Linear Algebra 07

时间：2022年5月19日

1. 解方程组.

$$\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1\\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1\\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1\\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1\end{cases}$$

[解答]

1. 解方程组. 本题基础题,

注意最终的解表示成自由变量的线性组合的形式.

· 首先由系数矩阵和列向量 $\vec{b}$ 构成系数矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc:c}2&-2&1&-1&1&1\\1&2&-1&1&-2&1\\4&-10&5&-5&7&1\\2&-14&7&-7&11&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&-1&1&-2&1\\0&-6&3&-3&5&-1\\0&-18&9&-9&15&-3\\0&-18&9&-9&15&-3\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&-1&1&-2&1\\0&2&-1&1&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

自由变量 x_3, x_4, x_5. 化为简化阶梯型矩阵.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+(-x_3)+x_4-2x_5=1\\ 2x_2-x_3+x_4-\frac{5}{3}x_5=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_5+\frac{5}{3}x_5=\frac{2}{3}\Rightarrow x_1-\frac{1}{3}x_5=\frac{2}{3}.\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}x_5+\frac{2}{3}\\ x_2=\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{6}x_5+\frac{1}{6}.\end{cases}$$

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}x_5+\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}(x_3-x_4+\frac{5}{3}x_5+\frac{1}{3})\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{6}\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

这样写便可以, 当然也可以化简为简化阶梯型求解.

对增广矩阵作初等变换化为阶梯型，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c}2&-2&1&-1&1&1\\1&2&-1&1&-2&1\\4&-10&5&-5&7&1\\2&-14&7&-7&11&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&-1&1&-2&1\\2&-2&1&-1&1&1\\4&-10&5&-5&7&1\\2&-14&7&-7&11&-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&-1&1&-2&1\\0&-6&3&-3&5&-1\\0&-18&9&-9&15&-3\\0&-18&9&-9&15&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&-1&1&-2&1\\0&6&-3&3&-5&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$ 方程组有解,其同解的线性方程组是

移项,得

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1\\ 6x_2-3x_3+3x_4-5x_5=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2=1+x_3-x_4+2x_5\\ 6x_2=1+3x_3-3x_4+5x_5\end{cases}$$

(1) 先求特解 $\boldsymbol{\alpha}$, 只要取 $x_3=x_4=x_5=0$ 即可, 于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{2}{3},\frac{1}{6},0,0,0\right]^{\mathrm{T}}.$$

(2) 再求出组的基础解系 (需把方程组的常数项换成零), 得

$$\begin{cases}x_1+2x_2=x_3-x_4+2x_5\\ 6x_2=3x_3-3x_4+5x_5\end{cases}$$

此时 $n-r(\boldsymbol{A})=5-2=3, x_3,x_4,x_5$ 是自由变量.

$$令\ x_3=1,x_4=0,x_5=0,\ 得\ \boldsymbol{\eta}_1=\left[0,\frac{1}{2},1,0,0\right]^{\mathrm{T}}.$$

$$令\ x_3=0,x_4=1,x_5=0,\ 得\ \boldsymbol{\eta}_2=\left[0,-\frac{1}{2},0,1,0\right]^{\mathrm{T}}.$$

$$令\ x_3=0,x_4=0,x_5=1,\ 得\ \boldsymbol{\eta}_3=\left[\frac{1}{3},\frac{5}{6},0,0,1\right]^{\mathrm{T}},$$

故方程组的通解是 $\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$ (k_1,k_2,k_3 为任意常数).
解题要点: 本题主要考察线性方程组的基本解题步骤。

2. 求解下列矩阵 X.

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&3\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-3&1\\3&-4&1\end{pmatrix}$$

[解答]

2. 我们知道 $XA=B \Rightarrow XAA^{-1}=BA^{-1}$

方法① 求解 BA^{-1}，要求 A 的逆, 较为麻烦.

