Projeto de filtros IIR de tempo discreto a partir de filtros de tempo contínuo.

Prof. Ignacio Sánchez Gendriz

ignaciogendriz@dca.ufrn.br

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Tecnologia

Departamento de Engenharia de Computação e Automação

DCA0118 - PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Sumário

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Seção1: Introdução

- Equação em diferença IIR e sua TZ
- Tipo de filtros contínuos.
- Alguns critérios comparação IIR vs FIR
- Roteiro no projeto de Filtros IIR
- Pontos em comum nos métodos baseados em filtros contínuos

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Definição de filtros IIR e FIR

Os filtros de tempo discreto podem ser classificados em duas categorias básicas:

1. Sistemas com resposta ao impulso infinita (IIR, do inglês *Infinite Impulse Response*)
2. Sistemas com resposta ao impulso finita (FIR, do inglês *Finite Impulse Response*)

O projeto de filtros IIR implica obter uma função de transferência racional de z. O projeto de filtros FIR leva a uma aproximação polinomial.

*Focaremos principalmente nos filtros passa-baixas, mas estas técnicas podem ser generalizadas ou transformadas em outro tipos de filtros seletivos em frequência.

Função de sistema H(z) para filtros IIR

Os filtros LIT podem ser descritos mediante uma equação em diferencias.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\,, filtros\ \mathrm{IIR}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Função de sistema H(z) para filtros IIR

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = y[n] + a_1 y[n-1] + \ \dots a_N y[n-N]$$

$$TZ\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = Y(Z) + a_1 z^{-1} Y(Z) + \cdots + a_N z^{-N} Y(Z) = \left\{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-N}\right\} Y(z)$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-N}\right\} Y(z) = \left\{\sum_{m=0}^{M} b_m Z^{-M}\right\} X(Z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m Z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k}} = \frac{B(Z)}{A(Z)}$$

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

IIR vs FIR

Os filtros IIR permitem obter uma magnitude da resposta em frequência desejada com um número de coeficientes menores do que no caso FIR.

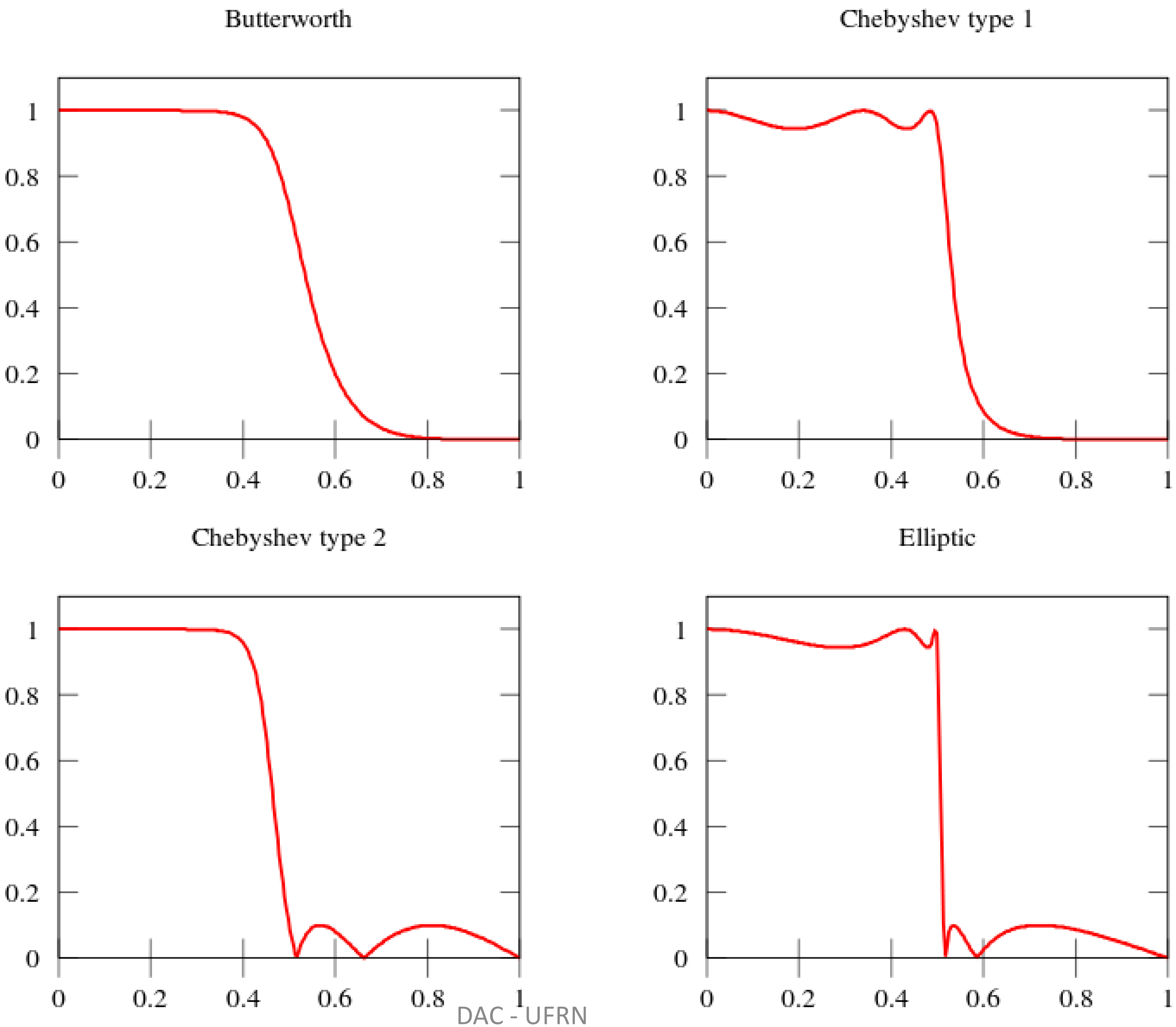
Não entanto, eles não permitem obter filtros de fase linear.

