

Ripasso di Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare

Leonardo Alchieri

16 aprile 2019

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | I nuclei e le loro proprietà | 3 |
| 1.1 | Strumenti Generali | 3 |
| 1.1.1 | La sezione d'urto | 3 |
| 1.1.2 | Le leggi del decadimento radiattivo | 5 |
| 1.1.3 | Regola d'oro di Fermi, spazio delle fasi | 7 |
| 1.2 | Generalità sui nuclei | 7 |
| 1.2.1 | Formula semiempirica di Weizsäcker | 7 |
| 1.2.2 | Il modello a gas di Fermi | 11 |
| 1.2.3 | Decadimento alfa (teoria di Gamow) | 11 |
| 1.2.4 | Decadimento beta (teoria di Fermi) | 12 |
| 1.2.5 | Cenni su emissioni gamma | 15 |
| 1.2.6 | Fattori di forma | 16 |
| 1.3 | Le interazioni nucleari | 18 |
| 1.3.1 | Spin e momenti magnetici | 18 |
| 1.3.2 | Interazione nucleone-nucleone | 19 |
| 1.3.3 | Il modello a shell | 23 |
| 1.4 | Applicazioni: Fissione e Fusione Nucleare | 25 |
| 1.4.1 | Fissione nucleare | 25 |
| 1.4.2 | Fusione nucleare | 30 |
| 2 | Particelle e interazioni | 32 |
| 2.1 | Particelle fondamentali | 32 |
| 2.1.1 | Equazione di Klein-Gordon | 32 |
| 2.1.2 | Particelle e anti-particelle | 33 |
| 2.1.3 | Potenziale di Yukawa | 34 |
| 2.2 | Simmetrie | 36 |
| 2.2.1 | Simmetrie e principi di conservazione | 36 |
| 2.2.2 | Violazione di P e CP nelle interazioni deboli | 39 |
| 2.3 | Nuclei, barioni, mesoni e quark | 41 |
| 2.3.1 | Muoni | 41 |
| 2.3.2 | Pione | 41 |
| 2.3.3 | Modello a quark | 45 |
| 2.3.4 | Particelle strane | 46 |
| 2.3.5 | Oscillazioni particella-antiparticella | 50 |
| 2.3.6 | <i>Quantum Crono-Dynamics</i> | 52 |
| 2.4 | Interazioni | 55 |
| 2.4.1 | Interazione della radiazione con la materia | 55 |
| 2.4.2 | Sciami di particelle | 58 |

| | | |
|----------|----------------------------------|-----------|
| 2.5 | Il modello standard | 59 |
| 2.5.1 | Simmetrie di gauge | 59 |
| 2.5.2 | Il modello standard | 59 |
| A | I 10 esercizi per l'esame | 62 |

Capitolo 1

I nuclei e le loro proprietà

1.1 Strumenti Generali

1.1.1 La sezione d'urto

Punto di partenza della fisica particellare è l'**esperimento di Rutherford**, eseguito da *Geiger* e *Marsden*. Obiettivo dell'esperimento: misurare la sezione d'urto della particelle α contro un foglio d'oro; venne osservata un'abbondanza di particelle diffuse a grandi angoli.

Nell'esperimento si devono determinare quantitativamente:

- La probabilità che la particella venga deflessa di un certo angolo solido Ω .
- Il tasso di eventi effettivamente atteso.
- La **sezione d'urto**.

Angolo solido differenziale:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Come ci si aspetta, $\int d\Omega = 4\pi$ (su $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$).

Esperimento ideale fascio di particelle che incide su un bersaglio, con data densità, e misura eseguita su un rivelatore posto a un certo angolo solido.

Il numero di particelle che colpiscono al secondo $\frac{dn}{dt}$ è:

$$\frac{dn}{dt} = I_0 n_T dz \sigma = I_0 n_T dz \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega$$

dove I_0 è l'intensità del fascio [particelle/sec], n_T è la densità del bersaglio, dz lo spessore e A l'area presa dal fascio (e quindi $n_T dz \sigma$ rappresenta il numero di bersagli), che posso riscrivere come $\frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega$, con $\Delta\Omega$ l'angolo solido sotteso.

Si definisce la quantità $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ come **sezione d'urto differenziale**.

Nel caso in cui $n_T dz \sigma \ll 1$, ovvero condizione di *bersaglio sottile*, supponendo di conoscere $n_T = \frac{\rho}{A} N_A$ (con A peso atomico e N_A numero di Avogadro) e

misurando N_0 , il numero di particelle del fascio, e n , il numero di interazioni con il rivelatore¹, si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\Delta\Omega} \frac{1}{n_T dz} \frac{n}{N_0}$$

Il cui errore, considerato dato solo dalla misura di n , risulta:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La **sezione d'urto totale** si ottiene integrando l'angolo solido su tutto lo spazio:

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Si può anche calcolare la diminuzione dell'intensità del fascio; la diminuzione sarà infatti:

$$\frac{dn}{dt} = -dI = I_0 n_T dz \sigma$$

da cui, risolvendo l'equazione differenziale, si ottiene:

$$I(z) = I_0 e^{-n_T \sigma z} = I_0 e^{-\mu z} = I_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}$$

con μ detto *coefficiente di assorbimento* e λ *libero cammino medio*.

Rutherford Secondo il modello atomico di Thomson, la deviazione sarebbe dovuta essere minima, poiché $m_t/m_\alpha \sim 10^{-4}$, da cui:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_\alpha + \frac{m_t}{m_\alpha} \mathbf{v}_t \simeq \mathbf{v}_\alpha$$

Viceversa, supponendo una struttura atomica con un nucleo molto piccolo ma molto pesante, può anche avvenire il caso di "rinculo" della particella.

Quantitativamente, si rimanda il calcolo della sezione d'urto di un potenziale Coulombiano alle diapositive fornite dal professore; l'espressione che si ottiene per la **sezione d'urto differenziale per scattering Coulombiano** è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ_\alpha e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

Si noti che integrando questo valore, al fine di trovare la *sezione d'urto totale*, per angoli piccoli angoli si ha che esso diverge:

$$\sigma = 8\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ_\alpha e^2}{4E} \right)^2 \int_0^1 \frac{d(\sin\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}$$

Una formula approssimata escludendo piccoli angoli (e che quindi converga sempre) è:

$$\sigma(\theta > \theta_1) = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ_\alpha e^2}{4E} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2(\theta_1/2)} - 1 \right)$$

¹non confondere il rivelatore con il bersaglio.

1.1.2 Le leggi del decadimento radiattivo

Dall'esperimento di Rutherford (e tramite osservazioni successive), si giunge alla conclusione che l'atomo è composto da un nucleo positivo, formato da protoni e neutroni, che contiene la maggior parte della massa atomica, e da degli elettroni, di massa quasi trascurabile, che occupano la parte restante dell'atomo.

Sistema di unità naturali Le due costanti essenziali per lo studio della fisica nucleare sono:

- velocità della luce

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- costante di Planck

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054571726 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Da un punto di vista pratico, in fisica nucleare si pone spesso $c = \hbar = 1$, con conseguente cambio di unità di misure per le differenti grandezze. Per esempio:

- Energia: [eV]
- Massa: [eV/c²]
- Tempo: [\hbar /eV]
- Lunghezza: [$\hbar c$ /eV]
- Velocità: [c]
- Momento angolare: [\hbar]

Ponendo le due costanti pari a 1 si noti come varino le unità di misura - *per esempio, ponendo $c = 1$ si ha che la massa viene misurata in eV, cioè come un'energia*. Un sistema di misura di questo tipo è detto **sistema naturale**. Può essere utile ricordare la **costante di struttura fine**, che compare in molte espressioni elettromagnetiche - *può essere usata nella sezione d'urto di Rutherford*:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} \hat{=} \alpha = \frac{1}{137,035999064}$$

Energia di disintegrazione Dato un nucleo padre P e due nuclei figli D_1 e D_2 , si definisce **energia di disintegrazione** la differenza tra le masse del nucleo padre e dei frammenti:

$$Q = M_P - M_{D_1} - M_{D_2}$$

essa è a disposizione come energia cinetica dei frammenti.

Prendiamo come esempio il decadimento di un nucleto P in un'altro nucleo D e un nucleo di Elio - *particella α* . Con semplici passaggi algebrici si ha che le energie cinetiche dei frammenti sono:

$$T_\alpha = Q \frac{m_D}{m_\alpha + m_D} \quad T_D = Q \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_D}$$

nel caso di nuclei P pesanti, si avrà che $m_\alpha \ll m_D$, ovvero la quasi totalità dell'energia generata dal decadimento viene trasferita alla *particella* α .²

Legge dei decadimenti radioattivi Il tasso di decadimento di un campione di materiale radioattivo è:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

dove λ è detta **costante di decadimento** - indica la probabilità di un decadimento per unità di tempo. Si definisce inoltre l'**attività** come $\text{Act.} = -\frac{dN}{dt}$, la cui unità di misura è il *Bequerel* [Bq].

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene l'andamento dei nuclei nel campione:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Da questa legge viene spontaneo definire la **vita media** di un atomo come $\tau = 1/\lambda$. Da questa si ricava poi il **tempo di dimezzamento**, ovvero dopo quanto tempo un campione è la metà di quello iniziale:

$$\tau_{1/2} = \tau \ln 2$$

Ci sono casi in cui la legge del decadimento radiattivo è differente: in presenza di fenomeni esterni che aumentano il tasso di decadimenti, come per esempio *raggi cosmici, acceleratori o reattori e decadimenti a catena*, essa sarà:

$$\frac{dN}{dt} = R - \lambda N$$

dove R , detto **tasso di produzione**, dipende dal fenomeno in gioco - per esempio, nel caso di acceleratori è $R = \Phi N_{target} \sigma$. La soluzione in questo caso è:

$$N(t) = \frac{R}{\lambda} + \left(N_0 - \frac{R}{\lambda} \right) e^{-\lambda t}$$

Nel caso di una sostanza radioattiva che decade in una seconda sostanza radioattiva (la cui però forma una terza sostanza stabile) si hanno 3 equazioni di decadimento:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} &= \lambda_2 N_2 \end{aligned}$$

Il risultato per N_2 , ovvero quello algebricamente differente, è:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{0,1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{0,2} e^{-\lambda_2 t}$$

²Per completezza, si riportano le stesse formule nel caso relativistico: $T_\alpha = Q \frac{2m_D + Q}{2(m_D + m_\alpha + Q)}$ e $T_D = Q \frac{2m_\alpha + Q}{2(m_D + m_\alpha + Q)}$.

Come spesso accade in natura, una stessa sostanza può presentare più possibilità di decadimenti differenti: si ha quindi differenti *probabilità di decadimento per unità di tempo* λ_i :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 N - \lambda_2 N + \dots - \lambda_n N$$

Il nucleo padre seguirà una *legge di decadimento* con costante $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Si può inoltre definire il rapporto di decadimento, o **branching ratio**, per un certo canale come:

$$BR_i = \frac{\left| \frac{dN_i}{dt} \right|}{\left| \frac{dN}{dt} \right|} = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

Sui decadimenti si può inoltre calcolare la probabilità di osservare k decadimenti in un certo intervallo di tempo $t_2 - t_1$ tramite una **distribuzione Poissoniana**:

$$P(\bar{n}, k) \frac{\bar{n}^k}{k!} e^{-\bar{n}}$$

dove, per il decadimento radiattivo, si ha $\bar{n} = pN = \lambda(t_2 - t_1)$, poiché, dato un intervallo di tempo lungo T su cui sono stati osservati N decadimenti, $\lambda = \frac{N}{T}$.

1.1.3 Regola d'oro di Fermi, spazio delle fasi

La **regola d'oro di Fermi** ci dice quale sia la probabilità per unità di tempo che una particella sottoposta a un potenziale U transizioni da uno stato iniziale i a uno stato finale f :

$$P = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | U | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

in cui compaiono:

- l'elemento di matrice del potenziale tra i due stati, iniziale e finale:

$$\langle f | U | i \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) U(\mathbf{r})$$

dove le funzioni d'onda ψ sono quelle di particella libera, ovvero del tipo $\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$, di momenti:

$$\mathbf{p}_i = p(0, 0, 1) \quad \mathbf{p}_f = p(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

- la densità di stati finali, o **spazio delle fasi** è:

$$\rho(E_f) = \frac{dN}{dE_f} = \frac{V p_f^2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp_f}{dE_f}$$

1.2 Generalità sui nuclei

1.2.1 Formula semiempirica di Weizsäcker

Dimensione dei nuclei Dall'esperimento di Rutherford non è stato possibile trovare la dimensione esatta del nucleo. Una prima stima può avvenire tramite i *decadimenti alfa*. Con un calcolo banale si può vedere che, data una *alfa*

con una certa energia $T_\alpha \simeq 5\text{MeV}$, ovvero momento $p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha T_\alpha} \simeq 200\text{MeV}$, usando il principio di indeterminazione (in sistema naturale):

$$\Delta x \Delta p \leq 1$$

da cui posso stimare:

$$\Delta x \simeq \frac{1}{\Delta p} \simeq 0,0025\text{MeV}^{-1}$$

che, tornando in unità del SI, vuol dire $\Delta x \simeq 0,5\text{fm}$. Significa che il nucleo è confinato in un "ambiente" di questo ordine di grandezza.

Ovviamente, il calcolo eseguito qua sopra non è in grado di fornire un risultato preciso: ha solamente lo scopo di mostrare l'ordine di grandezza. Può essere eseguito un calcolo più preciso tramite lo studio della sezione d'urto d'impatto, che porta come risultato:

$$R \sim r_0 A^{1/3}$$

dove $r_0 = 1,2\text{fm}$.

Classificazione dei nuclei I nuclei sono identificati da tre numeri, Z , A e N : il primo indica il numero atomico (ovvero il numero di protoni nel nucleo), il secondo il numero di massa (il numero totale di nucleoni) e l'ultimo il numero di neutroni. In base all'uguaglianza di questi, si possono classificare come:

- Stesso Z ma N diverso: **isotopi**.
- Stesso A ma Z diverso: **isobari**.
- Stesso N ma Z diverso: **isotoni**.

I nuclei possono inoltre trovarsi in diversi stati eccitati, detti **isomeri** o **rissonanze**: tendenzialmente decadono spontaneamente nello stato fondamentale emettendo radiazione elettromagnetica (raggi γ).

Masse dei nuclei La massa di un nucleo è inferiore della massa dei suoi costituenti:

$$M(A, Z) \leq Zm_P + (A - Z)m_N$$

Questo fatto è dovuta alla presenza di una *energia di legame*, o **binding energy**, dovuta alle forze nucleari che tengono insieme i costituenti. Essa si può esprimere come:

$$\frac{B.E.}{c^2} = M(A, Z) - Zm_P - (Z - A)m_N$$

(in unità naturali basta sostituire $c = 1$.)

Spettrometro di massa Uno spettrometro di massa ha lo scopo di misurare quantitativamente la massa di una particella tramite l'analisi della sua traiettoria. È costituito dalle seguenti parti:

- Una sorgente di ioni - il nucleo da analizzare deve essere elettricamente carico ai fini dell'analisi.

- Un selettore, ovvero una zona nella quale sono presenti due campi, uno elettrico E e uno magnetico B . Esso sono posizionati in modo tale che solamente le particelle che viaggiano in linea retta possano attraversarlo, secondo la relazione

$$qE = qvB_1$$

per cui $v = \frac{E}{B_1}$.

- Uno spettrometro magnetico vero e proprio, in cui le particelle sono sottoposte a un campo magnetico perpendicolare B_2 : per effetto della forza di Lorentz, le particelle cambiano traiettoria - entrano in un moto circolare. Studiando il raggio di tale traiettoria si determina dunque la massa delle particelle.

$$qvB_2 = m \frac{v^2}{R}$$

$$m = q \frac{B_1}{E} B_2 R$$

Da un punto di vista pratico, per ottenere delle precisioni di circa 0,1MeV è più comodo fare i rapporti tra delle masse. Utilizzando un apparato nel quale due diverse sostanze sono ionizzate allo stesso modo e sottoposte agli stessi campi magnetici ed elettrici, si ha che:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

ovvero la precisione sulla misura della massa dipende unicamente dalla precisione sulla misura del raggio dell'orbita - e si ovviano quindi i problemi nel diminuire l'errore sui campi elettrici e magnetici.

Si noti come, in maniera abbastanza ovvia, si possano utilizzare gli spettrometri per la separazione di diversi isotopi (in quanto aventi masse differenti). È in questo modo che si è potuta calcolare l'abbondanza isotopica in natura - *della quale tra l'altro tengono conto i pesi atomici nella tavola periodica.*

Energia di legame dei nucleoni Da un punto di vista delle interazioni tra i nucleoni, esistono due tipi di energie forze che possono esserci in gioco:

- interazioni a lungo range (come per esempio quelle di tipo Coulombiane); in questo caso, una particella interagisce con *tutte* le altre presenti. L'energia totale sarà dunque proporzionale al numero di coppie presenti, ovvero $E \propto \frac{A(A-1)}{2}$.
- interazioni a breve range (come i legami molecolari); in questo caso, una particella interagisce solamente con quelle più vicine, e l'energia totale sarà proporzionale solamente al numero totale di particelle presenti nel sistema $E \propto A$.

Analizzando un grafico empirico che mostri l'andamento dell'energia di legame media tra i nucleoni in funzione della grandezza del nucleo - *binding energy curve* - con le considerazioni appena fatte sulle interazioni tra i nucleoni, si può concludere: poiché l'energia rimane approssimativamente costante, $\sim 8\text{MeV}$,

l'interazione nucleare deve essere a corto range.

Si può inoltre notare la presenza di un massimo nella curva, in corrispondenza di ^{56}Fe : significa che sotto tale soglia è energeticamente conveniente unire nuclei - *fusione nucleare*. Per poter creare elementi sopra tale soglia devono invece avvenire processi nei quali viene fornita una grossa quantità di energia - come per esempio nelle *esplosioni stellari* (supernove).

Come si nota guardando il grafico, la curva presenta delle forti irregolarità a regioni basse: in particolare, l'energia di legame dell'elio ^4He fa sì che esso sia più strettamente legato degli stati vicini. Inoltre, i nuclei più pesanti, come ^{235}U , presentano la possibilità di *decadimenti α* .

Oltre a elementi pesanti, esistono isotopi e/o isobari che vanno incontro a fenomeni di decadimento: tutti gli atomi tendono infatti ad uno **stato stabile**, ovvero quello stato in cui l'energia di legame sia minima.

Si può dunque calcolare per estrarre un nucleone (protone o neutrone) dal suo nucleo. Rispettivamente per protoni e neutroni è:

$$S_P(^A_Z X) = [m(^{A-1}_{Z-1} X) + m(^1_1 H) - m(^A_Z X)] c^2$$

$$S_N(^A_Z X) = [m(^{A-1}_Z X) + m_N - m(^A_Z X)] c^2$$

Se queste energie sono negative, gli stati sono *instabili*. Se diventano molto negative, l'atomo va incontro a *decadimento α* .

I nuclei *isobari* instabili possono inoltre andare incontro a **decadimento β** , ovvero un protone (o un neutrone) che diviene un neutrone (protone), emettendo nel processo degli elettroni energetici - *esistono 3 tipi di decadimento β , che verranno analizzati successivamente*.

In generale, tutti gli elementi instabili vanno incontro a fenomeni di decadimento, fino al raggiungimento della **valle di stabilità**.³

Modello a goccia Questo modello venne teorizzato da Bohr per cercare di spiegare sia la *incompressibilità* sia le *interazioni a breve range*, che, come una goccia, caratterizzano gli atomi. Il risultato di studi ha portato alla **formula semi-empirica di Bethe-Weizsäcker**:

$$B.E.(A, Z) = -a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(Z - A)^2}{A} \pm a_5 A^{-3/4}$$

Si mostra il significato dei vari termini che compongono la formula.

1. $-a_1 A$: è dovuto all'energia di interazione a **corto range** tra i nucleoni vicini - e quindi, come detto prima $\sim A$.
2. $a_2 A^{2/3}$: è una correzione al primo termine ed è proporzionale alla superficie del nucleo; i nucleoni interni possono interagire con tutti quelli vicini ($\sim A^{2/3}$), mentre quelli esterni solo con quelli interni.

Questa correzione è più importante per nuclei leggeri, e spiega dunque l'aumento di energia di legame a basse energie.

3. $a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$: questo termine è proporzionale alla repulsione elettrostatica; spiega l'abbondanza di neutroni per grossi atomi e la diminuzione dell'energia di legame per nuclei con grande peso atomico.

³Vedere il grafico sulle diapositive del corso per vedere quali elementi vadano incontro a quale tipo di decadimento.

