注：所有指标出标题未写内容的部分为未讲不重要的部分，复习时可以简单略过。

第 1 章 基础：逻辑和证明

1.1 命题逻辑

1.1.1 引言

1.1.2 命题

1.命题（propostion）：命题是一个陈述语句（即陈述事实的语句），它或真或假，但不能既真又假。

注意：（1）陈述语句：不能是疑问句或祈使句。如“现在几点了”“请打开课本”皆不是命题。（2）不能既真又假：真值不能无法确定，也不能形成矛盾。如“*x+1=2*”“这个陈述是错误的”皆不是命题。

2.逻辑连接词（connective）：命题可以通过逻辑连接词（逻辑运算）构成新的命题——复合命题。

（1）否定词（negation）：$\neg p$

p	**¬p**
T	F
F	T

（2）合取词（conjunction）：$p \wedge q$

p	q	p∧q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

（3）析取词（disjunction）：p∨q

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

（4）异或（exclusive or）：p⊕q

p	q	p⊕q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

注意： 同或（∨,inclusive or）与异或（⊕,exclusive or）的区别：同或中 p,q 同时为真时命题为真，异或中 p,q 同时为真时命题为假。

1.1.3 条件语句

1.蕴涵词（implication）:p→q

p 为假设，q 为结论

p	**q**	**p→q**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

只有在 p 为真且 q 为假时，p→q 为假

当 p 为假时，不论 q 取何值都为真

一些 p→q 的表达方式：

p 蕴含 q（p implies q）

p 仅当 q（p only if q）（这个很容易混淆，注意 p 仅当 q 代表 p→q 而不是 q→p）

p 是 q 的充分条件（p is sufficient for q）

q 每当 p（q,whenever p）

q 是 p 的必要条件（q is necessary for p）

q 除非¬p（q unless ¬p）（可以这样来想：除非在英文中相当于 if not，if not+not 双重否定即为 if）

2.逆命题（converse）：q→p 为 p→q 的逆命题。

逆否命题（contrapositive）：¬q→¬p 为 p→q 的逆否命题。

反命题（inverse）：¬p→¬q 为 p→q 的反命题。

3.等价词（biconditional）：p↔q

p	**q**	**p↔q**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

当 p,q 真值相同时命题为真

例题：中文版第七版 *P*11 第 14 题

1.1.4 复合命题的真值表

构造真值表

1.1.5 逻辑运算符的优先级

圆括号优先级最高，其次是¬ ∧ ∨ → ↔。

1.1.6 逻辑运算和位运算

真值	**位**
T	1
F	0

1.布尔变量：变量的值或为真或为假。

2.位运算：对应于逻辑连接词。在运算符∧、∨、⊕的真值表中用 1 代替 T，用 0 代替 F，即能得到位运算表。符号 OR、AND、和 XOR 表示运算符∨、∧和⊕。

3.位串：0 位或多位的序列。位串的长度就是它所含位的数目。

例题：中文版第七版 *P*9 例 12、13

1.2 命题逻辑的应用

例题：中文版第七版 *P*15 例 1、2

1.3 命题等价式

1.3.1 引言

1.永真式/重言式（tautology）：真值永远是真的的复合命题。如 p∨¬p。

2.矛盾式（contradiction）：真值永远为假的复合命题。如 p∧¬p。

3.可能式（contingency）：既不是永真式又不是矛盾式的复合命题。如 $p\vee\neg q$。

1.3.2 逻辑等价式

1.逻辑等价（logically equivalent）：如果 $p\leftrightarrow q$ 是永真式，则复合命题 p 和 q 称为是逻辑等价的。用 $p\Leftrightarrow q$ 或 $p\equiv q$ 来表示。

注意：$p\leftrightarrow q$ 与 $p\equiv q$ 的区别：$p\leftrightarrow q$ 是一个命题，可能真也可能为假；$p\equiv q$ 是一个语句，代表“$p\leftrightarrow q$ 是永真式这一语句”。

2.逻辑等价式

（1）著名的逻辑等价式

表 6　逻辑等价式

等价式	名称
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	恒等律
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	支配律
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	幂等律
$\neg(\neg p) \equiv p$	双重否定律
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	交换律
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	德·摩根律
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	吸收律
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	否定律

其中最重要的是分配律和德·摩根律，常用于证明，其他的等价式最好也要记住。

（2）条件命题的逻辑等价式

表 7 条件命题的逻辑等价式

$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

最最基本的一条是 p→q≡¬p∨q，是必须记住的，其他的可以根据这一个等价式来推。另外，最后四个最好也要记住，不过要避免混淆。

（3）双条件命题的逻辑等价式

表 8　双条件命题的逻辑等价式

$$p\leftrightarrow q\equiv(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

$$p\leftrightarrow q\equiv\neg p\leftrightarrow\neg q$$

$$p\leftrightarrow q\equiv(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$$

$$\neg(p\leftrightarrow q)\equiv p\leftrightarrow\neg q$$

其中第三个逻辑等价式较为重要。

1.3.3 德·摩根律的运用

1.3.4 构造新的逻辑等价式

此处涉及到运用基本的逻辑等价式证明两个命题是逻辑等价的。 例题：中文版第七版 *P*26 例 6、7、8 证明的主要方法：遇到→、$\boxed{\leftrightarrow}$用逻辑等价式 p→q≡¬p∨q 转化为不含有箭头的，遇到括号联想到德·摩根律

1.3.5 命题的可满足性

1.一个复合命题称为可满足的,如果存在一个变元的真值赋值使其为真。

2.一个复合命题称为不可满足的,，如果它对所有的真值赋值都是假的。

例题：中文版第七版 *P*26 例 9

1.3.6 可满足性的应用

1.3.7 可满足性问题求解

1.4 谓词和量词

1.4.1 引言

1.4.2 谓词

1.谓词（predicate）：即主语具有的一种性质。如陈述句“$x>3$”中变量 x 是主语，“大于 3”是谓词。这个语句可以用 $P(x)$来表示，其中 P 表示谓词“大于 3”，x 是变量。当给 x 赋值后，$P(x)$就成为命题并具有真值。在刚才的语句中，$P(4)$的值为真，$P(3)$的值为假。 注意：$P(x)$命题函数没有明确的真值，当变量被赋予一个值后才能确定。

2.n 元谓词：$P(x1,x2,\ldots xn)$是涉及 n 个变量的语句，此时 P 称为 n 元谓词。

1.4.3 量词

1.论域/域（domain）：对所有变量取尽该域中所有值的一个特殊的域。

2.全称量化（universal quantification）：$\forall xP(x)$表示 P(x)的全称量化，代表“$P(x)$对 x 在其论域的所有值都为真”，其中∀称为<u>全称量词</u>。 当论域中的元素可以一一列出时（$x1$, $x2,\ldots xn$），$\forall xP(x) \Leftrightarrow P(x1) \wedge P(x2) \wedge \ldots P(xn)$

3.存在量化（exsitential quantification）：$\exists xP(x)$表示 $P(x)$的存在量化，代表：“论域中存在一个个体 x 满足 $P(x)$”,其中∃称为<u>存在量词</u>。 当论域中的元素可以一一列出时（$x1$,$x2,\ldots xn$），$\exists xP(x) \Leftrightarrow P(x1) \vee P(x2) \vee \ldots P(xn)$

4.唯一性量词：代表“恰好存在一个”，用符号∃!或∃1 来表示。

1.4.4 约束论域的量词

变量必须满足的条件直接放在量词的后面，如$\forall x<0(x^2>0)$,$\exists z>0(z^2=2)$。

1.4.5 量词的优先级

量词∀和∃比命题演算中所有逻辑运算符都具有更高的优先级。

1.4.6 变量绑定

1.约束变量（bound variable）：量词作用于的变量。如$\forall xP(x)$中 x 是约束变量。

2.自由变量（free variable）：没有被量词约束或设置等于某一特定值的变量。如$\exists xQ(x, y)$中 x 是约束变量， y 是自由变量。

