

Progetto metodi Monte Carlo

Leonardo Amabile

Agosto/Settembre 2025

Introduzione

L'obiettivo del progetto è quello di modellizzare e analizzare un oscilloscopio analogico a tubo catodico (CRT) con le strategie dei metodi Monte Carlo per determinare le maggiori sorgenti di errore nella misura di segnali di tensione, sia continua che alternata.

Per fare ciò ci serviremo di un generatore di numeri casuali tra 0 e 1 e di un calcolatore. Nel progetto è stata utilizzata la funzione `random.uniform()` della libreria *numpy* in linguaggio *Python*.

L'oscilloscopio analogico a CRT

L'oscilloscopio analogico a CRT si basa sull'utilizzo di un tubo catodico, due condensatori piani e uno schermo di fosforo. Il tubo catodico permette l'emissione costante di elettroni in direzione dello schermo al fosforo; quando le particelle colpiscono lo schermo, esso emette luce. I due condensatori, posti con le facce ortogonali tra di loro, permettono la deflessione del fascio di cariche in modo proporzionale alla tensione applicata alle piastre, fornendoci un metodo visivo per determinare la tensione ai due capi di un circuito. In figura (1) uno schema che riassume il funzionamento di un oscilloscopio di questo tipo.

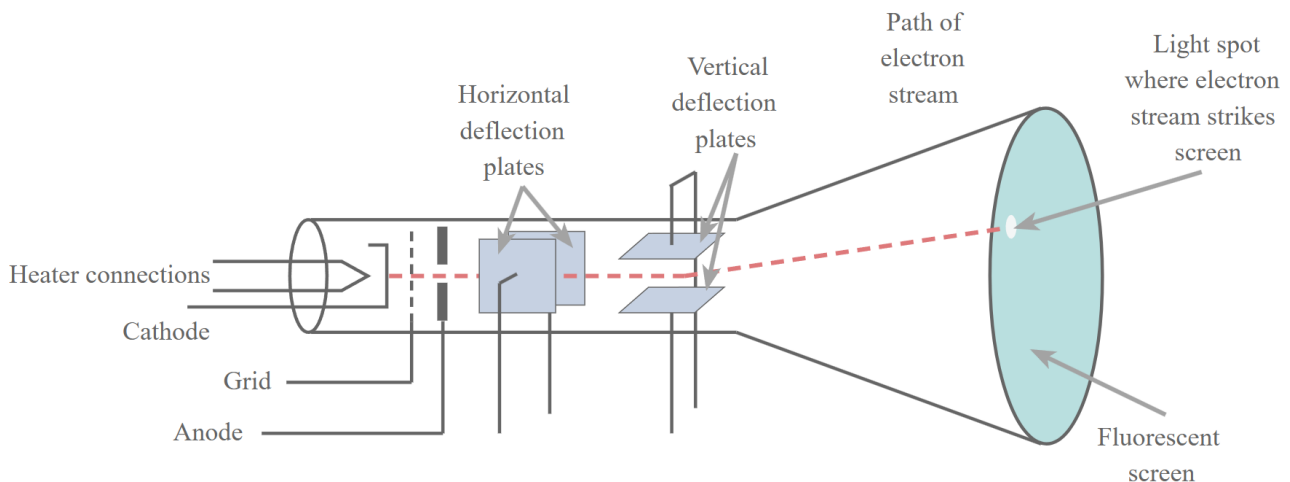


Figure 1: Schema riassuntivo di un oscilloscopio analogico

Solitamente lungo l'asse orizzontale la tensione applicata alle piastre è un segnale a "dente di sega" generato dall'oscilloscopio stesso o da un generatore di forme d'onda esterno, in questo modo è possibile visualizzare la tensione ai capi del nostro circuito in funzione del tempo. Un'altra configurazione tipica dell'oscilloscopio è quella cosiddetta X-Y in cui due segnali distinti in funzione del tempo vengono applicati ai due condensatori, permettendo una visualizzazione simultanea di due segnali.

Poiché la posizione della traccia luminosa è strettamente correlata al valore della tensione applicata e alla relativa incertezza, è fondamentale identificare le principali fonti di errore che influenzano la posizione dell'alone e comprendere come sia possibile ridurle.