Per calcolare a_3 si possono usare diversi modelli: un modo semplice può essere di approssimare il nucleo a una sfera carica:

$$E = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

sostituendo $R = r_0 A^{1/3}$, si ha:

$$E = \frac{3}{5} \alpha \frac{\hbar c}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

dove α è la *costante di struttura fine*. Confrontando col termine nella formula di *Bethe-Waiszäcker* si ha l'approssimazione:

$$a_3 \simeq \frac{3}{5} \alpha \frac{\hbar c}{r_0} = 0,73 \text{ MeV}$$

4. $a_4 \frac{(Z-A)^2}{A}$: questo termine è legato al *Principio di esclusione di Pauli* - ovvero alla simmetria tra protoni e neutroni (*vedremo più avanti*). Ha lo scopo di descrivere la **valle di stabilità**.
5. $\pm a_5 A^{-3/4}$: descrive il **pairing** dei nucleoni: è nullo per A dispari, è positivo se N e Z sono pari ed è negativo se N e Z sono dispari.

La formula presenta una regione di stabilità: fissato A , la *Bethe-Waiszäcker* è una parabola per Z , che presenta un minimo in:

$$\frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z} = 2a_3 \frac{Z}{A^{1/3}} - 4a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} = 0$$

$$Z = \frac{2a_4 A}{a_3 A^{2/3} + 4a_4}$$

1.2.2 Il modello a gas di Fermi

1.2.3 Decadimento alfa (teoria di Gamow)

Legge di Geiger-Nuttal Sperimentalmente, la dipendenza del λ del *decadimento* α dipende fortemente dal *Q-valore*:

$$\ln \tau_{1/2} = a + \frac{b}{\sqrt{Q}}$$

Questa è nota come **Legge di Geiger-Nuttal**.

Modello di Gamow Una spiegazione qualitativa venne proposta da **Gamow** tramite l'**effetto tunnel quantistico**. Il suo modello si basa sull'idea che il nucleo (A, Z) sia costituito da una *particella* α intrappolata nel potenziale generato da un nucleo $(A - 4, Z - 4)$ - ovvero i restanti atomi. Quantisticamente, la *particella* α ha una probabilità P non nulla di attraversare la barriera di potenziale. Questa è definita come:

$$P = 4e^{-2G}$$

dove G , detto **fattore di Gamow**, è l'integrale sulla zona *classicamente proibita*:

$$G = \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar} (V(r) - Q)} dr$$

dove $a = r_0 A^{1/3}$ è il raggio del nucleo classico e $b = \frac{(Z-2)2\alpha\hbar c}{Q}$ è la *regione classicamente proibita* del nucleo - oltre questa distanza si è "fuori" dal nucleo; e, generalmente, il potenziale è coulombiano del tipo $V(r) = \frac{(Z-2)2\alpha\hbar c}{r}$.

Si noti che il *fattore di Gamow* si può trovare algebricamente calcolando la probabilità di trasmissione di una funzione d'onda attraverso una barriera di potenziale; e approssimare quindi un generico potenziale come un susseguirsi di barriere.

Se si considera la *particella* α come avente una certa velocità $v = \sqrt{\frac{2(Q+V_0)}{m}}$, la probabilità di decadimento per unità di tempo sarà:

$$\lambda = \nu P = \frac{v}{2a} 4e^{-2G} = \sqrt{\frac{2(Q+V_0)}{m}} \frac{2}{a} e^{-2G}$$

Il calcolo del *fattore di Gamow* per un potenziale Coulombiano porta come risultato:

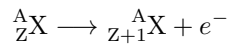
$$G = \sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} \alpha (2(Z-2)) \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) - \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2}} \right]$$

In questo caso, calcolando la vita media $\ln \tau$ si ottiene una giustificazione teorica alla *legge di Geiger-Nuttall*:⁴

$$\ln \tau = \ln \left(\sqrt{\frac{m}{2(Q+V_0)}} \frac{a}{2} \right) + 2\alpha \sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} [2(Z-2)] \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) - \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2}} \right]$$

1.2.4 Decadimento beta (teoria di Fermi)

Ipotesi del neutrino Il decadimento β è caratterizzato dal cambiamento di un nucleone con rilascio di un *elettrone*, del tipo:



Quello che si nota sperimentalmente, però, è che **non viene rispettata la conservazione dell'energia e del momento angolare**. Esistono infatti transizioni tra nuclei in cui non viene scambiato il momento angolare, sebbene l'*elettrone* abbia *spin* $1/2$.

Per risolvere questo dilemma, nel 1932 **Pauli** teorizzò l'esistenza di una *particella invisibile*, di *spin* $1/2$. Ovvero, che il decadimento β si a **3 corpi**. Questa particella deve **conservare il numero leptonico** - differenza tra particelle e anti-particelle - insieme all'*elettrone*, in maniera analoga alla conservazione del numero di nucleoni nelle interazioni (**numero barionico**).

⁴Per comodità, spesso si definisce una funzione $f\left(\frac{a}{b}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) - \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2}}$

Classificazione dei decadimenti β

I decadimenti β sono caratterizzati da due tipi di trasformazioni: o $n \rightarrow p$ o $p \rightarrow n$. In queste transizioni, A non cambia; ovvero si tratta di *transizioni isobare*.

- Decadimenti β^+ : $p \rightarrow n + e^+$.
Il bilancio energetico è del tipo:

$$m(A, Z) > m(A, Z-1) + 2m_e$$

- Decadimenti β^- : $n \rightarrow p + e^-$.
Il bilancio energetico è del tipo:

$$m(A, Z) > m(A, Z+1)$$

- Cattura elettronica: $p + e^- \rightarrow n$.
Il bilancio energetico è del tipo:

$$m(A, Z) > m(A, Z-1)$$

Domanda: Non ho capito molto bene da dove provengano le condizioni cinematiche. In particolare, non capisco che differenza ci sia tra Q -valore calcolato con masse nucleari e con masse atomiche (vedi pag.3, lez. 9)

Come corollari a queste leggi, si ha che tra due isobari vicino sarà sempre possibile un decadimento - causa della presenza della *valle di stabilità*. Inoltre, se è possibile un β^+ , allora è possibile anche una *cattura elettronica*.

Larghezza del decadimento

Dalla **regola d'oro di Fermi** si può stimare la larghezza di decadimento:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_w | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

dove si deve fare una qualche ipotesi sul tipo di interazione. Un primo modello può essere di considerare un'**interazione di contatto**:

$$H_w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_\nu) = G_F(\hbar c)^3 O_X \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu)$$

nella quale G_F è una costante che parametrizza l'interazione e O_X è un operatore adimensionale. Usando questa interazione l'elemento di matrice diventa:

$$\langle f | H_w | i \rangle = G_F(\hbar c)^3 \int_V d\mathbf{r} (\psi_{A,Z+1}(\mathbf{r}) \psi_e(\mathbf{r}) \psi_\nu(\mathbf{r}))^* O_X \psi_{A,Z}(\mathbf{r})$$

Si possono poi fare diverse ipotesi sull'operatore O_X in base ai dati sperimentali. Ipotizzando che le funzioni d'onda di *elettrone* e *neutrino* siano quelle di particella libera:

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}} \quad \psi_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{r}}$$

Poiché *neutrino* ed *elettrone* in questi decadimenti hanno basse energie, si ha che l'esponente, per raggi fuori dal nucleo $\sim r_0 A^{1/3}$ è praticamente nullo. Si

può quindi trascurare già al primo ordine lo sviluppo degli esponenziale, e approssimare l'elemento di matrice a:

$$\langle f | H_w | i \rangle = \frac{G_F (\hbar c)^3}{V} \int_V d\mathbf{r} \psi_{A,Z+1}^*(\mathbf{r}) O_X \psi_{A,Z}(\mathbf{r})$$

La misura dell'integrale $M_{fi} = \int_V d\mathbf{r} \psi_{A,Z+1}^*(\mathbf{r}) O_X \psi_{A,Z}(\mathbf{r})$ permette di determinare l'operatore O_X .

Nel calcolo dell lunghezza di decadimento, si deve determinare anche lo *spazio delle fasi* finale $\rho(E_f)$. Osserviamo che lo stato finale è praticamente definito solo da *elettrone* e *neutrino*: il nucleo compensa infatti il momento totale, portandosi via una frazione piccola dell'energia.

Si può quindi cercare tra tutte le combinazioni di *elettroni* e *neutrini* che soddisfici $Q = T_e + T_\nu$ - osserviamo infatti che, da dati sperimentali, si sa che $m_\nu \simeq 2$ eV, ovvero la sua energia è data quasi esclusivamente dalla quantità di moto.

Il numero di stati finali per *elettroni* (e *neutrini*) è uguale al volume che questi possono occupare nello spazio delle fasi - a meno di una costante:

$$dN_e = \frac{V \cdot 4\pi p_e^2 dp_e}{2\pi\hbar} \quad dN_\nu = \frac{V \cdot 4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{2\pi\hbar}$$

Si ha quindi:

$$\rho(E_f) = \frac{dN_e dN_\nu}{dE_f} = \frac{V \cdot 4\pi p_e^2 dp_e}{2\pi\hbar} \frac{V \cdot 4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{2\pi\hbar} \frac{dp_\nu}{dE_f}$$

Usando la condizione che $E_f = E_\nu + E_e$ e ricordando la relazione $p dp = 1/c^2 E dE$, posso esprimere lo spazio delle fasi in funzione del *momento dell'elettrone*, del *momento del neutrino* oppure dell'*energia cinetica dell'elettrone*. Si scrive solo quest'ultima poiché la più utile da un punto di vista pratico:

$$\rho(E_f) = \frac{(4\pi)^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6 c^4} p_e (T_e + m_e c^2) p_\nu E_\nu dT_e$$

Sostituendo questa formula dentro λ si può ottenere la probabilità di decadimento differenziale. Un conto più corretto, che tiene conto della presenza dell'**interazione Coulombiana** *elettrone-nucleo* porta come risultato:

$$\lambda = \frac{G_F^2 (m_e c^2)^5}{2\pi^3 \hbar} |M_{fi}|^2 f(Z, Q)$$

dove $f(Z, Q)$ è un integrale adimensionale che contiene la correzione $F(Z, Q)$ all'elemento di matrice.

Misura della massa di ν_e Come approssimazione molto buona, il Q -valore della reazione viene calcolato per massa nulla del *neutrino*, ovvero $T_{e,max} = Q$. Si può calcolarne la massa tramite il **plot di Kurie**.

Osservazione del neutrino Per ora, abbiamo visto osservazione indirette - tramite differenze di energia - del neutrino. La prima rivelazione diretta venne

fatta nel 1956 da Reines e Cowan, tramite l'uso della reazione di **decadimento β inverso**:

$$\bar{\nu}_e + p \longrightarrow e^+ + n$$

come sorgente di *anti-neutrini* venne usato un reattore nucleare. La sezione d'urto delle osservazioni del neutrino risulta molto piccola:

$$\sigma_{\delta\nu_e} \sim 5,6 \frac{G_F^2 E_\nu^2 (\hbar c)^2}{\pi}$$

Spin isotopico Poiché per le interazioni nucleari cambia poco tra *neutrone* e *protone*, nelle *interazioni forti* possiamo assumere un'unica particella *nucleone* N , che può trovarsi in due **stati di carica** p e n . Questi difatti si comportano, al pari dello *spin*, come un **grado di libertà interno**:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si può definire uno **spin isotopico** I . Per i due stati, si ha che la terza componente dell'*isospin* è:

- p : $I_3 = 1/2$
- n : $I_3 = -1/2$

Sebbene questo nuovo grado di libertà sembra che porti a degenerazione, essa è rotta dalla condizione sulla carica:

$$Q = \frac{A}{2} + I_3$$

con A il consueto *numero di massa*.

In alcuni decadimenti β , per ragioni di simmetria, può convenire usare il *tripletto isotopico* per stimare il valore dell'elemento di matrice M_{fi} - sono tutti i β^+ .

1.2.5 Cenni su emissioni gamma

Il decadimento γ consiste in un nucleo che passa da uno stato eccitato a uno meno tramite emissione fotonica. Nel *modello a shell* corrisponde al passaggio da un livello a un altro. Esso, a differenza di decadimenti α (interazioni forti) e β (interazioni deboli), è un *fenomeno elettromagnetico*, estensione del fenomeno classico dell'irraggiamento elettromagnetico dovuto a cariche accelerate.

Regole di selezione La probabilità di transizione è data dalla **Regola d'oro di Fermi**.

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

Tramite lo studio di questa probabilità si possono determinare le proprietà del potenziale di interazione V . In particolare, l'osservazione dei possibili stati finali in cui uno stato iniziale può evolversi risulta nelle **regole di transizione**:

- osservazione di $P_{i \rightarrow f} \Leftrightarrow \langle f | V | i \rangle \neq 0$
- non-osservazione di $P_{i \rightarrow f} \Leftrightarrow \langle f | V | i \rangle = 0$

Domanda: Cosa significa non-osservazione?

Dipolo elettrico Se si considera un'interazione proporzionale al *momento di dipolo elettrico* $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$, dove $q = Ze$ è la carica del nucleo. Si possono classificare gli stati del nucleo in base a *spin*, *parità* ed *energia*:

$$|E_n, J, m_J, \eta_p\rangle$$

Si ottiene che, applicando l'operatore di **parità** agli stati su cui è applicato \mathbf{d} , quest'ultimi hanno parità opposta dello stato iniziale:

$$P(\mathbf{d}|E_n, J, m_J, \eta_p\rangle) = (-\mathbf{d})\eta_p|E_n, J, m_J, \eta_p\rangle = -\eta_p(\mathbf{d}|E_n, J, m_J, \eta_p\rangle)$$

Domanda: Ma succede questo perché P cambia \mathbf{r} a $-\mathbf{r}$?

Si ottiene in questo modo una nuova **regola di selezione**: un'interazione mediata da dipolo elettrico può solo causare transizioni di parità. Viceversa, interazioni mediate da dipolo magnetico mantengono invariata la parità.

Con alcuni calcoli lunghi e noiosi, si può giungere anche a un'altra **regola di selezione**: $\Delta m = m_f - m = 0, \pm 1$. Si può così dimostrare che \mathbf{d} si comporta come un oggetto di momento angolare $\ell = 1$.

Classicamente, il più semplice esempio di fenomeno di emissione fotonica è un **dipolo oscillante**. Senza entrare nei dettagli, la potenza irradiata da un *dipolo oscillante* è:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} d^2$$

Si può trasferire questo fenomeno alla *meccanica quantistica*, ottenendo la **costante di decadimento** λ :

$$\lambda = \frac{1}{E_\gamma} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar} \frac{E_\gamma^3}{(\hbar c)^3} |\langle f|\mathbf{d}|i\rangle|^2$$

Analogamente a quanto appena fatto, si può vedere un fenomeno simile in presenza di un **dipolo magnetico**, con le rispettive *regole di selezione da rispettare* (stessa parità e $\Delta J = 0, \pm 1$). Con ΔJ più elevati si deve analizzare il fenomeno sottoforma di **multipolo**.

Effetto Mössbauer Come si è visto in relatività, per una transizione di stati, l'energia fotonica di emissione è sempre inferiore all'energia fotonica di assorbimento; si ha:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E}{M}$$

Nel caso di particolari materiali, come i reticoli cristallini, M può risultare grande: si ha quindi l'**effetto Mössbauer**.

1.2.6 Fattori di forma nucleari e dimensioni dei nuclei

Il metodo più efficace per studiare la struttura interna di un nucleo è lo **scattering elettronico**, inventato da *Robert Hofstadter* per misurare la dimensione dei nuclei atomici. Successivamente questa tecnica portò alla scoperta di particelle più elementari, come *quark* e *gluoni*.

Scattering su potenziale fisso Si considera la **regola d'oro di Fermi**. Sostituendo nell'elemento matriciale le autofunzioni di particella libera, si ottiene:

$$\langle f | U | i \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \frac{1}{V} e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r})$$

definendo $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f = p(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta - 1)$ come il **momento trasferito**, si ottiene:

$$\langle f | U | i \rangle = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \tilde{U}(\mathbf{q})$$

dove \tilde{U} è la *trasformata di Fourier* del potenziale.

Si noti che nel caso si **scattering su potenziale fisso**, l'energia finale e quella iniziale coincidono, quindi \mathbf{q} coincide col *tetramomento trasferito* $\mathbf{q} = (0, \mathbf{q})$.

Quindi, la *probabilità di transizione per unità di tempo* sarà:

$$P = \frac{1}{V^2} \left| \tilde{U}(\mathbf{r}) \right|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V p_f^2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp_f}{dE_f} = \frac{1}{V} \frac{\left| \tilde{U}(\mathbf{r}) \right|^2}{4\pi^2} \frac{\rho_f d\rho_f}{dE_f} d\Omega$$

Ricordando la definizione di **sezione d'urto differenziale**, si trovare una relazione tra la probabilità appena calcolata e quest'ultima:

$$\frac{dN}{dt} = I n_T dz \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Poiché nel nostro sistema **una sola particella può cambiare stato**, deve seguire che $\frac{dN}{dt} = P$. Dunque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left| \tilde{U}(\mathbf{r}) \right|^2}{4\pi^2} \frac{1}{\nu} \frac{p^2 dp}{dE}$$

dove abbiamo posto che, per **scattering elastico**, $\nu_i = \nu_f = \nu$, $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f = \mathbf{p}$ e $E_i = E_f = E$; e che l'intensità di corrente $I = 1/(dz/\nu_i)$ e $n_T = 1/V$.

Fattore di forma Nel caso di distribuzioni di carica generica $\rho(\mathbf{r})$, si può usare il potenziale Coulombiano per calcolare l'elemento di matrice presente nella distribuzione di probabilità per unità di tempo (e quindi anche nella sezione d'urto differenziale associata):

$$U(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \frac{e^2}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \langle f | U | i \rangle &= \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \int d\mathbf{r}' \frac{e^2}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') e^{-\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \int d\mathbf{r} \frac{e^2}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{1}{V} \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') e^{-\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \end{aligned}$$

ovvero si ha che $\tilde{U}(\mathbf{q}) = \tilde{U}_{puntiforme}(\mathbf{q}) \cdot F(\mathbf{q})$, dove $F = \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') e^{-\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}$ è detto **fattore di forma**.

Nel caso lo *scattering* non avvenga in un punto fisso, all'interno del *fattore di forma* compare un termine di propagazione dell'onda.

Assumendo che il fattore di forma sia a **simmetria sferica**, ovvero che $F(\mathbf{q}) = F(q^2)$, il primo termine non banale di uno sviluppo in serie di potenze è:

$$-\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^2 = -\frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle$$

Sezioni d'urto con spin Come abbiamo visto, la *sezione d'urto di Rutherford* non tiene conto della presenza o meno di *spin*; se ne si considera la presenza, si ottiene la **sezione d'urto di Mott**:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Se si prende un bersaglio puntiforme con *spin* $1/2$ si ottiene invece la **sezione d'urto di Dirac**:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[1 + \frac{Q^2}{2m_N^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Nel caso più generale di particella estesa con *spin* $1/2$ si ottiene la **formula di Rosenbluth**:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rosenbluth} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[\frac{W_2(Q^2)}{4m_N^2} + \frac{W_1(Q^2)}{2m_N^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

dove W_1 e W_2 sono delle funzioni che dipendono da due fattori di forma adimensionali - legati alla carica e al *momento magnetico anomalo*.

1.3 Le interazioni nucleari

1.3.1 Spin e momenti magnetici

Una particella può possedere un *momento angolare orbitale* L e un **momento angolare intrinseco**, o di **spin** s . Corrisponde a un grado di libertà interno delle particelle. Quantisticamente, l'**operatore di spin** si comporta come un momento angolare.

Per una particella si può inoltre definire sempre un *momento angolare totale* $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$.

Gli autovalori associati allo spin sono $s^2 |\psi\rangle = s(s+1)\hbar^2 |\psi\rangle$.

La funzione d'onda in coordinate radiali di una particella sarà "etichettata" da dei **numeri quantici**, ovvero i *due numeri quantici radiali*, il *momento angolare orbitale* l_z lungo l'asse z e lo *spin* s_z lungo l'asse z :

$$\psi_{n,l,m,s_z}$$

Nota: a differenza del *momento angolare orbitale*, gli stati di *spin* possono assumere solamente valori interi o seminteri.

Spin $1/2$ In uno spazio bidimensionale di $spin\ 1/2$ si possono definire gli **operatori di spin** tramite le **matrici di Pauli**:

$$s_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$$

dove σ_i è la i -esima matrice di Pauli. Questi operatori soddisfano le regole di commutazione dei momenti angolari.

Una particella con momento così definiti ha che $s_z = \pm 1/2$, mentre s^2 presenta come autovalori 1 o 0 (stati di tripletto o singoletto).

Fermioni e Bosoni Poiché le particelle possono assumere $spin$ intero o semintero, si possono distinguere in due categorie tramite questa proprietà:

- se hanno $spin$ intero sono dette **bosoni** (come il fotone) - e quindi la **funzione d'onda** globale deve essere **simmetrica**
- se hanno $spin$ semintero sono dette **fermioni** (come gli elettroni) - e quindi la **funzione d'onda** globale deve essere **antisimmetrica**

Con una rotazione di 2π i *bosoni* non cambiano, mentre i *fermioni* cambiano di segno.

