Linear Algebra 期中专场

时间：2022年4月30日

一、判断正误题(每小题2分，共10分)

1. Every matrix is row equivalent to a unique matrix in echelon form. (T/F?) False.
2. If A is a 3×3 matrix, then $\det(2A) = 2\det(A)$. (T/F?) False.
3. If an augmented matrix $[A \quad \mathbf{b}]$ is transformed into $[C \quad \mathbf{d}]$ by elementary row operations, then the equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ have exactly the same solution sets. (T/F?) True.
4. Rank **A** = dim(Nul **A**). (T/F?) False.
5. If A is $m \times n$ and the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is onto, then $\operatorname{rank} A = m$. (T/F?) True.

Linear_Algebra_midterm

一、判断题： FFTFT

1. 每个矩阵都行等价于唯一的$\underline{\underline{\text{简化}}}$阶梯形矩阵
   教材 1.2节定理1 P_{13}页. (False).

2. $A_{3\times3}$矩阵， $\det(2A) = 2^3\det(A) = 8\det A$.
   教材3.2节定理3 P_{169}页 (False).

3. True. 教材 1.1节 P_6页方框2. (True).
   注意增广矩阵在化简成简化阶梯形时，方程组的解不变（行等价）.

4. False. 教材 P_{233}页（4.6节定理14前的定义）.
   A的秩即A的列空间的维数.

5. $A_{m\times n}$，由于 $\vec{x} \to A\vec{x}$ 是映上函数. $\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{\vec{x}} \in R^m$
   即对于 $\forall \vec{b} \in R^m$. 方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ 都存在解.
   故 $\vec{b}_{m\times1}$ $\vec{x}_{n\times1}$ $A_{m\times n}$. 故对于 $\forall \vec{b} \in R^m$ 都有解，则A至少生成 R^m 空间. 故 $\mathrm{Rank}(A) = m$. (True).
   教材 4.6节定理14 P_{233}页. 教材1.9节定理12 P_{76-77}页.

二、填空题(每小题5分，共15分)

1. 若 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $X =$______.

   1、若 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $X =$____ 解答:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, -1, 2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [0, 3, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [3, 0, 7]^{\mathrm{T}}$$

与向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,-2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[2,1,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[x,3,3]^{\mathrm{T}}$$

等秩, 则 $x=$______.

9.【解析】由 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\0&3&3\\0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$. 由题设知, $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$.
因

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&2&x\\-2&1&3\\2&5&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&x\\0&5&3+2x\\0&1&3-2x\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&x\\0&1&3-2x\\0&0&-12+12x\end{bmatrix}$$

故$x=1$.

3. 向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\quad\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},\quad\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$是线性______(填相关或无关)的, 它的一个极大线性无关组是__________.

相关 (因为向量个数大于向量维数)。$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 。因为 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$,

$$A=|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_4|\neq0.|$$

二、填空题.

6. 令 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$

考察: 矩阵的逆(教材P104页 定理4-2.2节) 矩阵乘法(教材2.1节).

7. $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$ 向量组构成的矩阵为 $A=[\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}]=\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\end{bmatrix}\backsim\begin{bmatrix}1&0&3\\0&3&3\\0&1&1\end{bmatrix}\backsim\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

故 RankA=2. 故 Rank(B) = Rank($\vec{\beta_1},\vec{\beta_2},\vec{\beta_3}$)=2.

$B=$故$[\vec{\beta_1},\vec{\beta_2},\vec{\beta_3}]=\begin{bmatrix}1&2&x\\-2&1&3\\2&5&3\end{bmatrix}\backsim\begin{bmatrix}1&2&x\\0&5&2x+3\\0&1&3-2x\end{bmatrix}$ 主元列个数为2. 所以最后两行相关了

$\Rightarrow \frac{5}{1}=\frac{2x+3}{3-2x}\Rightarrow 15-10x=2x+3\Rightarrow x=1$

故x=1.

8. $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3},\vec{\alpha_4}$ 四个向量构成向量组→矩阵A.

