

IN SEARCH OF COVID-19 TRANSMISSION THROUGH AN INFECTED PREY, AN OVERVIEW

Leonardo Daniel Artilles Montero

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Jackson Claudio Vera Pineda

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Rodrigo Mederos González

Grupo C211
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Roger Fuentes Rodríguez

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

Kevin Manzano Rodríguez

Grupo C212
Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana. Cuba

“El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma. O quizás, uno que no se iba a formar, se forma.”
— Edward Lorentz

RESUMEN

Este artículo considera un modelo dinámico no lineal de un ecosistema, que se ha establecido al combinar el modelo clásico de Lotka-Volterra con el modelo clásico SIR. Este sistema no lineal consta de un depredador generalista que subsiste de dos especies de presas en las que la enfermedad se está volviendo endémica en una de ellas. Los métodos de análisis dinámico demuestran que el sistema tiene un atractor caótico y un comportamiento de multiestabilidad extrema, donde existen infinitos atractores que coexisten bajo ciertas condiciones.

La aparición de multiestabilidad extrema demuestra la alta sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales, lo que significa que los cambios minúsculos en las especies de presas originales podrían agrandarse y extenderse, y eso podría confirmarse mediante el estudio de la complejidad de las series de tiempo de

las variables del sistema. Los resultados de simulación del algoritmo de entropía de muestra indican que los cambios en las variables del sistema se expanden con el tiempo.

Ahora es razonable considerar que la endemia en las especies de presas del sistema podría evolucionar para convertirse en una pandemia como la COVID-19. En consecuencia, nuestros resultados podrían proporcionar una previsión sobre la imprevisibilidad del brote de COVID-19 en su especie huésped original, así como después de la transmisión a otras especies, como los humanos.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos centramos en el artículo "In search of COVID-19 transmission through an infected prey" (En busca de la transmisión de COVID-19 a través de una presa infectada) escrito por los investigadores Hayder Natiq y Asit Saha, publicado en el 2022 por la reconocida editorial EDP Sciences y Springer-Verlag GmbH Germany, una rama de Springer Nature. Este artículo fue recibido en septiembre de 2021, aceptado en diciembre del mismo año y publicado en línea el 16 de marzo de 2022. La revista donde se publicó este trabajo tiene un elevado factor de impacto, lo que refuerza la calidad y relevancia del estudio presentado.

Este artículo presenta un interesante enfoque analítico y teórico sobre el estudio de la transmisión de enfermedades, concretamente del virus SARS-CoV-2, causante de la COVID-19, a través de la interacción predador-presa en los ecosistemas. Para ello, Natiq y Saha se apoyaron en la construcción y análisis de un modelo dinámico no lineal del ecosistema, que combina los elementos del clásico modelo Lotka-Volterra con el modelo SIR, reconocidos en el ámbito de la biología de poblaciones y epidemiología, respectivamente.

El principal problema que los autores proponen resolver es entender cómo cambios pequeños en las especies de presas pueden tener un efecto significativo y generalizado en la transmisión de enfermedades, específicamente la COVID-19. Esta problemática es relevante dada la interconexión entre las especies y la facilidad con la que los patógenos pueden saltar entre diferentes especies.

Natiq y Saha utilizan métodos de análisis dinámicos para demostrar la existencia de un atractor caótico y un comportamiento de multiestabilidad extrema en el sistema. Esta multiestabilidad muestra la alta sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales, lo que sugiere que cambios minúsculos en las especies de presas pueden ampliarse y extenderse. Los resultados de simulación del algoritmo de entropía de muestreo indican que los cambios en las variables del sistema se expanden con el tiempo, lo que lleva a la conclusión de que una endemia en las especies de presa del sistema podría evolucionar hasta convertirse en una pandemia, como sucedió con la COVID-19.

Este artículo brinda una valiosa perspectiva sobre la imprevisibilidad de los brotes de enfermedades, como la COVID-19, tanto en sus especies huésped originales como después de su transmisión a otras especies, como los humanos. Sin duda, este trabajo contribuye al entendimiento del complejo problema que representa el salto inter-especies de patógenos y su impacto en la salud global.

Formulación del problema:

Se propone un modelo dinámico 4D de un ecosistema que consiste en un depredador generalista que subsiste en dos especies, en las que, en una de ellas, una enfermedad se está volviendo endémica. Generalmente, una enfermedad puede propagarse de una presa infectada a los humanos cuando la infección se generaliza en las especies de presa. Considerando que la COVID-19, se generalizó entre las especies presa del ecosistema, entonces la transmisión hacia los humanos pudo haber ocurrido de dos formas: por el consumo de una presa infectada, o por contacto directo a través de un huésped intermedio.