Un corollario importante di questa trattazione è il **principio di esclusione di Pauli**: *due fermioni identici non possono avere gli stessi numeri quantici*.

Momento magnetico In meccanica quantistica una particella con $spin\ s$ presenta un **momento magnetico**; classicamente questo si esprime come:

$$\mu = \frac{Q}{2M} s$$

poiché lo $spin$ è quantizzato, in meccanica quantistica risulta essere:

$$\mu = g \frac{Q}{2M} s$$

dove g , detto **fattore giromagnetico**, dipende dalla particella che si sta analizzando.

Una trattazione relativista, tramite l'**equazione di Dirac**, mostra che una **particella elementare** deve avere *momento giromagnetico* $g = 2$; si vede sperimentalmente che questo vale per l'**elettrone**, mentre non risulta vero *protone* e *neutrone*: questa è una prima evidenza che devono essere composti da altre particelle elementari.

1.3.2 Interazione nucleone-nucleone

La *Bethe-Weizsäcker* descrive numerose proprietà dei nuclei, ma non presenta nessuna analisi di $spin$ e altri *numeri quantici*; oltre che strutture nelle energie di legame. Studiamo l'interazione tra diversi nucleoni per capire dove la *Bethe-Weizsäcker* smetta di valere.

Il deutone Il più semplice stato legato è il **deutone**, ovvero $N = 1$ e $Z = 1$; viene indicato con ${}^2\text{H}$ o d o D . Lo stato è caratterizzato da una debole *energia di legame* B/A e **non** presenta stati legati.

Si può approssimare il potenziale del deutone a quello di una **buca di potenziale** del tipo

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Si risolve l'**equazione di Schrödinger** radiale tramite separazione di variabili, ovvero $\psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$. L'equazione differenziale da risolvere è quindi:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} - E \right) u = 0$$

dove μ è la *massa ridotta*. La soluzione è di tipo *sinusoidale* dentro la buca ed *esponenziale* fuori dalla buca.

Per $R = 2,1$ fm e $E = -2,22$ MeV si trova che la buca ha profondità $V_0 \simeq 35$ MeV.

La probabilità di trovare un nucleone al di fuori della barriera è $P(r, r+dr) = [\dots] = |u(r)|^2 dr$, ovvero $P \propto e^{-r/R_0}$: cresce esponenzialmente al di fuori delle scale di lunghezze di $R_0 = \frac{1}{2k_2} \simeq 2,2$ fm.

La parità di spin del neutrone è $J^P = 1^+$; gli spin dei due nucleoni possono accoppiarsi per fare *spin totale* $s = 1$ o $s = 0$; per ottenere il **momento angolare totale** $J = 1$ si possono quindi avere 3 combinazioni di L e S :

- *stati s*: $S = 1, L = 0$
- *stati p*: $S = 0$ o $S = 1, L = 1$
- *stati d*: $S = 1, L = 2$

Domanda: ma come fanno gli **stati d** a ridare $J = 1$?

La parità è $P(d) = \eta_n \eta_p (-1)^L$; per la convenzione usuale si pone $\eta_n = \eta_p = 1$. Da questo si ha che, per $L = 1$ o $L = 2$ è permesso solo lo stato $S = 1$.

Poiché non esiste uno stato legato O^+ , si può dedurre che il potenziale debba dipendere fortemente dallo *spin*. Si può quindi introdurre un termine di *spin*, del tipo $s_1 \cdot s_2$, che diventa per i due valori di *spin totale*:

- $S = 1$ si ha

$$s_1 \cdot s_2 = \frac{\hbar^2}{2} (S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)) = \frac{1}{4}$$

- $S = 0$ si ha

$$s_1 \cdot s_2 = -\frac{3}{4}$$

Il potenziale si può dunque **separare** nello stati di singoletto e tripletto:

$$V(r) = \left(s_1 \cdot s_2 - \frac{1}{4} \right) V_1(r) + \left(s_1 \cdot s_2 + \frac{3}{4} \right) V_3(r)$$

Come si vede da queste considerazioni, poiché nello stato $L = 0$ una coppia *neutrone-neutrone* (o *protone-protone*) non può essere nello stato $S = 1$ (per fermioni identici, la funzione d'onda deve essere antisimmetrica), **non può esistere uno stato legato nn o pp** .

Il **momento di dipolo magnetico** del deutone con $S = 1$ è dato dalla somma dei *dipoli magnetici* delle componenti:

$$\mu_s = g_s \mu_N S = g_p \mu_N s_p + g_n \mu_N s_n$$

Per calcolare il **momento giromagnetico** totale del deutone, si possono proiettare s_p e s_n sul vettore di *spin totale*:

$$g_s S^2 = g_p (s_p \cdot S) + g_n (s_n \cdot S) = g_p (s_p^2 + s_p \cdot s_n) + g_n (s_n^2 + s_n \cdot s_p)$$

sostituendo i valori di *spin*, per entrambi $1/2$, si ottiene:

$$g_s = \frac{g_p + g_n}{2}$$

Tramite questo valore si può quindi calcolare il *momento magnetico*. Le osservazioni sperimentali mostrano però come ci sia una leggera discrepanza dal valore così ottenuto e i dati sperimentali: questo è dovuto a un piccolo *momento magnetico* legato al *momento angolare orbitale*: il potenziale di interazione non può quindi essere completamente centrale.

Una distribuzione di carica in moto produce difatti un momento magnetico del tipo:

$$\mu_L = \frac{q\hbar}{2m} L$$

Si può quindi ripetere il calcolo di prima usando J al posto di S .

Potenziale tensoriale Sebbene il potenziale non possa essere solamente centrale, deve essere comunque invariante per rotazioni. La forma che si ottiene, considerando anche l'interazione tra i momenti magnetici di *protone* e *neutrone* è:

$$V(r) = \left(s_1 \cdot s_2 - \frac{1}{4} \right) V_1(r) + \left(s_1 \cdot s_2 + \frac{3}{4} \right) V_3(r) + V_T(r) \left[3 \frac{(s_1 \cdot \mathbf{r})(s_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (s_1 \cdot s_2) \right]$$

⁵ Tramite la formula del *campo generato da un dipolo magnetico* e ricordando che l'energia di un campo in un momento magnetico è $V(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$, si trova che $V_T \propto 1/r^3$.

Un calcolo accurato della **sezione d'urto totale** per una *particella quantistica* riporta:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

⁵ s_1 ed s_2 , gli operatori di *spin* delle due particelle, sono quantità **vettoriali**.

ovvero risulta scomposta in infinite *sezioni d'urto parziali*; ognuna di queste deve inoltre essere limitata:

$$\sigma_\ell \leq \frac{4\pi}{k^2}(2\ell + 1)$$

Da un punto di vista pratico, si può considerare solamente un numero limitato di *onde parziali*.

Data una particella di quantità di moto $p = \hbar k$ e momento angolare $L^2 = \hbar^2 \ell(\ell + 1)$, questa avrà un **parametro d'impatto** b - ovvero passerà a una certa distanza dal centro di scattering. Se il potenziale è in grado di influenzare il moto fino a un certo raggio R , avrà effetto solo sugli stati di momento angolare $\ell \hbar = pR$, da cui $\ell = Rk$. **Domanda:** Non capisco da dove salti fuori l'uguaglianza $\ell \hbar = pR$.

La *sezione d'urto* massima diventa quindi:

$$\sigma \leq \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{kR} (2\ell + 1) = \frac{4\pi}{k^2} (kR + 1)^2 = 4\pi (R + \lambda)^2$$

dove λ è nota come **lunghezza d'onda Compton**.

Interazioni nucleone-nucleone a basse energie Si possono ottenere altre informazioni sulle interazioni forti dallo *scattering* tra due nucleoni. A basse energie contribuiscono infatti solo collisioni con *momento angolare orbitale* nullo $L = 0$. Si può approssimare la sezione d'urto indipendentemente dall'angolo solido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{1 + \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2}$$

con $k = \sqrt{2\mu_N E}/\hbar$ e a , detta *lunghezza di scattering*, dipende dallo stato di *tripletto* o *singoletto*.

Come si nota, si ha quindi che **le interazioni forti non dipendono dalla carica**.

Interazione spin-orbita Si suppone che il potenziale *nucleone-nucleone* $V_{SO}(r)$ sia di tipo **attrattivo**. Dati due nucleoni, entrambi con uno stesso *spin*, a seconda della posizione rispetto al target osserveranno una forza repulsiva o attrattiva; quello che si nota è che però è che vengono deviati nella stessa direzione se presentano uguale *spin*.

Come risultato dello scattering si osserva inoltre una **polarizzazione** dei nuclei uscenti:

$$P(\theta) = \frac{N_\uparrow(\theta) - N_\downarrow(\theta)}{N_\uparrow(\theta) + N_\downarrow(\theta)}$$

Domanda: Non ho ben capito da dove salti fuori questa cosa. Chiedere chiarimenti.

Si dimostra che un fenomeno di questo tipo si può descrivere con un potenziale del tipo:

$$V_{SO}(r) \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = V_{SO}(r) \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

dove l'ultimo termine $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ rappresenta l'**interazione spin-orbita**.

All'aumentare dell'energia, ci si aspetterebbe che il potenziale di interazione

nucleone-nucleone diminuisca sempre più. Con qualche approssimazione, la deflessione si può calcolare come:

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{F \Delta t}{p} = \frac{(V_0/R)(R/v)}{p} = \frac{V_0}{pv} = \frac{V_0}{2(\frac{1}{2}mv^2)}$$

Ovvero si ha che $\theta \propto 1/E$.

Quello che invece si nota sperimentalmente è che c'è un grosso picco di diffusione all'indietro.

L'unica spiegazione di questo fenomeno è che l'**interazione** tra i due nucleoni sia **mediata da una particella di scambio**. Essa deve essere carica, deve scambiare la natura delle particelle uscenti ma deve mantenere un basso momento trasferito.

La sua creazione si può giustificare dicendo che, a causa del **principio di indeterminazione**, $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, ovvero per un tempo Δt finito, non si può assumere la conservazione dell'energia. Nel caso di interazioni nucleari, questa particella dovrebbe corpore almeno una distanza di r_0 , ovvero $\Delta t = \frac{r_0}{c}$.

Le masse permesse sono quindi:

$$m_X c^2 \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar c}{r_0} \sim 200 \text{ MeV}$$

Si può quindi giungere al seguente **potenziale**:

$$V(r) = \frac{g_\pi^2 m_X}{3} \left[\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + S_{1,2} \left(1 + \frac{3R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} \right) \right] \frac{e^{-r/R}}{r/R}$$

con

$$S_{1,2} = 3 \frac{(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)$$

e $R = \frac{\hbar}{m_X c}$. Inoltre g_π è detta **costante di accoppiamento**.

Risonanze La sezione d'urto è massima ad energie E_R tale che $\delta_\ell = \pm \frac{\pi}{2}$ - si ricordi la sezione d'urto totale per una *particella quantistica*. Sviluppando il $\sin^2(\delta_\ell)$, e definendo la costante $\Gamma = 2 \left(\frac{\partial \cot \delta_\ell}{\partial E} \right)^{-1}$ si ottiene la **sezione d'urto risonante**:

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2/4 + (E - E_R)^2}$$

Il fenomeno delle risonanze è molto comune nei fenomeni di *scattering*, e spesso coincide con la **creazione di nuove particelle stabili**, con somma delle masse pari all'energia del centro di massa e con un proprio valore di *spin*. Si può identificare il fattore Γ come la *lunghezza totale di decadimento*; ovviamente, in presenza di più canali si identifica $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$.

Nel caso la risonanza venga prodotta con *spin* ℓ da due particelle di *spin* s_1 e s_2 la formula per la **sezione d'urto di risonanza** varia leggermente.

1.3.3 Il modello a shell

Le informazioni ricavate sul potenziale di interazione *nucleone-nucleone* vengono usate concretamente all'interno del **modello a shell**: in esso, si assume che

ogni nucleone nel nucleo sia sottoposto al potenziale efficace prodotto dagli altri nucleoni. L'obiettivo principale di questo modello è spiegare la presenza di nuclei fortemente stabili - *valle di stabilità*.

Dalla meccanica quantistica si sa che l'energia dell'atomo di idrogeno dipende dalla somma $n + \ell$, ed è:

$$E_{n,\ell} = \alpha^2 \frac{m_e c^2}{2(n + \ell)^2}$$

si hanno quindi stati degeneri con diverso momento angolare. Questo degenerazione viene rimossa se si considerano potenziali $\propto 1/r$ - spesso come *perturbazioni*. In questo caso, l'**energia di legame** e la **dimensione atomica** presentano delle transizioni brusche.

Potenziale nucleare Il potenziale di base riflette la densità di materia all'interno del nucleo:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

dove V_0 è la profondità della buca, R la dimensione del nucleo e a la dimensione dello strato superficiale.

Questo tipo di potenziale contiene *salti* a certi livelli di nucleoni, detti **numeri magici**, ma non coincidono con le osservazioni sperimentali.

Interazione spin-orbita Un'analisi dettagliata del potenziale richiede di vedere come si comporti l'interazione dello *spin* e del *momento angolare orbitale* tra i diversi nucleoni.

Si consideri un nucleone generico: la presenza di altri nucleoni, con *momento angolare orbitale* complessivo L , fa sì che questo veda un *momento magnetico* $\mu_L \propto \mu_N L$. Si può quindi approssimare il sistema nel seguente modo: il "nostro" nucleone al centro, e il resto dei nucleoni che *orbitano* con momento L intorno ad esso.

Questo *momento* L interagirà con lo *spin* del nucleone per dare un termine energetico del tipo $U \propto -L \cdot S$. Poiché un nucleone (protone o neutrone) possiede *spin* $\pm 1/2$, si avrà che si può dividere ogni *momento angolare orbitale totale* J in due "sottolivelli":

$$J^+ = \ell + \frac{1}{2} \quad J^- = \ell - \frac{1}{2}$$

Si può dimostrare che l'interazione tra due momenti magnetici - considerando $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ e scrivendo il campo generato da un dipolo magnetico - è:

$$U = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{r^3} \right]$$

Da questa analisi, **non so come**, si ha che risulta energeticamente favorevole allineare *spin* e *momento angolare*:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]$$

da cui si ha una separazione dei livelli:

$$\Delta(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) = 2 \left(\ell + \frac{1}{2} \right)$$

Domanda: Non ho capito da dove salti fuori che questa cosa qua è la separazione tra i livelli

Come si è visto per l'interazione *nucleone-nucleone*, si ha sempre un'energia di **pairing** dovuta allo *spin*: affinché questa sia minima, viene favorito l'anti-allineamento di due *spin*, in modo tale che lo spin totale sia 0. Tutti i nuclei *pari-pari* avranno nello stato fondamentale $J = 0$.

Momento di dipolo magnetico Con un discorso simile a quello fatto per il **deutone**, si può calcolare il **momento di dipolo magnetico** per i nucleoni con A dispari: per questi infatti viene determinato unicamente dal **nucleone spaiato**. Si ha:

$$\begin{aligned} j = \ell + \frac{1}{2} \quad g &= \frac{1}{j} \left[g_\ell \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s \right] \\ j = \ell - \frac{1}{2} \quad g &= \frac{1}{j} \left[g_\ell \frac{j(j+3/2)}{j+1} - \frac{1}{2} \frac{j}{j+1} g_s \right] \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\mu = g j \mu_N$$

Eccitazione collettiva Per nuclei più grandi, il modello a *shell* perde la sua validità predittiva; in questo caso, infatti, si ha che l'eccitazione dei nucleoni più esterni può modificare il movimento degli altri nucleoni. Si devono in questo caso considerare termini legati al **moto collettivo** $E = (n + 1/2) \hbar \omega$ e termini legati al **moto rotazionale** $E = L^2/2I$.

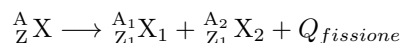
1.4 Applicazioni: Fissione e Fusione Nucleare

1.4.1 Fissione nucleare

La fissione nucleare avviene su atomi pesanti, ovvero con massa $A \geq 120$: nuclei pesanti si possono scindere in nuclei più leggeri liberando energia. Questo processo per la maggior parte non è spontaneo, poiché vi è comunque una barriera di potenziale da superare - che viene superata come al solito tramite effetto tunnel.

La *fissione nucleare* può però venire indotta in diversi modi, come interazione con neutroni o presenza di materiali fissili.

Nel caso più semplice la fissione produce due *frammenti*:



L'energia liberata si trova, come usuale, tramite la differenza di massa:

$$Q_{fissione} = M(A, Z) - M(A_1, Z_1) - M(A_2, Z_2)$$

Affinché la fissione possa avvenire deve valere che $Q_{fissione} > 0$. Alternativamente, si può calcolare l'energia rilasciata come differenza tra le energie di legame, calcolate tramite la *formula di Bethe-Weizsäcker*:

$$Q_{fissione} = B(A, Z) - B(A_1, Z_1) - B(A_2, Z_2)$$

Processo di fissione Possiamo modellizzare il processo di fissione come la separazione di una *goccia di liquido nucleare*; chiamando $E = B(A, Z)$ l'energia di legame della *goccia* iniziale, alla fine si avrà che:

$$E = B(A_1, Z_1) + B(A_2, Z_2) + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Analizziamo quindi come variano i termini della *Bethe-Weizsäcker*.

- $a_2 A^{2/3}$: la goccia ha una deformazione, da sferica a ellissoidale. Usando un parametro ε che non modifichi il volume, si ha:

$$a = R(1 + \varepsilon) \quad b = \frac{R}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$$

per cui la superficie diventa:

$$S = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2\right)$$

Da questo si ha che il termine nella *Bethe-Weizsäcker* diventa:

$$a_2 A^{2/3} \longrightarrow a_2 A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2\right)$$

aumenta l'energia superficiale.

- $a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$: si ha una variazione di energia elettrostatica. In generale, infatti, dati due elementi di carica ρdV_1 e ρdV_2 , l'energia tra essi è:

$$U = \frac{1}{2} \int dV_1 \int dV_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) \frac{1}{r_{12}}$$

Se per la sfera questo calcolo è abbastanza semplice - e ridà il conosciuto potenziale Coulombiano -, nel caso di *ellissoide prolisso*, tramite passaggi complicati, si giunge a:

$$U = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5}\right)$$

Si ha quindi una **diminuzione dell'energia di legame**:

$$a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \longrightarrow a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5}\right)$$

Dalle considerazioni precedenti, si ha che la differenza di energia con un nucleo sferico per la *Bethe-Weizsäcker* è:

$$\Delta E = \frac{2}{5} a_2 A^{2/3} \left(1 - \frac{a_3}{2a_2} \frac{Z^2}{A}\right) \varepsilon^2$$

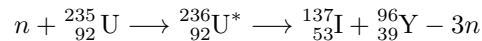
Un nucleo sferico è stabile se $\Delta E > 0$. Ovvero, introducendo dei valori approssimati per le costanti, si ha che la **condizione di stabilità** è:

$$\frac{Z^2}{A} \lesssim 50$$

Questa condizione è spesso verificata anche per nuclei pesanti, per cui la *fissione spontanea* è un fenomeno estremamente raro.

Fissione indotta Per avere un'apprezzabile produzione di energia, non si può ricorrere alla *fissione spontanea*. Il miglior metodo è la **fissione indotta da neutroni**, che permette una stabile reazione a catena - difatti si riduce la barriera di potenziale da superare.

Un esempio di *fissione indotta da neutroni* può essere fatto con *Uranio-235*:



con un $Q_{\text{fissione}} \simeq 183 \text{ MeV}$. Gli elementi creati in questa reazione tendono poi a loro volta a decadere - su differenti canali.

Nel caso dell'*Uranio-235* (ma vale in generale), l'assorbimento di un *neutrone lento* (ovvero al limite fermo) fa sì che si formi un nucleo di ${}^{236}_{92}\text{U}$ (rilasciando 6,3 MeV); questo diventa poi in uno stato eccitato - l'energia per andare in uno stato eccitato è di 5,7 MeV, ovvero inferiore di quella rilasciata nella creazione del nucleo. Lo stato eccitato presenta una barriera di potenziale più bassa, ovvero la probabilità che, tramite *effetto tunnel* il nucleo vada in contro a fissione, è più alta - si ricordi che l'andamento è esponenziale.

Lo stesso ragionamento non vale però con *Uranio-238*, l'isotopo più abbondante in natura: in esso, l'energia di cattura non è sufficiente per generare uno stato eccitato. Questo isotopo è comunque utile dentro i reattori: può controllare il numero di neutroni che possono generare altre fissioni, permettendo che si abbia una reazione a catena controllata.

${}^{235}\text{U}$ non è l'unico materiale fissile utilizzato: esistono una serie di reattori nucleari, detti **autofertilizzanti**, che producono ${}^{233}\text{U}$ e ${}^{239}\text{Pu}$ tramite, rispettivamente, *fertilizzazione* di ${}^{238}\text{U}$ e ${}^{232}\text{Th}$.

Reazione a catena Affinché si possa avere una costante produzione di energia, si deve mantenere una reazione a catena all'interno del combustibile nucleare: deve essere prodotta, tramite fissione, una quantità di neutroni tali affinché la reazione possa andare avanti.