Per semplicità, in questo progetto si trascurerà il contributo del condensatore responsabile della deflessione orizzontale, poiché il segnale applicato in quella direzione ha un ruolo puramente funzionale: esso serve unicamente a generare una traccia luminosa continua visibile all'utente. Le misure di interesse sono invece legate al campo prodotto dal condensatore verticale, ai cui capi viene applicato il segnale da analizzare (eventualmente amplificato).

Principali sorgenti di errore

Per modellizzare matematicamente il funzionamento di un oscilloscopio analogico, in prima approssimazione si adottano le seguenti ipotesi semplificative:

- il fascio di elettroni è considerato puntiforme;
- il campo elettrico all'interno dei condensatori è uniforme e costante;
- la risposta del materiale fosforescente è limitata a un punto delle stesse dimensioni della sorgente elettronica.

L'obiettivo di questo progetto è verificare, almeno numericamente, quanto queste tre assunzioni siano effettivamente valide nel contesto di un oscilloscopio reale, e in che misura possano introdurre errori significativi nella rappresentazione del segnale.

Rappresentazione del fascio

Per rappresentare in modo più realistico il fascio, esso è stato rappresentato come un insieme di punti distribuiti uniformemente all'interno di una circonferenza. Fatto ciò, il campo elettrico all'interno del condensatore è stato modellizzato in due modi distinti:

- distribuito gaussianamente attorno al valore centrale $E_0 = \frac{V_0}{D}$;
- esteso al secondo termine non nullo attorno al centro delle piastre.

In questo modo possiamo osservare se l'incertezza più rilevante è quella causata dall'approssimazione di campo uniforme e costante all'interno del condensatore oppure dalle fluttuazioni dello strumento di misura.

Dall'espressione del campo elettrico è possibile simulare la traiettoria degli elettroni classicamente sfruttando il fatto che una particella carica in un campo elettrico è soggetta ad un'accelerazione pari a $\vec{a}(t) = \frac{e}{m_e} \vec{E}(t)$.

Infine, è stata simulata anche la risposta del fosforo alla collisione con l'elettrone; in particolare, si è supposto che la luce emessa dal fosforo porti un contributo distribuito gaussianamente attorno al sito della collisione.

Valori numerici utilizzati per la simulazione

Simbolo	Valore	Descrizione
N	100 000	Numero di elettroni simulati
R_s	0.25 mm	Raggio della sorgente elettronica
m_e	9.11×10^{-31} kg	Massa dell'elettrone
e	1.6×10^{-19} C	Carica dell'elettrone
V_z	3 keV	Tensione tra anodo e catodo
D	3.0 mm	Distanza tra le piastre del condensatore
R_p	20 mm	Raggio delle piastre del condensatore
L	150 mm	Distanza tra CRT e lo schermo
V_0	100 V	Tensione applicata al condensatore
ϵ_0	8.854×10^{-12} F/m	Permittività del vuoto
Δt	1×10^{-12} s	Passo temporale della simulazione (modello "primo ordine")

Table 1: Costanti fisiche e parametri utilizzati nella simulazione

I valori numerici utilizzati fanno riferimento ai manuali di diversi CRT e oscilloscopi analogici della *Tektronics* prodotti tra gli anni '60 e '70.

Un parametro fondamentale da considerare è la velocità con cui gli elettroni, accelerati dal cannone elettronico, raggiungono lo schermo.

Con un approccio classico si ottiene che:

$$\frac{1}{2}m_e v_z^2 = eV_z$$

$$v_z = \sqrt{\frac{2eV_z}{m_e}} \approx 0.1081 c$$

La velocità così ottenuta è sensibilmente inferiore rispetto a quella della luce. Tuttavia, per essere più rigorosi, si può ricavare la velocità degli elettroni considerandoli come relativistici e vedere di quanto differisca da quella classica.

Questa velocità può essere stimata uguagliando l'energia cinetica degli elettroni relativistica all'energia acquisita dal campo elettrico durante l'accelerazione:

$$m_e c^2 (\gamma - 1) = eV_z$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{z,rel}}{c}\right)^2}} \approx 1.0061.$$

Da cui si ricava:

$$v_{z,rel} = 0.1085 c$$

La velocità calcolata con la formula relativistica differisce di meno dello 0.5 % da quella ottenuta con la formula classica. I risultati utilizzando l'una o l'altra velocità hanno portato a risultati essenzialmente identici, perciò nella relazione si utilizzerà quella relativistica ($v_{z,rel}$).