Con esto en mente, el modelo se establece combinando los clásicos modelos de Lotka-Volterra (o presa-depredador) y SIR, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - Rx_1x_2 - ax_1x_4 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= Rx_1x_2 - ax_2x_4 - x_2 \\
 \frac{dx_3}{dt} &= bx_3 - acx_3x_4 \\
 \frac{dx_4}{dt} &= d(x_1 + x_2 + x_3)x_4 - dx_4
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Donde a, b, c, d, R son parámetros constantes positivos que determinan la dinámica del sistema: a : representa la tasa de crecimiento natural de las especies de presa

b : representa la tasa de recuperación de la especie de presa infectada. c : representa la tasa de inmunidad de las especies de presa. d : representa la tasa de crecimiento de la población de depredadores (o la tasa de mortalidad de las especies de presa). R : representa la tasa de transmisión de la enfermedad entre las especies presa. x_1, x_2, x_3, x_4 son las variables de estado que representan las poblaciones saludables de la especie de presa susceptible (x_1), las poblaciones infectadas de la especie de presa (x_2), las poblaciones inmunes de la especie de presa (x_3), y la población de depredadores (x_4).

$$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \frac{dx_4}{dt}$$

Representan la tasa de cambio con respecto al tiempo de las poblaciones de las especies de presa susceptibles, infectadas, inmunizadas, y de los depredadores, respectivamente.

Los valores específicos de a, b, c, d y R dependerán del sistema ecológico específico que se está modelando y de los detalles específicos de la interacción entre las especies de presa y los depredadores.

Equilibrio y Estabilidad

Haciendo cero el miembro izquierdo del sistema de ecuaciones, obtenemos el sistema homogéneo asociado al sistema no lineal cuyas soluciones serían los puntos de equilibrio del sistema original. Efectivamente se obtienen los siguientes puntos:

$$\begin{aligned}
 E_1(0, 0, 0, 0) \\
 E_2(1, 0, 0, 1) \\
 E_3(0, 0, 1, \frac{b}{ac}) \\
 E_4(\frac{1}{R}, \frac{a}{R}, 0, 0) \\
 E_5(\frac{b+c}{Rc}, \frac{ac-b}{Rc}, \frac{b}{ac}, \frac{R-a-1}{R})
 \end{aligned}$$

Al linealizar el sistema con valores arbitrarios de puntos de equilibrio $E_i(x, y, z, w)$ se obtiene la siguiente matriz de Jacobianos:

$$J_{E_i} = \begin{pmatrix} a - Ry - aw & -Rx & 0 & -ax \\ Ry & Rx - aw - 1 & 0 & -aw \\ 0 & 0 & b - acw & -acz \\ dw & dw & dw & d(x + y + z) + d \end{pmatrix}$$

Con $i = 1, 2, 3, 4$, se sustituyen por los valores de cada punto de equilibrio y se calculan los valores propios del Jacobiano para cada punto. O sea, efectuando $|J_{E_i} - \lambda Id| = 0$ obtenemos los siguientes resultados: Los valores propios del sistema para E_1 están dados por: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = b$, $\lambda_4 = -d$ de donde E_1 es un punto de ensilladura.

Los valores propios del sistema para E_2 están dados por:

$$\lambda_1 = R - a - 1, \lambda_2 = b - ac, \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{ad}$$

de donde E_2 es un punto de equilibrio inestable para $R - a > 1$ o $b > ac$. O sea cuando al menos un valor propio tiene parte real positiva.

Los valores propios del sistema para E_3 están dados por: $\lambda_1 = a - \frac{b}{c}$, $\lambda_2 = -1 - \frac{b}{c}$, $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{bd}$ luego E_3 es inestable para $a > \frac{b}{c}$.

Los valores propios del sistema para E_4 están dados por:

$$\lambda_1 = b, \lambda_2 = d\left(\frac{R + a - 1}{R}\right), \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{a}$$

por tanto E_4 es evidentemente inestable.

Para la ecuación E_5 se utilizó el criterio de Routh-Hurwitz. Este establece que la estabilidad de un sistema dinámico se puede conocer sin calcular los valores propios, sino que el número de raíces (soluciones) de la ecuación característica que tienen partes reales positivas (lo que indica inestabilidad en el sistema) es igual al número de cambios de signo en los coeficientes de la primera columna de la matriz Routh-Hurwitz que construyes a partir de la ecuación característica. En términos más sencillos, nos permite evaluar la estabilidad de un sistema de control contando cuántas veces los coeficientes en una matriz especial cambian de signo. De ahí que las partes reales de los valores propios correspondientes tienen signos positivos y negativos, de donde E_5 es inestable.