1.4.7 涉及量词的逻辑等价式

1.$\forall x(A(x)\wedge \mathrm{B}(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

$\exists x(A(x)\vee \mathrm{B}(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

2.$\exists x(A(x)\wedge \mathrm{B}(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

注意：这两个逻辑等价式反过来都不成立

3.$\forall xA(x)\vee P\Leftrightarrow\forall(A(x)\vee P)$

$\forall x A(x) \land P \Leftrightarrow \forall(A(x) \land P)$

$\exists x A(x) \lor P \Leftrightarrow \exists(A(x) \lor P)$

$\exists x A(x) \land P \Leftrightarrow \exists(A(x) \land P)$

$\forall x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \forall x A(x)$ (x 在 P 和 B 中均不存在)

1.4.8 量化表达式的否定

$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x A(x)$

$\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

1.4.9 语句到逻辑表达式的翻译

步骤： 1.确定恰当的量词 2.引入变量和谓词 3.用量词、谓词和逻辑操作来转化 例题：中文版第七版 $P41$ 例 24

1.4.10 系统规范说明中量词的使用

例题：中文版第七版 $P42$ 例 25

1.4.11 选自路易斯·卡罗尔的例子

例题：中文版第七版 $P42$ 例 26 下面对该题作简单分析： 1.“所有的狮子都是凶猛的”不能表示成为$\forall x(P(x) \land Q(x))$，如果这样的话意思就会变为“所有动物都是狮子并且喝咖啡”，显然这是不成立的。然而，当论域变为全体狮子时，该语句也可表达为$\forall x Q(x)$。这告诉我们论域不同可能得到的符号化表达式完全不同。 2.“有些狮子不喝咖啡”不能表示

成为$\exists x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$,如果这样的话当 x 不是狮子时，即 $P(x)$为假时，即使所有狮子都喝咖啡，该命题也成立，显然这是不可能的。

1.4.12 逻辑程序设计

9 关系

9.1 关系及其性质

关系定义：

设 A、B 为任意两个集合，称笛卡儿积 A×B 的子集 R 为集合 A 到 B 的一个二元关系。

若(a,b)∈R，则称 a 与 b 有关系 R，记为 aRb.

$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, aRb\}$

关系 R 的范围：$R \subseteq A \times B$

所以，R 就是一个集合，它是 *A×B 的子集*，可以是空集，也可以是 $A \times B$

集合 A 上的关系:

定义：集合 A 的关系是从 A 到 A 的关系

若关系定义中的 A=B，则称 R 为集合 A 上的二元关系

$R \subseteq A \times A$

二元关系的特殊性质

自反性：若对每个 x∈A，均有 xRx,则称 R 为自反的

关系矩阵主对角线的所有元素都等于 1

对于有向图上的每个顶点都有个环

反自反的：

$\forall x(x \in A \to (x, x) \notin R)$ 则称 R 为反自反的

关系矩阵主对角线的所有元素都等于 0

对于有向图上的每个顶点都没有环

自反和反自反的关系：自反和反自反是互异的，但不是对立的。

对称性

对任意 x,y∈A，若 xRy,则 yRx,就称 R 是对称的

$$\begin{bmatrix} \times & 1 & \cdots & \times \\ 1 & \times & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ \times & 0 & \cdots & \times \end{bmatrix}_{n\times n}$$

以主对角线为对称轴，轴的两侧的元素是相同的。

反对称的

$\forall x \forall y((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \to x = y)$

对任意 x,y∈A，若 xRy 且 yRx，则 x=y，就称 R 是反对称的

$\forall x \forall y((x, y) \in R \wedge x \neq y \to (y, x) \notin R)$

对称和反对称的关系：对称和反对称关系可以同时存在，所以它们既不是互异的，也不是对

立的。

传递的:

$\forall x \forall y \forall z((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$

定义：如果对于 x,y,z ∈A (x,y) ∈R 并且(y,z) ∈R 则(x,z) ∈R,那么集合 A 上的关系 R 叫做传递的

关系组合

因为从 A 到 B 的关系是 A×B 的子集，可以按照两个集合组合的任何方式来组合两个从 A 到 B 的关系。

集合运算:

布尔运算/逻辑运算:

这是计算机的处理方法。

$\vee: 0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 1 \vee 1 = 1$

$\wedge: 0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$

$-: \overline{0} = 1, \overline{1} = 0$

关系矩阵的逻辑运算

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}, M_{R_1} = [c_{ij}], M_{R_2} = [d_{ij}]$

$M_{R_1 \cup R_2} = [c_{ij} \vee d_{ij}] = M_{R_1} \vee M_{R_2}$

$M_{R_1 \cap R_2} = [c_{ij} \wedge d_{ij}] = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$

$M_{\overline{R}_1} = [\overline{c}_{ij}]$

$M_{R_1 - R_2} = M_{R_1 \cap \overline{R}_2} = [c_{ij} \wedge \overline{d}_{ij}]$

9.2 n 元关系及其应用

关系的合成

$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, aRb\}$， $S = \{(b, c) \mid b \in B, c \in C, bSc\}$

$S \circ R = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b(b \in B \wedge aRb \wedge bSc\}$

注意$S \circ R \neq R \circ S$

$S \circ R$是从 R 到 S 复合， $R \circ S$是 S 到 R 的复合。

比如$A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{5,6,7\}$,

$R = \{(a,1), (a,2), (b,3)\}$, $S = \{(2,6), (3,7), (4,5)\}$

$S \circ R = \{(a,6), (b,7)\}$

$R \circ S = \phi$

关系矩阵求解：

$\because A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{5,6,7\}$

$R = \{(a,1), (a,2), (b,3)\}$, $S = \{(2,6), (3,7), (4,5)\}$

$S \circ R = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b(b \in B \wedge aRb \wedge bSc\}$

$\therefore \mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$S \circ R$是从 R 到 S 的复合，首先要 R 中有这个关系，关系矩阵对应的元素是 1；其次 S 中也要有这个关系，关系矩阵对应元素也是 1，如何使两个关系矩阵结合并且能正确表示这个复合关系呢？如果这两个矩阵相乘 M(i,j)×M(j,k)，(i,j) 和(j,k)是用 j 来联系的，正如关系的

$S \circ R = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b(b \in B \wedge aRb \wedge bSc\}$

复合$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, aRb\}$， $S = \{(b, c) \mid b \in B, c \in C, bSc\}$，

在这个复合中，（a,b）和(b,c)是用 b 来联系的。

所以这两个关系矩阵相乘，对应位置大于等于 1 的表示两个关系可以用 Mj 复合，等于 0 的表示两个关系不能用 Mj 复合。

关系的幂

设 R 是集合 A 上的关系。幂 $R^n, n=1,2,3\ldots$ 递归地定义为 $R^1=R$ 和 $R^{n+1}=R^n \circ R$

集合 A 上的关系 R 是传递的，当且仅当对 n=1，2，3…有 $R^n \subseteq R$

证明：(归纳推理法)

（1）$R^n \subseteq R, \quad for \quad n=1,2,3,\cdots$，则 R 是传递的

$(a,b) \in R$，$(b,c) \in R$，则$(a,c) \in R^2 \subseteq R$，

同理从R^2推广到R^n也有$(a,c) \in R^n \subseteq R$，所以 R 是传递的。

（2）R 是传递的，则$R^n \subseteq R, \quad for \quad n=1,2,3,\cdots$

当$n=1, \qquad R \subseteq R$

假设$R^n \subseteq R \quad \Rightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R$，

$(a,b) \in R^{n+1}$

$R^{n+1} = R^n \circ R$

所以$(a,x) \in R, (x,b) \in R^n \subseteq R$，

又 R 是传递的，

所以$(a,b) \in R$

因此对任意的$(a,b) \in R^{n+1}$，都有$(a,b) \in R$，所以$R^n \subseteq R, \quad for \quad n=1,2,3,\cdots$

关系的逆

$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, aRb\}$

$R^{-1}(R^{c}) = \{(b, a) \mid (a, b) \in R, a \in A, b \in B\}$

怎样求关系的逆?