Uma abordagem para filtros IIR é usar as técnicas de projetos de filtro de tempo contínuo:

- Conhecimento bem fundamentado e com procedimentos desenvolvidos
- Muito dos métodos possuem fórmulas fechadas e relativamente simples

Inicio
Seção 01
Seção 02
Seção 03
Seção 04
Seção 05
Fim

Tipos de filtros em tempo contínuo



Aproximar filtros discretos a partir de contínuos

Procedimentos:

1) As especificações para o filtro de tempo continuo são obtidas por uma transformação das especificações para o filtro de tempo discreto desejado.
2) São obtidas a função de sistema $H_c(s)$ ou a resposta a impulso $h_c(t)$ por algum método de aproximação para o projeto de filtro de tempo continuo.
3) Aplicar uma transformação a $H_c(s)$ ou $h_c(t)$ para obter $\mathrm{H}(z)$ ou $\mathrm{h[n]}$.

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Passos para ir de filtros contínuos a discretos

Nessas transformações queremos:

- O eixo $j\omega$ do plano s deve ser mapeado na circunferência unitária do plano z (garante a existência da resposta em frequência[1])
- Os polos localizados no semiplano esquerdo do plano s *deverão estar no interior do círculo unitário no plano z (para garantir causalidade[2]).*

[1]Um sistema LIT é estável se e somente se a RDC de sua função do sistema $H(s)$ incluir o eixo $j\omega$ inteiro.

[2]A RDC associada à função de sistema para um sistema causal é um semiplano direito do plano s.

Oppenheim, Sinais e Sistemas, 9.7.1 e 9.7.2

Existem 2 métodos bastante usados no projeto de filtros IIR:

1) Invariância ao impulso
2) $\boxed{\text{Transformação bilinear}}$

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Seção2: Projeto de filtros por invariância ao impulso.

- Obtém um sistema de tempo discreto com $h[n]$ determinada pela resposta ao impulso $h_c(t)$ de um sistema de tempo contínuo limitado em banda.
- Especificamente, $h[n]$ será uma versão ponderada de amostras de $h_c(t)$.
- O método só permite diretamente o projeto de filtros passa-baixas.
- Será possível obter outras respostas em frequência usando transformações algébricas de passa-baixas.

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Projeto de filtros por invariância ao impulso.

No processo de transformação do continuo ao discreto é desejado que as caraterísticas de $h_c(t)$ sejam preservadas em $h[n]$

- $h[n]$ será uma amostragem ponderada de $h_c(t)$

$$\mathrm{h}[n] = T_d h_c(nT_d)$$

Será particularmente importante a relação entre as respostas em frequência. Como consequência da amostragem a relação das respostas em frequência será:

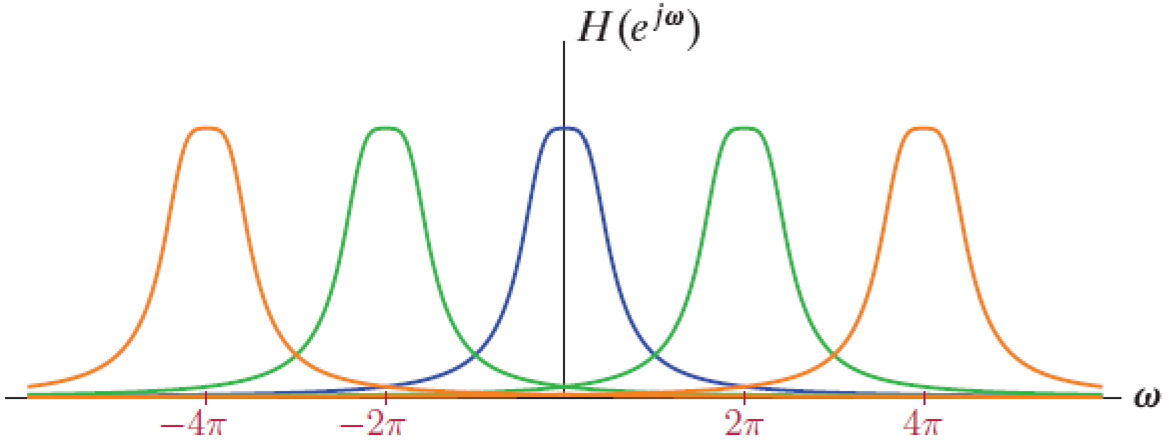
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right)$$

Para um filtro contínuo limitado em banda $H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T_d,$

Então $H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), \qquad |\omega| \leq \pi;$

Projeto de filtros por invariância ao impulso.

Infelizmente, nenhum filtro de tempo continuo pratico pode ser de banda limitada, causando *aliasing na resposta em frequência do filtro discreto.*



Porém, se a resposta em frequência H_c for de banda limitada(se aproxima a zero nas altas frequências) o efeito do *aliasing* pode ser insignificante.

Projeto de filtros por invariância ao impulso.

A aplicar este método:

1. *Obtemos as especificações de* $H_c(s)$ *a partir das especificações de* $H(e^{j\omega})$ *.*
2. *Usando as especificações de especificações* $H_c(s)$ *obtemos o filtro de tempo continuo*
3. *Depois de obter um filtro de tempo contínuo com* $H_c(s)$ *projetada, este será transformado num filtro de tempo discreto.*

Na prática, para compensar o possível aliasing ao converter de tempo contínuo para discreto, $H_c(s)$ *pode ser superdimensionado*

Projeto de filtros por invariância ao impulso.

Embora o método tenha sido definido em termos de amostragem no dom tempo, também poderá ser implementado como uma transformação da função de sistema.

Seja $H_c(s)$ a função de sistema de um filtro de tempo contínuo causal expresso em uma expansão em frações parciais. S_k são os polos e A_k os resíduos:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}.$$

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Projeto de filtros por invariância ao impulso.

A resposta ao impulso do filtro de tempo discreto causal obtida pela amostragem será:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n]$$
$$= \sum_{k=1}^{N} T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n].$$

Por tanto, a função de sistema do filtro de tempo discreto causal será:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}.$$

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Projeto de filtros por invariância ao impulso.

Se comparamos as funções de sistema $H_c(s)$ e $\mathrm{H}(z)$ veremos que:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}.$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}.$$

- Os polos em $s = s_k$ no plano s se transforma em polos em $\mathrm{z} = e^{s_k T_d}$ no plano z
- Os coeficientes nas expansões em frações parciais são os mesmos excetuando o fator de escala.

Para um filtro causal de tempo continuo estável (s_k no semiplano esquerdo, $Re\{s_k\} < 0$) implicaria $|e^{s_k T_d}| < 1$

Portanto, um filtro causal discreto também estável

Projeto de filtros por invariância ao impulso.

A transformação invariância ao impulso direitamente só permite projeto de filtros passa-baixas (devido ao *aliasing* resultante da amostragem). Mas, mediante transformação algebraica poderiamos obter outros tipos de filtros (passa-altas, passa-bandas ...).

Embora os polos no plano s sejam mapeados em polos no plano z ($z_k = e^{s_k T_d}$), os zeros na função de sistema de tempo discreto não serão mapeados da mesma forma.

Isto implica que o procedimento de projeto pela invariância ao impulso não corresponde a um mapeamento simples do plano s no plano z.

Seção3: Transformação Bilinear

- No caso na Invariância ao impulso, vários puntos no eixo $j\Omega$ são mapeados num mesmo ponto no circulo unitário do plano z, o que pode gerar aliasing.

- A Transformação Bilinear (TB), é um mapeamento um para um entre os planos s e z, não existindo o problema de alising.

- A transformação usada no método de TB é não linear, como veremos a seguir.

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Transformação Bilinear

As equações da TB e a TB inversa são mostradas a seguir

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT} \qquad\qquad s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

O eixo $j\omega$ é mapeado no círculo do plano z:

- $0 \leq \Omega \leq \infty$ é mapeado em $0 \leq \omega \leq \pi$ e $-\infty \leq \Omega \leq 0$ é mapeado em $-\pi \leq \omega \leq 0$.