Regiones Caóticas

De los cinco puntos de equilibrio analizados se puede afirmar que siempre al menos tres de ellos son inestables, por tanto hay alta posibilidad de comportamiento caótico en el sistema. Los sistemas caóticos son muy sensibles a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos iniciales dan lugar a resultados totalmente diferentes. Otra conclusión arribada del análisis de estabilidad es que, en caso de presencia de atractor caótico, dicho atractor es autogenerado. Esto se explica en que, por definición, su cuenca de atracción está conectada con un equilibrio inestable, como es el caso de este sistema, y lo lleva a un estado de oscilación. En presencia de caos dos órbitas asociadas a dos condiciones iniciales infinitamente cercanas podrían alejarse exponencialmente rápido en un corto período de tiempo. Una herramienta que permite estimar este comportamiento es el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov, pues cuando existe un exponente característico de Lyapunov positivo obtendremos que la órbita es caótica. Esta es la razón por la que se emplean frecuentemente como detector de caos. En el artículo se analizan los exponentes de Lyapunov mediante variación de dos parámetros, simultáneamente para una mejor visión de las regiones de caos en el sistema. Las gráficas muestran las regiones caóticas del sistema para las condiciones iniciales (1,1,1,1) con dos parámetros variando. Las barras de colores se refieren a los valores máximos de los exponentes de Lyapunov.

Las imágenes nos evidencian cómo en las regiones de caos (las más coloridas), a pequeñas variaciones de los parámetros en cuestión, se generan abruptos cambios en los valores de los coeficientes, y por tanto,

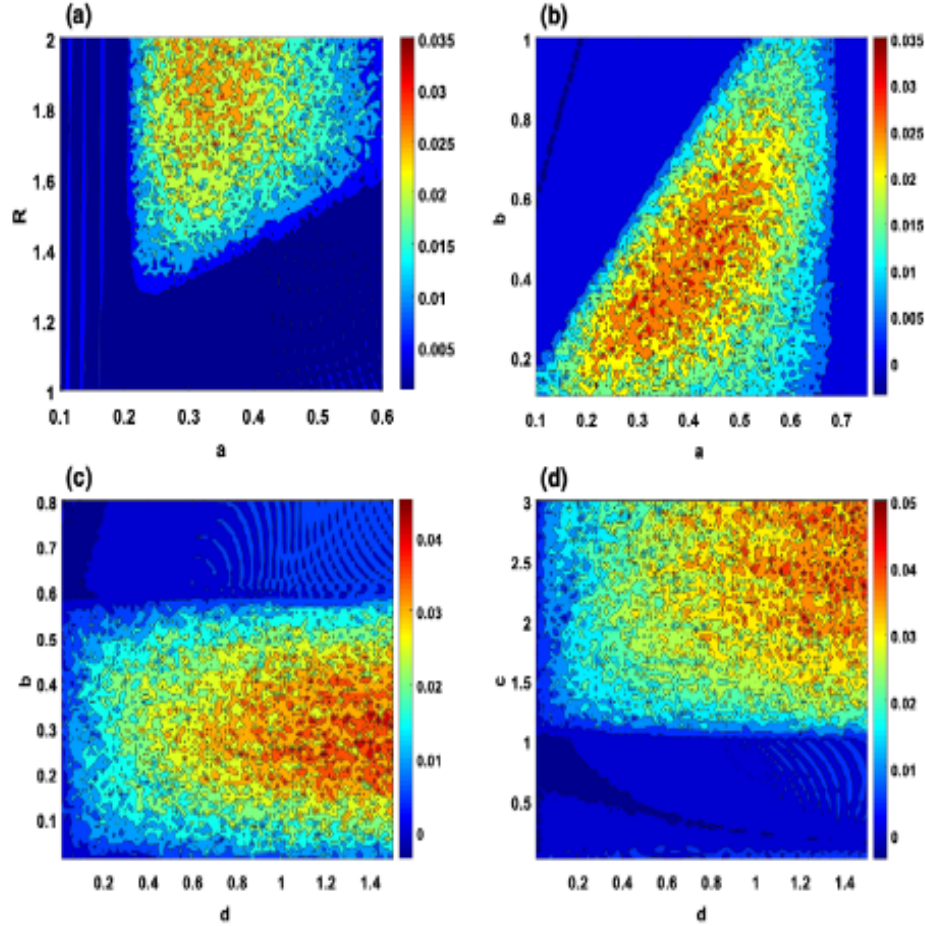


Fig 1

la sensibilidad del sistema a la fluctuación. Sin embargo, podemos observar además que existen regiones en las cuales, el sistema no presenta caos, dos distintos comportamientos para un mismo conjunto de condiciones iniciales.

Comportamiento de Multiestabilidad extrema:

En la sección anterior, hemos demostrado que el sistema 1 muestra atractores caóticos y atractores no caóticos. Estos dos comportamientos diferentes aparecen con solo un conjunto específico de condiciones iniciales. De hecho, iniciar desde un solo conjunto de valores iniciales puede no dar una imagen completa sobre la dinámica de un sistema caótico. Por lo tanto, esta sección investiga la dinámica del sistema 1 a través de la elección aleatoria de varios conjuntos de condiciones iniciales en los que se examinan las regiones caóticas y no caóticas del sistema con estos conjuntos de condiciones iniciales.

