COSA DA RICORDARE

- Per la **composizione** di **mappe di Möbius**, basta moltiplicare tra loro le matrici associate alla mappa.

- La **parte reale o immaginaria** di una **funzione analitica** (o olomorfa) deve soddisfare la condizione che il suo **laplaciano** sia nullo.
  Questo discende immediatamente dalla **Condizione di Cauchy-Riemann**: sia h analitica. Allora:

  $$h(x, y) = f(x, y) + ig(x, y)$$

  $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

  Che impone, sia sulla f che sulla g:

  $$\nabla^2 f = 0 \qquad \nabla^2 g = 0$$

  si dimostra prendendo la derivata seconda di x e sostituendo con le identità date dal teorema.
  Questo significa che le due funzione devono essere **armoniche**, ovvero non devono presentare delle singolarità.

- **Criteri di convergenza** delle serie di potenze

  - Dal teorema di Abel-Weierstrass, la serie converge solo se

    $$\limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|c_k (z-a)^k|} < \infty$$

  - Formula di **Cauchy-Hadamard**

    $$\frac{1}{R} = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

  - Criterio del Rapporto

    $$R = \lim_{k \to +\infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}$$

  - In generale, per una serie del tipo $\sum_k f_k(z)$ basta guardare se $|f_k(z)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

- Per delle serie generali, si può usare il criterio di Weierstrass, ovvero vedere se $\exists M_k : \forall z,\ |f_k(z)| < M_k$, con M_k convergente.
- Quando ho una **serie di Laurent**, spesso il raggio di convergenza è la distanza tra il centro della serie e il polo più vicino.

- Il **prodotto di Cauchy** tra due serie è definito come:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}\right) z^k$$

Nota: se le due serie convergono assolutamente, anche il loro prodotto di Cauchy convergerà.

- Dai un'occhiata ai **prolungamenti analitici**

- Funzione **gamma di Eulero**

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Nota: può capitare di trovare un integrale di questo tipo. In tal caso, si scrive come risultato la Γ per un certo valore.

- Lo sviluppo in **serie di Laurent** di una funzione f nel punto a è del tipo:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k = \sum_{\ell=0}^{+\infty} c_\ell (z-a)^\ell + \sum_{\ell=1}^{+\infty} c_\ell \frac{1}{(z-a)^\ell}$$

Le due serie sono rispettivamente chiamate (da sinistra a destra) **parte analitica** e **parte principale** della serie di Laurent.
Nota: la parte principale è di notevole importanza ed è spesso quella che viene chiesta di calcolare.

- **Tipi di singolarità / poli:**
  - Singolarità apparente: la **parte principale** è nulla.
  - Singolarità di ordine k: ci sono k termini nella parte principale.
  - Singolarità **essenziale**: la parte principale ha infiniti termini. In questo caso si può:

    * Sviluppare con Laurent
    * Utilizzare la definizione $c_{-1} = \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} f(z)$. *Non è molto comodo, visto che spesso questo definizione (sotto forma di Teorema dei Residui) viene utilizzata per calcolare l'integrale stesso.*

- Il **residuo** di una funzione in un polo a è il coefficiente del termine di grado $(z-a)^{-1}$. Per un polo di ordine k si calcola come:

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z)$$

- Il **Lemma di Jordan** dice che, sulla **semicirconferenza** $Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, se f è continua e ammette massimo $M(R) = \max_{\theta \in [0.\pi]} \left| f\left(Re^{i\theta}\right) \right|$ allora vale:

$$\left| \int_{SC} f(z) e^{ikz} dz \right| \leq M(R) \frac{\pi}{k}$$

  se e solo se $k > 0$.

- La **norma** su spazi $L^p(a, b)$ è definita come:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Un **prodotto interno** su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ gode delle seguenti proprietà

  -
$$\langle x|x \rangle \geq 0 \qquad and \ \langle x|x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$$

  - Linearità al secondo membro:

$$\langle x|y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x|y_1 \rangle + \lambda_1 \langle x|y_2 \rangle$$

  -
$$(\langle x|y \rangle)^* = \langle y|x \rangle$$

- Nello **spazio** $L^2(\Omega)$, che è uno spazio di Hilbert, si definisce un **prodotto interno** nel seguente modo:

$$\langle f|g\rangle = \int_\Omega \overline{f} g dm$$

Da questa discende la **norma**:

$$\|f\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dm$$

- Due **disuguaglianze importanti:**

  - **Disuguaglianza di Hölder**:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad t.c.\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

  - **Disuguaglianza di Minkowski** su L^p:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

- Ricorda **Teorema della proiezione**

- Dal *Teorema di Parceval*, segue l'**identità di Parceval**, in cui, dato un s.o.n.c. $\{u_k\}$ e $f \in \mathcal{H}$:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle f|u_k\rangle|^2$$

Nota: ovviamente questa identità è soprattutto utile nel caso di ***Serie di Fourier****, come una sorta di controllo finale.*

- Un **operatore lineare limitato** $A : X \to Y$ deve rispettare la seguente condizione:

$$\exists c_A : \ \|Ax\| \leq c_A \|x\|, \quad \forall x \in X$$

Lo spazio degli operatori lineari limitati tra due spazi di Hilbert è indicato come $\mathcal{B}(X, Y)$.