Generazione dei dati

Per la generazione delle posizioni iniziali delle particelle, come già anticipato, è stata utilizzata esclusivamente la funzione `random.uniform()` della libreria *NumPy*, che genera numeri casuali distribuiti uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$. Per ottenere una distribuzione uniforme sull'area di un disco di raggio R_s (raggio della sorgente), sono state applicate le seguenti trasformazioni:

$$\theta \sim 2\pi \mathcal{U}(0, 1)$$

$$r \sim R_s \cdot \sqrt{\mathcal{U}(0, 1)}$$

$$x_0 = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y_0 = r \cdot \sin(\theta)$$

In questo modo, le coordinate (x_0, y_0) risultano distribuite in modo uniforme all'interno del cerchio, evitando un'eccessiva concentrazione di punti verso il centro, che si verificherebbe utilizzando una distribuzione uniforme sul raggio.

Modelli utilizzati e primi risultati

1. Campo elettrico perturbato gaussianamente

Dopo la generazione delle posizioni iniziali degli elettroni è stato applicato a ciascuno di essi un campo elettrico costante e uniforme, pari al valore teorico centrale $\frac{V_0}{D}$, dove V_0 è la tensione applicata e D la distanza tra le piastre del condensatore. Per simulare le inevitabili imperfezioni del sistema sperimentale, è stata aggiunta una perturbazione statistica a ciascun valore di campo, modellata come una variabile casuale con distribuzione gaussiana centrata sul valore teorico e con deviazione standard pari all'1% dello stesso. Sebbene tale incertezza sia relativamente piccola, essa si rivelerà comunque predominante rispetto ad altre sorgenti di errore del sistema.

Per generare dati distribuiti gaussianamente per il campo elettrico, si utilizza una trasformazione basata su due variabili casuali indipendenti $u_1, u_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, distribuite uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$. Questa trasformazione, nota come metodo di Box-Muller, consente di ottenere due variabili gaussiane standard z_0 e z_1 :

$$R = \sqrt{-2 \ln u_1}$$

$$\theta = 2\pi u_2$$

$$z_0 = R \cos \theta = \sqrt{-2 \ln u_1} \cdot \cos(2\pi u_2)$$

$$z_1 = R \sin \theta = \sqrt{-2 \ln u_1} \cdot \sin(2\pi u_2)$$

Per ottenere una variabile casuale x distribuita secondo una normale generica con media μ e deviazione standard σ , si applica la trasformazione:

$$x = \mu + \sigma z_0 = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2 \ln u_1} \cdot \cos(2\pi u_2)$$

Utilizzando questa trasformazione è stato possibile stimare il campo elettrico a cui è sottoposto ciascun elettrone e , di conseguenza, anche la sua accelerazione e posizione finale.

Assumendo l'assenza di sorgenti di campo elettrico lungo l'asse orizzontale, si è ottenuto il seguente istogramma delle posizioni finali:

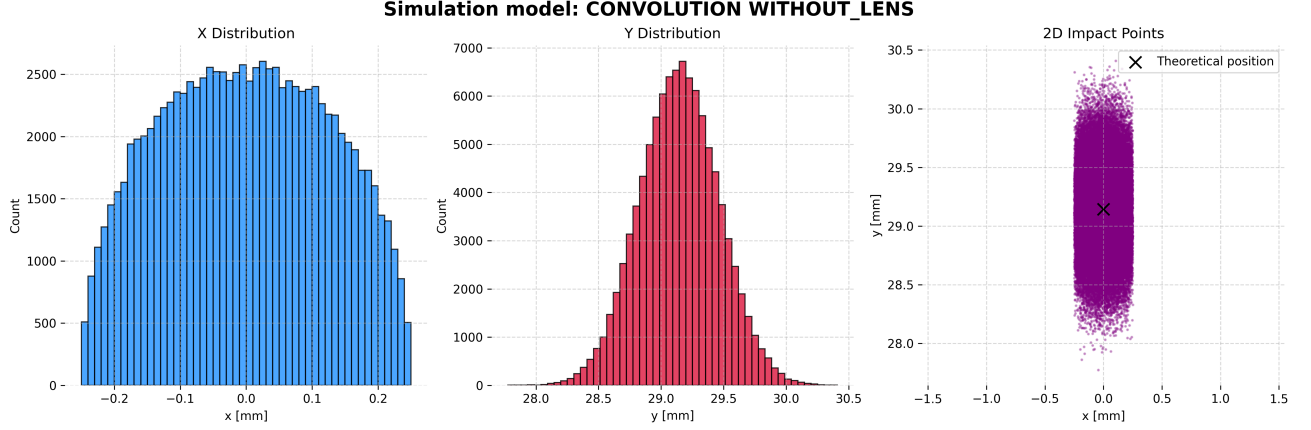


Figure 2: Istogramma delle posizioni di arrivo sullo schermo degli elettroni. La croce nera indica la posizione teorica di arrivo di un fascio di elettroni perfettamente puntiforme, soggetto a un campo uniforme e costante.

La distribuzione lungo l'asse x risulta invariata rispetto a quella iniziale, mentre quella lungo y assume una forma gaussiana. I risultati ottenuti sono i seguenti:

$$\sigma_x = 0.1249 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = 0.3165 \text{ mm}$$

$$y_{\text{obs}} = 29.1432 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} = 29.1428 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} - y_{\text{obs}} = -0.0004 \text{ mm}$$

La presenza di un campo distribuito gaussianamente ha quindi portato ad un aumento della varianza lungo l'asse y , rispetto alla distribuzione originaria, senza però alterare in modo significativo la posizione media dello spot.

Dal punto di vista teorico, la distribuzione degli elettroni lungo l'asse y può essere interpretata come il risultato della convoluzione tra la distribuzione iniziale del fascio (circolare, proiettata sull'asse y) e una distribuzione gaussiana derivante dalle variazioni del campo elettrico. Questa approssimazione è giustificata dal fatto che la legge oraria del moto degli elettroni è una combinazione lineare della posizione iniziale e della forza elettrica a cui gli elettroni sono sottoposti.

In pratica, la distribuzione risultante è molto simile a una gaussiana, e il rapporto σ/μ della distribuzione lungo y risulta praticamente identico a quello utilizzato per il campo elettrico ($\sim 1\%$). Ciò implica che l'incertezza sulla posizione finale degli elettroni è dominata dalla variazione del campo elettrico, più che dalla distribuzione iniziale delle posizioni.

Questo effetto è chiaramente osservabile confrontando le distribuzioni sugli assi x e y : lungo x , dove la componente del campo elettrico è trascurabile, la variazione di posizione è minima e l'istogramma risulta molto più concentrato rispetto all'asse y , confermando che la dispersione lungo y è principalmente causata dalla deflessione elettrica.

2. Approssimazione del campo al primo ordine

Come seconda sorgente di errore è stata considerata l'approssimazione del campo elettrico come uniforme all'interno del condensatore. Per valutare l'impatto di questa ipotesi, è stata utilizzata un'approssimazione al

primo ordine nei parametri y/D e ρ/R_p , dove $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$ rappresenta la distanza radiale dal centro, D la distanza tra le piastre e R_p il raggio delle piastre. Sia quindi:

$$y_c = y_0 + \frac{D}{2}$$

la coordinata verticale rispetto al centro del condensatore. Le componenti del campo elettrico risultano:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3y_c(D - y_c)}{2R_p^2} \right)$$

$$E_\rho = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(D - 2y_c)y_c(D - y_c)}{R_p^4}$$

dove $\sigma = \varepsilon_0 \cdot E_0$ rappresenta la densità superficiale di carica.