Cuando los parámetros del sistema 1 son seleccionados como $a = 0,3$; $b = 0,4$; $c = 2$; $d = 0,3$ y R un parámetro de control tal que $1,26 \leq R \leq 1,32$, el diagrama de bifurcación de la variable de estado x_1 y MLE son representados en Fig. 2a, b respectivamente. En esta figura elegimos 9 diferentes conjuntos de condiciones iniciales para examinar las regiones caóticas y no-caóticas del sistema. Como se puede observar en la figura. 2 el sistema muestra comportamientos de multiestabilidad extrema en los cuales la coexistencia de 9 diferentes atractores cuasi-periódicos ocurrió principalmente en el rango $1,26 \leq R \leq 1,3$. Mientras tanto, la coexistencia de varios atractores caóticos y cuasi-periódicos aparece para $R \in (1,3, 1,32]$.

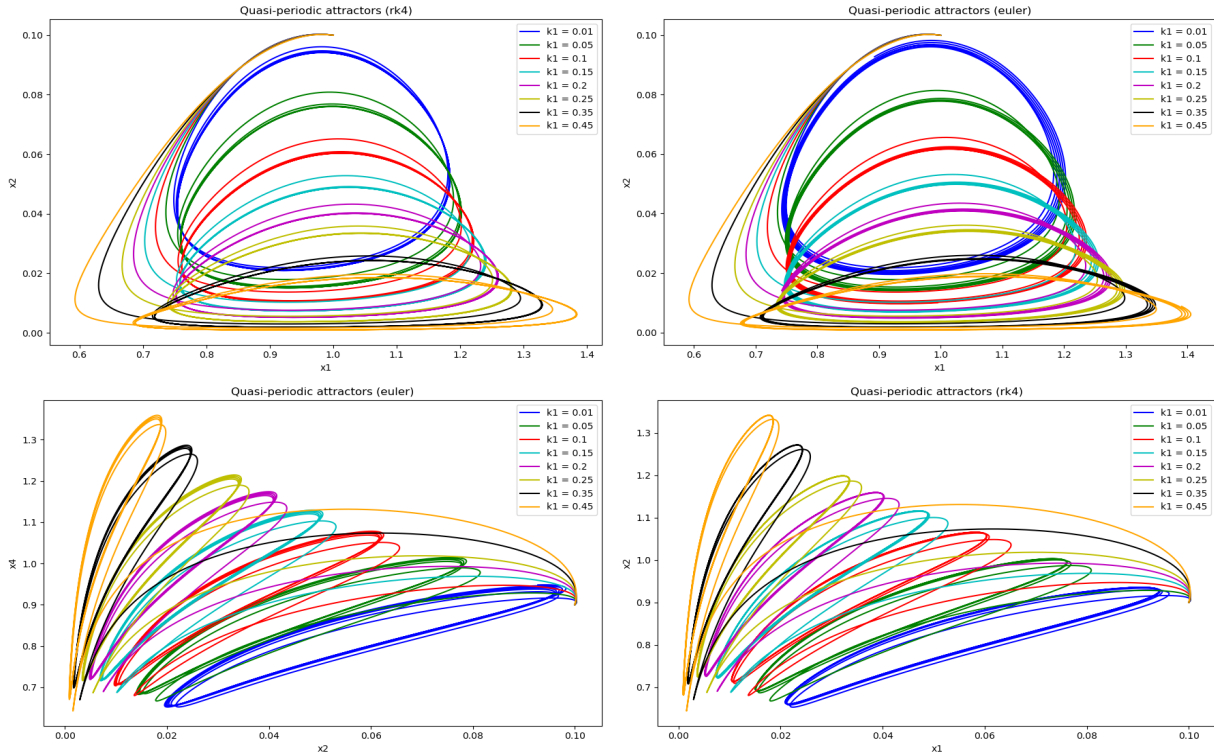


Fig 3 Atractores cuasi-periódicos del sistema 1 para $a = 0,3$; $b = 0,4$; $c = 2$; $d = 0,3$; $R = 1,3$ y con nueve condiciones iniciales diferentes $(1;0,1;k_1;0,9)$, donde $k_1 = 0,01$; $0,05$; $0,1$; $0,15$; $0,2$; $0,25$; $0,35$; $0,45$: a) y b) retratos de fase de una coexistencia infinita de atractores cuasi-periódicos;

Para ilustrar aún más el caso de la coexistencia de atractores cuasi-periódicos, representamos los retratos de fase y las series temporales del sistema para $R = 1,3$, como se muestra en la Fig 3. La coexistencia de nueve atractores cuasi-periódicos es bastante clara en la serie temporal de la variable de estado x_2 , así como en dos proyecciones diferentes. Sin embargo, es importante mencionar que la elección de muchos otros conjuntos de condiciones iniciales puede producir infinitos atractores cuasi-periódicos coexistentes.

La evolución de estas órbitas comienza con la coexistencia de atractores cuasi-periódicos y luego se extiende sobre una región más amplia de los puntos de equilibrio para producir la coexistencia de atractores caóticos, como se ilustra en la Figura 4. Como se puede observar en la Fig 4, el sistema genera cinco atractores caóticos diferentes mediante la selección de un conjunto determinado de parámetros y diferentes conjuntos de condiciones iniciales.