1. 定义:

$R = \{(a, b) \mid a \mid b, a, b \in Z^{+}\}$

$R^{-1} = \{(a, b) \mid b \mid a, a, b \in Z^{+}\}$

2. 有向图:

将所有的有向线的方向反转

3. 矩阵:

即求矩阵的转置。

相关定理整理:

$(R \bigcup S)^{-1} = R^{-1} \bigcup S^{-1}$

$(R \bigcap S)^{-1} = R^{-1} \bigcap S^{-1}$

$(\bar{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$

$(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

$(A \times B)^{-1} = B \times A$

$\bar{R} = A \times B - R$

$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$

$(R \circ T) \circ P = R \circ (T \circ P)$

$(R \bigcup S) \circ T = R \circ T \bigcup S \circ T$

设 R 是 A 上的关系,

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$, $m, n \in \mathrm{N}$

(3) $<x, y> \in R^m$（$m \geq 2$）当且仅当存在 $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1} \in A$，使 $<x, x_1> \in R$, $<x_1, x_2> \in R$, …, $<x_{m-1}, y> \in R$

9.3 关系的表示

有序数对、二维表格、矩阵、有向图

数对我们前面已经提到，再来看二维表格。个人认为二维表格的创造是为了为我们梳理关系提供了一种便利的工具，减少出错。

举个例子：

$A = \{2,3,4\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$ $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \mid y\}$

利用二维表格：

	2	3	4	5	6
2	×		×		×
3		×			×
4			×		

我们可以不重不漏地找出关系 R：$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$

再看另一个也很有用处的表示方法：关系矩阵

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & if(a_i, b_j) \in R, \\ 0 & if(a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

$A = \{2,3,4\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$ $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \mid y\}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

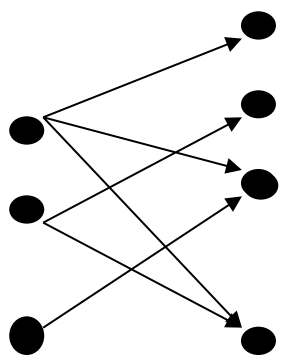
所以 R 的表示一目了然。

有向图

定义：一个有向图由顶点（或结点）集 V 和边（或弧）集 E 组成，其中边集是 V 中元素的有序对的集合。顶点 a 叫做边 (a,b)的始点，而顶点 b 叫做这条边的终点

例如：

2 $A = \{2,3,4\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$ $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \mid y\}$



9.4 关系的闭包

闭包关系有三种：自反闭包、对称闭包、传递闭包。

闭包的三点要求

(1) 具有性质 P

(2) S 包含 R

（3） S 是最小

也就是：

设 R 是 A 上的关系，如果 A 上的关系 R' 满足如下条件：

（1） R' 是传递的（或自反的、对称的）

（2） $R' \supseteq R$

（3） 若 S 是传递的（或自反的、对称的）且 $S \supseteq R$，则必有 $S \supseteq R'$.

则称 R' 是 R 的传递闭包（自反闭包、对称闭包、）记为 $t(R)$（或 $r(R)$，$s(R)$）.

如何求关系的闭包？

1. 自反闭包的求法：

首先我们先认识一个特殊关系——对角关系。对角关系对应的关系矩阵就是主对角线上全是 1，其他位置全是 0 的矩阵，即我们线性代数里学的单位矩阵。

设 R 是 A 上的关系，r（R）是 R 的自反闭包，那么 r（R）= $R \cup I_A$

试想要得到一个自反闭包，就要使 R 的关系矩阵上的主对角线上全是 1,1 和 0 的并集是 1,1 和 1 的并集也是 1.所以取 R 和对角关系的并集就可以得到 R 的自反闭包。

科学的证明：

要证 r(R)= $R \cup I_A$ ，即证：

（1） r（R）是自反的

（2） r（R）包含 R

（3） r（R）是最小的

（1） 的证明：$\forall x \in A, (x, x) \in I_A \subseteq R \cup I_A$

（2） 的证明：显然 r(R)= $R \cup I_A$ 包含 R

（3） 的证明：假设 R’ 是另一个关于 R 的自反闭包，则

$$R \subseteq R', I_A \subseteq R' \Rightarrow r(R) = R \cup I_A \subseteq R'$$

推论：

$R = R \cup I_A \Leftrightarrow$ *R 是自反关系.*

2. 对称闭包的求法

定义求：

S（R） = $\boxed{R \cup R^{-1}}$

证明与自反闭包的相同

有向图：在不同定点间已经存在的有向线段加上反向线段

关系矩阵： $M_{s(R)} = M_R \vee M_R{}^T$

推论： $R = R \cup R^{-1} \Leftrightarrow$ *R 是对称关系*

3. 传递闭包（*包含 R 的最小的具有传递性的关系*）

传递闭包和前两个关系有点不同，我们首先来看一个例子

$$A = \{1,2,3\} \ R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$$

R 是 A 上的关系，那么 $R' = \{(1,2),(2,3),(3,1),(1,3),(2,1),(3,2)\}$

是 R 的传递闭包吗?

根据定义，传递闭包是包含 R 的、最小的、具有传递性的关系，我们可以看到，R' 里

有（1,3）（3,1）但是没有（1,1），那么 R' 不是传递闭包

设 M_R 是 n 元素集合上的关系 R 的 0-1 矩阵，那么传递闭包的 0-1 矩阵是

$$\mathbf{M}_{t(R)} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \cdots \vee \mathbf{M}_R^{[n]}$$

定理：

R 是自反的，则 s(R)和 t(R)是自反的；

R 是对称的，则 r(R)和 t(R)是对称的；

R 是传递的，则 r（R）是传递的。

9.5 等价关系：

满足以下三个条件的关系成为等价关系：

（1）自反的

（2）对称的

（3）传递的

等价关系怎么表达?

a 和 b 是等价的

R 是等价关系，（a,b）∈R

R 是等价关系，aRb

等价类：

设 R 为集合 A 上的等价关系，对每个 x∈A，作集合 $[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}$称$[x]_R$为x（关于R）的等价类

等价类的表示： $[x]_R$： $b \in [x]_R$

设 *R* 是 *A* 上的等价关系，*a*∈*A*. 一切与 *a* 等价的元素构成的 *A* 的子集，叫做 *a* 的 *R*-等

价类，记为$[a]_R$，或 $[a]$，

$[a]_R = \{x \mid x \in A, xRa\}$，$a$ 称为$[a]_R$的代表元.

设 R 是 A 上的等价关系，R 的所有等价类构成的集合，称为 A 对 R 的商集，记为 A/R，

即 $A/R = \{[a] \mid a \in A\}$.

定理：

1、如果 R_1, R_2 是 A 上的等价关系，那么 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的等价关系。

证明：

（1）自反的：

$\forall a \in A \ \because (a,a) \in R_1, (a,a) \in R_2 \quad \therefore (a,a) \in R_1 \cap R_2$

（2）对称的：

If $(a,b) \in R_1 \cap R_2$ Then $(a,b) \in R_1$ and $(a,b) \in R_2$ Then $(b,a) \in R_1$ and $(b,a) \in R_2$
$(b, a) \in R_1 \cap R_2$

（3）传递的：
If $(a,b),(b,c) \in R_1 \cap R_2$ Then $(a,b),(b,c) \in R_1(R_2)$ Then $(a,c) \in R_1(R_2)$
$(a,c) \in R_1 \cap R_2$

2、如果 R_1, R_2 是 A 上的等价关系，那么 $R_1 \cup R_2$ 在 A 上具有自反的和对称的关系

证明：

（1）自反的：

$\forall a \in A \ \because (a,a) \in R_1, (a,a) \in R_2 \ \therefore (a,a) \in R_1 \cup R_2$

（2）对称的：

$(a,b) \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow (a,b) \in R_1 \text{ or } (a,b) \in R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_1 \text{ or } (b,a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cup R_2$

由于 $R_1 \cup R_2$ 并不具有传递关系，所以数学家们又创造了 $(R_1 \cup R_2)^*$ 使它具有传递性，

从而成为等价关系。

3、设 R 是集合 A 上的等价关系，则下面命题是等价的：

(1) aRb
(2) $[a]=[b]$
(3) $[a]\cap[b]\neq\phi$

要证明 N 个命题等价，最简单的最节省步骤的方法就是命题 1 推出命题 2，命题 2 推出命题 3，……命题 N-1 推出命题 N，命题 N 推出命题 1.