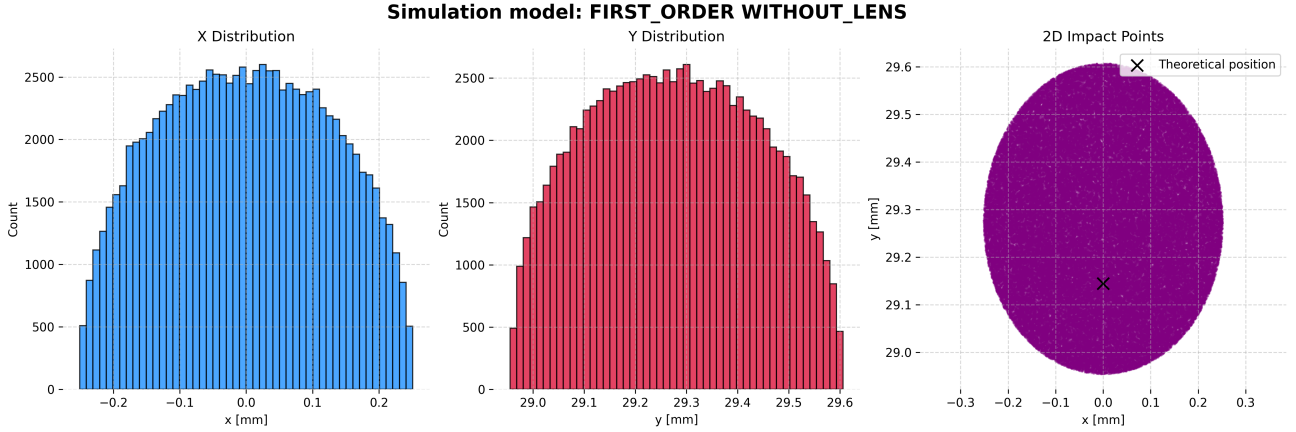


Figure 3: Istogramma delle posizioni di arrivo sullo schermo degli elettroni con campo elettrico approssimato al primo ordine. La croce nera rappresenta la posizione teorica di arrivo del fascio nel caso di campo uniforme.

I risultati ottenuti con questa approssimazione sono:

$$\sigma_x = 0.1254 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = 0.1633 \text{ mm}$$

$$y_{\text{obs}} = 29.2751 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} = 29.1428 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} - y_{\text{obs}} = -0.1323 \text{ mm}$$

Lungo l'asse y la varianza aumenta di circa il 33%, diventando circa la metà del modello precedente. Oltre ad una leggera *skewness* di circa $skew \simeq 0.0267$, l'effetto dominante è l'introduzione di un *bias* non trascurabile nella posizione media dello spot rispetto al valore teorico.

3. Confronto tra i modelli e lente elettronica

Dall'analisi dei due modelli considerati emerge chiaramente come entrambi modifichino in modo significativo i risultati rispetto al caso ideale di un fascio puntiforme soggetto a un campo elettrico costante e uniforme.

Il primo modello, basato su una perturbazione gaussianamente distribuita del campo elettrico, comporta un marcato aumento della varianza nella posizione finale degli elettroni, determinando un allargamento dello spot luminoso sullo schermo. Questo effetto riflette l'impatto delle inevitabili fluttuazioni del campo elettrico nei sistemi reali.

Il secondo modello, invece, tiene conto della non uniformità del campo attraverso uno sviluppo al primo ordine. In questo caso, la distribuzione spaziale degli elettroni subisce uno spostamento sistematico (*bias*) nella posizione media dello spot e un aumento della varianza confrontabile con quella del primo modello. Questo effetto è attribuibile alla variazione del campo in funzione della posizione, che altera le traiettorie in modo non simmetrico.

Sebbene in entrambi i casi gli scostamenti introdotti non siano di entità elevata, l'eventuale presenza di amplificazioni elevate o rumore nel segnale potrebbe compromettere la precisione della misura. Per questa

ragione, nella strumentazione reale, si fa spesso uso di un sistema di focalizzazione del fascio, comunemente indicato come “lente elettrostatica”. Questo è costituito da un opportuno insieme di campi elettrici disposti lungo il corpo dell’oscilloscopio, il cui scopo è quello di restringere il fascio di elettroni e migliorare la risoluzione della misura.

Nel presente progetto, la lente elettronica è modellizzata come una regione di spazio in cui gli elettroni sono soggetti a una forza centripeta proporzionale alla distanza dall’asse ottico. Tale forza può essere descritta mediante un potenziale armonico:

$$\vec{F} = -q k_{\text{lente}} \vec{r}_{\perp}$$

dove q è la carica dell’elettrone, k_{lente} è un coefficiente che determina l’intensità del campo focalizzante, e \vec{r}_{\perp} è la componente trasversale della posizione (ad esempio lungo y) rispetto all’asse ottico.