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT} \qquad z = \frac{2 + j\omega T}{2 - j\omega T} \qquad |z| = \frac{\sqrt{4 + \omega^2 T^2}}{\sqrt{4 + \omega^2 T^2}} = 1$$

- Dado que |z| = 1 para todo ω, cada punto do eixo jω do plano s é mapeado num respetivo ponto do círculo unitario do plano z (não tem *aliasing*)

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Transformação Bilinear

É possível provar que dada a fórmula da TB e para $s = \sigma + j\Omega$

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT} = \frac{(2 + \sigma T) + j\Omega T}{(2 - \sigma T) - j\Omega T}$$

Se calculamos $|z|$ veremos $|z| < 1 \rightarrow Re\{s\} = \sigma < 0$

Cada ponto na metade esquerda do plano s é mapeado a só um ponto no interior do círculo unitário do plano z.

Isto garante que um filtro analógico estável produz a un filtro de tempo discreto estável.

Semiplano esquerdo em s → Interior Circulo Unitário no plano z

Inicio

Seção 01

Seção 02

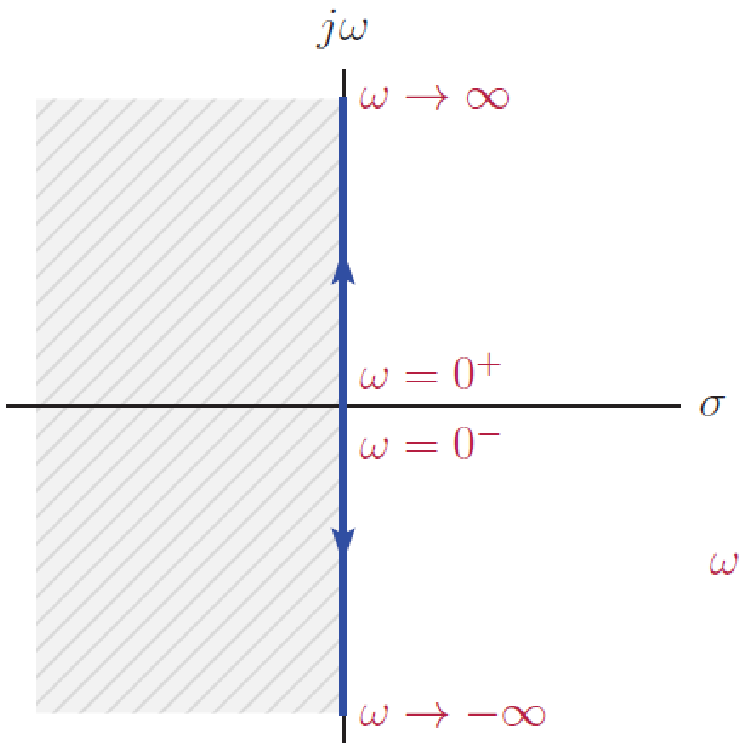
Seção 03

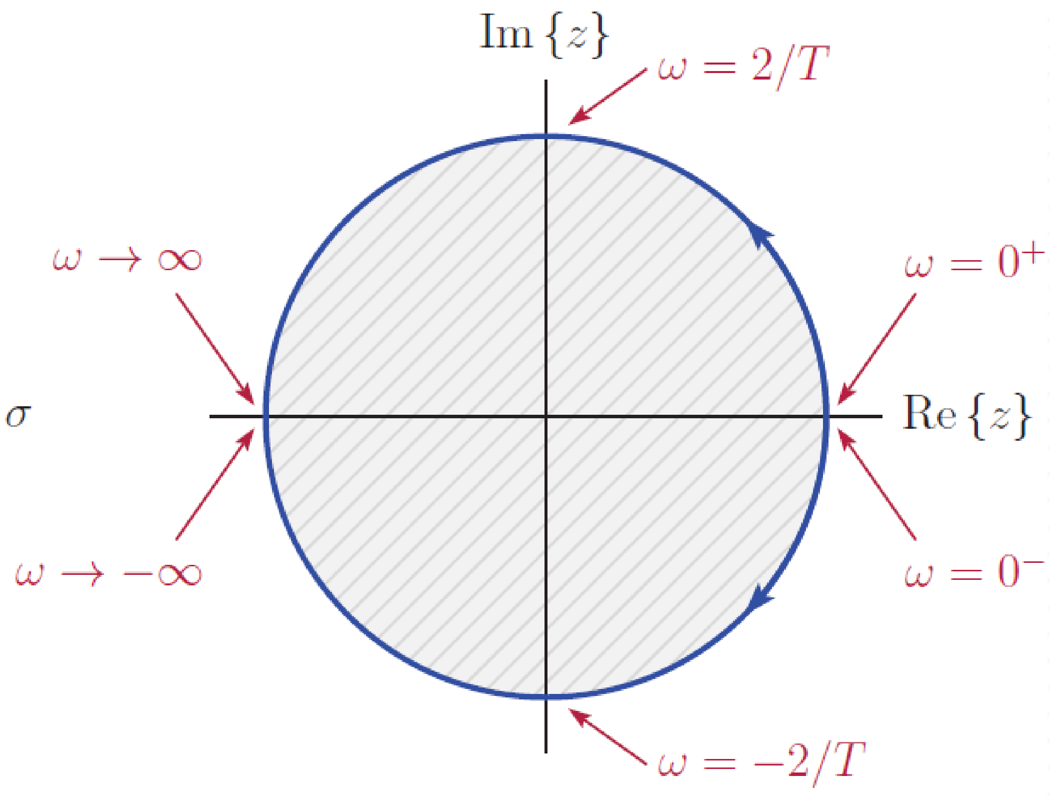
Seção 04

Seção 05

Fim

Transformação Bilinear





Transformação Bilinear

Aplicando a fórmula de Euler podemos estabelecer as seguintes relações:

$$e^{j\omega/2} = cos(\omega/2) + jsen(\omega/2)$$

$$e^{-j\omega/2} = cos(\omega/2) - jsen(\omega/2)$$