证明：

（1） 推（2）：

$$[a]=[b]\Leftrightarrow([a]\subseteq[b])\wedge([b]\subseteq[a])$$

$$\left.\begin{array}{l} x\in[a]\Rightarrow(a,x)\in R \\ aRb\Rightarrow(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R \end{array}\right\}\Rightarrow(b,x)\in R\Rightarrow x\in[b]\Rightarrow[a]\subseteq[b]$$

（2） 推（3）：

$$\left.\begin{array}{l} [a]=[b] \\ \text{R 具有自反性，所以}[a]\text{非空，} \end{array}\right\}\Rightarrow[a]\cap[b]\neq\phi$$

（3） 推（1）：

$$[a]\cap[b]\neq\phi\Rightarrow\exists x\in[a]\cap[b]\Rightarrow(a,x)\in R,(b,x)\in R\Rightarrow(a,b)\in R$$

覆盖与划分;

设 A 是一个集合，C=｛C_i | $i\in J$｝是一个集合族，$C_i\neq\varnothing$（$i\in J$）. 如果 $\bigcup_{i\in J}C_i=A$，*则称*

C 是 A 的一个覆盖;

若还有 $C_i \cap C_j = \varnothing$ $(i \neq j)$，则称 C 是 A 的一个划分，C_i 称为划分块.

定理：

1、设 R 是集合 A 上的等价关系。那么 R 的等价类构成 S 的划分。相反，给定集合 S 的划分

$\{A_i \mid i \in I\}$，存在着等价关系 R，它以集合 A_i, i 作为它的等价类。

2、设 *R* 是集合 *A* 的等价关系，则 *A* / *R*= { [*a*] | *a*∈*A*} 是 *A* 的一个划分

3、设 R_1，R_2 为 *A* 上的等价关系，则 $R_1 = R_2 \Leftrightarrow A / R_1 = A / R_2$.

9.6 偏序关系：

关系 R 是偏序关系当且仅当 R 满足如下 3 个条件：

（1） 自反的

（2） 反对称的

（3） 传递的

可比与不可比：

偏序集（S，≦）的元素 a 和 b 叫做可比的。如果 a≦b 或 b≦a。当 a 和 b 是 S 的元素并且既没有 a≦b，也没有 b≦a，则称 a 和 b 是不可比的

全序（链）：

如果 $(S, \leq)$ 是偏序集，且 S 的每对元素都是可比的，则 S 叫作全序集或线序集，且≤叫做全序或线序。一个全序也叫做链。

大小关系是一个全序集，因为集合里面所有的元素都可以比较大小；而整除关系不是一个全序集，因为不是所有的元素都是可比的，同理集合的包含关系也不是全序集。

字典顺序：

字典顺序是从一个集合上的偏序构造一个集合上的串的序的特殊的情况

给出两个偏序集 $(A_1, \leq_1)$ $(A_2, \leq_2)$，我们构造一个偏序关系 R $A_1 \times A_2$，

当 $x_1 <_1 x_2$ 或 $x_1 = x_2 \quad and \quad y_1 <_2 y_2$ 时，$A_1 \times A_2$：$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$

哈塞图：

哈塞图是用来描述偏序关系的。

哈塞图如何构造？

1、构造代表偏序关系的有向图

2、去掉所有环

3、由于传递性，除去冗余的边

4、移走所有有向边上的箭头。

极大元和极小元：

当偏序集中的一个元素不小于这个集合的任何其他元素时，这个元素称为极大元；

同理当偏序集的一个元素不大于这个集合的任何其他元素时，这个元素称为极小元。

使用哈塞图很容易识别极大元和极小元，他们是图中的顶元素和底元素。

极大元和极小元可以不止一个。

最大元和最小元：

当对所有的 b∈A 有 b≤a，则 a 是偏序集 (S,≤)的最大元素，称为最大元；

同理 a 小于偏序集的所有其他元素时，a 是偏序集的最小元素，称为最小元。

极大元可以有 0 或 1 或多个，最大元可以有 0 或 1 个。

极小元和最小元同样如此。

定理 1　设〈*P*，≤〉是一个偏序集，若 *P* 中最大（小）元存在，则必唯一．

定理 2　偏序集〈*P*，≤〉中的最大（小）元，必是唯一极大（小）元．

定理 3　设〈*P*，≤〉是有限偏序集，若 *P* 中存在唯一极大（小）元 *a*，则 *a* 必为最大（小）元．

上界和下界

如果 a 是 S 的元素使得对所有的元素 b∈A，有 b≤a,那么 a 叫做 A 的一个上界，下界也如此。

最小上界和最大下界

设〈*P*，≤〉是偏序集，$A \subseteq P$，若 *a* 是 *A* 的上界，且对 *A* 的任意上界 *b*，有 *a*≤*b*，则称 *a* 为 *A* 的最小上界（上确界），若 *a* 是 *A* 的下界，且对 *A* 的任意下界 *b*，有 *b*≤*a*，则称 *a* 为 *A* 的最大下界（下确界）．

良序集

偏序集*(A, R)*，若 A 的非空子集均有最小元，则称其为良序集

良序集一定是全序集，反之不然。

格

如果一个偏序集的每对元素都有最小上界和最大下界，就称这个偏序集为格

比如数的大小关系，正整数的整除关系，集合的包含关系

所有的全序都是格，但并非所有的偏序集都是格

拓扑排序

从一个偏序构造一个相容的全序叫做拓扑排序。

方法：

1、从集合中找出极小元，拿出来放在列表中

2、重复上述操作，直到集合为空，列表中的元素及顺序即为所求。

第 10 章 图

图的概念

定义

图 **G = (V, E)** 由**顶点**（vertex，也称节点）的非空集合 **V** 以及**边**（edge）的集合 **E** 构成，每条边有**一个或两个**顶点与它相连，这样的顶点称为边的端点，边连接它的端点。

在这个定义中，有几个细节需要注意。

- 顶点集合 **V** 是非空的，但是边集合 **E** 却没有任何限制，这表明只有点而没有边也可以形成一个图。

- “每条边可以有**一个或两个**顶点与它相连”，这里“只有一个顶点”的是自环。

现在我们来看图的表示“ **G = (V, E)** ”，其中 **V** 和 **E** 分别指的就是顶点集合与边集合了。它们的形式为：

$$V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$$

$$E = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V\}$$

在 **E** 中的元素都是含有两个元素的**集合**。（备注：这里的集合与前面的定义并不完全吻合，因为这里的集合可以不满足互异性）

存在的关系

在一个图中，主要存在着这么几种关系：

- 邻接（adjacent），描述了点与点之间的关系。如果两点之间有连接，则称这两个点邻接。
- 关联（incident），描述了点与边之间的关系。如果一个点（或两个点）与一条边关联，则称这个（这两个）顶点关联这条边，或者这条边连接了这个（这两个）顶点。

简单图与多重图

备注：图可以根据性质分为简单图、多重图、伪图、简单有向图、有向多重图和混合图 6 种，在这里我们根据老师课堂所讲简化概念，舍弃了伪图与混合图的概念。

在进行图的分类之前，我们首先明确两个概念：

- 环（loop）：把一个顶点连接到他自身的**边。**
- 自环（self-loop）：只包含一条边的环，亦说把一个顶点连接到他自身的**一条边。**
- 平行边（parallel edges，有时亦称“多重边”）：多条同时连接两个相同顶点的边。

那么，我们分别对有向图和无向图进行分类，把**不含有自环和平行边的图**称为**简单图**（simple graph），把**含有自环或者平行边的图**称为**多重图**（multi-graph）。

