2021年春线性代数(双语)考试原题

一. 概念题。

1. 判断题 (10 分)

   Mark each statement True or False.

   (1) Every matrix is row equivalent to a unique matrix in echelon form. ()

   (2) A 3×3 matrix A with 3 linearly dependent eigenvectors is invertible. ()

   (3) If A is a $n \times n$ matrix, then $\det(5A) = 5n\det(A)$. ()

   (4) The set of all linear combinations of $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ is a vector space. ()

   (5) If the matrix A contains a row of zeros, then 0 is an eigenvalue of A. ()

   (6) A matrix A is orthogonally diagonalizable if and only if A is symmetric. ()

   (7) If a matrix A is diagonalizable, then the columns of A are linearly dependent. ()

   (8) If none of the vectors in the set $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ is a linear combination of the other vectors, then S is linearly independent. ( )

   (9) $\text{Rank}\, A = \dim(\text{Nul}\, A)$. ()

   (10) Two eigenvectors corresponding to the distinct eigenvalues are always linearly independent. ()

判断题	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案										

2. 填空题 (共 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

   (1) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 的矩阵, 且 $m > n, r(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = n$ 。小冼说: $\mathrm{Col}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Col}(\boldsymbol{B})$ 。小邢说: $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Row}(\boldsymbol{B})$ 。小代说: $\mathrm{Row}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Row}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)$ 。小舒说: $\mathrm{Nul}\left(\mathbf{A}^{T}\right) = \mathrm{Nul}\left(\mathbf{B}^{T}\right)$ 。则回答正确的是________(只有一位)。

   (2) A 是 3×3 矩阵, 其特征值为 $1, 2, 3$ 。则 $|A| =$________.

   (3) 已知 α_i 和 β_j 都是 4 维列向量, 且行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m, |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$ 。则行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$________.

   (4) 若向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$ 能由 $\begin{bmatrix} 1+k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1+k \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+k \end{bmatrix}$ 唯一线性表示, 则 k 应满足的条件为________.

(5) 已知 0 是矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & a\end{bmatrix}$ 的特征值, 则 $a=$______ 。**该矩阵的另外两个特征值是______** 和 ________.

填空题	**1**	**2**	**3**	**4**	**5(1)**	**5(2)**	**5(3)**
答案							

二. 计算题 (45 分)

1. 解线性方程组。

$$\begin{aligned}x_1-2x_2-x_3+3x_4=0\\-2x_1+4x_2+5x_3-5x_4=3\\3x_1-6x_2-6x_3+8x_4=2\end{aligned}$$

2. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

3. $A=\begin{bmatrix}1/6 & 1/2 & 1/3\\1/2 & 1/4 & 1/4\\1/3 & 1/4 & 5/12\end{bmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式。

4. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

5. 已知 $a_1=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}, b_1=\begin{bmatrix}-9\\1\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}$ 以以 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 构成基 A, 以 $\boldsymbol{b}_1$ 、 $\boldsymbol{b}_2$ 构成基 B 。现有向量 $x=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 。
   计算 $\boldsymbol{x}$ 在基 A 之下的坐标向量 $[x]_{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{x}$ 在基 B 之下的坐标向量 $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{B}}$, 坐标变换矩阵$\boldsymbol{P}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}}$, 验证 $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{A}}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{B}}$ 。

三. 综合题 (30 分)。

1. 已知 $u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad v_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 。
   计算 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}\cap\mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$。

2. 设二次多项式 (二次型) $Q(\boldsymbol{x})=3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$ 。

(1)写出 $Q(x)$ 的矩阵表达。

(2)找一个矩阵 $\boldsymbol{P}$, 做变量替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}}$, 使得到的新的二次多项式中不含有交义项。

(3) 二次多项式 $Q(x)$ 是正定的（半正定的)，负定的（半负定的), 还是不定的?

四. 附加题 (10 分)

说明：共有 2 道附加题, 选择其中一道解答。本人选择第 ___题。

(1) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵, 证明: $r(\boldsymbol{AB})+n\geq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ 。

(2) 设 $\boldsymbol{Q}$ 是一个正定对称矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是它的 n 个特征值, 满足 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\leq\lambda_n$ 。证明对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $\frac{\left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right)^2}{(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x})(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x})}\geq\frac{4\lambda_n\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_n)^2}$.