$A=[\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3},\vec{\alpha_4}]=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&2&4&2\\1&5&7&0\end{bmatrix}\backsim\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&2&2&1\\0&5&5&-1\end{bmatrix}\backsim\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&\frac{1}{2}\\0&1&1&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

$\backsim\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&-\frac{7}{10}\end{bmatrix}$

主元列个数=3. 各向量线性相关

一个极大线性无关组为$[\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_4}]$.

注意: $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$. (注意不到这个也没事)

判断正误题	1	2	3	4	5
你的判断					

填空题	1	2	3(1)	3(2)
你的答案				

三、计算与证明题(共75分)

1. (15分)求解下列齐次线性方程组:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

三、计算与证明题(一)

1. 求解齐次线性方程组.

其对应的系数矩阵 + $\vec{b}$ 后的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -5 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 11 & -13 & 16 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 7 & 0 \\ 4 & 11 & -13 & 16 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 8.5 & -9.5 & 10 & 0 \\ 0 & 17 & -19 & 20 & 0 \\ 0 & 8.5 & -9.5 & 10 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & -\frac{19}{2} & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & -\frac{19}{2} & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

主元列数 $=2$.

所以 x_1, x_2 为基本变量, x_3, x_4 为自由变量.

$$\begin{cases} x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3-x_4=0 \\ \frac{17}{2}x_2-\frac{19}{2}x_3+10x_4=0 \Rightarrow \frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4=x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + x_4$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4\right) - \frac{3}{2}x_3 + x_4$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{17}x_3 - \frac{30}{17}x_4 + x_4$

$= \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4.$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4 \\ \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 3 \\ 19 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -13 \\ -20 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- 本题有一定计算量，考察计算能力.
- 教材P_{19}页定理2和 20页的求解线性方程组的过程.

2.教材$P_{284-285}$ 例6原题.

①显然对角线的上为特征值为5,5,-3,-3. 注意只有上/下三角矩阵有这个性质.

② 所以对于特征值$\lambda_1=5=\lambda_2$. 则 $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 5-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3-5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3-5 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 = -4x_2 + 8x_3 = -16x_3 - 16x_4 + 8x_3 = -8x_3 - 16x_4$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -8x_3 - 16x_4 \\ 4x_3 + 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. (15分)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + x_4$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4\right) - \frac{3}{2}x_3 + x_4$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{17}x_3 - \frac{30}{17}x_4 + x_4$

$= \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4.$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4 \\ \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 3 \\ 19 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -13 \\ -20 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- 本题有一定计算量，考察计算能力.
- 教材P_{19}页定理2和 20页的求解线性方程组的过程.

2.教材$P_{284-285}$ 例6原题.

①显然对角线的上为特征值为5,5,-3,-3. 注意只有上/下三角矩阵有这个性质.

② 所以对于特征值$\lambda_1=5=\lambda_2$. 则 $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 5-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3-5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3-5 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 = -4x_2 + 8x_3 = -16x_3 - 16x_4 + 8x_3 = -8x_3 - 16x_4$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -8x_3 - 16x_4 \\ 4x_3 + 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故$\lambda=5$对应的特征向量为$\begin{bmatrix}-8\\4\\1\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-16\\4\\0\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=-3$对应的特征向量为$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}8&0&0&0\\0&8&0&0\\1&4&0&0\\-1&-2&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&4&0&0\\1&2&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&4&0&0\\0&2&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=0$
$x_2=0$
$x_3=x_3$
$x_4=x_4$

$$\Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

③ $P=\begin{bmatrix}-8&-16&0&0\\4&4&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$

④ 验证$AP=PD$即可.

3. (15分)设$\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$和$\mathcal{C}=\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\}$是$\mathbb{R}^2$的两个基, 求由$\mathcal{B}$到$\mathcal{C}$的坐标变换矩阵和由$\mathcal{C}$到$\mathcal{B}$的坐标变换矩阵.

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{c}_1=\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix},\boldsymbol{c}_2=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

3. 由于$P_B[\vec{x}]_B=\vec{x}$ $P_C[\vec{x}]_C=\vec{x}$. (由教材P_{241}页例3).

故 $P_B[\vec{x}]_B=P_C[\vec{x}]_C$.