$$e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2} = 2jsen(\omega/2)$$

$$\boxed{1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}2jsen(\omega/2)}$$

$$e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2} = 2cos(\omega/2)$$

$$\boxed{1 + e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}2cos(\omega/2)}$$

Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

Transformação Bilinear

Aplicando a fórmula de Euler podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\boxed{1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} 2jsen(\omega/2)} \qquad \boxed{1 + e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} 2cos(\omega/2)}$$

Aplicando a TB inversa e usando que o eixo jΩ é mapeado ao circulo unitário ($z = e^{j\omega}$), poderemos obter a relação entre Ω e ω

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

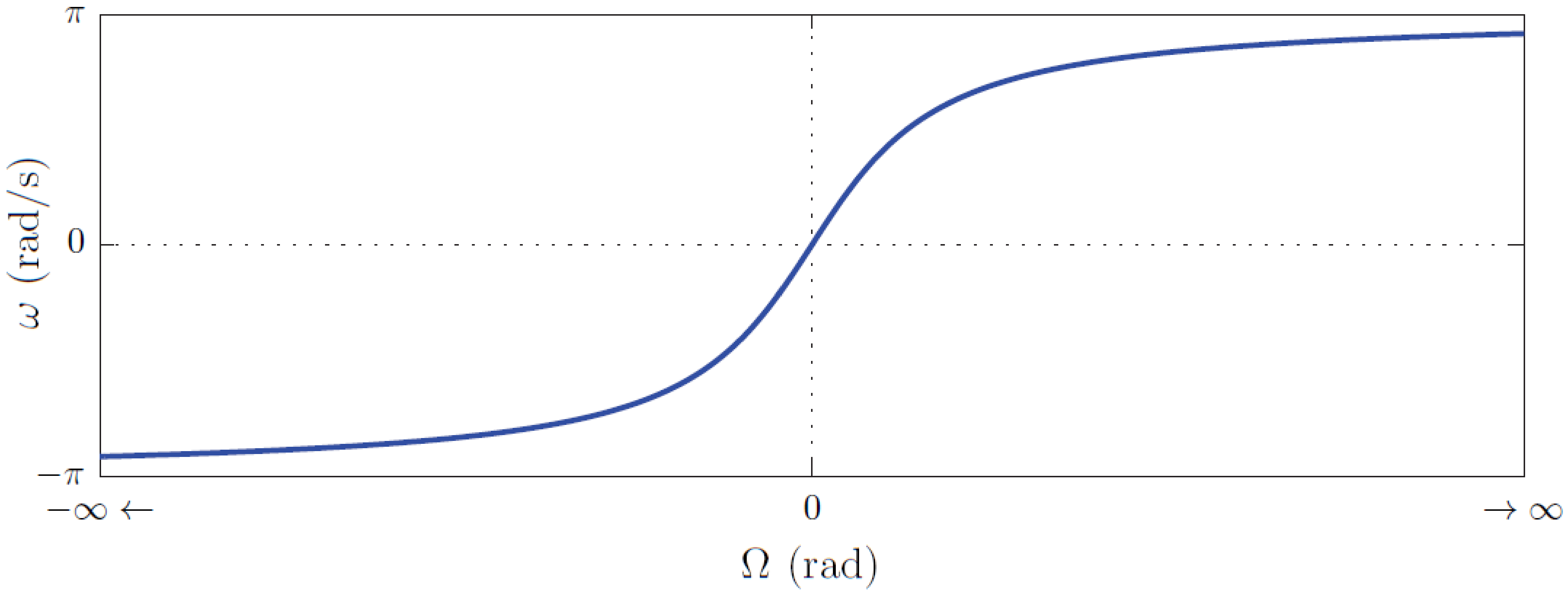
$$j\Omega = \frac{2}{T}\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T}\frac{jsen(\omega/2)}{cos(\omega/2)}$$

$$j\Omega = \frac{2j}{T}\tan(\omega/2)$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2}{T}\tan(\omega/2)}$$

$$\boxed{\omega = 2\tan^{-1}(\Omega T/2)}$$

Transformação Bilinear



Seção4: Exemplos de projetos de filtros IIR no Matlab/Octave

Veremos:

- Códigos exemplos de como obter filtros passa-baixas pela *Transformação Bilinear.*

- Um exemplo de filtragem de um sinal biomédico usando um filtro projetado por um dos métodos estudados.

Invariância ao impulso

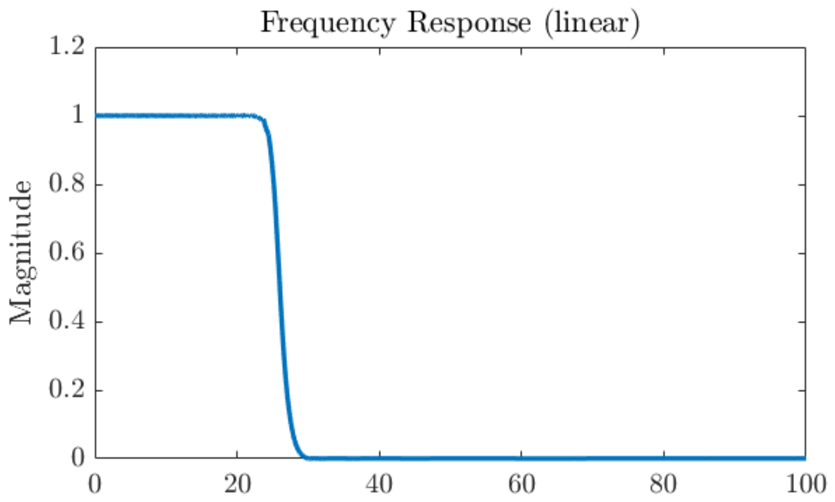
```
%% 01. Obtain the continuos filter (Chebyshev I)
Td = 0.01;       % Sampling interval
fs = 1/Td;
fPass = 20; %frequncy Pass in Hz
fStop = 30; %frequncy Pass in Hz
wPass = 2*pi*fPass; %frequncy Pass in rad
wStop = 2*pi*fStop; %frequncy Pass in rad
Rp = 1;
Rs = 60;

% Determine minimum filter order
[n,Wp] = cheb1ord(wPass,wStop,Rp,Rs,'s');

% Get vectors numerator and denominator polynomials.
[num_s,den_s] = cheby1(n,Rp,wPass,'s');
```

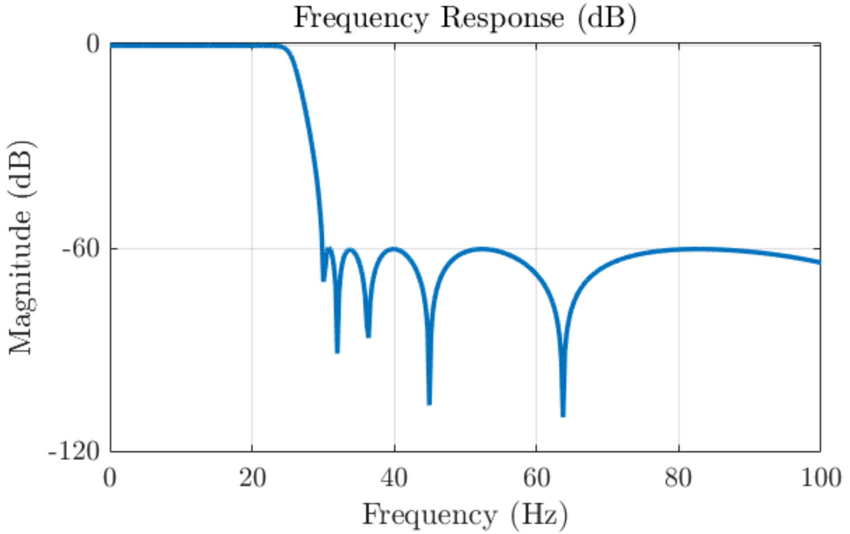
```
%% 2. Implement Impulse invariant from the formula
% Find a partial fraction expansion for Hc(s).
[r_Hc,p_Hc,k] = residue(num_s,den_s);

% Convert poles of Hc(s) to poles of H(z)
r_Hz = r_Hc*Td;          % Residues
p_Hz = exp(p_Hc*Td); % Poles of H(z)

% Numerator and denominator polynomials for H(z).
[num_z1,den_z1] = residue(r_Hz,p_Hz,k);

% Also, we can use the function impinvar().
[num_z2,den_z2] = impinvar(num_s,den_s,fs);
```