De hecho, aparte de estos atractores caóticos coexistentes, existen infinitos atractores más que pueden generarse mediante la selección de conjuntos apropiados de condiciones iniciales. El comportamiento más complejo en los sistemas dinámicos no lineales es la transición de comportamientos caóticos a no-caóticos (y viceversa) para ciertos conjuntos de parámetros del sistema. Esto se debe a técnicas ineficientes para analizar sistemas dinámicos con diferentes conjuntos de condiciones iniciales, especialmente cuando los sistemas exhiben infinitos atractores coexistentes incluso en una pequeña región de estos conjuntos. Para verificar si el sistema 1 muestra estas transiciones complicadas, representamos los modelos de bifurcación coexistentes de la variable de estado x_2 y los exponentes de Lyapunov máximos para los parámetros $a = 0,299$; $b = 0,3$; $c = 2$; $d = 1,05$ y $1,3 \leq R \leq 1,8$, como se muestra en las Fig 6a,b , respectivamente. Las órbitas en la Fig 6, coloreadas en azul, verde y morado, comienzan con las condiciones iniciales $(2,5;0,2;0,2;0,2)$, $(2;0,2;0,2;0,2)$ y $(0,5;0,2;0,2;0,2)$, respectivamente. Se puede observar que hay varias transiciones de atractores caóticos a cuasi-periódicos para las tres órbitas. Por ejemplo, la órbita de color morado pasa de caos a cuasi-periódico cuando $R = 1,799$, como se ilustra en las Fig 7a-c. Por lo tanto, se

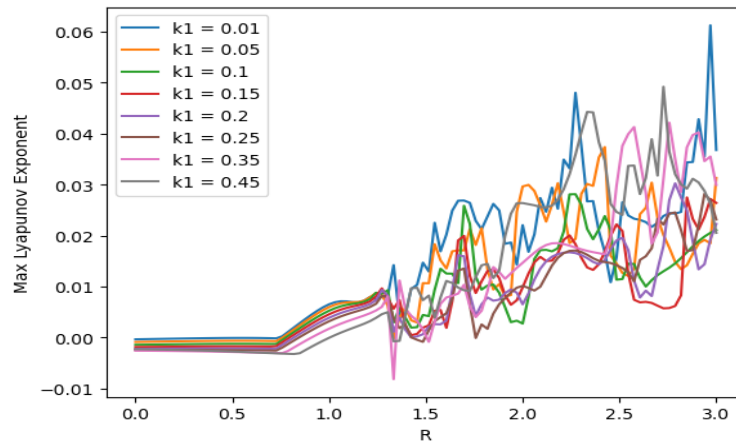


Fig 2 Exponentes de Lyapunov máximos con respecto a R para $a = 0,3$; $b = 0,4$; $c = 2$; $d = 0,3$ con nueve condiciones iniciales diferentes $(1;0,1;k_1;0,9)$, donde $k_1 = 0,01$; $0,05$; $0,1$; $0,15$; $0,2$; $0,25$; $0,35$; $0,45$:

puede observar que el comportamiento del sistema 1 es impredecible, ya que al elegir solo tres conjuntos de condiciones iniciales se pueden generar la coexistencia de atractores caóticos y no caóticos.

Diferentes sistemas caóticos tienen diferentes grados de sensibilidad. Según nuestros resultados de simulación, se puede concluir que el sistema 1 es muy sensible a sus parámetros y condiciones iniciales, donde una pequeña alteración en los valores iniciales puede llevar al sistema a exhibir un comportamiento completamente diferente. En otras palabras, cada conjunto de parámetros del sistema puede producir infinitos atractores coexistentes al elegir conjuntos apropiados de condiciones iniciales. Como resultado, el alto grado de sensibilidad del sistema 1 proporciona una explicación clara sobre la impredecibilidad de la propagación de la epidemia entre las presas infectadas.

Sin embargo, la siguiente sección describe la complejidad de los atractores generados por el sistema 1.

Complejidad de los Atractores Coexistentes

Esta sección investiga el rendimiento de la complejidad de cada variable $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ del sistema 1 usando uno de los algoritmos fundamentales, que es Sample Entropy (SamEn, Muestra de Entropía en español), utilizado para estimar la cantidad de información extra requerida para predecir la $(t + 1)$ -ésima salida de una trayectoria utilizando sus salidas anteriores (t) . Obviamente, valores positivos SamEn mayores indican que las trayectorias necesitan una mayor información adicional para ser predichas. En nuestras simulaciones, los parámetros de la medida SamEn se establecen por la dimensión tomada $m = 2$ y el parámetro de tolerancia $r = 0,2 * \text{Desviación estándar}$.