有向图

刚才我们所描述的都是无向图（directed graph）。如果把一个图想像成一张地图，那么地图上的边是可以双向通行的。而无向图中的边就好比是单行道一样，表示两个节点之间的关系并不是对等的。

有向图 **G = (V, E)** 的表示方式如下：

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

$$E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$$

注意看它与无向图的区别，**E** 中的组成元素不再是集合，而是有序数对，就是用于表示前者与后者的关系不对等。

邻居

邻居（Neighborhood）表示与某个点相邻的点集。邻居有两种，分为**开邻居**（open neighborhood）和**闭邻居**（closed neighborhood）。

用数学语言表达为：

$$N(v) = \{u \mid u \in V, \exists(u, v) \in E\}$$

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}$$

其中，**N(v)**代表点 v 的开邻居点，**N[v]**代表点 v 的闭邻居点。

顶点的度

在无向图中，与某一顶点关联的边的数目称为该顶点的**度**（degree），用 deg(v)表示点 v 的度，并且有以下关系：

$$deg(v) = \mid N(v) \mid$$

注意，如果某个点包含一条自环，那么这个自环被算作两条边。

与顶点的度有关的概念：

- 悬挂点（pendant）：没有任何关联边的点。
- 握手定理：设 **G = (V, E)** 是有 **m** 条边的无向图，

  则：
$$2m = \sum_{v \in V} deg(v)$$

根据握手定理，我们可以知道一个图中，**奇数度顶点的个数为偶数。**

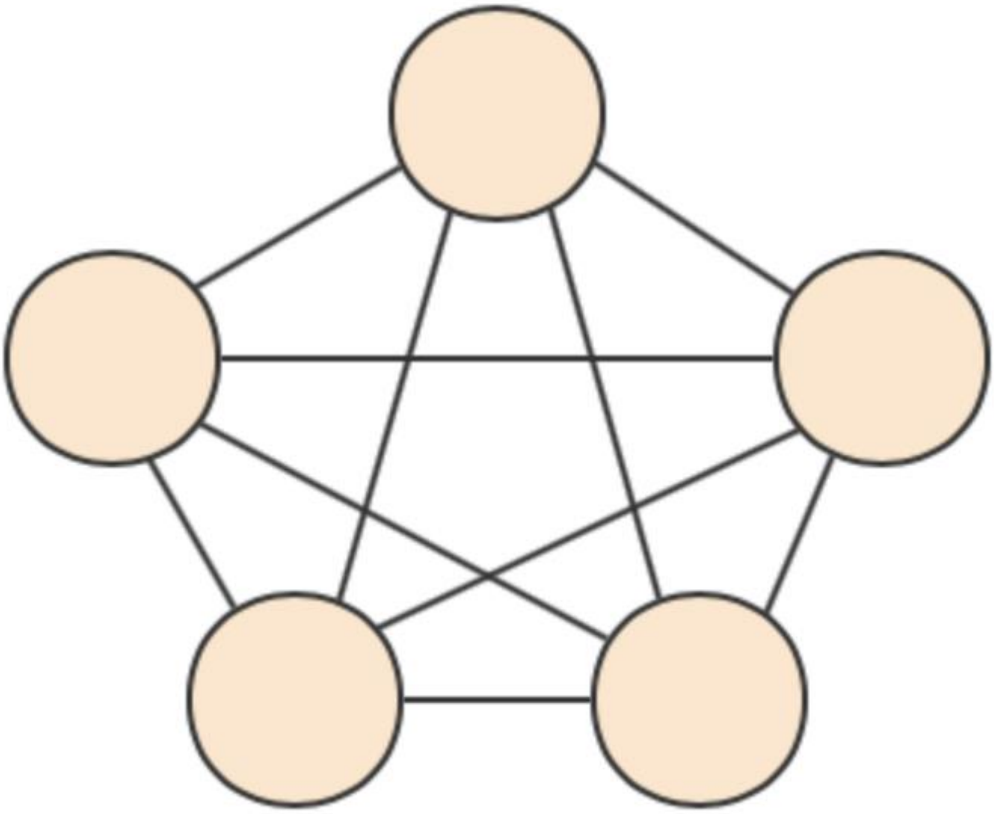
在有向图中，度还被分为**入度**（in-degree）和**出度**（out-degree）。简单理解，就是指向别人的边数和被别人指向的边数。（这样，你是否可以理解为何在无向图中一个自环算作两条边了？）

一些常用的图

完全图

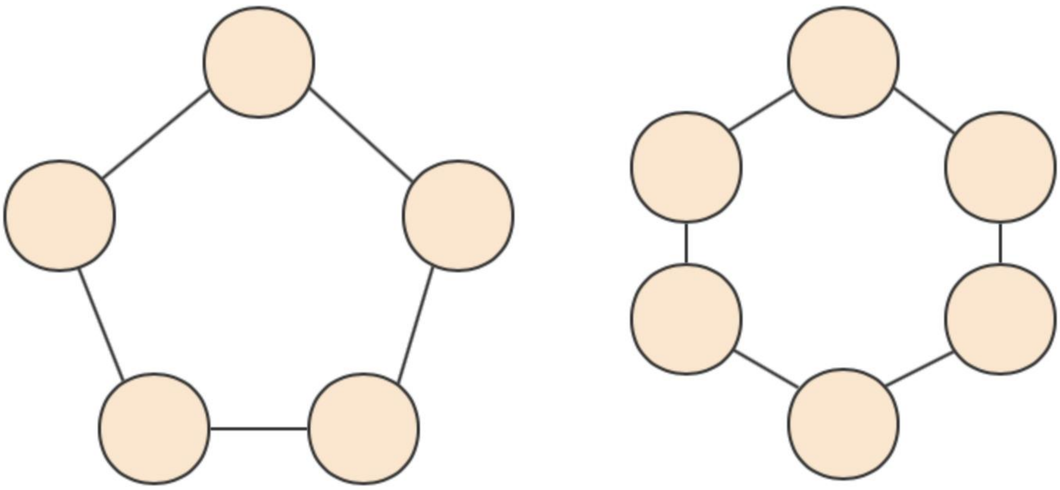
在完全图（complete graph）中，每个顶点都与其他所有顶点相邻，如下图：