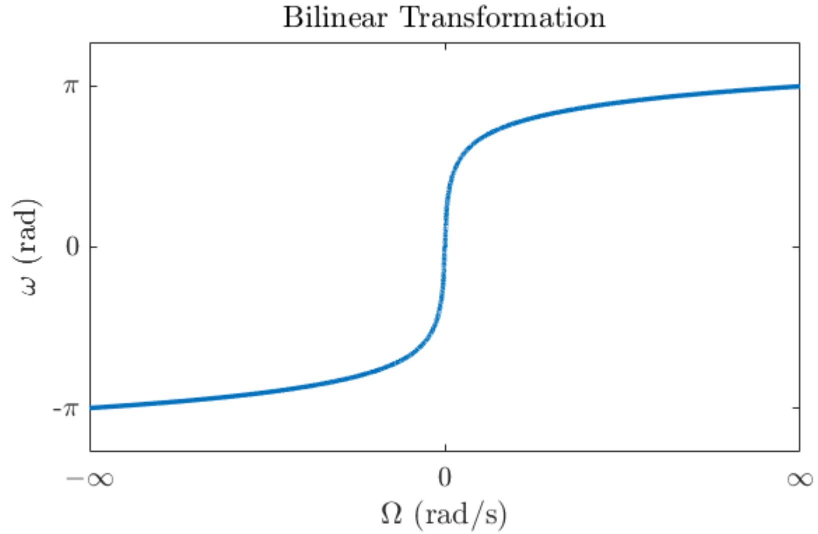
```
%% 3. Freq. response of the analog and discrete filters.
[Ha,Wa] = freqs(num_s,den_s,512);
[Hz,Wz] = freqz(num_z1,den_z1,512,fs);


% Impulse response of the analog and discrete filters.
t1 = linspace(0,4,1000);
hCont = real(r_Hc.'*exp(p_Hc.*t1)/fs);
[hDis,t] = impz(num_z1,den_z1,[],fs);
```

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}. \qquad H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}.$$