El sistema 1 muestra comportamientos extremos de multiestabilidad, lo que significa que pequeños cambios en la especie de presa original podría ampliarse y generalizarse, y eso podría confirmarse mediante el estudio de la complejidad de la serie temporal de las variables del sistema. Por lo tanto, mostremos la complejidad de las variables $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ del sistema 1 en caso de coexistencia de diferentes atractores caóticos. Esto se puede lograr mediante gráficos de contorno basados en el algoritmo SamEn, en el que el eje x es una condición inicial variada y el eje y es un parámetro de control variado, como se muestra en la Fig. 6a–d. Los parámetros de este caso se establecen para $a = 0,3$; $b = 0,3$; $c = 2$; $d = 0,8$; y $1,3 \leq R \leq 1,55$; mientras tanto, las condiciones iniciales son seleccionadas para ser $(k_2; 0,3; 0,3; 0,3)$, donde $0,1 \leq k_2 \leq 0,5$.

En segundo lugar, la complejidad de las variables $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ del sistema 1 en caso de que coexistan atractores caóticos y cuasi-periódicos. Aquí los parámetros del sistema se eligen para ser $a = 0,299$; $b = 0,3$; $c = 2$; $d = 1,05$ y $1,3 \leq R \leq 1,8$, mientras que las condiciones iniciales se seleccionan para ser $(k_3; 0,2; 0,2; 0,2)$, donde $0,5 \leq k_3 \leq 2,5$. En base a los dos casos anteriores se pueden observar varias cuestiones de la siguiente manera:

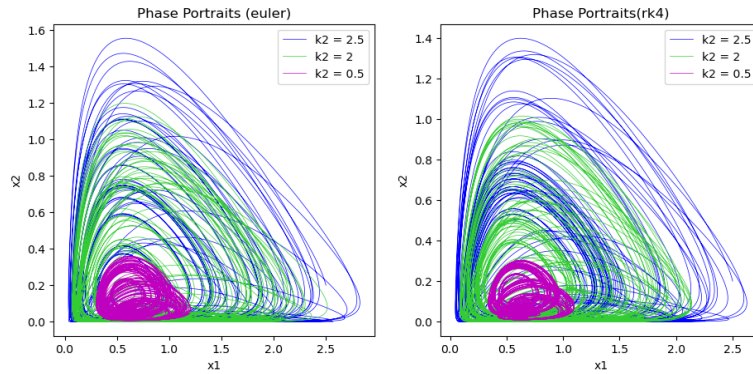


Fig 4 Retratos de fase y series temporales de infinitos atractores caóticos para $a = 0,3$; $b = 0,3$; $c = 2$; $d = 0,8$; $R = 1,5$ y con cinco condiciones iniciales diferentes ($k_2; 0,3; 0,3; 0,3$) donde $k_2 = 0,1$; $0,2$; $0,3$; $0,4$; $0,5$: a) plano $x_1 - x_4$; b) plano $x_2 - x_4$; c) serie temporal de la variable de estado x_2 .