Ad avvenuta fissione, infatti, oltre a radiazione β e γ , che viene assorbita sotto forma di calore dal reattore, vengono emessi **neutroni ritardati**: questi possono o uscire dalla zona di reazione, o venire catturati da nuclei che si eccitano ed emettono solo fotoni, oppure produrre un'altra fissione nucleare.

L'aspetto critico di un reattore nucleare è il **controllo della reazione a catena**: se non ci sono abbastanza neutroni, il reattore si spegne; se ce ne sono troppi, il reattore esplode.

La legge che descrive il mantenimento della reazione a catena è:

$$\frac{dN}{dt} = N(t) \frac{1}{\tau} (\nu q - 1)$$

dove τ è il tempo medio affinché un neutroni produca un'altra fissione, ν è il numero di neutroni prodotti in una fissione e q la probabilità che un neutrone possa produrre un'altra fissione.

La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$N(t) = N_0 e^{\frac{1}{\tau}(\nu q - 1)t}$$

Se $\nu q < 1$, si è in uno stato *sottocritico* (non ci sono pericoli); per $\nu q \geq 1$ si va in stati della reazione *critici* o *supercritici*, ovvero si ha il rischio di un'esplosione del reattore.

In una fissione nucleare si può definire una **sezione d'urto** σ ; ⁶. se una sostanza è inoltre presente con differenti isotopi, ognuno con frazione f_i , si può definire una *sezione d'urto media* come:

$$\bar{\sigma} = \sum_i f_i \sigma_i$$

Da questa, ricordato la definizione di *libero cammino medio* $\lambda = \frac{1}{n_T \bar{\sigma}}$, dove n_T è il numero di atomi per unità di volume, si può calcolare il tempo medio tra due collisioni:

$$t_c = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\lambda}{\beta c}$$

dove $\beta = \sqrt{\frac{2T}{m_n}}$, con T *energia cinetica del neutrone lento*.

Da queste considerazioni si ha che la probabilità che avvenga una fissione è:

$$p_{fiss} = \frac{\sigma_{fiss}}{\sigma_{TOT}}$$

Chiamando $p_{n,\gamma} = \frac{\sigma_{n,\gamma}}{\sigma_{TOT}}$ la probabilità che il neutrone produca solamente un'emissione fotonica, si ha che la probabilità di **indurre** una fissione nucleare:

$$q = \frac{p_{fiss}}{p_{fiss} + p_{n,\gamma}}$$

Analogamente vale per *neutroni termici* (ovvero ad alte energie); la differenza sostanziale è che la probabilità q di indurre fissione è molto più alta $\simeq 50\%$.

Massa critica Come si è visto, un *neutrone* effettua più collisioni prima di essere catturato e indurre fissione; il numero medio di tali collisioni:

$$\bar{n} = \frac{1}{p_{n,\gamma} + p_{fiss}}$$

La distanza media percorsa dal *neutrone* n sarà quindi:

$$\langle l \rangle = \lambda \sqrt{\bar{n}}$$

dove λ è il *libero cammino medio*, come definita sopra.

Se un blocco di materiale ha dimensioni inferiori di $\langle l \rangle$, allora la reazione a catena non potrà mai avere luogo. Si ha infatti una lunghezza minima, e quindi un *volume minimo* e una **massa critica**, sotto le quali la reazione non può avvenire.

Rallentamento dei neutroni Nel caso di neutroni veloci il meccanismo più efficace è lo **scattering anelastico**, ovvero del tipo $n + A \rightarrow A^* + n$. Nel computo energetico si ha quindi anche l'energia del livello eccitato finale, ovvero $T_n = T_A + E_A^* + T'_n$ - da cui $T'_n \simeq T_n - E_A^*$. Nel caso più comune di neutroni lenti, il metodo migliore è lo **scattering elastico**. Matematicamente, si deve studiare l'urto elastico di un neutrone su un

⁶La sezione d'urto per totale σ_{TOT} e quella della fissione σ_{fiss} sono dei valori tabulati sperimentalmente

nucleo A in processo *non-relativistico*; il modo migliore per procedere è quello di analizzare il fenomeno nel *sistema di riferimento del centro di massa*.

Da un calcolo non troppo complicato si ha che il rapporto tra le energie dopo e prima dell'urto sono:

$$\frac{E_3}{E_1} = \frac{A^2}{A^2 + 1} + \frac{1}{A^2 + 1} + 2\frac{A}{A^2 + 1} \cos \theta^*$$

Nel caso di *scattering isotropo*, si ha che:

$$\frac{dN}{d \cos \theta^*} = \frac{1}{2}$$

ovvero costante. La distribuzione delle energie è:

$$\frac{dN}{dE_3} = \frac{dN}{d \cos \theta^*} \frac{d \cos \theta^*}{dE_3}$$

con $\frac{d \cos \theta^*}{dE_3} = \frac{(A+1)^2}{A} \frac{1}{E_1}$. Chiamando $x = E_3/E_1$, si ha:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{(A+1)^2}{4A}$$

ovvero **dopo l'urto la distribuzione di energia del neutrone è uniforme**.

Il valor medio sarà:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x_{max} + x_{min}) = \frac{A^2 + 1}{(A + 1)^2}$$

Da questa formula si vede che materiali più leggeri tendano a essere più ottimali per diminuire l'energia del neutrone.

Ci si può chiedere *quante collisioni siano necessarie per raggiungere un'energia termica*:

$$\frac{E_n}{E_0} = \prod_{i=1}^n \frac{E_i}{E_{i-1}}$$

Si prende, per semplicità, il logaritmo di questa espressione:

$$\ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^n \frac{E_i}{E_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{E_i}{E_{i-1}}\right)$$

Poiché abbiamo visto prima che la distribuzione delle energie è costante in media:

$$\left\langle \ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) \right\rangle = n \left\langle \ln\left(\frac{E_f}{E_i}\right) \right\rangle$$

da cui si ottiene:

$$n = \frac{\left\langle \ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) \right\rangle}{\left\langle \ln\left(\frac{E_f}{E_i}\right) \right\rangle}$$

Calcolando esplicitamente il valor medio del logaritmo, si ottiene:

$$\left\langle \ln\left(\frac{E_f}{E_i}\right) \right\rangle = \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A+1}{A-1}\right) - 1$$

Le formule appena trovate permettono di trovare quale materiale sia un miglior **moderatore**. In realtà, i materiali devono essere confrontati anche in base alle **sezioni d'urto elastiche** e di **assorbimento**.

Sicurezza del reattore Una condizione molto importante nel reattore nucleare è la variazione del parametro $k = \nu q$ con la quantità di materiale refrigerante. Un reattore si ritiene sicuro se:

$$\frac{dk}{dT} < 0$$

1.4.2 Fusione nucleare

Il processo di **fusione nucleare** è alla base della produzione di energia da parte delle stelle, come il Sole.

Ci sono diverse reazioni che permettono la fusione all'interno del sole; le sequenze di catene principali sono:

- ${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \longrightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$. Il Q valore di questa reazione è:

$$Q = 2m({}^1\text{H}) - m({}^2\text{H}) - 2m_e \simeq 0.42 \text{ MeV}$$

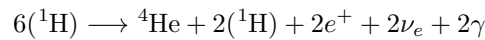
- ${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \longrightarrow {}^3\text{He} + \gamma$. Il Q valore di questa reazione è:

$$Q = m({}^1\text{H}) + m({}^2\text{H}) - m({}^3\text{He}) \simeq 5.49 \text{ MeV}$$

- ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + 2({}^1\text{H})$. Il Q valore di questa reazione è:

$$Q = 2m({}^3\text{He}) - m({}^4\text{He}) - 2m({}^1\text{H}) \simeq 12.86 \text{ MeV}$$

Eseguendo due volte le prime due reazioni e poi la terza si ottiene:



con $Q \simeq 24.68 \text{ MeV}$.

Conoscendo la massa, la potenza irradiata e il numero di cicli di fusione al secondo del sole, e considerando che in ogni ciclo "brucia" 4 atomi di idrogeno, si può stimare la vita del sole:

$$T = \frac{N_H}{dN_H/dt} \simeq 10^{11} \text{ yr}$$

Barriera Coulombiana Affinché i protoni vadano incontro a fissione - primo stadio della reazione a catena - devono superare la barriera di potenziale Coulombiana; dati due nuclei, X e Y:

$$V = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_X Z_Y}{R_X + R_Y}$$

Con la statistica di *Maxwell-Boltzmann* si può calcolare la quantità di protoni che posseggono abbastanza energia per superare la barriera:

$$\frac{dN}{dv} = N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_p}{kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_p v^2}{kT}\right)$$

Dal calcolo si giunge che la frazione di *protoni* che hanno $E > V_{pp}$, dove V_{pp} è il potenziale Coulombiano per due protoni, è:

$$f = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{V_{pp}}{kT}}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{V_{pp}}{kT}}\exp\left(-\frac{V_{pp}}{kT}\right)$$

Nel caso del sole, un calcolo diretto fa vedere che $\log_{10}(f) \simeq -282$, ovvero non esistono praticamente protoni non così tanta energia da superare la barriera di potenziale.

L'unico modo per cui quindi possa avvenire la fusione è l'**effetto tunnel** quantistico. La sezione d'urto effettiva è:

$$\sigma(E) = e^{-2G}\sigma_0(E)$$

dove G è lo stesso **fattore di Gamow** che entra nel *decadimento* α e σ_0 è la sezione d'urto in assenza di potenziale Coulombiano; la probabilità di interazione è quindi:

$$\lambda = n_p v \sigma(E)$$

dove $v = \sqrt{2E/m_p}$ è la velocità e n_p è la *densità di protoni*. Il **tasso di interazioni per unità di volume**:

$$\frac{dn_{int}}{dt} = \eta_p(E) \sqrt{\frac{2E}{m_p}} e^{-2G(E)} \sigma_0(E) n_p dE$$

Si noti che $\eta_p(E)$ può essere calcolato con la *statistica di Boltzmann*. Integrando su dE si ottiene:

$$\frac{dn_{int}}{dt} = n_p^2 \langle \sigma v \rangle$$

dove il prodotto $\langle \sigma v \rangle$ prende il nome di **reattività**.

Il sole inizia con un'interazione molto debole $\sigma \sim 10^{-44}$ cm; questa è compensata dal volume e dall'alta densità di protoni. Nei processi artificiali si devono avere tassi d'interazione più forti, ovvero raggiungere temperatura molto più elevate - nell'ordine dei *miliardi di Kelvin* per avere $\sigma \sim 10^{-26}$ cm.

Neutrini solari La rilevazione dei neutroni solati avviene con un processo simile agli *anti-neutrini*:



Capitolo 2

Particelle e interazioni

2.1 Particelle fondamentali

2.1.1 Equazione di Klein-Gordon

La generalizzazione relativistica dell'**equazione di Schrödinger** è nota come **equazione di Klein-Gordon**, dalla quale si intuisce immediatamente la necessità dell'esistenza dell'antimateria.

L'equazione Come per l'*equazione di Schrödinger* si utilizza l'uguaglianza $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, con $E = \frac{p^2}{2m}$, in relatività generale si può utilizzare il **tetravettore energia-impulso**:

$$p = (E, \mathbf{p})$$

con l'identità operatoriale:

$$p_\nu = i\hbar \partial_\nu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

E ricordando la relazione tra energia e momento - norma di *Minkowski* del tetramomento:

$$p^2 = p^\nu p_\nu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

Sostituendo si ottiene l'**equazione di Klein-Gordon**:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0$$

Soluzioni: onde piane Si cercano le soluzioni come delle **onde piane**, ovvero nella forma $\phi = N e^{-ip \cdot x}$, dove N è una costante di normalizzazione. La si può ricavare tramite la condizione del tetramomento:

$$(-E^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) \phi = 0$$

Dato un certo valore del momento \mathbf{p} , esistono due soluzioni:

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E_p$$

dove E_p è definita positiva. Si hanno quindi due tipi di soluzioni:

- A energia positiva:

$$\phi_+ = Ne^{-iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

- A energia negativa:

$$\phi_- = Ne^{iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

Corrente di probabilità Nel caso dell'equazione di Schrödinger, definendo una **densità di probabilità** $\rho = |\psi|^2$ e una **densità di corrente** $\mathbf{J} = (-i/2m)(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$, si ricava un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Nel caso particolare di *onde piane* $\psi = Ne^{-i\mathbf{p}^2/2mt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$, si ricava:

$$\rho = |N|^2$$

e

$$\mathbf{J} = |N|^2 \mathbf{v}$$

Nel caso dell'equazione di Klein-Gordon, si può definire un'unico **vettore densità**:

$$J_\nu = -i(\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*)$$

su cui vale un'equazione di continuità:

$$\partial^\nu J_\nu = 0$$

Anche in questo caso, in presenza di *onde piane* $\phi = N \exp(-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$ si ottiene:

$$\rho = 2|N|^2 E \quad \mathbf{J} = 2|N|^2 \mathbf{p}$$

Scritto in forma covariante è:

$$J_\nu = 2|N|^2 p_\nu$$

2.1.2 Particelle e anti-particelle

Deduzione Le soluzioni a energia negativa dell'equazione di *Klein-Gordon* sorgono perché l'equazione è al secondo ordine alle derivate parziali. Da una formulazione relativistica della meccanica quantistica per descrivere i *fermioni* (particelle di *spin* 1/2. In quest'ambito, tali soluzioni sono identificabili come **anti-particelle**, ovvero anche la **carica** è una quantità **conservata**:

$$Q \int_V \rho dV$$

Proprietà Una particella e la rispettiva **anti-particella** posseggono la **stessa massa** - soddisfano entrambe $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ - e **stesso spin**.

Tutte le altre carica sono invece di segno opposto - ovvero *carica elettrica, momento magnetico, spin isotropico*. Questo **vale anche per le particelle elettricamente neutre**: cambiano infatti gli altri numeri quantici.

Esistono comunque casi di particelle, soprattutto *bosoni*, che sono *anti-particelle* di se stesse. Il caso più notevole è il **fotone** γ .

In generale, non esiste una legge di conservazione delle particelle; su specifiche specie è però possibile formula, per simmetria, una *legge di conservazione del numero di particelle*.

Deve inoltre essere sempre conservato il **numero barionico**, ovvero il numero di *nucleoni* (e *antinucleoni*).¹

Neutrini e anti-neutrini Abbiamo evidenza sperimentale che ci sia differenza tra *neutrini* e *anti-neutrini*.

In un reattore nucleare, insieme agli elettroni vengono prodotti anche degli **anti-neutrini**:

$$(Z, A) \longleftrightarrow (Z_1^+, A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

Questi possono venire osservati sperimentalmente tramite la reazione $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^- + p$.

Nei processi di fusione, viceversa, vengono prodotti *positroni* e *neutrini*:

$$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu_e$$

(vedi osservazione di neutrini solari).

Analogamente ai barioni, dal punto di vista delle *interazioni deboli* i due stati $|e^- \rangle$ e $|\nu_e \rangle$ corrispondono a delle simmetrie interne; si ha quindi la **conservazione del numero elettronico**.

2.1.3 Potenziale di Yukawa

Deduzione dello Yukawa Si possono cercare **soluzioni stazionare** all'equazione di *Klein-Gordon*, ovvero:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Queste possono essere *non-nulle* solo in presenza di una **carica sorgente**, ovvero:

$$-\nabla^2 \phi + m^2 \phi = \eta \delta()$$

Andando nel campo delle *trasformate di Fourier* di questa equazione e risolvendo poi l'*anti-trasformata di Fourier*, si ottiene:

$$\phi = \eta \frac{e^{-mr}}{4\pi r}$$

¹La conseguenza della conservazione del numero barionico è che il **protone**, che è il nucleone più leggero, risulta anche quello più stabile. Un calcolo porta al limite inferiore della vita media del protone a $\tau_p > 10^{31}$ yr.

Questa soluzione porta a identificare concettualmente le interazioni dovute a un potenziale come alla **propagazione** di una **particella libera** tra le sorgenti del potenziale. Il range di questa interazione è ovviamente $1/m$; nel limite $m = 0$ si ha la forma del potenziale elettromagnetico, ovvero *interazione a lungo range*.

Ele ♡

Questa conclusione fa sì che possa predire l'esistenza di una particella, detta **pione**, che medi alle interazioni tra *nucleoni*. Il potenziale appena calcolato è noto come **potenziale di Yukawa**.

Intensità delle interazioni Sperimentalmente, abbiamo visto che, in ordine di intensità, le interazioni tra particelle sono:

1. Forza nucleare forte
2. Forza elettromagnetica
3. Forza nucleare debole
4. Forza gravitazionale

Usiamo la **regola d'oro di Fermi** per calcolare la sezione d'urto di una particella in un *potenziale di Yukawa*. I valori di η stabiliscono la gerarchia tra le interazioni: si ha che:

$$\eta_{forti} \gg \eta_{deboli}, \eta_{elett.} \gg \eta_{grav.}$$

La differenza tra le *interazioni deboli* e le *interazioni elettromagnetiche* è il range a cui operano - sebbene si può dimostrare che siano la manifestazione di una stessa forza, detta **forza elettrodebole**.

Si dimostra che su *potenziale di Yukawa* l'elemento di matrice presente nel calcolo della *probabilità per unità di tempo* P è:

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{\eta}{V} \frac{1}{m^2 + q^2} \quad \langle f | V | i \rangle = \frac{\eta}{V} \frac{(\hbar c)^3}{m^2 c^4 + q^2 c^2}$$

dove, nella seconda, si sono introdotte le unità del *Sistema Internazionale*. La densità di stati finali, nel caso *non-relativistico*, è:

$$\rho(E_f) = \frac{VM\sqrt{2ME}}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega$$

dove M è la massa della particella incidente.

Tramite questi valori, si può calcolare la *sezione d'urto*:

$$d\sigma = \left(\frac{\hbar c}{2\pi} \right)^2 \frac{\eta^2 M^2}{(m^2 c^2 + q^2)^2} d\Omega$$

Nel caso limite per cui valgono come sostituzioni $M = m_a$, $\eta = ZZ_a e^2 / \epsilon_0$, $m = 0$, $q^2 = m_a E_a 8 \sin^2(\theta/2)$, coincide col la *sezione d'urto di Rutherford*.

Nel caso limite di $q \gg mc$, ovvero per le **interazioni forti**, si ottiene:

$$\sigma = \frac{\eta^2}{\pi} \left(\frac{M}{m^2} \right)^2$$

Ricordando che nelle *interazioni forti* si ha $\sigma = 4\pi a^2$, con a lunghezza di scattering, si ottiene:

$$\eta = 2\pi |a| \frac{m^2}{M}$$

Per le **interazioni deboli**, assumendo un mediatore con *range* $1/m \ll 1$ fm, e con le convenzioni usate:

$$\langle f | U | i \rangle = \frac{\eta}{V} \frac{(\hbar c)^3}{m^2 c^4 + q^2 c^2} \approx \frac{1}{V} G_F (\hbar c)^3$$

che, nel limite $p \ll m$ da:

$$G_F = \frac{\eta}{m^2}$$

Per le **interazioni gravitazionali**, è immediato porre:

$$V(r) = \frac{G_N M^2}{r}$$

con $\eta = 4\pi G_N M^2$. Usando masse molto piccole, come quella protone, si ottiene che $\eta \sim 10^{-38}$.

2.2 Simmetrie

2.2.1 Simmetrie e principi di conservazione

Ci concentriamo soprattutto sul rapporto tra simmetrie e classificazione degli stati, tramite simmetrie per **parità** P e per **carica** C .

Simmetrie in meccanica quantistica L'evoluzione del valor medio - o di aspettanza - di un generico operatore quantistico Q è si calcola tramite il valor medio del suo commutatore con l'Hamiltoniana - **equazione di Heisenberg**:

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [Q, H] \rangle$$

Si ha che la quantità Q si conserva nel tempo se $[Q, H] = 0$.

Si consideri in particolare una trasformazione che lascia **invariata** l'Hamiltoniana H : $U H U^{-1} = H$; si ha che $[U, H] = 0$. Se la trasformazione è infinitesima, si può scrivere:

$$U = e^{-i\varepsilon G}$$

dove G è anch'esso un operatore che si conserva per evoluzione temporale.

In particolare, poiché $[G, H] = 0$, esiste un autostato (*base*) di H , $|\psi\rangle$, che è anche autostato di G :

$$G |\psi\rangle = \eta_G |\psi\rangle$$

In particolare, dato un livello energetico con n autostati degeneri, $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, si ha che posso esprimere il trasformato su G di uno di questi come sovrapposizione lineare degli altri:

$$G|\psi_i\rangle = \sum_{\ell=1}^n G_{\ell,i} |\psi_\ell\rangle$$

dove $G_{\ell,i} = \langle \psi_\ell | G | \psi_i \rangle$. Ovvero, si possono trovare gli autovalori di G per classificare quelli dell'Hamiltoniana.