整图是两个圈图，分别有 5 个和 6 个顶点。



圈图

整个圈图（cycle graph）就是一个大大的环。



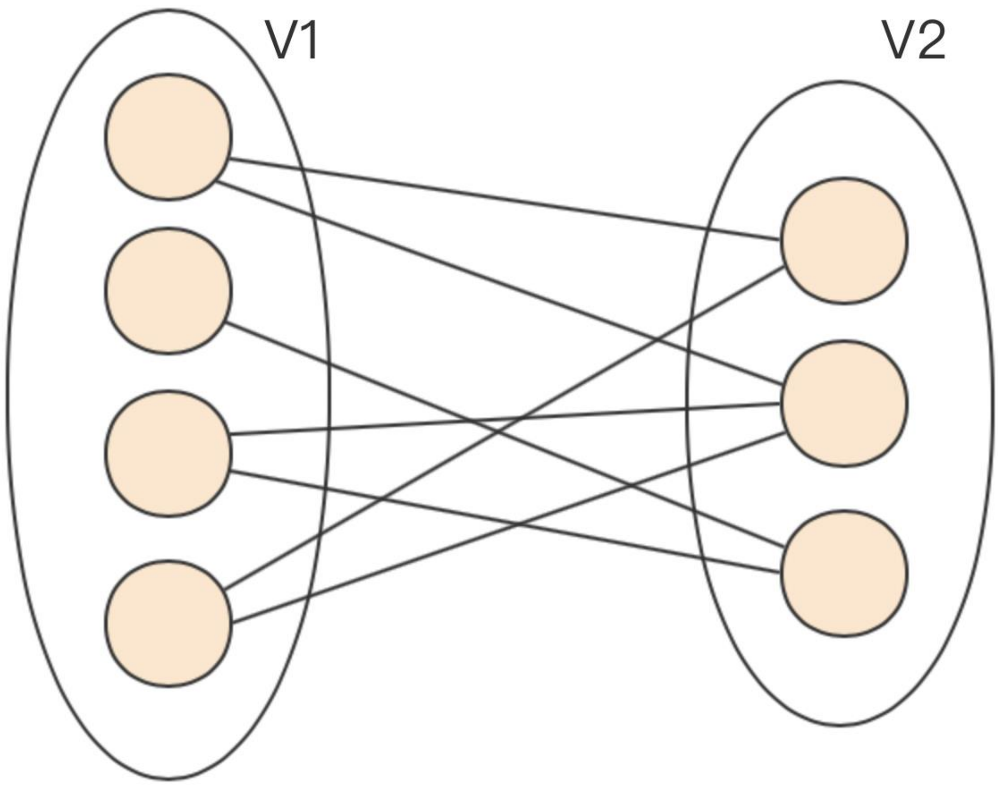
上图所示是两个圈图，分别有 5 个和 6 个顶点。

二分图

在**二分图**（bipaitite graph）中，图中的顶点可以被分成两个不相交的子集，使的每条边都连接**一个子集中的顶点**与**另一子集的顶点。**

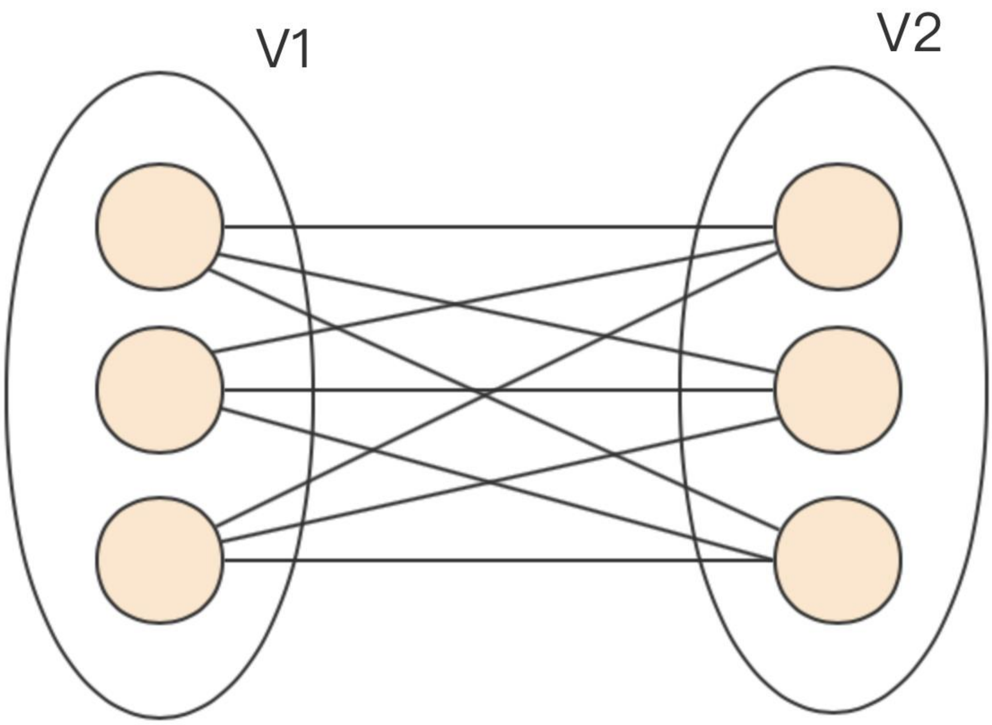
注意，所分成的两个集合必须是非空的。设在图 **G** 中，划分好的两个集合分别为 **V1** 和 **V2**，则称 **(V1, V2)** 为 **G** 的顶点集的一个二部划分。

下图所给出的就是一个二分图：



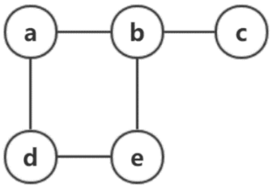
完全二分图

简单来说，完全二分图（complete bipaitite graph）就是在二分图的基础上，集合 V1 上的任意一个点都与 V2 上的所有点有连接。

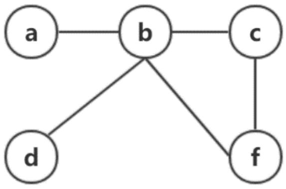


从旧图构造新图

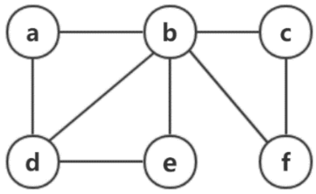
- 图 G = (V, E)的子图是图 H = (W, F)，其中 W⊆V 且 F⊆E。若 H ≠ G，则称图 G 的子图 H 是 G 的真子图。
- 令 G = (V, E)是一个简单图。图 H = (W, F)是由顶点集 V 的子集 W **导出的子图（诱导子图）**，其中边集 F 包含 E 中的一条当且仅当这条边的两个端点都在 W 中。 （对于子图的任意两个点，只要 G 中有边，那么 H 重同样应该有边）
- 图的并集：可以用各种方式组合两个或更多的图。包含这些图的所有顶点和边的图成为这些图的**并图**，两个简单图的并图的定义如下：两个简单图 G1 = (V1, E1) 和 G2 = (V2, E2) 的并图是带有顶点集 V1 ∪ V2 和边集 E1 ∪ E2 的简单图。G1 和 G2 的并图表示成 G1 ∪ G2。



