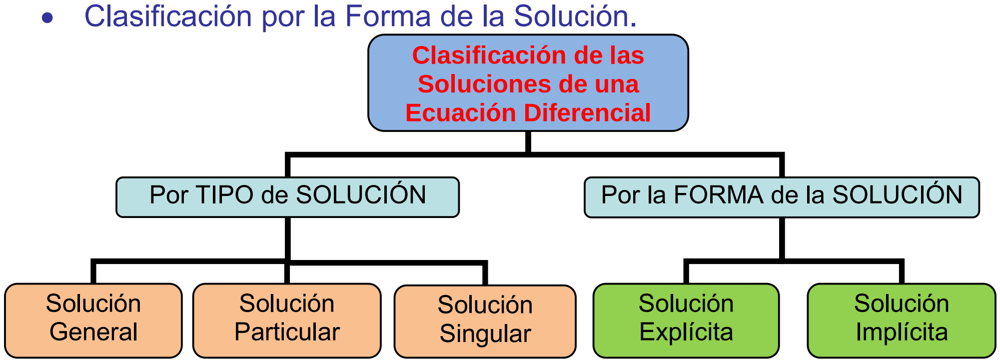
Ejercicio # 4

Mostrar que $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}y = 0$ en el intervalo $x \neq 0$.

Tipos de Soluciones de una Ecuación Diferencial

Para las soluciones de las ecuaciones diferenciales trabajamos dos clasificaciones:

- Clasificación por Tipo de Solución
- Clasificación por la Forma de la Solución.



Clasificación por Tipo de Solución

Definición: Solución General de una Ecuación Diferencial

Una solución general de una ecuación diferencial es una solución de tipo genérico expresada con uno o más parámetros arbitrarios, los cuales corresponden en número, al orden de la ecuación diferencial. También se le conoce como la familia de soluciones de una ecuación diferencial, ó gráficamente, como la familia de curvas solución de la ecuación diferencial.

Definición: Solución Particular de una Ecuación Diferencial

Es una solución de una ecuación diferencial que esta libre de parámetros arbitrarios. Las soluciones particulares se obtienen de la solución general en base a condiciones asignadas al problema en cuestión, es decir, en base a las condiciones se da un valor a los parámetros arbitrarios obteniendo una solución particular que debe satisfacer tanto las condiciones, como a la ecuación diferencial. Gráficamente, una solución particular es una curva que pertenece a la familia de soluciones de la ecuación diferencial.

Definición: Solución Singular de una Ecuación Diferencial

A veces una ecuación diferencial posee una solución que no es un miembro de una familia de soluciones de la ecuación, es decir, una solución que no se puede obtener al especificar alguno de los parámetros de la familia de soluciones; a esta clase de solución extra se le llama solución singular.

Ejercicio # 5

a) Obtenga la ecuación diferencial que tiene por solución general a $y=(x-c)^2-1$, donde c=constante
b) Determine cuales de las siguientes funciones son solución de la ecuación obtenida, indicando, en su caso, que tipo de solución es.

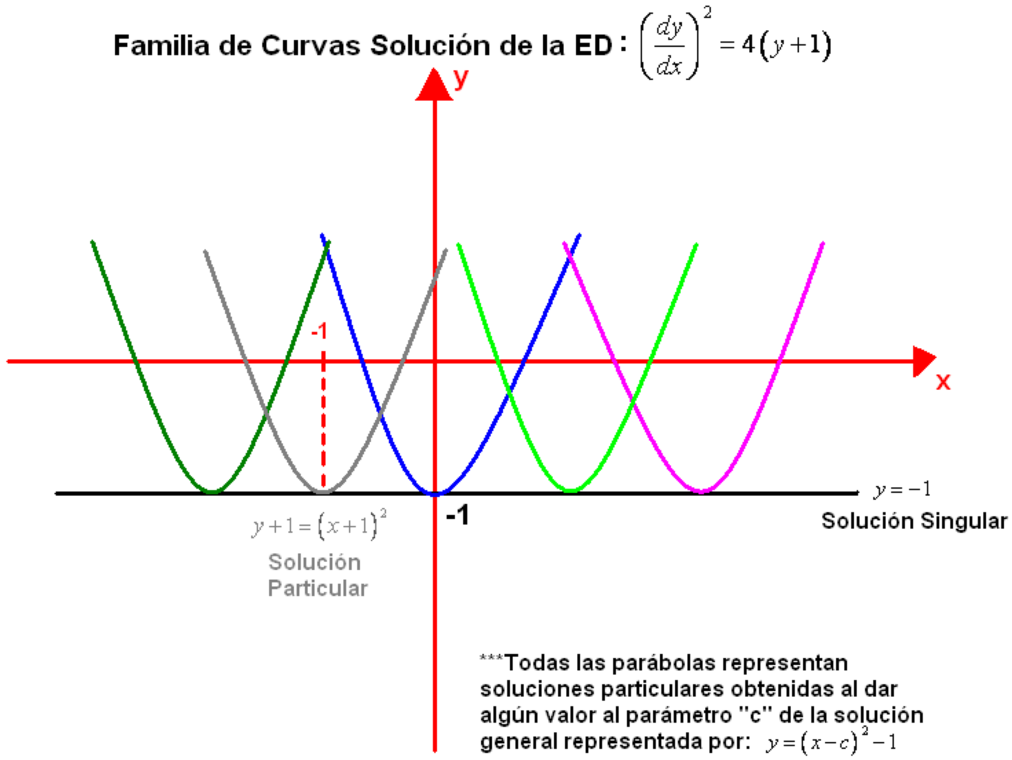
$$y_1 = x^2 \quad ; \quad y_2 = -1 \quad ; \quad y_3 = x^2 + 2x$$

Solución:

- a) La ecuación diferencial es $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(y+1)$
- b) * y1 no es solución
  * y2 es Solución Singular.
  * y3 es Solución Particular.

……….. ¿Pero qué pasa gráficamente?

Veamos:



Definición: Infinidad de Soluciones de una Ecuación Diferencial

Una sola ecuación diferencial puede poseer un número infinito de soluciones que corresponden al número ilimitado de elecciones para los parámetros arbitrarios.

<u>Clasificación por la Forma de la Solución</u>

Definición: Solución Explícita de una Ecuación Diferencial

Una solución explícita de una ecuación diferencial es una función φ(x) tal que al sustituirla en lugar de "y" en la ecuación diferencial, satisface la ecuación para toda "x" en un intervalo "I". Ésta solución se caracteriza porque en ella tenemos a la variable dependiente despejada.

Definición: Solución Implícita de una Ecuación Diferencial

Se dice que una relación G(x, y)=0 es una solución implícita de una ecuación diferencial en el intervalo "I" si define una o más soluciones explícitas en "I". Ésta solución se caracteriza porque en ella NO tenemos a la variable dependiente despejada.

Ejercicio # 6

Mostrar que la relación $y^2 - x^3 + 8 = 0$ define de manera implícita una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$ en el intervalo $(2, \infty)$.

.**Solución**:

- Es implícita porque define 2 soluciones explicitas $y_1 = \sqrt{x^3 - 8}$ y $y_2 = -\sqrt{x^3 - 8}$ en el intervalo $(2, \infty)$.