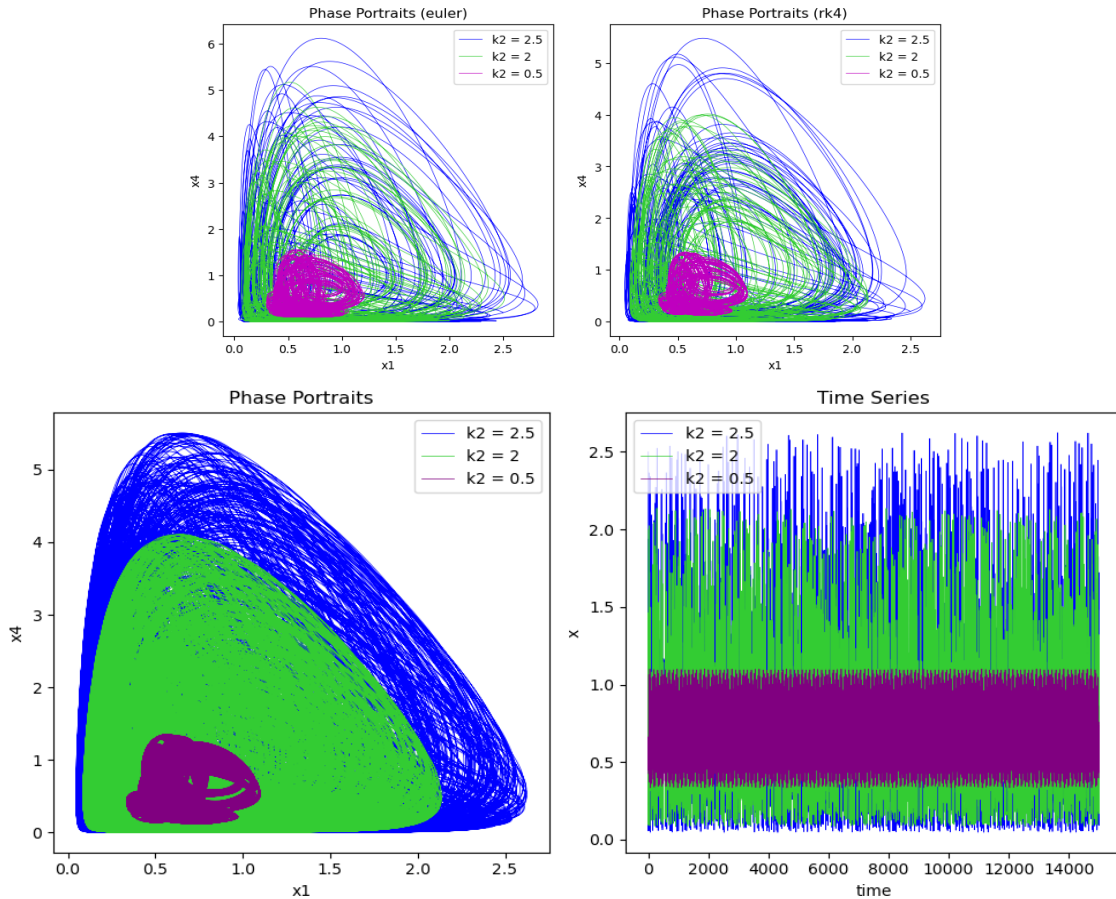


Fig 5 Retratos de fase y series de tiempo de los dos atractores caóticos coexistentes con un atractor cuasi-periódico para los parámetros: $a = 0,299$; $b = 0,3$; $c = 2$; $d = 1,05$; $R = 1,799$ con las condiciones iniciales ($k_3; 0,2; 0,2; 0,2$) donde $k_3 = 2,5; 2; 0,5$: a) plano $x_1 - x_2$; b) plano $x_1 - x_4$; c) la serie de tiempo de la variable de estado x_2 .

1. Para todos los valores del parámetro R , el sistema con la variación de una sola condición inicial exhibe diferentes valores de complejidad, especialmente para las variables x_1, x_2 y x_4 , en los que los valores

de complejidad del primer caso aumentan con el aumento de la condición inicial k_2 ; mientras que los valores de complejidad del segundo caso disminuyen con el aumento de la condición inicial k_3 .

2. La variable de presa sana (x_1) es la variable más complicada del sistema; la variable de presas infectadas (x_2) es más compleja que la variable de presa inmune (x_3).

En conclusión, la complejidad de los resultados de las variables del sistema confirman la alta sensibilidad a las condiciones iniciales; por lo tanto, los cambios en las variables del sistema se amplían con el tiempo. Por lo tanto, es razonable ahora considerar que la epidemia en las especies presa del sistema podría evolucionar hasta convertirse en una pandemia como la del COVID-19.

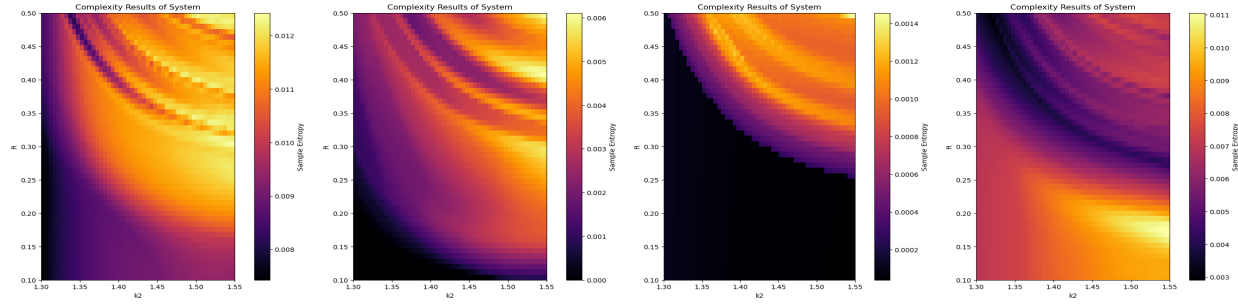


Fig 6 Resultados de la complejidad del sistema donde las barras de color se refieren a los valores del algoritmo SamEn para los parámetros $a = 0,3; b = 0,3; c = 2; d = 0,8$ y con las condiciones iniciales $(k_2; 0,3; 0,3; 0,3)$, donde $0,1 \leq k_2 \leq 0,5$.

METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

La realización de este estudio implicó la implementación de una serie de experimentos computacionales, a fin de analizar detalladamente el comportamiento de los sistemas dinámicos aquí considerados. Para este propósito, se optó por el uso del lenguaje de programación Python, el cual se distingue por su legibilidad y la extensa gama de bibliotecas que posee para llevar a cabo cálculos científicos.

```

1 def euler_method(f, x0, t, args):
2     dt = t[1] - t[0]
3     x = np.zeros((len(t), len(x0)))
4     x[0] = x0
5     for i in range(1, len(t)):
6         x[i] = x[i-1] + dt * np.array(f(x[i-1], t[i-1], *args))
7     return x

8
9 def rk4_method(f, x0, t, args):
10    dt = t[1] - t[0]
11    x = np.zeros((len(t), len(x0)))
12    x[0] = x0
13    for i in range(1, len(t)):
14        k1 = dt * np.array(f(x[i-1], t[i-1], *args))
15        k2 = dt * np.array(f(x[i-1] + k1/2, t[i-1] + dt/2, *args))
16        k3 = dt * np.array(f(x[i-1] + k2/2, t[i-1] + dt/2, *args))
17        k4 = dt * np.array(f(x[i-1] + k3, t[i-1] + dt, *args))
18        x[i] = x[i-1] + 1/6 * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
19    return x