Principali simmetrie discrete Oltre alle consuete simmetrie continue, sono di particolare importanza 3 simmetrie discrete:

- Parità P :

$$\mathbf{r} \xrightarrow{P} -\mathbf{r}$$

- Inversione temporale T ;

$$t \xrightarrow{T} -t$$

- Coniugazione di carica C : *scambio tra particelle e anti-particelle*.
Per questa simmetria non esiste un analogo classico.

Tutti questi operatori hanno la proprietà che:

$$C^2 = T^2 = P^2 = 1$$

ovvero i possibili autovalori sono solo 1 e -1 .

Parità Diversi oggetti matematici si comportano in maniera diversa sotto operatore di *parità*.

- I **vettori polari** cambiano segno sotto P .
Ne sono un esempio il vettore di coordinate \mathbf{r} , la velocità \mathbf{v} e il vettore quantità di moto \mathbf{p} .
- I **vettori assiali** rimangono invariati sotto P .
Sono un esempio di questi vettori il momento angolare \mathbf{L} e lo spin \mathbf{s} .
- Le **grandezze scalari** non cambiano segno, mentre quelle **pseudoscalari**, con $\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}$ cambiamo di segno.

Si ricorda brevemente che, data una particella in *campo centrale*, di autofunzione

$$\psi_{n,\ell,m} = \frac{e_{n,\ell}(r)}{r} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$$

la sua parità è $P\psi_{n,\ell,m} = \eta_\psi (-1)^\ell \psi_{n,\ell,m}$.

Le **equazioni di Maxwell** per l'elettromagnetismo sono invece tutte **invarianti** per trasformazioni di *parità*.

Viceversa, il **fotone ha parità negativa**.

Coniugazione di carica

L'operatore **coniugazione di carica** C scambia le particelle con le rispettive *anti-particelle*; in questa trasformazione, vengono invertiti **tutti** i numeri quantici.

Ovviamente, solo gli stati completamente neutri possono essere autostati dell'operatore C .

In particolare, si noti che applicato al fotone si ha:

$$C(\gamma) = -\gamma$$

Positronio

Il **positronio** è uno stato legato *elettrone-positrone*. L'equazione di Schrödinger da risolvere è la stessa dell'atomo di idrogeno, ma con massa ridotta $\mu = \frac{m_e}{2}$. Le configurazioni di *spin* permesse sono le 3 del *tripletto* e quella del *singoletto*.

L'applicazione dell'operatore parità P scambia la posizione relativa dei due leptoni; lo stato è quindi di definita parità $\eta_P = \eta_{e^+}\eta_{e^-}(-1)^\ell$.

L'applicazione dell'operatore *coniugazione di carica* C , si ha ancora una volta lo scambio delle particelle, ma si ha in aggiunta lo scambio anche degli *spin* - -1 per $S = 0$ e 1 per $S = 1$. L'autovalore di C è $\eta_C = \eta_P(-1)^{S+1}$.

Lo stato fondamentale è dato $\ell = 0$, che è diviso tra singoletto 1S_0 e tripletto 3S_1 ; questi stati hanno la stessa parità - sebbene ci sia una minima separazione tra i livelli, l'emissione di un fotone (ovvero l'unico modo per transire) cambia la parità (e quindi non è permessa). Viceversa, i due stati hanno opposta coniugazione di carica.

Posso quindi classificare i due stati fondamentali come

- **Para-positronio** 0^{-+} ; si vede sperimentalmente che decade in 125 ns in uno stato con 2 fotoni.
- **Orto-positronio** 1^{--} ; questo decade in $140 \mu s$ in uno stato con 3 fotoni.

Dalla meccanica quantistica *relativistica* si trova che *fermioni* e *antifermioni* posseggono parità opposte. Allora

$$\eta_P = \eta_{e^+}\eta_{e^-} = -1$$

Inversione temporale

La versione quantistica dell'inversione temporale è l'operatore T definito come:

$$T\psi(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, -t)$$

La trasformata per inversione temporale è ancora soluzione della stessa *equazione di Schrödinger* di ψ se e solo se $THT^{-1} = H$.

Sotto l'azione di T cambiamo di segno la velocità \mathbf{v} , la quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, il momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ e lo *spin* \mathbf{S} .

In particolare, nella probabilità di transizione da uno stato iniziale i a uno finale f - *regola d'oro di Fermi*:

$$P(i \rightarrow f) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | U | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

se vale l'invarianza per inversione temporale T, vale la relazione

$$\langle f | U | i \rangle = \langle i | U | f \rangle$$

ovvero la differenza tra le probabilità è data solamente dalla differenza tra la densità dello spazio delle fasi. In una situazione di equilibrio, ovvero vale:

$$\frac{dN_f}{dt} = N_i P(i \rightarrow f) - N_f P(f \rightarrow i) = 0$$

vale:

$$\frac{N_i}{N_f} = \frac{\rho(E_f)}{\rho(E_i)}$$

questa relazione prende il nome di **principio del bilancio dettagliato**.

Il principio del bilancio dettagliato può essere usato insieme all'**invarianza di crossing** - reazioni derivate spostando una particella da uno stato (iniziale) a un altro (finale) e trasformandola in antiparticella.

Questi strumenti possono essere per esempio usati per il calcolo della **sezione d'urto del decadimento β inverso**.²

Teorema CPT Come abbiamo visto, sotto *interazioni deboli* le simmetrie *C* e *P* vengono violate.

Si può dimostrare che una **teoria quantistica** che sia *invariante per trasformazioni di Lorentz, locale* (ovvero che non analizzi le interazioni a lungo range) e che abbia un'*Hamiltoniana hermitiana*, è **invariante** sotto l'operatore *CPT*, ovvero tutte e tre le simmetrie descritte prima insieme.

Come conseguenza di ciò, si hanno alcune importanti leggi di conservazione:

- *particelle* e *antiparticelle* devono avere la **stessa massa**
- *particelle* e *antiparticelle* devono avere la **stessa vita media** totale

A oggi, sperimentalmente si sono solo trovati risultati che dimostrino come questa invarianza debba essere vera.

2.2.2 Violazione di P e CP nelle interazioni deboli

Violazione della parità Oltre che per quelle elettromagnetiche, è sperimentalmente confermato che anche le **interazioni deboli** conservano la *parità*. Questo non è però vero per le **interazioni deboli**.

Sperimentalmente, l'osservazione si basa sulla misura della quantità **pseudo-scalare** *S*:

$$S \xrightarrow{P} -S$$

Se *P* fosse una simmetria, si dovrebbe avere che il valor medio prima e dopo l'applicazione dell'operatore rispetti la parità; ovvero:

$$\langle S \rangle \xrightarrow{P} \langle -S \rangle = -\langle S \rangle$$

²Sulle slide con ancora i segnaletti c'era scritto *opzionale*, quindi me la sono balzata per bene.

Quindi, se P è simmetria si avrebbe:

$$\langle S \rangle = \langle -S \rangle = 0$$

Sperimentalmente, è stato mostrato come questo non valga, e quindi come le *interazioni deboli* **violino la parità**.

Elicità È di particolare importanza la quantità *pseudoscalare* **elicità**, definita come:

$$h \triangleq \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{p}| |\mathbf{S}|} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$$

Per una particella di *spin* $1/2$, si ha che $h = 1$ se lo *spin* è orientato nella direzione del moto; e $h = -1$ se lo *spin* è orientato in direzione opposta a quella del moto. Il valor medio dell'*elicità* corrisponde alla polarizzazione netta nella direzione del moto:

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \rangle = \frac{N_{h=1} - N_{h=-1}}{N_{h=1} + N_{h=-1}}$$

dalle misure di polarizzazione di particelle sottoposte a *interazioni deboli* si mostra che la simmetria P viene violata:

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_\nu \cdot \hat{\mathbf{S}}_\nu \rangle = -1 \quad \langle \hat{\mathbf{p}}_{e^-} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{e^-} \rangle = -\beta \quad \langle \hat{\mathbf{p}}_{e^+} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{e^+} \rangle = +\beta \quad \langle \hat{\mathbf{p}}_{\bar{\nu}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\bar{\nu}} \rangle = +1$$

In particolare, il fatto che i *neutrini* abbiano *elicità* definita presenta una **violazione massimale della parità**.

Violazione della coniugazione di carica Dalle osservazioni sperimentali si ha che, nelle **interazioni deboli**, viene violata anche la coniugazione di carica. Sempre nel caso del neutrino, si ha infatti che $C(\nu_{h=-1}) \neq \bar{\nu}_{h=-1}$, ovvero non esiste il trasformato sotto coniugazione del neutrino.

Si può però eseguire la trasformazione composta CP :

$$CP(\nu_{h=-1}) = C(\nu_{h=+1}) = \bar{\nu}_{h=+1}$$

Questo risultato mostra come la **simmetria CP** sia più fondamentale che le due separatamente - sebbene pure essa venga violata, ma a livello minore.

Violazione di CP La violazione di CP , che si può osservare tramite il fenomeno delle *oscillazioni particella-antiparticella*, permette di spiegare l'antisimmetria tra materia e antimateria nell'Universo. Affinché questa antisimmetria sia possibile, devono infatti essere soddisfatte le **3 condizioni di Sakharov**:

- Deve esistere un processo che violi il numero barionico.
- Devono essere violate C e CP .
- Questi processi devono avvenire al di fuori dell'equilibrio termico.

Domanda: Che cosa vuol dire quest'ultima condizione?

Sperimentalmente, fino ad ora che si è mostrato che la *simmetria CPT* viene sempre conservata; viceversa, l'inversione temporale da sola è anch'essa violata a livello microscopico.

2.3 Nuclei, barioni, mesoni e quark

2.3.1 Muoni

Evidenze sperimentali Dall'analisi dei raggi cosmici si vede che, oltre all'evidenza dell'esistenza del *positrone*, esistono altre due particelle: il **muone**, con il suo *neutrino*, e il **pione** - dal cui decadimento si origina la prima - che ha la caratteristica di *mediare le interazioni forti*.

Caratteristiche Il muone ha una vita media molto breve, $\tau_\mu \simeq 2 \text{ unit}\mu\text{s}$; esso decade in un *elettrone*, l'unica particella con la stessa carica più leggera:

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Si può inoltre dimostrare che il muone è un **fermione**, ovvero ha *spin* $1/2$.

Tramite la *teoria di Fermi*, si può calcolare la larghezza di decadimento del *muone*; al prim'ordine è:

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

Tramite questa formula si può determinare il valore di G_F da quantità ben misurate:

$$G_F = \sqrt{\frac{192\pi^3 \hbar}{m_\mu^5 \tau_\mu}}$$

Il calcolo esatto della **costante di Fermi** per i *decadimenti* β e per il *decadimento del muone* riporta due risultati che, sebbene diversi, sono molto simili; ovvero deve esserci una qualche costante fondamentale che controlli i processi di *interazione debole*.

Sebbene teoricamente possibili, sperimentalmente non si osservano altri tipi di decadimenti per il *muone*; questa è legata alla necessità di **conservazione** del **numero muonico**:

$$\mu^-, \nu_{\mu^-} \rightarrow +1 \quad \mu^+, \bar{\nu}_{\mu^+} \rightarrow -1$$

Questo procedimento è del tutto analogo alla *conservazione del numero elettronico*.

Sperimentalmente si nota che il *muone*, al pari dell'*elettrone*, possiede solamente **interazioni elettromagnetiche** e **interazioni deboli**, come d'altronde i rispettivi *neutrini* possiede solo *interazioni deboli*. Da queste similitudini si dice che sono appartenenti alla famiglia dei **leptoni**: a parte la massa, le coppie di leptoni possiedono le stesse proprietà.

Venne poi scoperto negli anni '70 l'esistenza di una terza famiglia di leptoni: il **tau** τ - e il rispettivo neutrino.

2.3.2 Pione

Caratteristiche generali Tramite la tecnica delle **emulsioni nucleari**, fu possibile determinare l'esistenza di un'altra particella: il **pione** π ; dal suo

decadimento viene generato il *muone* μ .

Essa può esistere in due stati di carica, π^+ e π^- , entrambi, ovviamente, aventi stessa massa e stesso tempo medio di decadimento $\tau_\pi \sim 10^{-8}$ s. I decadimenti possibili sono **a due corpi**:

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Entrambi gli stati del *pione* sono caratterizzati da **spin intero** - ovvero il *pione* è un *bosone*.

È stata inoltre dimostrata l'esistenza di uno stato neutro π^0 , che presenta un **decadimento elettromagnetico**:

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$$

Spin I *pioni* possono essere prodotti in abbondanza tramite *interazione forte* con nucleoni. A differenza però dei nucleoni, il **numero di pioni non è conservato** - il **numero barionico** del pione è 0.

Per studiare lo *spin* del *pione* si può utilizzare l'invarianza per inversione temporale delle interazioni forti.³ Si considerino due reazioni, una inversa dell'altra:

$$p + p \longrightarrow d + \pi^+ \quad d + \pi^+ \longrightarrow p + p$$

Poiché vale l'inversione temporale, l'elemento di matrice della *regola d'oro di Fermi* deve essere uguale per le due reazioni:

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = |M_{f \rightarrow i}|^2$$

Si calcolano quindi solamente le densità di stati finali:

$$\rho(E_{\pi+d}) = (2s_\pi + 1)(2s_d + 1) \frac{V 4\pi p_\pi^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp_\pi}{dE_{\pi+d}}$$

Ricordando che $E_{\pi+d} = E_\pi + E_d$, si può sostituire:

$$\frac{dp_\pi}{dE_\pi} = \frac{1}{\beta_\pi c}$$

Per l'altra relazione si deve considerare che le particelle sono **identiche**, ovvero si deve aggiungere un termine $1/2$ per considerare gli stati simmetrici:

$$\rho(E_{p+p}) = \frac{1}{2}(2s_p + 1)(2s_p + 1) \frac{V 4\pi p_p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp_p}{dE_p} = 2 \frac{V 4\pi p_p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta_p c}$$

Ricordando la **relazione tra le lunghezza di decadimento e la sezione d'urto**:

$$\lambda_{i \rightarrow f} = \frac{\beta_i c}{d} \sigma(i \rightarrow f)$$

dove d è la *densità di volume*, il primo termine rappresenta il *flusso incidente* e $1/v$ è la densità di bersagli, ovvero una particella nel volume.

³Si ricordi che sono quelle deboli che la violano; e il "nostro" pione viene prodotto tramite interazione forte.

Sostituendo per trovare le sezioni d'urto ed eseguendo il rapporto tra quelle delle due reazioni, si ottiene:

$$\frac{\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+)}{\sigma(d + \pi^+ \rightarrow p + p)} = \frac{3(2s_\pi + 1)}{2} \frac{p_\pi^2}{p_p^2}$$

Quindi, dal calcolo delle due sezioni d'urto si può ricavare il valore dello *spin*. Da questo confronto si ottiene che $s_\pi = 0$.

Analogamente, si può determinare la **parità** del *pione* dalle reazioni che lo contengono, come per esempio $\pi^- + d \rightarrow n + n$. In questo caso, non si ha alcuna barriera di potenziale da superare e, per momenti bassi del *pione* $p_\pi \rightarrow 0$, si ha:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}_d \quad j = s_d = 1$$

Ricordando che la *parità* del duetone è $\eta_d = 1$ e il momento angolare $\ell(n+n) = 0$, si ha che la *parità* iniziale del sistema è:

$$\eta_\pi \eta_d (-1)^{\ell(\pi+d)} = \eta_\pi$$

La parità del sistema finale è abbastanza semplice: $\eta_n \eta_n (-1)^{\ell(n+n)} = -1$ - devi considerare il fatto che hai due fermioni identici e che il momento angolare totale $j = 1$; da qui, si possono avere due combinazioni di $S(n+n)$, che però ridanno lo stesso valore della parità.

Dal confronto, si ha che **la parità del pione è negativa**.

Parità Analizziamo ora un decadimento del *pione carico*: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Usando il sistema del centro di massa, si ha:

$$|\mathbf{p}_\mu^{(cm)}| |\mathbf{p}_\nu^{(cm)}| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\mu}$$

Considerando *trascurabile* la massa del neutrino, si ha:

$$E_\nu^{(cm)} = |\mathbf{p}_\nu^{(cm)}| \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\mu} \quad E_\mu^{(cm)} = \sqrt{m_\mu^2 + \mathbf{p}_\mu^{(cm)2}} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\mu}$$

Consideriamo per semplicità che il *pione* si muova lungo un asse cartesiano - z . Calcoliamo quindi cosa succede nel sistema di riferimento del laboratorio. Se il *pione* π^+ si muove con velocità $|\mathbf{v}| = \beta_\pi$:

$$\begin{aligned} E_\nu = |\mathbf{p}_\nu| &= \gamma_\pi \left[E_\nu^{(cm)} + \beta_\pi E_\nu^{(cm)} \cos(\theta_\nu^{(cm)}) \right] = [\dots] \\ &= \frac{\gamma_\pi m_\pi}{2} \left[1 + \beta_\pi \cos(\theta_\nu^{(cm)}) \right] \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right) \end{aligned}$$

Da questa si ottiene la disuguaglianza⁴

$$\frac{1 - \beta_\pi}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right) < \frac{E_\nu}{E_\pi} < \frac{1 + \beta_\pi}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right)$$

Domanda: Questa disuguaglianza viene dal fatto che $E_\pi = \gamma_\pi m_\pi$ e "disuguagliando" sul coseno?

⁴Nel caso di *pioni* relativistici, basta porre $\beta_\pi = 1$.

Decadimento del pione (carico)

Si calcola ora la distribuzione delle energie. Osserviamo che, come fatto in passate lezioni, in un decadimento isotropo vale $\frac{dN}{d \cos \theta^{(cm)}} = 1/2$. Anche la distribuzione di energia del neutrino risulta uniforme:

$$\frac{dN}{dE_\nu} = \frac{dN}{d \cos \theta^{(cm)}} \frac{d \cos \theta^{(cm)}}{dE_\nu}$$

ricavando $\cos \theta^{(cm)} = (E_\nu - |\mathbf{p}^{(cm)}| \gamma_\pi) / (|\mathbf{p}^{(cm)}| \gamma_\pi \beta_\pi)$ dalla relazioni di prima per l'energia e calcolando la derivata, si ottiene: **Domanda:** *Da dove viene la relazione per calcolare l'angolo?*

$$\frac{dN}{dE_\nu} = \frac{1}{|\mathbf{p}_\pi| \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)}$$

Approssimando a $E_\pi \approx |\mathbf{p}_\pi|$ e $\beta_\pi \approx 1$, e ponendo $\xi = E_\nu/E_\pi$, si ottiene:

$$\frac{dN}{d\xi} = \frac{1}{1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}}$$

Ricordando come scrivere nel sistema del laboratorio le quantità di moto:

$$P_L = E_\nu^{(cm)} \gamma_\pi \beta_\pi = |\mathbf{p}^{(cm)}| \cos \theta^{(cm)} \gamma_\pi \quad p_T = |\mathbf{p}^{(cm)}| \sin \theta^{(cm)}$$

si può calcolare la relazione tra gli angoli nei due sistemi di riferimento:

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma_\pi} \tan \frac{\theta^{(cm)}}{2}$$

A questo punto, dalla relazione $E_\nu = |\mathbf{p}^{(cm)}| \gamma_\pi + |\mathbf{p}_{(cm)}| \gamma_\pi \beta_\pi \cos \theta^{(cm)}$, e approssimando $\beta_\pi \approx 1$, si ottiene:

$$E_\nu = E_\pi \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right) \frac{1}{1 + \gamma_\pi^2 \tan^2 \theta}$$

Decadimento $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + e$

Questo tipo di decadimento, sebbene possibile, è estremamente meno probabile. Il motivo di ciò è dato da una combinazione di diversi fattori:

- Spazio delle fasi

$$\rho(E_\ell) \propto p_\ell^2 = \frac{m_\pi^2}{4} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)$$

il termine $\ell = e$ o μ favorisce il *positrone*.

- Conservazione del momento angolare: siccome π^+ ha *spin* nullo, l'elicità della particella figlia generica ℓ e il suo neutrino ν devono essere uguali.
- Polarizzazione delle interazioni deboli

Domanda: *Non ho capito una mazza di questa cosa*

Risonanze e *spin* isotopico Sperimentalmente si osservano numerose risonanze nelle interazioni tra *pioni* e *nucleoni*. Questo, unito al fatto che entrambe queste famiglie di particelle contiene dei **multipletti** - il *doppietto* $p - n$ e il *tripletto* $\pi^+ - \pi^0 - \pi^-$, porta alla formulazione di una *simmetria interna per rotazioni* - **simmetria di isospin nelle interazioni forti**. Questo tipo di simmetria perde la validità nelle *interazioni deboli* ed *elettromagnetiche*.

Analizziamo la **risonanza** $N - \pi$ Da un punto di vista dello *spin isotopico*, un qualsiasi stato si presenta con molteplicità $2I + 1$. Vale quindi, in una delle sue forme, la **formula di Gell-Mann-Nishijima**:

$$Q = \frac{B}{2} + I_3$$

dove Q è la carica, in unità di e elementari, B è il numero barionico.

