# Linear Algebra 05

时间：2022年5月5日

1. a. A matrix *A* is orthogonally diagonalizable if and only if *A* is symmetric. (T/F?) True

   <1> 矩阵A是可正交对角化的当且仅当A是对称的.
   教材P396页定理2.
   详细阅读教材7.1节

   b. The set of all vectors in $\mathbb{R}^n$ orthogonal to one fixed vector is a subspace of $\mathbb{R}^n$.(T/F?) True

   [解答]$\mathbf{k}$. True. This is a special case of the statement in the box following Example 6 in Section $6.1$ (and proved in Exercise 30 of Section 6.1).

   <2>. $R^n$中所有正交于一个固定向量的集合是$R^n$的一个子空间.
   教材P332页例6. 显然我们依据结论2可知: $W^\perp$是$R^n$的一个子空间, 我们在$W^\perp=L$中取一个固定的向量即可.
   大家感兴趣可以证明一下P335页6.1节习题29和30
   证明向量空间的子空间也是向量空间的三步曲.

2. Find a $\mathrm{QR}$ factorization of $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

2. 回顾QR分解的流程.

①首先求解单位正交集 $\{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'\}$  P335页教材例2.

由于 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ 我们可以用 $\vec{v}_1=\vec{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

再依据 $\vec{v}_1$ 求解 $\vec{v}_2'=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\dfrac{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}\backsim\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

$\vec{v}_3'=\vec{x}_3-\text{proj}_{W_2}\vec{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}?\end{bmatrix}$

$\text{proj}_{W_2}\vec{x}_3=\dfrac{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\dfrac{\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}{9+1+1+1}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

故 $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\backsim\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\sim\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix}$.

② 所以正交集 $\begin{bmatrix}1&-3&0\\1&1&-2\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-3}{\sqrt{12}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{\sqrt{12}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

我们知: $A=QR$ 由于 $QQ^T=I$.

所以 $Q^TA=Q^T(QR)=(Q^TQ)R=IR=R$. (不可以 $Q^T=Q^{-1}$ (×) Q非 $n\times n$)

则 $R=Q^TR=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\frac{3}{2}&1\\0&\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{2}{\sqrt{12}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$ 可以采用 $A=QR$ 验证一下.

[解答]

The columns of $A$ are the vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, and $\mathbf{x}_3$ in Example 2 . An orthogonal basis for $\operatorname{Col} A=\operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ was found in that example:

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2'=\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\-2/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

To simplify the arithmetic that follows, scale $\mathbf{v}_3$ by letting $\mathbf{v}_3'=3\mathbf{v}_3$. Then normalize the three vectors to obtain $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, and $\mathbf{u}_3$, and use these vectors as the columns of $Q$ :

$$Q=\begin{bmatrix}1/2 & -3/\sqrt{12} & 0\\1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6}\\1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6}\\1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

By construction, the first $k$ columns of $Q$ are an orthonormal basis of $S$ pan $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$. From the proof of Theorem $12, A=QR$ for some $R$. To find $R$, observe that $Q^TQ=I$, because the columns of $Q$ are orthonormal. Hence

$$Q^TA=Q^T(QR)=IR=R$$

and

$$
R = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}
$$

3. 设 $\alpha_1 = (1,2,1,0)^T$，$\alpha_2 = (1,1,1,2)^T$，$\alpha_3 = (3,4,3,4)^T$，$\alpha_4 = (1,1,2,1)^T$，$\alpha_5 = (4,5,6,4)^T$ 是实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中的一个向量组，$L$ 是该向量组生成的 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

(1) 试证明: $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 和 $\beta_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 分别是 $L$ 的两组基;

(2) 求从基 $\beta_1$ 到基 $\beta_2$ 的过渡矩阵.

3.解: $\vec{\alpha_1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha_3} = \begin{bmatrix}3\\4\\3\\4\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha_4} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha_5} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\\4\end{bmatrix}$

1.要证明 $\beta_1 = \{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_4}\}$ 和 $\beta_2 = \{\vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_5}\}$ 构成L的一组基

即证明 $\beta_1$ 构成向量空间的一个极大线性无关集. 也就是向量空间 V的一组基.

则说明，$\vec{\alpha_3}$ 和 $\vec{\alpha_5}$ 可以用 $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$，$\vec{\alpha_4}$ 线性表示

$\begin{cases} \vec{\alpha_3} = \lambda_{11}\vec{\alpha_1} + \lambda_{12}\vec{\alpha_2} + \lambda_{14}\vec{\alpha_4} \\ \vec{\alpha_5} = \lambda_{21}\vec{\alpha_1} + \lambda_{22}\vec{\alpha_2} + \lambda_{24}\vec{\alpha_4} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{14} = 0$. $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{11} = 1$. $\Rightarrow \vec{\alpha_3} = \vec{\alpha_1} + 2\vec{\alpha_2} + 0 \cdot \vec{\alpha_4}$

当然 $\vec{\alpha_5}$ 的求解同理，大家可以求得 $\lambda_{21} = 1$，$\lambda_{22} = 1$. $\lambda_{24} = 2$. $\vec{\alpha_5} = \vec{\alpha_1} + \vec{\alpha_2} + 2\vec{\alpha_4}$

所以 $\beta_1$ 构成L的一组基

现在我们知道 $\dim L = 3$.