```

Se utilizó la librería Numpy para llevar a cabo los cálculos numéricos y las manipulaciones de matrices. Numpy es una herramienta imprescindible en el ámbito de la computación científica de Python, pues

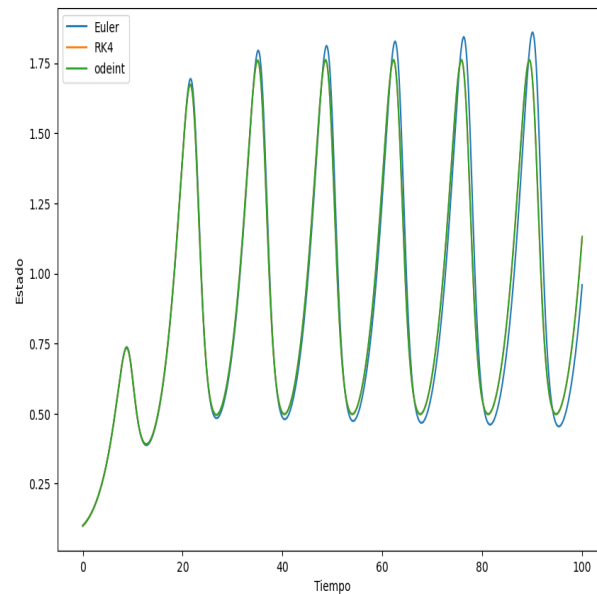


Fig 7 Ejemplo de error del método de Euler en comparación al RK4 y al odeint (Integrador de scipy), nótese que nuestro RK4 da valores iguales a los obtenidos con odeint.

proporciona un objeto de matriz multidimensional y funcionalidades esenciales para trabajar con dichas matrices.

En este estudio, una parte crucial fue la estimación de los exponentes de Lyapunov, indicadores cuantitativos del grado de caos en un sistema dinámico. Para el cálculo de los exponentes de Lyapunov, se recurrió a la librería PyLyapunov. Dicha librería implementa el algoritmo para el cálculo de los exponentes de Lyapunov descrito por Sandri en 1996, lo que posibilita la estimación eficiente de estos parámetros críticos.

Con el objetivo de resolver las ecuaciones diferenciales, se implementaron dos métodos numéricos: el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Si bien el método de Euler es más sencillo y fácil de implementar, suele tener limitaciones en términos de precisión (Fig 7) para sistemas complejos o cuando los pasos de tiempo son grandes. Por su parte, el método RK4, pese a su mayor complejidad de implementación, brinda una precisión significativamente superior, siendo por ello utilizado para las simulaciones más críticas.

Para la visualización de los resultados, se empleó la librería Matplotlib, una herramienta de Python diseñada para la generación de gráficos estáticos, animados e interactivos. Matplotlib permitió la generación de una diversidad de gráficos, desde trazados de líneas y diagramas de dispersión hasta representaciones tridimensionales de los atractores de los sistemas. Cada simulación fue representada gráficamente utilizando ambos métodos numéricos, facilitando una comparación directa de sus respectivos resultados.

El código usado para los experimentos puede ser encontrado en el repositorio:

<https://github.com/Leonardo16AM/In-search-of-COVID-19-transmission-through-an-infected-prey-an-overview>

CONCLUSIÓN

Este trabajo toma un sistema de depredador presa con dos presas donde la enfermedad se está convirtiendo endémica en una de ellas e investiga su comportamiento en un modelo de un sistema dinámico de 4 dimensiones combinando los modelos clásicos de Lotka-Volterra y SIR (Susceptible-Infected-Recovered). Demuestra utilizando análisis por eigenvalores y criterio de estabilidad Routh-Hurwitz lo extremadamente caótico que puede llegar a ser este y que necesariamente estos valores se moverán alrededor de un atractor autogenerado.

Luego aplicando métodos numéricos como el de Máximo Exponente de Lyapunov y Muestra de Entropía utilizando los valores seleccionados en “In search of COVID-19 transmission through an infected prey”, se observa el alto grado de impredecibilidad de contagio del virus de la Covid-19. Los resultados del paper analizado en cuestión proporcionan una demostración de la aleatoriedad del brote de COVID-19 entre las especies de presa y los humanos.

RECOMENDACIONES

Dado el avance del tiempo y las investigaciones desde el brote del coronavirus y la publicación de este estudio proponemos repetir los experimentos con estos modelos numéricos utilizados en el trabajo con nuevos valores encontrados y obtener otros resultados con los cuales contrastar si se mantiene las conclusiones de que estamos en presencia de un sistema muy caótico o no. Esto a su vez será muy útil para el estudio de futuras pandemias que enfrente la humanidad.