简单图G1



简单图G2



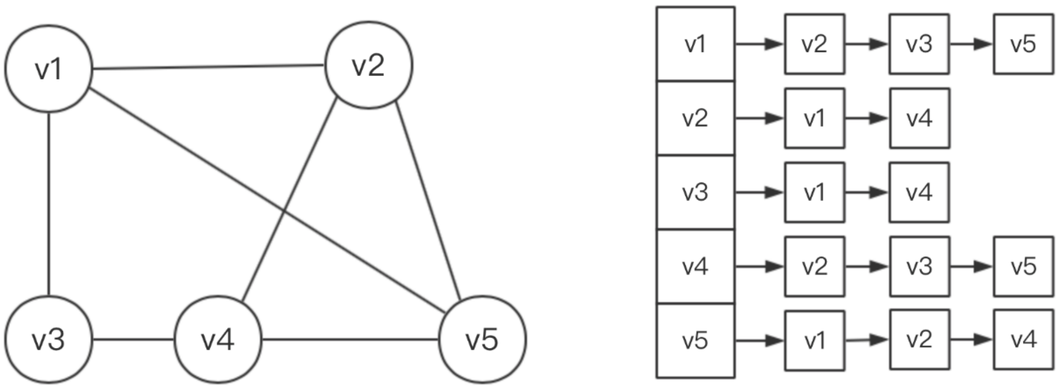
它们的并G1∩G2

图的表示和图的重构

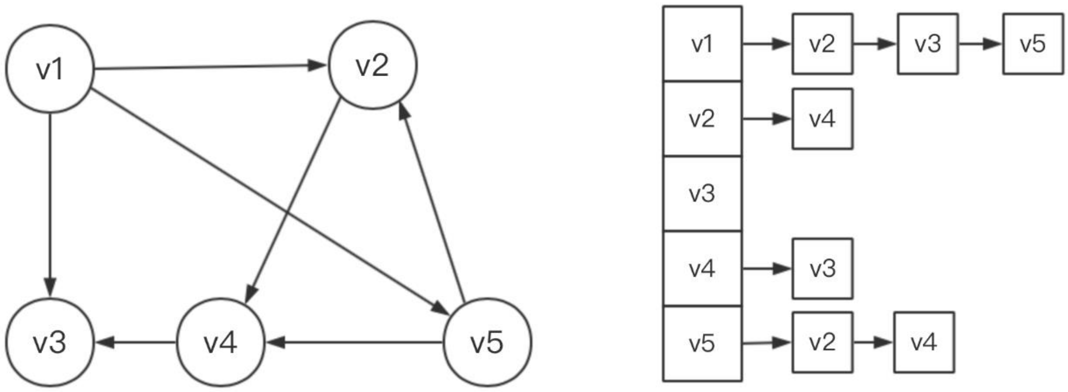
图的表示

邻接链表

利用邻接链表，我们把所有相关的点用链表连接起来，如下图：



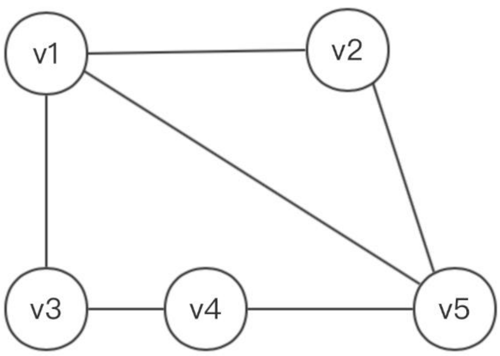
当然，有向图可以像这样进行连接：



链表中连接的顺序是没有意义的。

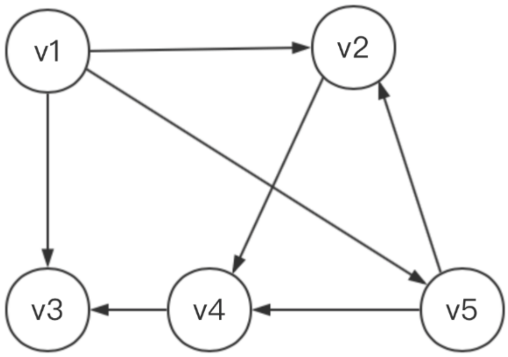
邻接矩阵

我们也可以使用邻接矩阵进行表示，即对于一个有 n 个节点的图，我们使用一个 n×n 大小的矩阵进行表示，第 i 行第 j 列为 1 则表示节点 vi 与节点 vj 相邻，如下图：



$$
\begin{array}{c}
 \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

当然，有向图也可以这样表示：

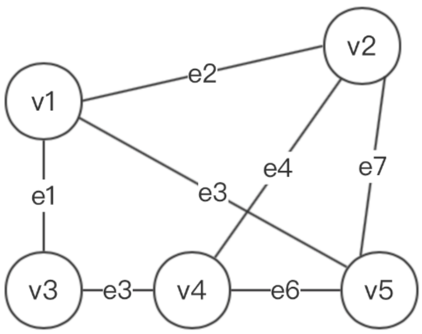


$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \end{array} \\
\begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

但是在有向图中，第 i 行第 j 列为 1 则表示存在边从节点 vi 连接到节点 vj。

关联矩阵

关联矩阵就是把点和边的关系使用一个矩阵表示出来。即对于一个有 n 个节点、m 条边的图，我们使用一个 n×m 大小的矩阵进行表示，第 i 行第 j 列为 1 则表示节点 vi 与边 ej 关联，如下图：



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

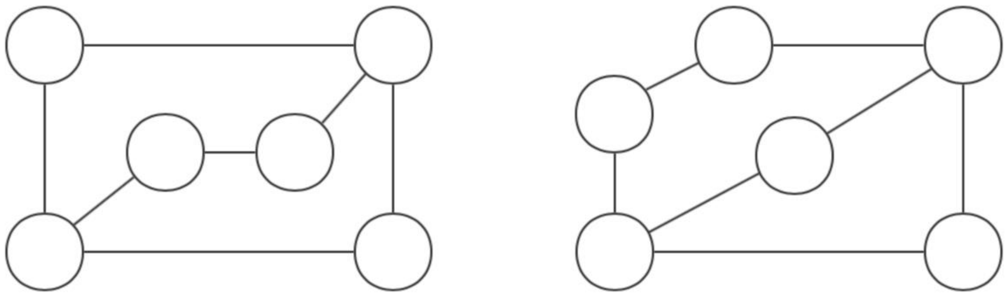
图的同构

设 G1 = (V1, E1), G2 = (V2, E2)为两个图，如果满足：

- f 为 V1 --> V2 的双射（一对一的，既是单射又是满射）；

- 在 V1 中任取 u，v，u 和 v 在 G1 中相邻当且仅当 f(u)和 f(v)在 G2 中相邻； 则称 f 为 G1 到 G2 的同构（isomorphism）。

例如，下图所表示的两个图就是两个具有同构关系的图：



图的连通性（connectivity）

通路

- 简单图 G

  中

  w = $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 ... v_k$ 称为一条从 v_0到 v_k的路径（ v_0, v_k）或**通路（path）**,其中， v_0称为w的起点， v_k为w的终点， v_i（1≤i≤k）称为w的内点，k为w的路长。

- 若通路的起点和终点相同，且长度大于 0，则该通路为**回路（circuit）**
- 若回路或通路不重复包含相同的边，则称为**简单回路（simple path）**或**简单通路（simple circuit）**
- 若一个简单通路中有重复边，则一定有重复点，反之不一定成立。

无向图的连通性

- 我们所说的**连通图（connected graph）**是指没对顶点都有通路的**无向图**。连通图的每一对不同顶点之间都存在简单通路。
- 若图 G 中任意两点都有回路，则称图 G 是**连通**的。
- 图 G 的连通分支是 G 的**联通子图**，当该子图的一个极大联通子图。

图是如何连通的

- 有时删除一个顶点和它所关联的边，就产生带有比原图更多的连通分支的子图。把这样的顶点称为**割点（cut vertex）**或**节点**。从连通图里删除割点，就产生不连通的子图。
- 把一旦删除就产生带有比原图更多的连通分支的子图的边称为**割边（cut edge）**或**桥**。

有向图的连通性

- **强联通图（strongly connected digraph）**：若对于有向图中的任意顶点 a 和 b，都有从 a 到 b 和从 b 到 a 的通路，则该图是强连通的。
- 有向图 G 的子图是强连通的，但不包含在更大的强连通子图中，可称为 G 的**强连通分支（stringly connected component）**或**强分支**。
- **弱连通图（weakly connected digraph）**：若把有向图的箭头去掉，任何两个顶点之间都**相互可达（mutually reachable）**，则该有向图是弱连通的。
- 设 G = (V, E)为一有向图，定义 V 上的关系 R: ∀（u, v）∈ V×V, (u, v) ∈ R 当且仅当 U 与 v 在 G 上相互可达。