Domanda: *Non ho capito di nuovo una mazza: come cazzo trovo le risonanze solo guardando Gell-Mann?*

2.3.3 Modello a quark

Descrizione generale Lo spettro e i numeri quantici delle risonanze ρ , η e ω si possono spiegare che essi siano stati legati di costituenti più fondamentali, i **quark**.

Con questo modello, un *doppietto di spin isotopico* $I = 1/2$ è spiegato dall'esistenza di due quark, di *numero barionico* $B = 1/3$:

- **quark up:** $I_3 = 1/2$. Allora, per *Gell-Mann-Nishijima* $Q = B/2 + I_3 = 2/3$.
- **quark down:** $I_3 = -1/2$. Allora $Q = -1/3$

I **barioni** sono, in questo modello, costituiti da **3 quark**; il loro *spin* è semintero (ricorda protoni e neutroni), e lo *spin isotopico* può essere:

- Se $I = 3/2$, si hanno **risonanze Delta**, ovvero stati legati, anche di *carica frazionaria*.
- Se $I = 1/2$, si hanno i **nucleoni** e le **risonanze N**, con combinazioni del tipo uud , udd .

I **mesoni** sono invece costituiti da una **coppia quark-antiquark**, di *spin intero*; nello stato fondamentale il momento angolare è nullo e lo *spin* del mesone viene dato dalla somma dello *spin* dei quark, ovvero $J^{PC} = 0^{-+}, 1^{--}$.

Lo *spin isotopico* può essere sia 1 che 0, dando vita a diversi tipi di *mesoni* - $I = 1$ è associato a π e ρ ; mentre $I = 0$ è associato a η e ω .

Classificazione I quark, al pari dei leptoni, possono essere classificati in **famiglie**. Si è mostrato sperimentalmente come esistano 3 famiglie:

- quark *up* u e quark *down* d
- quark *charm* c e quark *strange* s
- quark *top* t e quark *bottom* b

Ognuno di questi quark possiede un proprio **numero quantico**.
A differenza dei leptoni, le transizioni sono mediate da una matrice unitaria, detta **matrice di cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)**.

2.3.4 Particelle strane

Stranezza Esperimenti con i raggi cosmici dimostrano la presenza di altre particelle, che vennero definite **strane**; esse vengono prodotte da **sezione d'urto forte** e decadono con tempi tipici delle *interazioni deboli*. Poiché venivano prodotte in coppie, venne introdotto un nuovo numero quantico, detto **stranezza**, che viene **conservato nelle interazioni forti** e violato in quelle deboli. Esso si basa sulla teorizzazione di un **buono quark s** , detto *strange*. Esso presenta una simmetria di tipo $SU(3)$, detta di **sapore**, simile alla *simmetria $SU(2)$ di isospin*.

Per misurare il momento di queste particelle, si può calcolare il *raggio di curvatura* nelle camere a nebbia:

$$|p| = \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\gamma\beta$$

Dalla *Bethe-Bloch* si può calcolare la perdita di energia.

Dal calcolo, si nota che queste nuove particelle sono **pesanti**, e presentano diversi decadimenti possibili.

- Mesoni, con *stranezza*. $J^P = 0^-$.

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu$$

- Iperoni, barioni con *stranezza*. $J^P = 1/2^+$.

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &\longrightarrow p + \pi^- & \Sigma^+ &\longrightarrow p + \pi^0 \\ \Sigma^\pm &\longrightarrow n + \pi^\pm & \Xi^- &\longrightarrow \Lambda^0 + \pi^- \end{aligned}$$

Le vite medie sono nell'ordine $\sim 10^{-8}$ - 10^{-10} , ovvero dei *decadimenti deboli*. La produzione è invece data da un processo forte.

Numero barionico Dal momento che il neutrone decade in protone e i decadimenti degli *iperioni* portano a protoni, si deduce che gli **iperioni sono dei barioni**. Dunque, in una reazione si conserva sempre il numero barionico.

Produzione associata In alcuni decadimenti si osserva la *produzione associata di particelle strane*; il primo che venne osservato è:

$$\pi^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + K^0$$

Ovvero in esso vennero prodotte due particelle con stranezza.

Da questa, e altre osservazioni, si può dedurre che la **stranezza** sia una quantità conservata. Esso è un numero quantico additivo, ma viene violata nei *interazioni deboli* - $|\Delta S| = 1$ nei decadimenti.

Includendo questo nuovo numero quantico, la *formula di Bell-Mann-Nishijima* diventa:

$$Q = \frac{B}{2} + \frac{S}{2} + I_3 = \frac{Y}{2} + I_3$$

dove $Y = B + S$ è nota come **ipercarica**.

Mesoni Prendiamo in considerazione il decadimento:

$$\pi^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + K^0$$

Assumendo che la stranezza sia conservata, si deve assumere che $S(K^0) = -1$ - protone e pione non hanno stranezza ovviamente.

Analizziamo invece l'*isospin*: affinché sia conservato, deve valere $T(K^0) = 1/2$. Usando *Gell-Mann*, si ottiene:

$$0 = \frac{1}{2} + T_3$$

Notando che il *kaone* è preso neutro; il fatto che $T_3(K^0) = -1/2$ implica che deve essere parte di un *doppietto*. L'altro mesone, di $T_3 = 1/2$ è K^+ , di carica +1.

Esistono inoltre le rispettive *antiparticelle*, ovvero K^- e \bar{K}^0 . Si noti che la seconda è distinta K^0 poiché hanno *stranezza differente*.

| | Q | B | S | T | T_3 |
|-------------|-----|-----|-----|-------|--------|
| π^+ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| π^0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| π^- | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| K^+ | 1 | 0 | 1 | $1/2$ | $1/2$ |
| K^0 | 0 | 0 | 1 | $1/2$ | $-1/2$ |
| \bar{K}^0 | 0 | 0 | -1 | $1/2$ | $1/2$ |
| K^- | -1 | 0 | -1 | $1/2$ | $-1/2$ |

Decadimenti delle particelle strane Le particelle strane, che sono prodotto per *interazione forte*, decadono tramite **interazione debole**, violando quindi la stranezza. Inoltre, molti dei decadimenti possibili sono proibiti per conservazioni dell'energia - sebbene magari conservino la *stranezza*. È invece permesso il decadimento:

$$\Sigma^0 \longrightarrow \Lambda^0 + \gamma$$

decadimento elettromagnetico.

Come detto, il modello a *quark* si può estendere alla teoria della *stranezza* con l'aggiunta del **quark strange** s . Le sue proprietà sono:

- $S = -1$
- $B = 1/3$
- $Y = -2/3$
- $I = 0$

- $I_3 = 0$
- $Q = -1/3$

Gli **adroni** sono in generale formati da una combinazione dei 3 *quark* u , d e s . Per esempio:

$$\begin{aligned} p &= (uud) & \pi^- &= (\bar{u}d) \\ \Lambda &= (uds) & K^0 &= (d\bar{s}) \end{aligned}$$

$SU(3)$ di sapore L'indipendenza dalla carica elettrica delle *interazioni forti* aveva portato alla formulazione della *simmetria* $SU(2)$ di *isospin*. Analogamente, l'indipendenza anche dall'**ipercarica** fa sì che vi sia un'invarianza nello spazio dei tre stati $|u\rangle$, $|d\rangle$, $|s\rangle$, ovvero una *simmetria* $SU(3)$. Questa simmetria è meno buona di quella di *isospin*.

Definendo su $SU(3)$ delle matrici di base, dette *matrici di Gell-Mann*, gli operatori di *isospin* e *ipercarica* sono:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad T_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Data la base dei *quark*:

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & |d\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |s\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui si ha:

$$\begin{aligned} T_3 |u\rangle &= \frac{1}{2} |u\rangle & Y |u\rangle &= \frac{1}{3} |u\rangle \\ T_3 |d\rangle &= -\frac{1}{2} |d\rangle & Y |d\rangle &= \frac{1}{3} |d\rangle \\ T_3 |s\rangle &= 0 |s\rangle & Y |s\rangle &= -\frac{2}{3} |s\rangle \end{aligned}$$

Ottupletto mesonico Nel modello a *quark*, i **mesoni** sono formati da un quark e un antiquark; per i 3 *sapori*, esistono quindi 9 combinazioni possibili di *quark-antiquark*. Definendo che la *stranezza* di s è -1 , è facile ottenere tutte le combinazioni dei mesoni K ; analogamente si ottengono quelle dei *pioni*. In particolare, nel caso di π^0 , poiché può essere dato da qualsiasi stato legato di un *quark* e il suo esatto *antiquark*, da alcune considerazioni di simmetria può essere scritto come:

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

Analogamente si possono classificare anche i **barioni**, in termini di *isospin* I_3 e *ipercarica* $Y = B + S/2$.

Domanda. Non capisco cosa siano gli altri due grafici sulle slide: sono relative a degli stati eccitati e/o di risonanza? I primi sono con $I = 1/2$ e i secondi con $I = 3/2$, ovvero allo stato fondamentale e al primo stato eccitato della risonanza. Il modello così ottenuto ha avuto un significativo successo nel predire l'esistenza dello stato legato (*sss*), detto **barione** Ω^- .

Decadimento dei mesoni K Si può applicare lo stesso approccio usato per i *decadimenti* β anche per i mesoni K:

$$\lambda = \frac{G_F^2 |M_{fi}|^2 (m_e c^2)^5}{2\pi^3 \hbar} f(Z, Q)$$

Per il decadimento $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, si può approssimare $Q \gg m_e$, da cui:

$$(m_e c^2)^5 f(Z, Q) \approx \frac{Q^5}{30} \quad M_{fi} \approx \langle \pi^+ | V_+ | \bar{K}^0 \rangle = 1$$

Si ottiene in questo caso:

$$\Gamma(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e) = \frac{G_s^2 (m_K - m_\pi)^5}{60\pi^3}$$

Da questo calcolo si ha $G_s \sim 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, ovvero un risultato molto minore di G_F .

Facendo una trattazione accurata dei *fattori di forma*, si ottiene per i *mesoni* K:

$$G_s/G_F = 0.2252 \pm 0.0009$$

Nel caso di quelli β era quasi 1. Dai dati sperimentali si ha la particolare relazione:

$$G_\beta^2 + G_s^2 = G_F^2$$

che viene riscritta usando l'**angolo di Cabibbo**:

$$G_F^2 \cos^2 \theta_C + G_F^2 \sin^2 \theta_C = G_F^2$$

Questo mantiene l'universalità delle interazioni deboli, supponendo che il *quark* che partecipa all'interazione è:

$$u \longleftrightarrow d' = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s$$

Quark charm La simmetria presente nella *teoria di Cabibbo* portò alla teorizzazione di un altro *quark*, detto **charm** c , con un nuovo numero quantico C , conservato nelle interazioni forti ed elettromagnetiche ma violato in quelle deboli.

Con questo nuovo quark, la probabilità di transizione nei decadimenti deboli viene mediata da una **matrice di mescolamento**:

$$\begin{pmatrix} u & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

2.3.5 Oscillazioni particella-antiparticella

Considerazioni generali L'osservazione alla base delle oscillazioni è che il *sapore* dei *quark* non viene conservato nelle *interazioni deboli*. Autostati di sapore non sono quindi, in generale, autostati dell'Hamiltoniana. Si osservi che non sono possibili oscillazioni *neutrone-antineutrone*, poiché il numero barionico si conserva anche nei processi deboli, o *neutrino-antineutrino*, poiché anche il numero leptonico è conservato nelle *interazioni deboli*.

Hamiltoniana efficace Si consideri il caso di particella in quiete, $E = m$. L'equazione di Schrödinger è:

$$i \frac{d\psi}{dt} = m\psi$$

deve $H|\psi\rangle = m|\psi\rangle$ e $m = \bar{\psi}H|\psi\rangle$. La legge di evoluzione temporale della funzione d'onda sarà:

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-imt}$$

ovvero si ha una densità di probabilità costante.

Una particella instabile si può descrivere da un'Hamiltoniana del tipo:

$$H|p\rangle = \left(m - i\frac{\gamma}{2}\right)|p\rangle$$

e in tal caso si ha un'evoluzione del tipo:

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-imt - \gamma t/2}$$

In questo caso la densità di probabilità decresce nel tempo. Questo tipo di Hamiltoniana non è hermitiana; descrive in maniera efficace il comportamento di un singolo stato in un sistema più ampio. γ è nota come **larghezza di decadimento**.

Consideriamo i due stati di K^0 e la sua antiparticella \bar{K}^0 :

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|K^0\rangle + b(t)|\bar{K}^0\rangle$$

da cui si ha:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} a(t) |K^0\rangle + i \frac{d}{dt} b(t) |\bar{K}^0\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

A questo punto si può moltiplicare per $\langle K^0|$ e $\langle \bar{K}^0|$. Se esistessero solo interazioni forti ed elettromagnetiche, la conservazione della *stranezza* imporrebbe $\langle \bar{K}^0|H|K^0\rangle = \langle K^0|H|\bar{K}^0\rangle = 0$; e la conservazione della coniugazione di carica $\langle K^0|H|K^0\rangle = \langle \bar{K}^0|H|\bar{K}^0\rangle = m_{K^0}$.

La forma più generale dell'**Hamiltoniana efficace** è:

$$H_{eff} = M - i\frac{\Gamma}{2} = \begin{pmatrix} m_0 & m_{12} \\ m_{12}^* & m_0 \end{pmatrix} - i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^* & \Gamma_0 \end{pmatrix}$$

dove le matrici M e Γ sono hermitiane. In questo caso, si identifica

$$\langle K^0|H|K^0\rangle = \langle \bar{K}^0|H|\bar{K}^0\rangle = m_0 - i\frac{\Gamma_0}{2}$$

Senza entrare nei dettagli, si può dimostrare che è conservazione di CPT impone $\langle K^0 | H | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | H | \bar{K}^0 \rangle =$ sempre. Mostriamo che se m_{12} e Γ_{12} sono reali, allora H_{eff} conserva CP .

Nel passaggio da K^0 a \bar{K}^0 , due interazioni deboli attraverso **bosoni W** , con soppressione dovuta alla *matrice CKM*. La soppressione esatta è:

$$m_{12} \approx \frac{G_F^2 m_K}{12\pi^2} f_K^2 B_K \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C (m_c^2 - m_u^2)$$

Gli stati intermedi sono del tipo $u\bar{u} = \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C$, e altri - che però vanno incontro a interferenza distruttiva. Nel calcolo finale della soppressione non si ha interferenza completa a causa della differenza di massa tra i *quark* c e u .

La presenza di *termini non diagonali* nell'oscillazione si può intuitivamente legare al fatto che entrambi i mesoni presentano decadimenti comuni; questo significa infatti che gli autostati dell'Hamiltoniana completa devono essere miscele di $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$.

Calcoliamo di seguito gli autovalori di H_{eff} , come definita prima, considerando i due stati $|K_S\rangle = p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle$ e $|K_L\rangle = p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle$. Si nota subito che, se H_{eff} conserva CP , gli autostati devono essere:

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

Difatti, si osserva che i veri autostati di H_{eff} sono K_L e K_S , che non sono ortogonali con i primi; si deduce quindi che la trasformazione deve *violare* la simmetria CP .

Nella pratica, si possono osservare tramite il decadimento $K^0, \bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$; il fatto che gli stati fossero accessibili per entrambi fa sì che possa avvenire l'oscillazione. Il decadimento osservato avveniva in un stato di $CP = +1$; ovvero, dalle osservazioni sperimentali - il fatto che i decadimenti osservati siano $\pi^+ + \pi^-$ o $\pi^0 + \pi^0$, significa che essa debbano essere quelli di K_1 - accanto a cui dovrebbe esistere anche K_2 , a cui sarebbe accessibile solo il decadimento a 3 pioni. Questo stato finale avrebbe $CP = -1$.⁵

Quindi, analizzando solamente gli autostati di CP , si dovrebbe avere che che K_1 decade in $\pi\pi$ (decadimento a 2 pioni), mentre K_2 presenta solo decadimento a 3 pioni. Difatti, un esperimento condotto da *Fitch* e *Cronin* mostrò come questo non fosse vero: usando un fascio di K^0 , combinazione lineare di K_1 e K_2 , e che quindi dopo un certo tempo (e distanza) diventa solo K_2 ⁶, si sono riscontrati decadimenti a 2 pioni anche per K_2 . Questo significa che, fisicamente, $K_L \neq K_2$, ovvero che l'autostato dell'Hamiltoniana relativo al decadimento lungo non è anche autostato di CP . Il risultato è che la *simmetria CP* non è una simmetria fondamentale della natura.

Si noti che per 'o, a differenza della simmetria per parità, questa violazione è molto poco marcata, ovvero

$$R = \frac{\text{BR}(K_L \rightarrow \pi^+ + \pi^-)}{\text{BR}(K_L \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0) + \text{BR}(K_L \rightarrow \pi + \ell \nu_\ell)_{\ell=e+\mu}} \sim 10^{-3}$$

⁵Vedi pagina 289 del *Das, Ferbel* per una corretta spiegazione.

⁶Quest'ultimo stato ha infatti un tempo di decadimento molto maggiore di K_1 , ovvero dopo un po' il fascio si è ridotto solamente in quest'altro stato.

Per spiegare le differenze tra gli autostati dell'Hamiltoniana di *interazione debole* e la *simmetria CP* può essere dato da:

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} (|K_2\rangle + \varepsilon |K_1\rangle)$$

In questo modo si spiega come sia possibile che anche le particelle a *vita lunga* possano presentare un decadimento a 2 *pioni* - e non solamente quello a 3 che deriverebbe dall'autostato K_2 .

Difatti, per la maggior parte dei processi si può considerare che la *simmetria CP* sia conservata anche per le *interazioni deboli*.

Una considerazione analoga non vale invece per l'oscillatore dato dal mesone B , il quale presenta una maggiore evidenza di rottura della simmetria.

2.3.6 Quantum Crono-Dynamics

Caratteristiche del colore Il modello a *quark* permette di classificare gli *adroni*, ovvero mesoni a barioni, tramite l'uso di simmetrie: *isospin forte* $SU(2)$, estesa a $SU(3)$ con la *stranezza* e a $SU(4)$ con il *charm* - e così via. Questa descrizione però non fornisce informazioni sull'interazione tra i diversi quark e come questi vadano a legarsi per costituire gli adroni.

Matematicamente, si è ipotizzata l'esistenza di un altro *gradi di libertà* interno ai *quark*, detto **colore**; la sua introduzione è accompagnata da quella del **gluone**, ovvero delle particelle mediatrici delle interazioni tra *quark* che posseggono *carica di colore*.

Scattering elettronico Il moto migliore per studiare la struttura interna di un nucleone è tramite **scattering elettronico**, ovvero un elettrone che incide su un nucleo relativistico. Trascurando la massa dell'elettrone, e indicando con m_N la massa del nucleo, lo stato finale che si ottiene dall'interazione - mediata tramite un *fotone* - è:

$$W^2 = (p + q)^2 = m_N^2 + 2(pq) + q^2$$

dove

$$p = (m_N, 0, 0, 0) \quad q = (E - E', -E' \sin \theta, 0, E - E' \cos \theta)$$

sono rispettivamente il momento iniziale del nucleo e quello trasferito dall'urto; con W si indica invece la massa dello stato finale adronico.

Si noti che il momento dell'elettrone è invece:

$$k = (E, 0, 0, E) \quad k' = (E', E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta)$$

dove si è posto l'elettrone iniziale come diretto lungo l'ultimo asse - \hat{z} .

Il momento trasferito è:

$$q^2 = (k - k')^2 = -2(kk') = -4EE' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Si definisce per comodità la quantità positiva $Q^2 = -q^2$. La frazione di energia trasferita si trova definendo:

$$x \triangleq \frac{Q^2}{2(pq)} \leq 1$$

Nel caso di **scattering elastico**, ponendo $W^2 = m_N^2$ e $x = 1$, si ottiene:

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + (2E/m_N) \sin^2(\frac{\theta}{2})}$$

Da scattering di questo tipo, e usando la *sezione d'urto di Rosenbluth*, che presenta delle **funzioni di struttura** F , si nota che $F(x, Q^2) = F(x)$, ovvero indipendentemente dal valore di Q , i punti giacciono tutti sulla stessa curva. Questo si può spiegare assumendo che le interazioni siano in realtà dovute allo *scattering* degli elettroni sui *quark* che compongono il nucleone.

Consideriamo il caso $p^2 \approx 0$. Indicando con $f_q(\xi)$ la probabilità di trovare un quark q all'interno del nucleone con una frazione ξ dell'energia del nucleone, si ha - sempre considerando *scattering elastico*:

$$(\xi p)^2 = (\xi p + q)^2 \Rightarrow \xi = \frac{-q^2}{2(pq)} = x$$

In questo caso, si dimostra che la *sezione d'urto differenziale per una collisione elastica con un quark con frazione ξ del momento del protone* è:

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \right)_q(\xi) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} e_q^2 \left(1 + \frac{Q^2}{2\xi^2 m_N^2} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \delta \left(E' - E + \frac{Q^2}{2\xi m_N} \right)$$

Integrando sui possibili valori di ξ , pesati con la rispettiva probabilità, si ottiene che i **fattori di forma** sono:⁷

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_q e_q^2 f_q(x) \quad F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 f_q(x)$$

ovvero $F_2(x) = 2xF_1(x)$, nota come **Relazione di Callan-Gross**, e verificata valida sperimentalmente.