- Sullo spazio degli operatori lineari limitati $\mathcal{B}$ si può definire una **norma sup**:
$$\|A\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x\in(X-\{0\})} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$
- L'**aggiunto** di un operatore lineare limitato A su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è $A^\dagger$ *tale che:*
$$\langle A^\dagger x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$
con la definizione di prodotto interno per lo spazio $\mathcal{H}$.
- L'**aggiunto** di un operatore ha le seguenti proprietà:
  - $$(A + zB)^\dagger = A^\dagger + z^* B^\dagger$$
  - $$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$
    e quindi
    $$(A_1 A_2 \cdots A_n)^\dagger = A_n^\dagger A_{n-1}^\dagger \cdots A_1^\dagger$$
  - $$(A^\dagger)^\dagger = A$$
- La **traccia** di una matrice è **ciclica**:
$$\mathrm{Tr}(ABCD) = \mathrm{Tr}(DABC) = \mathrm{Tr}(CDAB) = \mathrm{Tr}(BCDA)$$
Per la **traccia** vale inoltre la seguente formula:
$$\mathrm{Tr}(\ln A) = \ln(\det A)$$
- Un **proiettore** è un operatore con le seguenti proprietà:
  - Linearità
  - Idempotenza
    $$P^2 = P$$
  - P è autoaggiunto, ovvero
    $$P = P^\dagger$$

- La **traccia** del proiettore è la dimensione del sottospazio su cui proietta:

$$\mathrm{Tr}(P) = \dim(M)$$

dove M è il sottospazio su cui proietta.

- Il dominio del proiettore è tutto lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{dom}(P) = \mathcal{H}$$

- Il **range** del proiettore è il sottospazio M su cui proietta:

$$\mathrm{Ran}(P) = M$$

- Il **kernel** del proiettore è il sottospazio ortogonale $M^{\perp}$:

$$\mathrm{Ker}(P) = M^{\perp}$$

- ***Tipo di esercizio:*** quando viene richiesta l'approssimazione di $f(x)$ come $g(x) = a + bx$ su $L^2(a, b)$, si può procedere in due modi:

  - Con l'**ortonormalizzazione di Graham-Schmidt**, creiamo u_0 e u_1:

$$u_0 = \frac{1}{N_1} \qquad t.c. \|u_0\|^2 = \frac{1}{N_1^2} \int_a^b dx = 1$$

$$u_1 = \frac{1}{N_2} (x - u_1 \langle x|u_0 \rangle) \qquad \|u_1\|^2 = 1$$

    Si proietta quindi lungo questo spazio:

$$g(x) = u_0 \langle u_0|f \rangle + u_1 \langle u_2|f \rangle$$

    Nota: ovviamente $\langle \cdot|\cdot \rangle$ è il prodotto interno definito su L^2.

  - Si va a **minimizzare**, per a e b, la norma:

$$\|f(x) - (ax + b)\|^2 = \int_a^b (f(x) - ax - b) dx$$

- **Sviluppi in serie di Fourier**:

- **Forma esponenziale:** su $L^2(a,b)$, si considera $u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2\pi i k x}{b-a}}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Questa è una base ortonormale.
  Data una $f \in L^2(a,b)$, vale allora

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(x) \langle u_k(x) | f(x) \rangle = \sum_{k-\infty}^{+\infty} f_k \frac{e^{\frac{2\pi i k x}{b-a}}}{\sqrt{b-a}}$$

  con

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \int_a^b f(x) \cdot e^{-\frac{2\pi i k x}{b-a}} dx$$

- **Forma trigonometrica**. Alternativamente, si può scrivere:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right)\right)$$

  con

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx$$

- Un **operatore** $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è **unitario** se valgono le seguenti proprietà:
  -
$$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
  -
$$\|U\| = 1$$
  -
$$\exists U^\dagger \qquad t.c \ \|U^\dagger\| = 1$$
  -
$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$$

  che corrisponde a: $\langle Ux | y \rangle = \langle x | Uy \rangle, \ \forall x, y \in \mathcal{H}$