- 若 G 为弱连通图，R 满足传递性，自反性。若 G 为强连通图，R 为等价关系（满足传递性、自反性、对称性）。

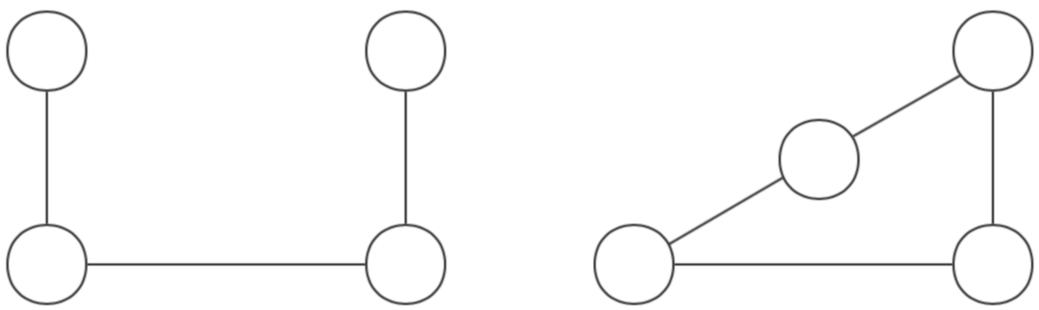
欧拉通路与哈密顿通路

欧拉通路与欧拉回路

定义

图 G 中的欧拉回路是包含 G 的每一条边的**简单回路**。

图 G 中的欧拉通路是包含 G 的每一条边的**简单通路**。



上图所示，左图仅含有欧拉通路，右图既含有欧拉通路又含有欧拉回路。

判定

定理 1：含有至少 2 个顶点的**连通多重图**具有欧拉回路当且仅当它的每个顶点的度都为偶数。（充要条件）

定理 2：**连通多重图**具有欧拉通路但无欧拉回路当且仅当它恰有 2 个度为奇数的顶点。（充要条件）

欧拉图

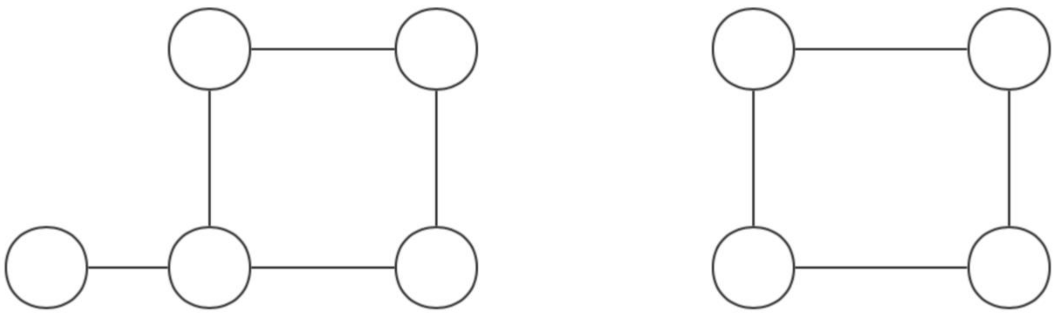
含有欧拉回路的图是欧拉图，含有欧拉通路的图是半欧拉图。

哈密顿通路与哈密顿回路

定义

经过图 G 中每一个顶点恰好一次的简单通路称为哈密顿通路。

经过图 G 中每一个顶点恰好一次的简单回路称为哈密顿回路。



上图所示，左图仅含有哈密顿通路，右图既含有哈密顿通路又含有哈密顿回路。

判定

定理 3：如果 G 是有 n 个顶点的**简单图**，其中 $n \geq 3$，并且 G 中每个顶点的度都至少为 $n / 2$，则 G 有哈密顿回路。（充分条件，非必要）

定理 4：如果 G 是有 n 个顶点的**简单图**，其中 $n \geq 3$，并且对于 G 中每一个不相邻的顶点 u 和 v 来说，都有 $deg(u) + deg(v) \geq n$，则 G 有哈密顿回路。（充分条件，非必要）

哈密顿图

存在哈密顿回路的图称为哈密顿图。

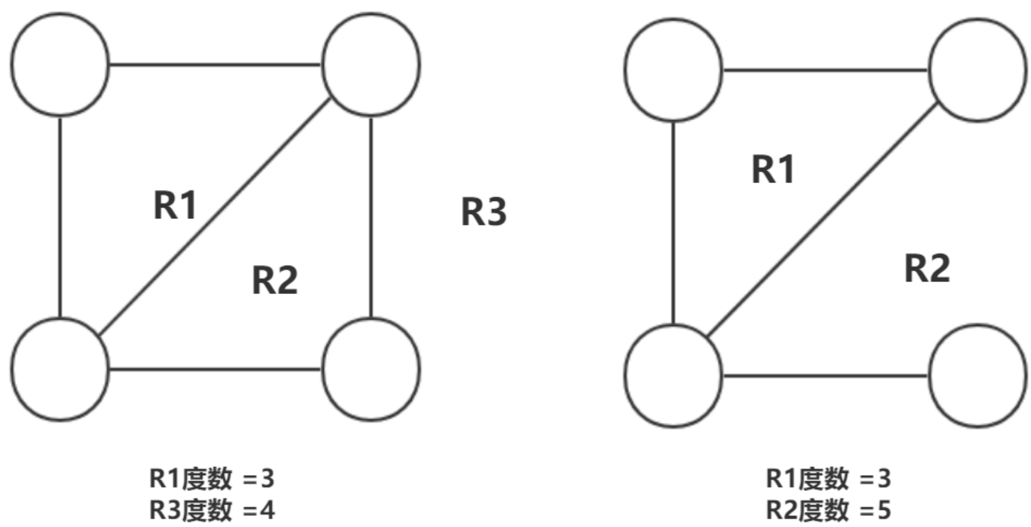
小总结

- 欧拉通路与欧拉回路侧重于**边**，而哈密顿通路与哈密顿回路侧重于**点**。
- 对于欧拉通路和欧拉回路的判断定理是**充分必要**的，但是哈密顿通路与哈密顿回路的判定定理只是**充分**的。

平面图

平面图定义

- 平面图：若可以在平面中画出一个图而边没有任何交叉（其中边的交叉表示变得指向或弧线在他们的公共端点以外的地方相交），则这个图是**平面图（planar graph）**。这种画法成为这个图的平面表示。
- 面的度数：这个面边界上的边数。当一条边在边界上出现两次时，它的贡献的度是2。



- 握手定理：每个图中，所有结点度数的总和等于边数的两倍(平面图中依然成立)。

  这个结论在考试中会经常用到哦

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

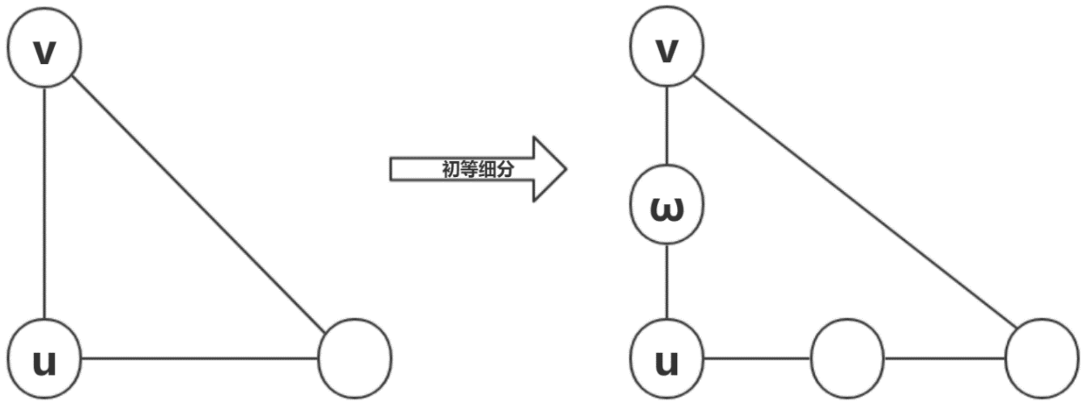
欧拉公式

- 一个图的平面表示把平面分割成一些**面（region）**，包括一个无界的面。
- **欧拉公式（Euler's foemula）**：设 G 是带 e 条边和 v 个顶点的连通平面图。色 r 是 G 的平面图表示中的面数。则 **r=e-v+2。（欧拉公式是考试是解题的重要公式，和握手定理一起用更配哦）**
- 推论一：若 G 是 e 条边和 v 个顶点的连通平面简单图，其中 $v \geq 3$，则 $e \leq 3v - 6$。
- 推论二：若 G 是连通平面简单图，则 G 有度数不超过 5 的顶点。
- 推论三：若连平面简单图有 e 条边和 v 个顶点，$v \geq 3$ 并且没有长度为三的回路，则 $e \leq 2v - 4$。

库拉图斯基定理

- 若一个图是平面图，则通过删除一条边{u, v}并且添加一个新顶点 ω 和两条边{u, ω}和{v, ω}获得的任何图也是平面图，这样的操作称为**初等细分（elementary sub，division）。（可以理解为在原有平面图的边上增加顶**

点）



- 若可以从相同的图经过一系列初等细分来获得图，则他们是**同胚（homeomorphic）**的。
- 从上可获得一个推论

一个图是非平面图当且仅当它包含一个同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图。

图着色

四色定理

- 简单图的着色是对该图的每一个顶点都指定一种万色，使得没有两个相邻的顶点颜色相同。
- 图的**着色数（chromatic number）**是着色这个图所需要的最少颜色数。
- **四色定理**：平面图的着色数不超过 4。