Linear Algebra 08

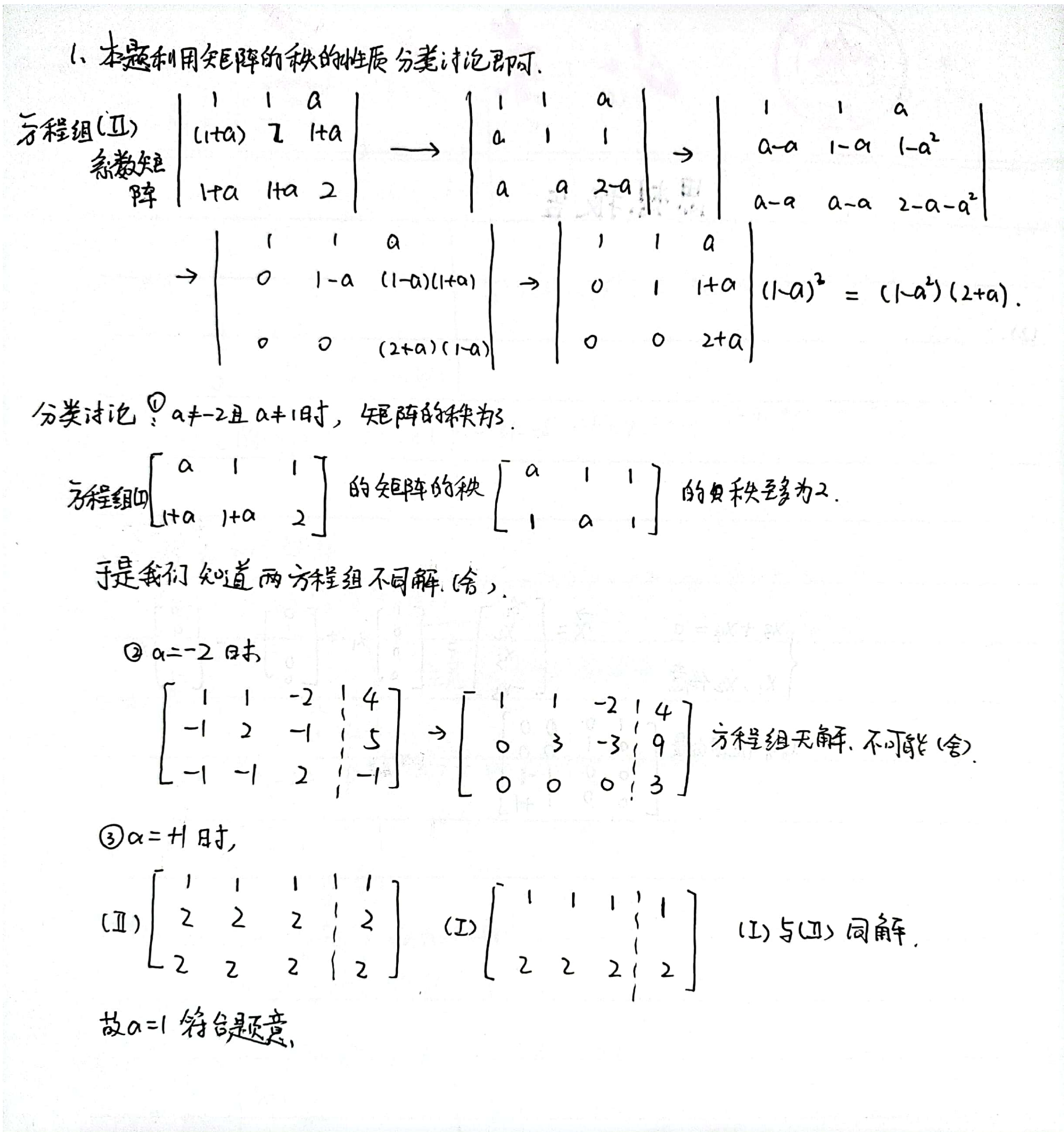
时间：2022年5月26日

1. 若方程组

$$(\mathrm{I}\ )\ \begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a^3,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=a\left(a^2+1\right)\end{cases}\text{与方程组 }(\mathrm{II})\ \begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a^2,\\(1+a)x_1+2x_2+(1+a)x_3=1+a^2,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=1+a\end{cases}$$

同解, 计算A的值。

【解析】



1、本题利用矩阵的秩的性质分类讨论即可.

方程组(II)系数矩阵 $\begin{vmatrix}1&1&a\\(1+a)&2&1+a\\1+a&1+a&2\end{vmatrix}\longrightarrow\begin{vmatrix}1&1&a\\a&1&1\\a&a&2-a\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&1&a\\a-a&1-a&1-a^2\\a-a&a-a&2-a-a^2\end{vmatrix}$

$\rightarrow\begin{vmatrix}1&1&a\\0&1-a&(1-a)(1+a)\\0&0&(2+a)(1-a)\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&1&a\\0&1&1+a\\0&0&2+a\end{vmatrix}(1-a)^2=(1-a^2)(2+a).$

分类讨论：① $a\neq-2$且$a\neq1$时，矩阵的秩为3.