方法② 取转置 $(XA)^T=B^T \Rightarrow A^TX^T=B^T \Rightarrow (A^T)^{-1}A^TX^T=(A^T)^{-1}B^T \Rightarrow X^T=(A^T)^{-1}B^T$

我们知道在单位矩阵化简过程中: $[A \vdots B] \to [I \vdots A^{-1}B]$

我们类比: $[A^T \vdots B^T] \to [I \vdots \underbrace{(A^T)^{-1}B^T}_{X^T}]$

$$[A^T \vdots B^T]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&2&3\\-2&1&2&-1&-3&-4\\0&3&1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&2&3\\0&5&2&1&1&2\\0&3&1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&2&3\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&2&3\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&-\frac{1}{15}&\frac{2}{15}&\frac{2}{15}&-\frac{1}{15}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&1&-2&-2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&2&3\\0&1&\cancel{\frac{2}{5}}\,0&1&1&0\\0&0&1&-2&-2&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\cancel{2}\,0&0&-1&0&3\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&-2&-2&1\end{array}\right]$$

$$则\ X^T=\begin{bmatrix}-1&0&3\\1&1&0\\-2&-2&1\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\0&1&-2\\3&0&1\end{bmatrix}$$

将矩阵方程 $XA=B$ 两边同时取转置, 化成 $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$, 通过有限次初等行变换将 $\left(A^{\mathrm{T}},B^{\mathrm{T}}\right)\to(\boldsymbol{I},\boldsymbol{Y})$, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$ 是所求的解 BA^{-1}.

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&2&3\\-2&1&2&-1&-3&-4\\0&3&1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2(1)+(2)}\begin{pmatrix}1&2&0&1&2&3\\0&5&2&1&1&2\\0&3&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{5}(2)+(3),-5(3)}\begin{pmatrix}1&2&0&1&2&3\\0&5&2&1&1&2\\0&0&1&-2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2(3)+(2)}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&2&3\\0&5&0&5&5&0\\0&0&1&-2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{5}(2),-2(2)+(1)}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&3\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&-2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\0&1&-2\\3&0&1\end{pmatrix}$$

3.

将二次型 $2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 通过正交变换化为标准形, 并写出所用正交变换.

[解答]

3. 二次型 → 正交变换 → 标准型

$x=Py$ $\quad ay_1^2+by_2^2+0y_3^2$ 求 $x=Py$

解, $f(x)=x^TAX=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

求解矩阵 A 的特征值. $\det(\lambda E-A)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}0&-\lambda-1&2\lambda-\lambda^2+1\\0&-\lambda-1&1-\lambda\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}$

$=(-1)^{1+3}\cdot1\begin{vmatrix}-\lambda-1&2\lambda-\lambda^2+1\\-\lambda-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda-1)\begin{vmatrix}1&2\lambda-\lambda^2+1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)|1-\lambda-2\lambda+\lambda^2-1|$

$=-(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda)=0$

故特征值为 -1, 0, 3.

$\lambda_1=-1$ 时, $A-\lambda E=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

则 $x_1-x_2+3x_3=0$, $2x_3=0$ $\Rightarrow x_3=0$ $\quad x_1=x_2$, 则 $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1\\0\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$\lambda_2=0$ 时, $A-\lambda E=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{matrix}$

则 $\vec{x}=\begin{bmatrix}-x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\lambda_3=3$ 时, $A-\lambda E=\begin{bmatrix}-3&-1&1\\-1&-3&-1\\1&-1&2-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-4&-2\\0&-4&-2\\1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-4&-2\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\cancel{6x_3=0}\ \cancel{4x_2+x_3=0}\ \cancel{x_1-x_2+2x_3=0}\ \begin{cases}2x_2+x_3=0\\x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$

$\vec{x}=\begin{bmatrix}\frac{x_3}{2}\\-\frac{x_3}{2}\\x_3\end{bmatrix}=\frac{x_3}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ 特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ 特征向量均正交, 现在单位化即可