- Degli operatori $M(x)$ su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ formano un **gruppo** se:
$$M(x)M(y) = M(x+y)$$
Inoltre può valere che il gruppo sia:
  - Un gruppo di **operatori unitari**, ovvero per cui:
  $$M^\dagger M = \mathbb{1} \qquad \|M\| = 1$$
  - un gruppo di **operatori fortemente continui**, ovvero per cui vale:
  $$\lim_{x\to 0} \|Mu - u\| = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}$$
- Per un gruppo di operatori unitari a 1 parametro fortemente continuo, $U(a)$, vale il **Teorema di Stones**, cioè posso scrivere il gruppo come:
$$U(a) = \mathbb{1} - iaH + o(H^2)$$
da cui
$$U_a = e^{-iaH}$$
dove H è noto come **generatore del gruppo**.
Nota: spesso in alcuni esercizi è chiesto di calcolare esplicitamente H. Per calcolarlo, in generale, faccio uno sviluppo intorno a $a = 0$, ovvero
$$H = \lim_{a\to 0} \frac{U(a) - \mathbb{1}}{-ia}$$
- Data una funzione f, la sua **Trasformata di Fourier** è la funzione:
$$(\mathscr{F} f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} f(y)$$
L'**antitrasformata** è invece:
$$(\mathscr{F}^{-1} f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{ixy} f(y) = (\mathscr{F} f)(-x)$$
- Lo **spazio di Schwarz** $\mathscr{S}(a,b)$ è lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty(a,b)$ *rapidamente decrescenti su tutte le derivate.*

- Per una funzione $f \in \mathscr{S}(a,b)$ si può definire una **seminorma**

$$\|f\|_{n,m} = \sup_{x\in(a,b)} \left| x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^m f \right|$$

Questa ha le seguenti proprietà:

  –

$$\|\lambda f\|_{n,m} = |\lambda| \|f\|_{n,m}$$

  – Disuguaglianza di Schwarz:

$$\|f_1 + f_2\|_{n,m} \leq \|f_1\|_{n,m} + \|f_2\|_{n,m}$$

- In $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si può definire un **prodotto di convoluzione**:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

- Il duale dello spazio di Schwarz, $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, contiene i sequenziale lineari continui su $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ovvero le **distribuzioni temperate**. Queste hanno le seguenti proprietà:

  – Linearità:
$$\langle f|\varphi_1 + \lambda\varphi_2\rangle = \langle f|\varphi_1\rangle + \lambda\langle f|\varphi_2\rangle$$

  – Continuità sequenziale

$$\varphi_r \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \langle f|\varphi_r\rangle \underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow} 0$$

  Questa proprietà si può dimostrare come

$$|\langle f|\varphi\rangle| \leq S, \quad \forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

  dove S è una *somma finita di seminorme di* φ.

- Alcune **distribuzioni importanti**:

  – *Delta di Dirac*:

$$\langle\delta_a|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$

– *Theta di Heaviside*

$$\langle \Theta_a | \varphi \rangle = \int_a^{\infty} \varphi(x) dx$$

- **Derivata** di una **distribuzione**:

$$\langle f' | \varphi \rangle = -\langle f | \varphi \rangle$$

- **Trasformata di Fourier** di una **distribuzione**:

$$\langle \mathscr{F} f | \varphi \rangle = \langle f | \mathscr{F} \varphi \rangle$$

- **Trasformat di Fourier della Gaussiana**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \pm ixk} dx$$

Per fare questo, si prende un cammino rettangolare di base $(-a, b)$ e altrezza $(-ik/2)$ e integro **solo** sulla Gaussiana (l'altra viene fuori per sostituzione):

$$\oint_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{-a}^{b} e^{-x^2} dx + \int_0^{\frac{k}{2}} (-idx) e^{-(b-ix)^2} - \int_{-a}^{b} dx e^{-(x \mp i\frac{k}{2})^2} + \int_{\frac{k}{2}}^{0} (-idx) e^{-(-a-ix)^2}$$

Ponendo $a, b \to +\infty 4$ e notando che il cammino non gira su alcun polo, uno degli integrali è una Gaussiana e i due integrali "verticali" vanno a zero.

$$0 = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \pm kxi} e^{\frac{k^2}{4}}$$

Da cui:

$$\mathscr{F} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

z

- Potrebbe essere utile sapere che la **trasformata di Fourier alla seconda** sia la distribuzione **parte principale** - o una cosa simile

trova cosa sia esattamente

Nota finale: riguarda sviluppi notevoli e identità trigonometriche.