Il moto trasversale degli elettroni nella lente segue quindi l’equazione di un **oscillatore armonico**:

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t), \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{q k_{\text{lente}}}{m}}$$

dove m è la massa dell’elettrone.

Per determinare la lunghezza focale f , e di conseguenza il valore di k_{lente} , si utilizza il modello di *lente sottile* per gli elettroni. Si assume che gli elettroni si comportino come un fascio di luce che entra nella lente e viene focalizzato in un punto preciso, corrispondente al bordo esterno delle piastre di deflessione. La legge oraria lungo la direzione trasversale y si ricava dall’equazione del moto:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t), \quad \dot{y}(t) = -y_0 \omega \sin(\omega t),$$

dove y_0 è la posizione iniziale all’ingresso della lente. Alla fine della lente (tempo $t = T_{\text{lente}}$) si ha quindi:

$$y(T_{\text{lente}}) = y_0 \cos(\omega T_{\text{lente}}), \quad v_y(T_{\text{lente}}) = -y_0 \omega \sin(\omega T_{\text{lente}}).$$

Dopo la lente, l’elettrone si muove liberamente con velocità trasversale costante $v_y(T_{\text{lente}})$ e velocità longitudinale v_z . Alla distanza f dalla lente (tempo di volo $t_f = f/v_z$) la posizione trasversale vale:

$$y(T_{\text{lente}} + t_f) = y(T_{\text{lente}}) + v_y(T_{\text{lente}}) t_f.$$

Imponendo la condizione di focalizzazione sull’asse ($y(T_{\text{lente}} + t_f) = 0$) si ottiene:

$$y_0 \cos(\omega T_{\text{lente}}) - y_0 \frac{\omega \sin(\omega T_{\text{lente}})}{v_z} f = 0,$$

da cui segue la formula della lunghezza focale:

$$f = \frac{v_z \cos(\omega T_{\text{lente}})}{\omega \sin(\omega T_{\text{lente}})} = \frac{v_z}{\omega \tan(\omega T_{\text{lente}})}.$$

In questa simulazione, si prende $f = L - 2R_p$, corrispondente alla distanza tra il bordo delle piastre e lo schermo. Si ricava numericamente il valore di k_{lente} usando la funzione `fsolve()` di *scipy*, ottenendo il seguente valore:

$$k_{\text{lente}} = 3.64 \cdot 10^5 \text{ kg}/(\text{C} \cdot \text{m}^2).$$

Questo modello consente di simulare numericamente l’effetto di focalizzazione della lente elettronica: sia nel contesto di traiettorie deterministiche, sia considerando una distribuzione iniziale casuale delle condizioni degli elettroni. Con questo metodo sono stati ottenuti i seguenti risultati:

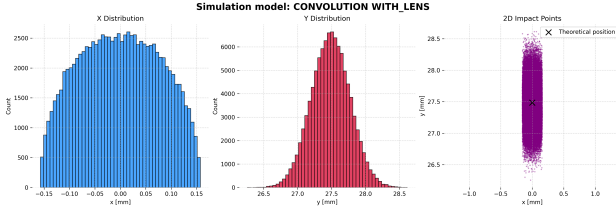


Figure 4: *
Modello di convoluzione con lente elettronica

$$\sigma_x = 0.0787 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = 0.2851 \text{ mm}$$

$$y_{\text{obs}} = 27.4838 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} = 27.4835 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} - y_{\text{obs}} = -0.0003 \text{ mm}$$

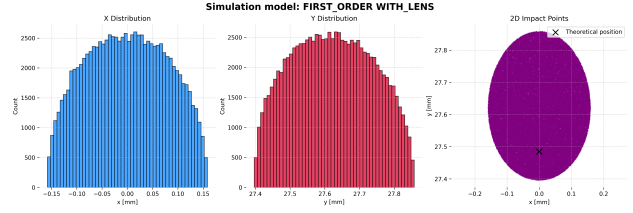


Figure 5: *
Modello al primo ordine con lente elettronica

$$\sigma_x = 0.0792 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = 0.1157 \text{ mm}$$

$$y_{\text{obs}} = 27.6217 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} = 27.4835 \text{ mm}$$

$$y_{\text{th}} - y_{\text{obs}} = -0.1382 \text{ mm}$$

Da queste immagini si osserva che l'effetto della lente è stato quello di abbassare il valore medio della posizione lungo y e di collimare il fascio. In particolare le varianze sono diminuite del 10% e del 33%, mentre la posizione media si è abbassata di circa 2.2 mm . Nel modello al primo ordine il *bias* è rimasto pressoché invariato mentre la *skewness* è aumentata di circa il 30% ($skew = 0.0377$).