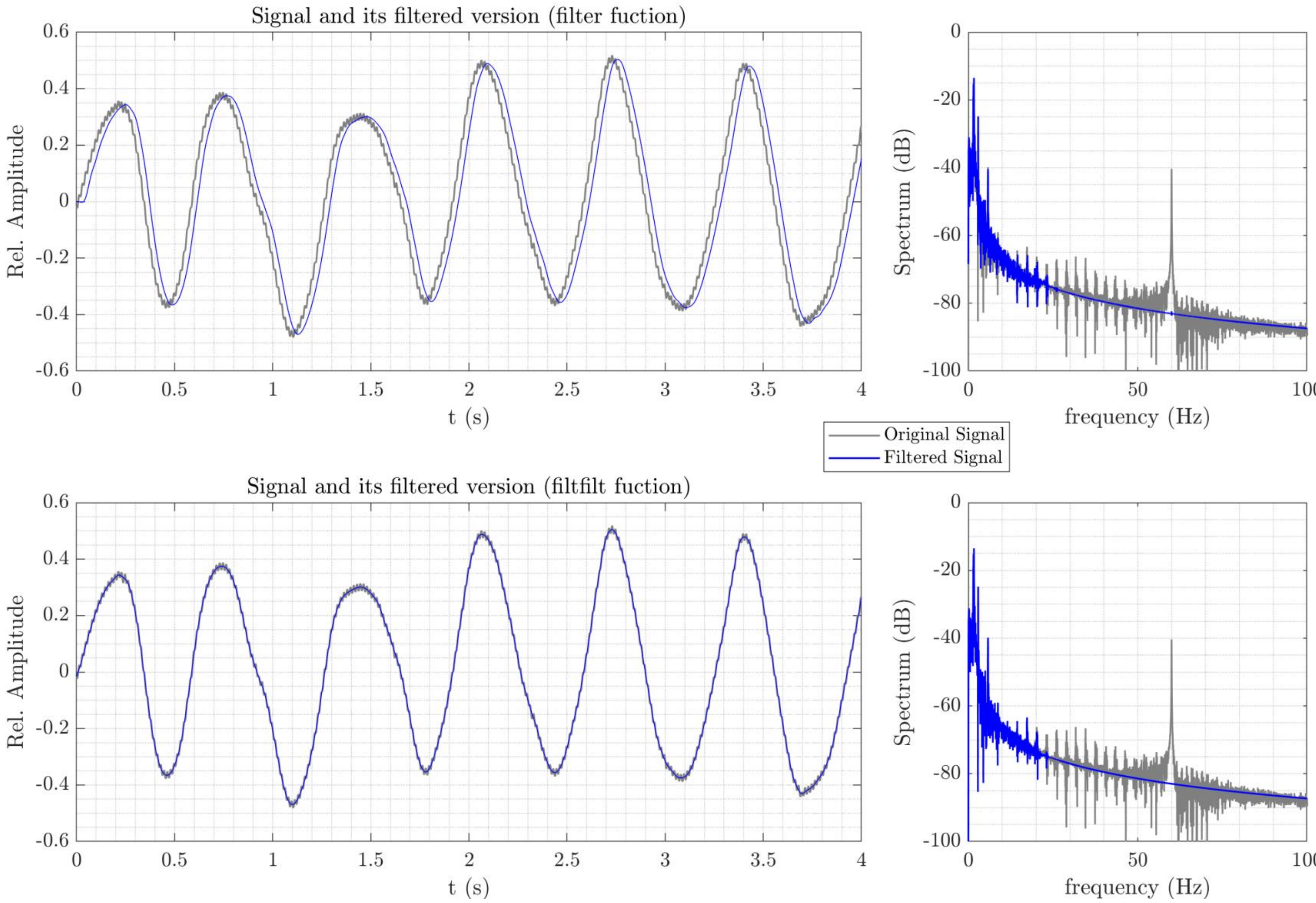
Transformação Bilinear







Sinal filtrada pelo filtro anteriormente projetado



Inicio

Seção 01

Seção 02

Seção 03

Seção 04

Seção 05

Fim

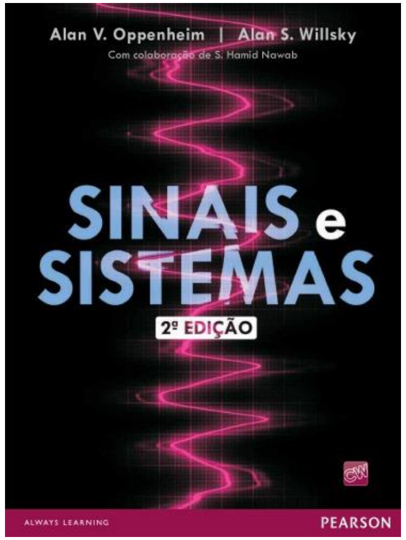
Trabalho para casa– Exercício I

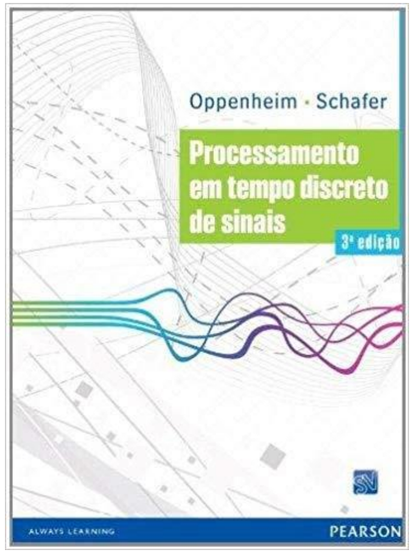
- Repetir o projeto de filtro usando a TB, modifique a frequência de corte.

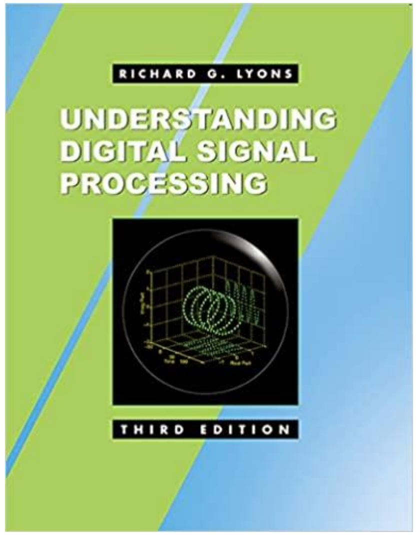
- Usar o filtro obtido para filtrar o sinal de respiração fornecido. Plotar o sinal bruto e filtrado. Interprete os resultados obtidos.

Bibliografia

1. Oppenheim, Alan V; WILLSKY, Alan S; NAWAB, Syed Hamid. Sinais e sistemas. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. xxii, 568 p. ISBN: 978857605044.
2. Oppenheim, Alan V; SCHAFER, Ronald W; VIEIRA, Daniel. Processamento em tempo discreto de sinais. 3. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2012. 665 p. ISBN: 9788581431024.
3. Richard G. Lyons , Understanding Digital Signal Processing . 3. ed., 2010. ISBN: 0-13-702741-9.







Muito obrigado!