那我们可以 $\beta_2$ 中采用 $\vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_5}$ 说明 $\beta_2$ 线性无关即可.

则说明 $[\vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_5}]$ 有三个主元列 也即 $A = [\vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_5}]$ 满秩

$[\vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_5}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

说明矩阵A的秩为3. 故 $\vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_5}$ 构成向量空间的一组基

[解答] (1) 要证明 $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的某个子集 $\beta'$ 是 $L$ 的一组基，只需证明在 $\beta$ 中但不在 $\beta'$ 中的向量能被 $\beta'$ 中的向量线性表示出.

设 $\begin{cases} \alpha_3 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_4 \\ \alpha_5 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_4 \end{cases}$，解线性方程组可得（具体过程略）

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4,$

所以 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 是 $L$ 的一组基.

由此知，$\dim L = 3$，所以要证明 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 是 $L$ 的一组基，只需证明该集合线性无 关，

只需证明矩阵 $A := (\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 满秩.

通过初等行变换，可将 $A$ 化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，说明矩阵 $A$ 的秩为 3，得证.

2. 从基 $\beta_1$ 到 $\beta_2$ 的坐标变换矩阵.

$\left.\begin{array}{l} P_{\beta_1}\vec{x}_{\beta_1}=\vec{x} \\ P_{\beta_2}\vec{x}_{\beta_2}=\vec{x} \end{array}\right\}$ 教材 $P_{241}$ 页 例3. 则 $P_{\beta_1}\vec{x}_{\beta_1}=P_{\beta_2}\vec{x}_{\beta_2} \Rightarrow [\vec{x}]_{\beta_2}=P_{\beta_2}^{-1}P_{\beta_1}[\vec{x}]_{\beta_1}$

故 $\beta_1 \to \beta_2$ 的坐标变换矩阵为 $\underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}=P_{\beta_2}^{-1}P_{\beta_1}$ ······ ①可以这样写, 但是有点点复杂

②我们可以采用例2中的方式去写: $[P_{\vec{\beta}_2} \,\vdots\, P_{\vec{\beta}_1}]$ 将 $P_{\vec{\beta}_2}$ 化为单位矩阵的过程 $P_{\vec{\beta}_1}$ 也随之变化.

即等价于 $[P_{\vec{\beta}_2} \,\vdots\, P_{\vec{\beta}_1}] \sim [I \,\vdots\, P_{\vec{\beta}_2}^{-1}P_{\vec{\beta}_1}] \sim [I \,\vdots\, \underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}]$. 这是一种比较快速的解法.

③本题可以思考如何将 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 映射到 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5$. 则 $\vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_3=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_5=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+2\vec{\alpha}_4$

则 $\underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}=[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_4 \,|\, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5]$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**[注意]其中方法一和方法二用到了逆矩阵，要求对应的矩阵可逆，本题的矩阵不可逆，所以不可以采用方法一和方法二，而方法三可以有效解答本题。**

(2) 设 $I$ 是 $L$ 上的恒等变换，则所求过渡矩阵为 $Q=[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$.

由 (1) 知，$\alpha_2=\alpha_2, \alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4$，

所以过渡矩阵为 $Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵, $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是 $A$ 的两个不同的特征值, $x_1, x_2$ 是 $A$ 的分别属于 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的特征向量. 证明: $x_1+x_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

4. 证明: 正难则反.

我们已知: $A\vec{x}_1=\lambda_1\vec{x}_1$, $A\vec{x}_2=\lambda_2\vec{x}_2$

要证明 $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\lambda(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ 对 $\forall\lambda\in R$ 都不成立.

反证法.

我们不妨假设 $\forall\lambda\in R$, 使得 $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\lambda(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ 成立. ---①

那么 $A\vec{x}_1=\lambda_1\vec{x}_1$, $A\vec{x}_2=\lambda\vec{x}_2$, 故 $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2$ ---②

由①②可知: $\lambda\vec{x}_1+\lambda\vec{x}_2=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2$

$\Rightarrow (\lambda-\lambda_1)\vec{x}_1+(\lambda-\lambda_2)\vec{x}_2=0$.

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 则对应于不同特征值的两个特征向量无关

故 $\vec{x}_1$ 与 $\vec{x}_2$ 线性无关.

故 $\begin{cases} \lambda-\lambda_1=0 \\ \lambda-\lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\lambda_1=\lambda_2$. 这与 $\lambda_1=\lambda_2$ 矛盾!

故原命题成立. 证毕 □

[解答]反证法.

设 $x_1+x_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 则存在数 $\lambda$, 使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$, 则

$$(\lambda-\lambda_1)x_1+(\lambda-\lambda_2)x_2=\mathbf{0}.$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 $x_1, x_2$ 线性无关, 则 $\begin{cases} \lambda-\lambda_1=0, \\ \lambda-\lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$. 矛盾, 故得证.