Simulazione dell'alone causato dal fosforo

Per completezza, è stato anche considerato l'allargamento dello spot luminoso dovuto alla risposta del fosforo sullo schermo. A tal fine, è stata aggiunta lungo entrambi gli assi una componente gaussiana centrata in zero, in modo da simulare l'effetto di diffusione laterale della luce all'interno dello strato fosforico. Dalla letteratura tecnica degli anni '80-'90 emerge che, per schermi al fosforo di uso comune, la risposta a fasci di elettroni con energia di circa 13 keV presenta una larghezza tipica dell'ordine di $7 \mu\text{m}$. Inutile dire che questo valore non solo è trascurabile rispetto a tutti gli altri fenomeni presi in considerazione in precedenza, ma è anche decisamente superiore rispetto a quello che avremmo dovuto utilizzare nel nostro modello (in cui l'alimentazione è a 3 keV). Per completezza si inseriscono i risultati ottenuti per entrambi i modelli con l'implementazione dell'alone causato dal fosforo:

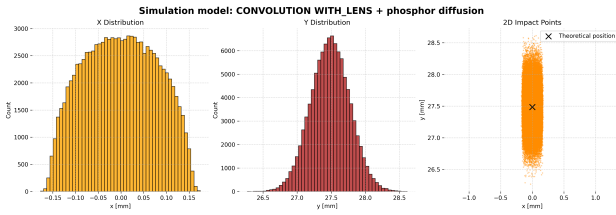


Figure 6: *
Modello di convoluzione con lente elettronica e diffusione del fosforo

$$\sigma_x = 0.0790 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = 0.2852 \text{ mm}$$

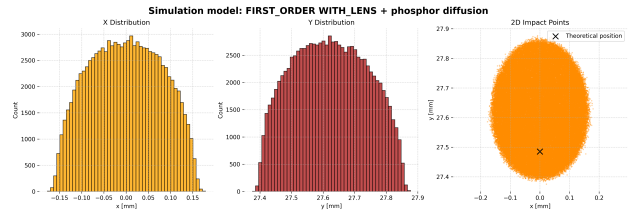


Figure 7: *
Modello al primo ordine con lente elettronica e diffusione del fosforo

$$\sigma_x = 0.0795 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = 0.1160 \text{ mm}$$

Confrontando questi risultati con quelli ottenuti precedentemente, si osserva un leggero aumento delle larghezze delle distribuzioni, che risulta comunque trascurabile. Va inoltre tenuto conto che la larghezza della gaussiana utilizzata per simulare la diffusione del fosforo si basa su un cannone elettronico alimentato a 13 keV , superiore rispetto al nostro modello. Di conseguenza, la risposta luminosa del fosforo risulta più ampia rispetto a quella che ci si aspetterebbe nel nostro caso.

L'unica differenza degna di nota riguarda invece la forma delle distribuzioni ottenute con il modello al primo ordine. In questo caso, la distribuzione delle posizioni degli elettroni appare come una convoluzione tra la loro posizione iniziale e la gaussiana applicata, anche se leggermente.

Conclusione

In conclusione, l'alone osservabile in un oscilloscopio analogico è dovuto principalmente a imperfezioni nella generazione del campo elettrico all'interno delle piastre di deflessione e a una collimazione non ideale del fascio elettronico. Anche ipotizzando un campo elettrico non uniforme permane comunque un *bias* nella misura della tensione e un allargamento del fascio che può influire sull'accuratezza complessiva. La presenza di una lente elettronica permette effettivamente di ridurre in modo significativo le larghezze, ma rendono il sistema di misura più complesso e con il rischio di incrementare la *skewness*. Infine, l'analisi ha mostrato che il contributo dell'interazione tra il fascio di elettroni e il fosforo dello schermo alla larghezza complessiva dello spot luminoso è trascurabile, non comportando variazioni significative nelle condizioni operative considerate.