Struttura del protone Dallo studio di diverse interazioni si riescono a determinare i f_q per tutti i *quark*. Si trova, in maniera consistente con quanto atteso, che le sezioni d'urto degli adroni possono venire espresse in termini di **sezioni d'urto elementari**, pesato per le densità di probabilità dei *quark*. Quello che si nota è che la *struttura partonica* del protone è molto complessa - per esempio, a x piccole presenta una composizione di quark differente. Per esempio, in alcuni stati è definito il *sapore* del protone:

$$\int_0^1 dx (f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)) = 2 \quad \int_0^1 dx (f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)) = 1$$

Inoltre, il *numero totale di quark* aumenta per x piccoli, ed entrano anche contributi dovuti a particelle neutre, come i **gluoni**.

⁷i calcoli sono lunghi e complicati. Si rimanda alle diapositive.

Libertà asintotica Si noti che nella trattazione fatta ci si è *dimenticati* che il protone sia in interazione con altri quark nella struttura del nucleone; il fatto che questa approssimazione funzioni bene è detta **libertà asintotica** - maggiore è Q^2 , migliore sarà l'approssimazione. Il fatto che valga la *libertà asintotica* significa che l'esistenza dei quark come oggetti reali, e non semplici strutture matematiche, sia vera. Il fatto però che **non si possano osservare quark liberi** prende il nome di **confinamento**.

Dallo studio di stati di quark pesanti legati si riesce a determinare, a distanze subatomiche (fm), il potenziale sia del tipo:

$$V(r) \sim kr$$

ovvero non è superiormente limitato: significa che non è possibile estrarre un *quark* da un adrone fornendogli un'energia maggiore di quella di legame.

Qualitativamente, quando si ha un'interazione fortemente anelastica, ovvero un *quark* riceve un *tetraimpulso* che ne modifica la traiettoria: ovvero, inizia ad allontanarsi; mano a mano che si allontana, l'energia aumenta e a un certo punto diventa più conveniente *estrarre dal vuoto* una coppia *quark-antiquark* e chiudere le linee di forza creando nuovi adroni.

Domanda. Che cosa significa "estrarre dal vuoto"?

Il colore Dall'analisi dei *quark* si evince che deve esserci una sorta di *carica forte* che generi il potenziale delle interazioni forti, ovvero del tipo $V(r) \sim kr$. Questo *grado di libertà interno* si è dimostrato che può presentarsi in *3 stati*, ed è noto come **colore**. Esistono dunque 3 colori fondamentali, che per analogia sono noti come *rosso, verde e blu*.

La prima evidenza pratica è data dagli stati di risonanza con 3 quark uguali - per esempio $\Delta^{++} = (uuu)$ o $\Omega^- = sss$. Per il principio di esclusione di Pauli, la funzione d'onda totale di questi stati deve essere per forza antisimmetrica; ma presentano $L = 0$, ovvero la funzione d'onda orbitale è simmetrica, e $I_3 = 3/2$, ovvero gli spin sono tutti allineati e quindi è simmetrica, anche quella totale. L'esistenza dei 3 stati di colore per ogni tipo di *quark*, si può ottenere una combinazione lineare affinché la funzione d'onda totale sia *antisimmetrica*.

Difatti, con gli stati così definiti, si ha una simmetria di colore del tipo $SU(3)$, ovvero come le simmetrie di sapore. Matematicamente si comportano in maniera analoga, con gli operatori $F_i = 1/2\lambda_i$ che agiscono sui gradi di libertà del colore al posto che del sapore.

Si definiscono in questo modo gli *stati neutri di colore* quelli che non cambiano sotto trasformazione di colore.

Sezione d'urto dell'annichilimento e^+e^- Il processo che trasforma e^+e^- in una coppia di *fermioni - antifermioni* è di tipo elettromagnetico, ovvero è mediato da un *fotone*. La sezione d'urto nel caso $\sqrt{s} \gg 2m_f$ è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} Q_f^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad \sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_f^2$$

Si può analizzare il processo come produzione di coppie *quark-antiquark*:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_{2m_q < \sqrt{s}} e_q^2$$

È di facile interpretazione il rapporto come:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_{\text{colori}} \sum_{2m_q < \sqrt{s}} e_q^2$$

Sperimentalmente, la misura di $R \simeq 2$ è evidenza di come ci siano effettivamente 3 colori.

Gluoni Il mediatore delle *interazioni forti* è detto **gluone**, e ha la proprietà di scambiare il colore delle particelle. Questi *bosoni* sono caratterizzati da una carica di colore, che può essere di diversi tipi, ma non da una carica elettrica. Sperimentalmente, si osserva che una buona parte della massa dei nucleoni è data dal *gluone*; il valore osservato è circa metà.

Il fatto che la maggior parte del *momento mancante* del protone sia dato dal gluone può essere mostrato in esperimenti con sezioni d'urto in collisioni adroniche, che sono appunto dominate da collisioni *gluone-gluone* - entrano in gioco difatti solo interazioni forti.

2.4 Interazioni

2.4.1 Interazione della radiazione con la materia

Caratteristiche generali Abbiamo già visto due metodi per rivelare le particelle: il **rinculo nucleare di Chadwick** per la rivelazione del *neutrone*, e il **decadimento β inverso** di *Reines e Cowne* per il *neutrino* ν .

In generale, i processi di rivelazione si basano sull'interazione della particella con un materiale, col quale viene scambiata energia, che si trasforma in **calore**. La maggior parte dei rivelatori - ad eccezione dei *bolometri* - si basa sulla misura di un **fenomeno transiente** prima che avvenga la termalizzazione.

Il processo più comune è quello dell'interazione di *particelle cariche* con gli elettroni del materiale attraversato. La perdita di energia da parte delle *particelle veloci* viene visualizzata tramite **ionizzazione specifica** e il *range* e *picco* di **Bragg**; per le *particelle ultra-relativistiche*, ovvero $\gamma > 10^4$, entra in gioco la perdita di energia per **radiazione**: visualizzabile tramite una quantità caratteristica, la **lunghezza di interazione**

$v\xi_0$.

Per le *particelle neutre* si sfrutta il trasferimento di energia alle particelle cariche, tramite **diffusione elastica**.

Perdita di energia per collisione Si considera l'interazione tra una **particella carica veloce** (elettrone approssimabile fermo rispetto a essa) e *pensate* (non viene deviata apprezzabilmente).

Dato un *elettrone* $-e$ a distanza b , a causa del campo elettrico riceve, nel tempo di interazione, un impulso:

$$\Delta P = \int \mathbf{F} dt = \int (-e) \mathbf{E} dt$$

Dopo l'interazione, l'energia dell'elettrone è:

$$T = \frac{\Delta P^2}{2m_e}$$

Si calcola il *momento trasferito* $\Delta \mathbf{P}$ ponendosi nel *sistema di riferimento della particella*, sicché le componenti trasversali del campo siano nulle:

$$\Delta P = \int (-e) E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dz} dz = \frac{e}{v} \int E_{\perp} dz$$

Moltiplico per la parte di circonferenza sottesa:

$$2\pi b \Delta P = \frac{e}{v} \int E_{\perp} dz b d\varphi = \frac{e}{v} \Phi(\mathbf{E}) = \frac{e}{v} \frac{ze}{\varepsilon_0}$$

Si può riscrivere, riordinando le costanti:

$$\Delta P = 2\alpha z \frac{\hbar}{\beta b}$$

L'energia trasferita è quindi:

$$\Delta E = \frac{\Delta P^2}{2m_e} = 2z^2 \alpha^2 \frac{\hbar^2}{m_e \beta^2 b^2}$$

Detta $n_e = Z \frac{Z_A}{A} \rho$ la densità di elettroni del materiale, in uno spazio dx la particella incontra $2\pi b db dx n_e$ elettroni a distanza b . La **perdita di energia per unità di lunghezza** è:

$$\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi v db n_e 2z^2 \alpha^2 \frac{\hbar^2}{m_e \beta^2 b^2} = \frac{4\pi z^2 \alpha^2 \hbar^2}{m_e \beta^2} Z N_A \rho A \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right)$$

I due estremi per b corrispondono ai punti di energia minima e massima (al contrario).

Il calcolo completo di *Bethe-Bloch* mostra come in realtà essa non dipenda dalla massa della particella incidente, ma solo da $\gamma\beta$; a bassi momenti scala come β^2 , presenta un minimo per $\gamma\beta \sim 3$ e presenta una risalita relativistica del tipo $\sim \ln \gamma$.

Da un punto di vista **statistico**, l'interazione con gli elettroni è uno **scattering multiplo**; in media, l'*angolo di deviazione* $\Delta\theta = \Delta P/P$ è nullo, ma la sua **deviazione standard** è:

$$rms(\theta) \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta pc} z \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

dove $\frac{L}{X_0}$ è lo *spessore in unità di lunghezza di radiazione*.

Range e picco di Bragg In maniera semplificata, la perdita di energia della particella è funzione solo della sua velocità:

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f(\beta)$$

Invertendo la relazione e scrivendo $dE = m d\gamma$, la **distanza persona da una particella prima di fermarsi**, i *range*, è:

$$R(\gamma\beta) = \int_0^R dx$$

si trova il risultato:

$$R(E) = \frac{m}{z^2} F\left(\frac{E}{m}, Z\right)$$

Perdita di energia per radiazione La formula di **Bethe-Bloch** ricavata va abbastanza bene anche per gli elettroni, sebbene questi possano trasferire grandi quantità di energia agli altri elettroni e ci possono essere grandi accelerazioni dallo scattering sui nuclei, da cui viene una **radiazione di frenamento**, o **Bremsstrahlung**. Fenomenologicamente, si ha che la perdita di energia per *Bremsstrahlung* è:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0}$$

dove il coefficiente X_0 prende il nome di **lunghezza di radiazione**.

Interazione di fotoni L'interazione dei fotoni con la materia è molto complicata.⁸ Brevemente, ci sono 3 principali modi con cui i fotoni possono interagire:

- **Effetto fotoelettrico**, ovvero l'estrazione di elettroni legati. Questo processo avviene solamente se il *fotone* ha abbastanza energia per superare un'energia di *shell*, ovvero sufficiente a ionizzarlo.
- **Diffusione elettronica**, nell'ipotesi che gli elettroni siano liberi. Noto anche come **effetto Compton**; sapendo che l'energia persa dal fotone è $E/E_0 = 1/(1 + (E_0/m_e)(1 - \cos\theta))$, nel sistema di riferimento dell'elettrone la sezione d'urto dipende dalla polarizzazione:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2)$$

dove $\Phi_0 \propto E, 1/E, \sin^2 \theta$, sezione d'urto non polarizzata, dipende dall'energia del fotone uscente e dal suo angolo; $\Phi_1 = -\sin^2 \theta \cos(2\varphi)$ è il termine di *polarizzazione lineare*; e Φ_2 è un termine legato alla *polarizzazione circolare*.

- **Produzione di coppie elettrone-positrone**. In questa si conserva per intero l'energia del fotone all'interno delle coppie; esiste un'energia di soglia, al di sotto della quale la sezione d'urto satura velocemente e diventa costante.

La legge di assorbimento per i fotoni è anch'essa di tipo esponenziale:

$$N(x) = N_0 \exp(-\mu x)$$

dove $\mu \propto \sigma$

⁸vedi corso di elettromagnetismo

2.4.2 Sciame di particelle

Sciame elettromagnetici Un elettrone ad alta energia la perde principalmente per effetto *bresstrahlung*, fin tanto che:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{collisione}} > \frac{E}{X_0}$$

I fotoni così prodotti possono poi convertirsi in *coppie elettrone-positrone*, che possono irraggiare a loro volta fotoni e così via, fino a quando non si ha uno **sciame** di particelle.

Sciame adronici Nelle interazioni nucleari ad alta energia, si può dimostrare, che è proporzionale all'area del nucleo:

$$V_N \propto A \Rightarrow r_n \propto A^{1/3} \Rightarrow \sigma_N \approx \pi r_N^2 \propto A^{2/3}$$

Il libero cammino medio per le interazioni nucleare è:

$$\lambda_I = \frac{1}{n\sigma_N} = \frac{A}{\rho N_A \sigma_N} \propto \frac{1}{\rho} A^{1/3}$$

Ad ogni interazione possono venire prodotti degli **adroni**, i quali a loro volta possono interagire, portando così alla produzione di uno **sciame di adroni**.

Modello di Heitler Si può trovare un modello unico per urti anelastici sia per *sciame elettronici* sia per *sciame adronici*. Le ipotesi del modello sono:

- Ogni particella percorre una distanza λ , *libero cammino medio*.
- Ad ogni interazione vengono prodotte m particelle, con *momento trasversale* p_T .
- Tutte le m particelle prodotte interagiscono fino a quando la loro energia non scende sotto una certa soglia E_c , detta *energia critica*.
- Una volta esaurita l'energia, vengono assorbite ad una distanza tipica di $E_c / \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{collisione}}$.

Iniziamo con una particella che interagisce. Questa potrà produrre al massimo $N = E/E_c$ particelle; dopo un numero n di interazioni, questo sarà:

$$N = m^n$$

da cui si ha che:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{E}{E_c}\right)}{\ln m}$$

Da questo, si può calcolare la distanza percorsa:

$$L = N\lambda - \frac{E_c}{\frac{dE}{dx}} = \lambda \frac{\ln\left(\frac{E}{E_c}\right)}{\ln m} - \frac{E_c}{\frac{dE}{dx}}$$

La *direzione trasversale* tra la i -esima interazione e la $i + 1$ -esima è:

$$R_i = \lambda \frac{p_T}{E_i} = \frac{\lambda p_T}{E} m^i$$

risultando in una dimensione massima di:

$$R_{max} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda p_T}{E} m^i = \frac{\lambda p_T}{E} \frac{m^n - m}{m - 1} \approx \frac{1}{m - 1} \frac{\lambda p_T}{E}$$

2.5 Il modello standard

2.5.1 Simmetrie di gauge

Simmetrie nell'elettromagnetismo Devi ricordare le cose fatte nel corso di elettro.

Simmetrie nell'equazione di Klein-Gordon Si consideri una funzione ϕ che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon per una particella libera:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

È soluzione di questa anche la trasformata $\phi' = e^{ie\alpha} \phi$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e e è la carica elementare. Analogamente vale se ϕ presenta dei gradi di libertà esterni, come per esempio nel caso di *spin isotopico* $|\phi\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$ e *carica di colore* $|\phi\rangle = \alpha_r |r\rangle + \alpha_g |g\rangle + \alpha_b |b\rangle$.

Si può introdurre un termine di interazione con il campo elettromagnetico eseguendo la sostituzione $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$. Da questa si può ottenere:

$$(\partial_\mu - ieA'_\mu) \phi' = e^{ie\alpha(x)} (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi$$

Si può inoltre dimostrare che la corrente conservata associata all'equazione di Klein-Gordon, scritta in forma invariante come:

$$J_\nu = -i [\phi^* (\partial_\nu - ieA_\nu) \phi - \phi ((\partial_\nu - ieA_\nu) \phi)^*]$$

è invariante per trasformazioni di *gauge* ed è effettivamente una corrente conservata, ovvero $\partial^\nu J_\nu = 0$. Si ha quindi che eJ_ν soddisfa le condizioni per essere sorgente del campo elettromagnetico.

Si può dimostrare che questo procedimento è generalizzabile nel caso di una *simmetria interna* del sistema - l'elettromagnetismo è una simmetria del tipo $U(1)$.

2.5.2 Il modello standard

Introduzione Il modello standard è costruito intorno a **3 simmetrie di gauge**.

- Le **interazioni forti** sono caratterizzati dalla **simmetria $SU(3)$ di colore**, corrispondente a un grado di libertà interno dei *quark*. Poiché si hanno 8 generatori, vi sono associati 8 *gluoni*, delle particelle **senza massa** e confinate all'interno degli adroni, *mesoni* o *barioni*.
- Le **interazioni elettrodeboli** sono prodotte da 2 gruppi di simmetrie: $U(1)$ di **ipercarica**, che ha 1 generatore, e $SU(2)$ di **isospin debole**, che ha 3 generatori. Le particelle sono organizzate in doppietti di $SU(2)$: **quark**, che hanno ipercarica $Y = 1/3$ e **leptoni**, con ipercarica $Y = -1$. Per questo tipo di interazioni vale la relazione di Gell-Mann–Nishijima:

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3$$

Si noti in realtà che nelle interazioni elettrodebole si ha una rottura spontanea delle simmetrie di gauge, associate al *meccanismo di Higgs* - e quindi al corrispondente bosone, generatore della massa delle particelle.

Il modello standard delle particelle è inoltre composto da altri due **bosoni** di massa non-nulla, detti W e Z . Le loro proprietà sono:

- W^\pm
 - massa $m_W \sim 80$ GeV
 - *costante di Fermi*⁹ $\Gamma_W \sim 2$ GeV
 - Altre proprietà:

$$\begin{array}{ll} S = 1 & Q = \pm 1 \\ Y = 0 & T_3 = \pm 1 \end{array}$$

Questi bosoni interagiscono con diverse coppie di particelle con intensità differente:

- $e^+n_e, \mu^+\nu_\mu, \tau^+\nu_\tau$ con intensità $\propto G_F$
- $u\bar{d}, u\bar{s}, u\bar{b}, c\bar{d}, \dots$ con intensità $\propto G_F V_{qq'}$ e **cambiamento di sapore**.

- Z
 - $m_Z \sim 91$ GeV
 - *costante di Fermi* $\Gamma_Z \sim 2.5$ GeV
 - Altre proprietà:

$$\begin{array}{ll} S = 1 & Q = 0 \\ Y = 0 & T_3 = 0 \end{array}$$

Questi bosoni interagiscono con leptoni e quark, $e^+e^-, \nu_e\bar{\nu}_e, \dots, u\bar{u}, \dots$ *senza cambiamento di sapore*.

⁹ **Domanda:** NON NE SONO SICURO

Rottura spontanea di simmetria

La rottura spontanea di simmetria è un fenomeno nel quale, sebbene le equazioni che descrivono un sistema presentano una simmetria, lo stato fondamentale la viola.

Un esempio classico di ciò è dato dai **materiali ferromagnetici**: in essi non dovrebbe esserci una preferenza nella direzione della magnetizzazione; si osservano però delle macroregioni in cui i momenti magnetici sono tutti allineati nello stesso verso.

Si consideri un'equazione del tipo:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + \lambda (|\phi|^2 - v^2) \phi = 0$$

dove $\lambda, v > 0$. Quest'equazione è invariante per trasformazioni del tipo $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$. Per $|\phi| = v$ l'equazione ammette soluzioni statiche $E = p = 0$; consideriamo piccoli spostamenti intorno a questo valore:

$$\phi = v + \rho(x) + i\eta(x)$$

Sostituendo questa piccola soluzione, si ottiene:

$$\partial^\mu \partial_\mu (\rho + i\eta) + 2v^2 \lambda \rho = 0$$

Considerando perturbazioni alle soluzioni statiche si è persa evidenza della simmetria; in tal caso, la componente η si comporta come se avesse massa nulla, mentre ρ ha massa $m^2 = 2\lambda v^2$.

Consideriamo cosa succede quando si pone la perturbazione all'interno delle equazioni di campo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 e J^\nu \quad J_\nu = -i [\phi^* (\partial_\nu - ie A_\nu) \phi - \phi ((\partial_\nu - ei A_\nu) \phi)^*]$$

Dalle perturbazioni, all'ordine 0 compare il termine $J_\nu = -2ev^2 A_\nu + o(1)$. Sostituito nell'equazione dei campi ridà:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -2\mu_0 e^2 v^2 A^\nu$$

ovvero si ha un'equazione di una particella di massa $m = \sqrt{2\mu_0} ev$. Si ha che **la rottura spontanea della simmetria fa acquisire massa ai campi mediatori delle forze**.

Bosone di Higgs

Quanto appena descritto è, in maniera semplificata, alla base del concetto di **bosone di Higgs**. Le sue caratteristiche sono:

$$m_H \sim 125 \text{ GeV} \quad Q = 0 \quad S = 0$$

Questo fornisce massa a W e Z , mentre il *fotone* rimane senza massa. Tramite il mescolamento di stati con gli stessi numeri quantici, attraverso la *matrice CKM*, fornisce massa ai *fermioni*.