方程组(I) $\begin{bmatrix}a&1&1\\1+a&1+a&2\end{bmatrix}$ 的矩阵的秩 $\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\end{bmatrix}$ 的秩至多为2.

于是我们知道两方程组不同解.(舍).

② $a=-2$时

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&4\\-1&2&-1&5\\-1&-1&2&-1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&4\\0&3&-3&9\\0&0&0&3\end{array}\right]$ 方程组无解. 不可能(舍).

③ $a=1$时,

(II) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&2&2&2\\2&2&2&2\end{array}\right]$ (I) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&2&2&2\end{array}\right]$ (I)与(II)同解.

故$a=1$符合题意.

对于方程组 (II), 其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&a\\1+a&2&1+a\\1+a&1+a&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a\\a&1&1\\1+a&1+a&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a\\a&1&1\\1&a&1\end{vmatrix}$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&a\\1&1&1\\1&a&1\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&a\\0&0&1-a\\0&a-1&1-a\end{vmatrix}$$

$$=(a+2)(a-1)^2.$$

当 $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$ 时, 行列式不为零, 方程组 (II) 必有唯一解; 此时对于方程组 (I), 对其系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1+a & 1+a & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix},$$

系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩 (<3), 有无穷多解, 不符合题意, 舍去.
当 $a=-2$ 时, 对方程组 (II) 的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right],$$

系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩, 方程组 (II) 无解, 不符合题意, 舍去.
当 $a=1$ 时, 方程组 (I) 的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right];$$

方程组 (II) 的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

此时 (I) 与 (II) 同解.
综上可得 $a=1$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3 .

(1) 求 k;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

2. 已知特征值, 求解 A 中的 K.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ -1 & \lambda & & \\ & & \lambda-k & -1 \\ & & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & \lambda & & \\ \cancel{0}\lambda & -1 & & \\ & & -1 & \lambda-2 \\ & & \lambda-k & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & \lambda & & \\ 0 & \lambda^2-1 & & \\ & & -1 & \lambda-2 \\ & & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$(\lambda-k)(\lambda-2)-1$

$$\to \begin{vmatrix} -1 & \lambda & & \\ 0 & \lambda^2-1 & & \\ & & -1 & \lambda-2 \\ & & 0 & \lambda^2-(k+2)\lambda+2k-1 \end{vmatrix} \Rightarrow (\lambda^2-1)[\lambda^2-(k+2)\lambda+2k-1]=0 \cdots ①$$

① → $\lambda=3$ 为方程的一个解. $\Rightarrow 8(9-3k-6+2k-1)=0 \Rightarrow (-k+2)=0 \Rightarrow k=2$.

解得 $k=2$.

$(AP)^T AP$ 为对角矩阵.

联想 $x^T A x$ 的标准化形式 $\Rightarrow (P\vec{y})^T A(P\vec{y}) \Rightarrow \vec{y}^T \underbrace{P^T A P}_{\text{对角矩阵}} \vec{y}$

$k=2$ 时, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 注意到 A 为对称矩阵

故 $(AP)^T(AP) = P^T A^T A P = P^T (A^T A) P = P^T (A^T A) P$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 5 & 4 \\ & & 4 & 5 \end{bmatrix}$

利用其对 $P^T A^2 P$ 化为对角矩阵.

那我们求解这样的矩阵 P 即可.

【解析】 (1) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - k & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 - 1\right)\left[\lambda^2 - (k+2)\lambda + (2k-1)\right],$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda = 3$ 代人上式, 有

$$|3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \left(3^2 - 1\right)\left[3^2 - 3(k+2) + (2k-1)\right] = 0,$$

解得 $k = 2$.

(2) 由（1）的结果, 得矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

因为 $A^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, 所以

$$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P},$$

而

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

对应于 A^2 的二次型为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} &= x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2 \end{aligned}$$

作线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4, \\ y_4 = x_4, \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3-\frac{4}{5}y_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y},$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 代人二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}\\=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

即矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{bmatrix}$$

3. 若可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$ 满足 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&-3\\1&-3&6\end{bmatrix}$, 计算$\boldsymbol{D}$.

$\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ 【解析】方法一 记 $\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&-3\\1&-3&6\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$, 则其对应的二次型为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2=[x_1-x_2+x_3,x_2-2x_3,x_3]\begin{bmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_2-2x_3\\x_3\end{bmatrix}\\&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\text{ 记 }[x_1,x_2,x_3]D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$.

方法二、 在方法一中, $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2$, 令 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=y_1,\\x_2-2x_3=y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$, 也即作可逆线性变换 $x=Cy$, 其中 $\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$, 得 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$, 因此

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$, 故 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

【注】所求的矩阵 $\boldsymbol{D}$ 不唯一.