$\downarrow$

$\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

则 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow\vec{x}=P\vec{y}\Rightarrow\vec{x}^TA\vec{x}=(P\vec{y})^TA\vec{x}=(P\vec{y})^TA(P\vec{y})$

$\lambda=3$ $\quad\lambda=-1$ $\quad\lambda=0$

$=\vec{y}^TP^TAP\vec{y}=y^TD\vec{y}$

$=[y_1\ y_2\ y_3]\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=3y_1^2-y_2^2$

☆ 标准型.

注意本题的求解步骤.

二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$. 由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 1\\ -1 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)\left(\lambda^2-3\lambda\right),$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $3,-1,0$.

对 $\lambda=3$, 由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即 $\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ & 2 & 1\\ & 0 & \end{bmatrix}$, 解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2)^T$.

类似地, 对 $\lambda=-1,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T$; $\lambda=0$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$. 特征值无重根, 仅需单位化: $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$. 构造正交矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, 那么令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=3y_1^2-y_2^2$ 为所求标准形.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r,r<n)$ 是 n 维实向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 已知 $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量, 试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

[解答]

4. 证明: 我们采用定义法完成本题.

要证明: $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r,\vec{\beta}$ 线性无关.

则证明 $c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2+\cdots+c_r\vec{\alpha}_r+c_{r+1}\vec{\beta}=\vec{0}$ 仅有平凡解. $\cdots$ ⊖

要证即 $c_1=c_2=\cdots=c_r=c_{r+1}=0$

由于 $\vec{\beta}$ 为齐次方程组的非零解. 有

$$\begin{cases}\beta^T\vec{\alpha}_1=\vec{0} & \cdots(1)\\ \beta^T\vec{\alpha}_2=\vec{0} & \cdots\\ \vdots & \\ \beta^T\vec{\alpha}_r=\vec{0} & \cdots(n).\end{cases}\qquad \beta^T\Rightarrow[b_1,b_2,\cdots,b_n]\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{12}\\ \alpha_{13}\\ \vdots\\ \alpha_{1n}\end{bmatrix}\quad \beta^T\vec{\alpha}_i=\vec{0}$$

我们将⊖式左乘 β^T.

则有 $c_1\beta^T\vec{\alpha}_1+\cdots+c_r\beta^T\vec{\alpha}_r+c_{r+1}\vec{\beta}^T\vec{\beta}=0$.

则 $\beta^T\vec{\alpha}_i=\vec{0}$. 则 $c_{r+1}\vec{\beta}^T\vec{\beta}=\vec{0}$

由于 $\vec{\beta}\neq0$, 则有 $\vec{\beta}^T\vec{\beta}=[b_1,\cdots,b_n]\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=b_1^2+\cdots+b_n^2>0$, 故有 $c_{r+1}=0$.

代入⊖式, 有 $c_1\vec{\alpha}_1+\cdots+c_r\vec{\alpha}_r=\vec{0}$.

由于 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性无关. 则 $c_1=c_2=\cdots=c_r=0$

故向量组线性无关. 证毕□.

如果不是线性无关, 我们也可以定义证明不是线性无关.

(用定义, 同乘) 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+l\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$

因为 $\boldsymbol{\beta}$ 为齐次方程组的非零解, 有

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}b_1 + a_{r2}b_2 + \cdots + a_{m}b_n = 0 \end{cases} (1)$$

即 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 = 0, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0, \cdots, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r = 0.$
用 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 左乘 (1) 式两端, 并把 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_i = 0$ 代人, 得

$$l\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0, (2)$$

因为 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = b_1^1 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 > 0$, 故必有 $l = 0$, 代人 (1) 式, 得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}, (3)$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 由 (3) 知

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \cdots, k_r = 0$$

从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关.
解题要点: 本题主要考察用定义证明线性相关性.