Appendice A

I 10 esercizi per l'esame

Esercizio 3.1

1. Usando la **legge del decadimento radioattivo**, si è in grado di stimare la quantità di *Carbonio-14* contenuta in 1 g di carbonio naturale:

$$(\text{Act.})_{^{14}\text{C}} = \lambda_{^{14}\text{C}} N_{^{14}\text{C}}$$

Sapendo che l'attività è $(\text{Act.})_{^{14}\text{C}} = 0.25 \text{ Bq}$ e che:

$$\lambda_{^{14}\text{C}} = \frac{\ln 2}{(\tau_{1/2})_{^{14}\text{C}}}$$

dove $(\tau_{1/2})_{^{14}\text{C}} = 5730 \text{ yr}$, si ha come risultato:

$$N_{^{14}\text{C}} = 6.52 \cdot 10^{10}$$

Confrontando questo risultato con la quantità di *Carbonio-12*, l'isotopo stabile e più abbondante in natura, $N_{^{12}\text{C}} = \frac{N_A}{12} \simeq 5 \cdot 10^{22}$, si nota come la quantità dell'isotopo 14 del carbonio sia molto scarsa.

2. L'evoluzione temporale della legge del decadimento radioattivo, valida anche per l'attività - basta eseguire la sostituzione $N = \text{Act.} \cdot T$, con lo stesso T :

$$\text{Act.}(t) = \text{Act.}(0) \exp(-\lambda t)$$

deve t è il tempo da stimare per il reperto. Conoscendo $\text{Act.}(t) = 1.48 \cdot 10^{-1} \text{ Bq}$, si ha:

$$t = \ln \left[\frac{\text{Act.}(0)}{\text{Act.}(t)} \right] \frac{(\tau_{1/2})_{^{14}\text{C}}}{\ln 2} = 4400 \text{ yr}$$

3. Usando la *propagazione degli errori*, si può stimare l'incertezza sulla misura dell'età. Si ottiene:

$$\sigma_t = \frac{(\tau_{1/2})_{^{14}\text{C}}}{\ln 2} \frac{1}{\text{Act.}(t)} \sigma_{\text{Act.}(t)}$$

dove, poiché $\text{Act.}(t) = N_{\text{dec}}/T$, con $T = 1 \text{ hr}$, vale

$$\sigma_{\text{Act.}(t)} = \frac{\sqrt{N_{\text{dec}}}}{T}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene:

$$\sigma_t = 360 \text{ yr}$$

Esercizio 3.2 Utilizzando la *legge del decadimento radioattivo* su entrambi gli elementi, *Uranio-235* e *Uranio-238*, si ha:

$$\frac{N_{235\text{U}}(t)}{N_{238\text{U}}(t)} = \frac{N_{235\text{U}}(0)}{N_{238\text{U}}(0)} e^{-(\lambda_{235\text{U}} - \lambda_{238\text{U}})t}$$

dove è già stato eseguito il rapporto tra le due equazioni. Conoscendo che $N_{235\text{U}}(t)/N_{238\text{U}}(t) = 0.7\%$, approssimando che i due isotopi siano stati creati in ugual quantità al tempo 0 e ricordando la relazione $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}$, si può stimare il tempo t che è passato dalla creazione dell'Uranio a oggi:

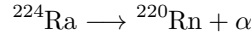
$$t = \left(\frac{1}{(\tau_{1/2})_{238\text{U}}} - \frac{1}{(\tau_{1/2})_{235\text{U}}} \right)^{-1} \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{N_{235\text{U}}(t)}{N_{238\text{U}}(t)} \right)$$

dove si è già posto $\frac{N_{235\text{U}}(0)}{N_{238\text{U}}(0)} = 1$. Si ottiene quindi:

$$t = 6.09 \cdot 10^9 \text{ yr}$$

Esercizio 4.1

1. Il decadimento α del *Radio-224* è:



Conoscendo gli **eccessi di massa** dei componenti della reazione, se ne può determinare il *Q-valore*:

$$Q = m(^{224}\text{Ra}) - m(^{220}\text{Rn}) - m(\alpha) = 5.98 \text{ MeV}$$

Si può quindi stimare il **fattore di Gamow**, conoscendo che il *tempo di dimezzamento* per decadimenti α è $(\tau_{1/2})_\alpha = 3.66 \text{ days}$. Per la **legge di Geiger-Nuttal** si ha:

$$\ln(\tau) = \ln \left(\sqrt{\frac{m}{2(Q + V(a))}} \frac{a}{2} \right) + 2G$$

Stimando $a = r_0 A^{1/3}$, con $r_0 \simeq 1.2 \text{ fm}$, ricordando che $\tau_{1/2} = \tau \ln 2$ e usando il valore di $V(r)$ per un potenziale Coulombiano:

$$V(a) = \frac{(Z - Z_1)Z_1 \alpha \hbar c}{a}$$

si ottiene:

$$G_\alpha = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{(\tau_{1/2})_\alpha}{\ln 2} \right) - \ln \left(\sqrt{\frac{m_\alpha}{2(Q + V(a))}} \frac{a}{2} \right) \right] \simeq 32$$

2. Si cercano i tempi di dimezzamento per i decadimenti su *Carbonio-12* e *Carbonio-14*:



Poiché analiticamente identico, si mostra il procedimento in maniera generale e si danno infine i risultati calcolati. Usando la formula per il *fattore di Gamow* per un potenziale Coulombiano, si può stimare:

$$\frac{G_x}{G_\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{m_x}{Q_x}}}{\sqrt{\frac{m_\alpha}{Q_\alpha}}} \cdot \frac{Z_x(Z_{^{224}\text{Ra}} - Z_x)}{Z_\alpha(Z_{^{224}\text{Ra}} - Z_\alpha)} \cdot \frac{f_x\left(\frac{a}{b}\right)}{f_\alpha\left(\frac{a}{b}\right)}$$

nella quale vale

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \arccos\left(\frac{a}{b}\right) - \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2}}$$

Per il calcolo di b si usa:

$$b = \frac{Z_x(Z_{^{224}\text{Ra}} - Z_x) \alpha \hbar c}{Q_x}$$

Da questi calcoli si ottiene, per i due canali di decadimento:

$$G_{^{12}\text{C}} \simeq 57 \quad G_{^{14}\text{C}} \simeq 51$$

Calcolando quindi la vita media si ha:

$$(\tau_{1/2})_{^{12}\text{C}} \simeq 1.7 \cdot 10^{22} \text{ yrs} \quad (\tau_{1/2})_{^{14}\text{C}} \simeq 5 \cdot 10^{14} \text{ yrs}$$

Calcolando i **branching ratios** si ottiene che entrambi i decadimenti sono praticamente impossibili rispetto a quelli sul canale α :

$$(\text{B.R.})_{^{12}\text{C}} = \frac{\lambda_{^{12}\text{C}}}{\lambda_\alpha + \lambda_{^{12}\text{C}}} \approx \frac{\tau_\alpha}{\tau_{^{12}\text{C}}} \sim 10^{-23} \quad (\text{B.R.})_{^{14}\text{C}} \sim 10^{-17}$$

Esercizio 7.1 Si utilizza il modello a Shell per descrivere i valori di *spin-parità* J^P per gli stati fondamentali di alcuni atomi.

- ^7Li : $Z = 3$ e $N = 4$. Si ha quindi 1 protone *spaiato*, che occupa il livello $1P_{3/2}$; si ha quindi che $\ell = 1$, ovvero la parità, poiché è quella di armonica sferica $(-1)^\ell$, sarà negativa. Si ottiene:

$$J^P = \frac{3}{2}^-$$

- ^1B : $Z = 5$ e $N = 6$. Si ha quindi 1 protone *spaiato*, che occupa il livello $1P_{3/2}$; si ha quindi che $\ell = 1$, ovvero la parità, poiché è quella di armonica sferica $(-1)^\ell$, sarà negativa. Si ottiene:

$$J^P = \frac{3}{2}^-$$

- ^{15}C : $Z = 6$ e $N = 9$. Si ha quindi 1 neutrone *spaiato*, che occupa il livello $1D_{5/2}$; si ha quindi che $\ell = 2$, ovvero la parità, poiché è quella di armonica sferica $(-1)^\ell$, sarà positiva. Si ottiene:

$$J^P = \frac{5}{2}^+$$

- ^{17}F : $Z = 9$ e $N = 8$. Si ha quindi 1 protone *spaiato*, che occupa il livello $1D_{5/2}$; si ha quindi che $\ell = 2$, ovvero la parità, poiché è quella di armonica sferica $(-1)^\ell$, sarà positiva. Si ottiene:

$$J^P = \frac{5}{2}^+$$

- ^{31}P : $Z = 15$ e $N = 16$. Si ha quindi 1 protone *spaiato*, che occupa il livello $2S_{1/2}$; si ha quindi che $\ell = 0$, ovvero la parità, poiché è quella di armonica sferica $(-1)^\ell$, sarà positiva. Si ottiene:

$$J^P = \frac{1}{2}^+$$

- ^{141}Pr : $Z = 59$ e $N = 82$. Si ha quindi 1 protone *spaiato*, che occupa il livello $2D_{5/2}$; si ha quindi che $\ell = 2$, ovvero la parità, poiché è quella di armonica sferica $(-1)^\ell$, sarà positiva. Si ottiene:

$$J^P = \frac{5}{2}^+$$

Esercizio 7.7

- ^{75}Ge : $Z = 32$ e $N = 43$. Si ha 1 neutrone *spaiato*; il momento angolare del nucleo è quindi dato da questo. Constatando che $J^P = 1/2^-$, si ottiene che g è:¹

$$g = \frac{1}{j} \left[g_\ell \frac{j(j+3/2)}{j+1} - \frac{1}{2} \frac{j}{j+1} g_S \right] = 1.27$$

dove $g_\ell = 0$ dato che il neutrone non ha carica elettrica e $g_S = -3.82$ per il neutrone. Si ottiene quindi, secondo la formula $\mu = gj\mu_N$:

$$\mu = 0.66\mu_N$$

Il valore misurato è di $\mu = 0.51\mu_N$; l'approssimazione è per l'80% precisa.

- ^{87}Sr : $Z = 38$ e $N = 49$. Si ha 1 neutrone *spaiato*; il momento angolare del nucleo è quindi dato da questo. Constatando che $J^P = 9/2^+$, si ottiene come una g di:

$$g = \frac{1}{j} \left[g_\ell \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_S \right] = -0.443$$

¹per scegliere quale tra i casi $j = \ell \pm 1/2$ siamo, si deve andare a vedere quale sia il valore di ℓ associato al livello - vedi tabella del *Das, Ferbel*.

dove $g_\ell = 0$ dato che il neutrone non ha carica elettrica e $g_S = -3.82$ per il neutrone. Si ottiene quindi, secondo la formula $\mu = gj\mu_N$:

$$\mu = -1.91\mu_N$$

Il valore misurato è di $\mu = 1.093\mu_N$; l'approssimazione è per l'60% precisa.

- ^{91}Zr : $Z = 40$ e $N = 51$. Si ha 1 neutrone *spaiato*; il momento angolare del nucleo è quindi dato da questo. Constatando che $J^P = 5/2^+$, si ottiene come una g di:

$$g = \frac{1}{j} \left[g_\ell \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_S \right] = -0.76$$

dove $g_\ell = 0$ dato che il neutrone non ha carica elettrica e $g_S = -3.82$ per il neutrone. Si ottiene quindi, secondo la formula $\mu = gj\mu_N$:

$$\mu = -1.91\mu_N$$

Il valore misurato è di $\mu = -1.92\mu_N$; l'approssimazione è per l'99% precisa.

- ^{47}Sc : $Z = 21$ e $N = 26$. Si ha 1 protone *spaiato*; il momento angolare del nucleo è quindi dato da questo. Constatando che $J^P = 7/2^-$, si ottiene come una g di:

$$g = \frac{1}{j} \left[g_\ell \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_S \right] = 1.65$$

dove $g_\ell = 01$ dato che il protone ha carica elettrica e $g_S = 5.58$ per il protone. Si ottiene quindi, secondo la formula $\mu = gj\mu_N$:

$$\mu = 5.79\mu_N$$

Il valore misurato è di $\mu = 5.34\mu_N$; l'approssimazione è per l'90% precisa.

- ^{47}Eu : $Z = 63$ e $N = 84$. Si ha 1 protone *spaiato*; il momento angolare del nucleo è quindi dato da questo. Constatando che $J^P = 5/2^+$, si ottiene come una g di:

$$g = \frac{1}{j} \left[g_\ell \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_S \right] = 1.92$$

dove $g_\ell = 1$ dato che il protone ha carica elettrica e $g_S = 5.58$ per il protone. Si ottiene quindi, secondo la formula $\mu = gj\mu_N$:

$$\mu = 4.79\mu_N$$

Il valore misurato è di $\mu = 3.76\mu_N$; l'approssimazione è per l'70% precisa.

- $^{47}\text{Eu}^*$ (stato eccitato): $Z = 63$ e $N = 84$. Si ha 1 protone *spaiato*; il momento angolare del nucleo è quindi dato da questo. Constatando che $J^P = 1/2^-$, si ottiene come una g di:

$$g = \frac{1}{j} \left[g_\ell \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_S \right] = 1.42$$

dove $g_\ell = 1$ dato che il protone ha carica elettrica e $g_S = 5.58$ per il protone. Si ottiene quindi, secondo la formula $\mu = gj\mu_N$:

$$\mu = 7.79\mu_N$$

Il valore misurato è di $\mu = 7.04\mu_N$; l'approssimazione è per l'90% precisa.

Esercizio 10.1 Si calcola il flusso di neutrini solari, sapendo che per ogni ciclo $4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$ vengono prodotti 2 neutrini, liberando 26 MeV di energia. Il flusso è dato in generale da

$$\Phi = \frac{\frac{dn_\nu}{dt}}{4\pi R^2}$$

dove $R = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ è il raggio medio *Sole-Terra*. Il numero di neutrini prodotto per unità di tempo è dato dalla relazione:

$$\frac{dn_\nu}{dt} = 2 \cdot \frac{L_{\text{sol}}}{E_{\text{rea.}}}$$

con $L_{\text{sol}} = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$ la luminosità solare - la potenza prodotta dal Sole - e $E_{\text{rea.}} = 26 \text{ MeV}$ l'energia liberata da ogni reazione. Sostituendo i valori si ottiene:

$$\Phi = 6.83 \cdot 10^{14} \frac{\text{neutrini}}{\text{m}^2\text{s}}$$

Esercizio 10.2 Si stima la reattività nella zona centrale del Sole - di raggio $R \simeq 0,2R_{\text{sun}}$ e massa $1/3$ della massa solare - per la reazione $^1\text{H} + ^1\text{H} \rightarrow ^2\text{H} + e^+ + \nu_e$. Il numero di reazione per unità di volume è:

$$\frac{dn}{dt} = n_p^2 \langle \sigma v \rangle$$

dove n_p è la densità di protoni e $\langle \sigma v \rangle$ è la reattività. Dato che il numero di reazioni al secondo è circa $\frac{dN}{dt} \simeq 2 \cdot 10^{38}$, e stimando la densità di protoni come:

$$n_p = \frac{1}{V} \left[\frac{1}{3} M_{\text{sun}} \left(\frac{N_A}{A} \right) \right]$$

dove $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ g/mol}$ è il *numero di Avogadro*, $M_{\text{sun}} = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g}$ è la massa solare e $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ è il volume della zona considerata. Si ha quindi:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{V} \frac{dN}{dt} \frac{1}{n_p^2} = 1.4 \cdot 10^{-50} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Esercizio 16.2 Si calcola la sezione d'urto di particelle strane, assumendo che il tasso di produzione si $\frac{dn}{dt} \sim 1 \text{ 1/dd}$, il flusso all'altezza del rilevatore sia $\Phi \sim 0.1 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$. Si considera come bersaglio una scatola di alluminio di spessore 2 mm e sezione $10 \cdot 10 \text{ cm}^2$. Dalla definizione di sezione d'urto:

$$\frac{dn}{dt} = \Phi N_{\text{bersagli}} \sigma$$

dove il numero di bersagli può essere calcolato come:

$$N_{\text{bersagli}} = \frac{\rho_{\text{Al}} V_{\text{scatola}}}{m_{\text{nucleone}}}$$

usando i valori tabulati per la massa di un nucleone e la densità dell'alluminio, si ottiene:

$$N_{\text{bersagli}} = 3.23 \cdot 10^{25}$$

Da questo si ottiene una sezione d'urto di:

$$\sigma = 3.6 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2 = 3.6 \text{ mb}$$

Esercizio 16.4 Si considerano alcuni decadimenti di *mesoni-K* tramite interazione debole - bosone W^- . Si prende in particolare il cambiamento di un *quark s* in un *quark u*, con emissione di leptone e il suo anti-neutrino associato.

- $K^+ = (\bar{s}u)$. Per interazione debole si ha che $\bar{s} \rightarrow \bar{u} + \ell^+ \nu_\ell$. Si ottiene quindi un mesone del tipo $(\bar{u}u) = \pi^0$. Il decadimento permesso in questo processo è quindi:

$$K^+ \longrightarrow \pi^0 + \ell^+ + \nu_e$$

Il decadimento con ℓ^- non è permesso per **conservazione della carica elettrica** nelle interazioni deboli.

- $K^0 = (\bar{s}d)$. Per interazione debole si ha che $\bar{s} \rightarrow \bar{u} + \ell^+ \nu_\ell$. Si ottiene quindi un mesone del tipo $(\bar{u}d) = \pi^-$. Il decadimento permesso in questo processo è quindi:

$$K^0 \longrightarrow \pi^- + \ell^+ + \nu_e$$

In questo caso, il decadimento $K^0 \longrightarrow \pi^+ + \ell^- + \bar{\nu}_e$ sarebbe permesso dalla conservazione della carica, ma non è permesso tramite questo tipo di interazione - $\pi^+ = (\bar{d}u)$, ovvero non realizzabile.

- $\bar{K}^0 = (s\bar{d})$. Per interazione debole si ha che $s \rightarrow u + \ell^- \bar{\nu}_\ell$. Si ottiene quindi un mesone del tipo $(u\bar{d}) = \pi^+$. Il decadimento permesso in questo processo è quindi:

$$\bar{K}^0 \longrightarrow \pi^+ + \ell^- + \bar{\nu}_e$$

In questo caso, il decadimento $\bar{K}^0 \longrightarrow \pi^- + \ell^+ + \nu_e$ sarebbe permesso dalla conservazione della carica, ma non è permesso tramite questo tipo di interazione - $\pi^- = (d\bar{u})$, ovvero non realizzabile.

- $K^- = (s\bar{u})$. Per interazione debole si ha che $s \rightarrow u + \ell^- \bar{\nu}_\ell$. Si ottiene quindi un mesone del tipo $(u\bar{u}) = \pi^0$. Il decadimento permesso in questo processo è quindi:

$$K^- \longrightarrow \pi^0 + \ell^- + \bar{\nu}_e$$

Il decadimento con ℓ^+ non è permesso per **conservazione della carica elettrica** nelle interazioni deboli.

Esercizio 5.3 Per avere una situazione critica, ovvero che provochi una reazione di fissione nucleare, data la legge del decadimento radioattivo

$$\frac{dN}{dt} = (\nu q - 1) \frac{N}{\tau}$$

si deve avere $\nu q = 1$; dove $\nu \simeq 2,4$ è il numero di neutroni prodotti in media per fissione, q è la probabilità che un neutrone vagante induca una fissione e τ è il tempo medio tra una collisione e la successiva.

Per determinare la probabilità di indurre una fissione q_{fiss} in presenza di un moderatore - *acqua* con $q_{\text{mod}} = (1 - 0.47)$, probabilità che il neutrone non vada incontro a collisione il moderatore - si ha:

$$q = q_{\text{mod}} \cdot q_{\text{fiss}}$$

Usando la legge per la probabilità di indurre una fissione date le sezioni d'urto:

$$q_{\text{fiss}} = \frac{\bar{\sigma}_{\text{fiss}}^{235}}{\bar{\sigma}_{\text{fiss}}^{235} + \bar{\sigma}_{n,\gamma}^{\text{tot}}}$$

dove le sezioni d'urto sono considerate in media. Chiamando quindi α la frazione di ^{235}U rispetto al totale, si ottiene:

$$q_{\text{fiss}} = \frac{\alpha \sigma_{\text{fiss}}^{235}}{\alpha \sigma_{\text{fiss}}^{235} + [\alpha \sigma_{n,\gamma}^{235} + (1 - \alpha) \sigma_{n,\gamma}^{238}]}$$

Si ricava come risultato:

$$\alpha = 5.42\%$$

Sapendo che al tempo t - oggi - la frazione di ^{235}U è $\alpha(t) = 0.7\%$, tramite la legge del decadimento radioattivo si può determinare quanto tempo sia passato da quando l'*Uranio* fosse critico - ovvero affinché $\alpha(0) = 5.47\%$.

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$$

Costatando che

$$\alpha(t) = \frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)}$$

Si può ottenere facilmente:

$$t = \left(\frac{1}{\tau_{238}} - \frac{1}{\tau_{235}} \right)^{-1} \cdot \ln \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)} \right)$$

Da cui, usando i tempi di dimezzamento per i due isotopi dell'*Uranio* (valori tabulati), si ottiene:

$$t = 2.47 \cdot 10^9 \text{ yr}$$