$\Rightarrow P_C^{-1}P_C[\vec{x}]_C=P_C^{-1}P_B[\vec{x}]_B$

故 $\underset{C\leftarrow B}{P}=P_C^{-1}P_B=\begin{bmatrix}1&-2\\-5&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}7&-3\\5&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2-10}\begin{bmatrix}2&2\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-3\\5&-1\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{-8}\begin{bmatrix}24&-8\\40&-16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\-5&2\end{bmatrix}$

$\underset{B\leftarrow C}{P}=\left[\underset{C\leftarrow B}{P}\right]^{-1}$

故 $\underset{C\leftarrow B}{P}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}-3&1\\-5&2\end{bmatrix}}}$ $\underset{B\leftarrow C}{P}=\left[\underset{C\leftarrow B}{P}\right]^{-1}=\frac{1}{-6-(-5)}\begin{bmatrix}2&-1\\5&-3\end{bmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}2&-1\\5&-3\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}-2&1\\-5&3\end{bmatrix}}}$

利用教材P_{240}页例2也可以写，注意掌握B到C和C和B的坐标变换矩阵和过渡矩阵的求法.

4. (15分)

设A是$n\times m$矩阵, $\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵,其中$n<m$, 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 证明$\boldsymbol{B}$的列向量线性无关.

得分	阅卷人

六、（15分）设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$, 若 AB = E, 证明 B 的列向量线性无关.

证明：对矩阵B进行分解可得. $B=[\vec{\beta_1},\vec{\beta_2},\vec{\beta_3},\cdots,\vec{\beta_n}]$.

则 $A\vec{\beta_i}=e_i$, e_i表示E的第i个列向量.

下面证明 $\lambda_1\vec{\beta_1}+\lambda_2\vec{\beta_2}+\cdots+\lambda_n\vec{\beta_n}=\vec{0}$ 有且仅有零解. …②

故同时左乘A矩阵. 则 $\lambda_1A\vec{\beta_1}+\lambda_2A\vec{\beta_2}+\lambda_3A\vec{\beta_3}+\cdots+\lambda_nA\vec{\beta_n}=\vec{0}$

于是 $\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\lambda_3\vec{e_3}+\cdots+\lambda_n\vec{e_n}=\vec{0}$ …①

由于E的秩为n, 则 E的各列线性无关, ① 式成立当且仅当

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$. 这就说明了 …② 仅有零解

故B的列向量线性无关, 证毕 □.

得分	阅卷人

5. (15分) 设

$$V_1=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\text{ 满足 }x_1+\cdots+x_n=0\right\},$$

$$V_2=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\text{ 满足 }x_1+\cdots+x_n=1\right\},$$

问 V_1,V_2 是不是向量空间? 证明之.

七、（15分）设

$V_1=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ 满足 $x_1+\cdots+x_n=0\}$,

$V_2=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ 满足 $x_1+\cdots+x_n=1\}$,

问 V_1,V_2 是不是向量空间? 证明之.

证明零向量属于该空间
证明加法封闭性
证明标量乘法封闭性

解: V_1是向量空间, V_2 不是向量空间.

<1>

证明: ① $\vec{x}=(0,0,\cdots,0)^T$

满足 $(0+0+\cdots+0)=0$ ✓

② $\vec{x_1}=(x_{11},x_{12},x_{13},\cdots,x_{1n})^T$, $x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=0$

$\vec{x_2}=(x_{21},x_{22},x_{23},\cdots,x_{2n})^T$, $x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=0$

$\vec{x_1}+\vec{x_2}=(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n})+(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n})=0+0=0$

故 $\vec{x_1}+\vec{x_2}=0$

③ $\vec{x_p}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

$\forall c\in R$, $c\vec{x}=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)^T\Rightarrow cx_1+\cdots+cx_n=c(x_1+\cdots+x_n)$
$=0$.

故①②③都成立, V_1为向量空间, 证毕 □

下面证明V_2不是向量空间.

① $\vec{x}=(0,0,\cdots,0)^T$，$0+0+0+\cdots+0\neq 1$.

② $\vec{x_1}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

$\vec{x_2}=(x_1',x_2',\cdots\cdots,x_n')^T$

由于 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

$x_1'+x_2'+\cdots+x_n'=1$

而 $x_1+x_1'+x_2'+x_2+\cdots+x_n+x_n'=2\neq 1$

$\vec{x_1}+\vec{x_2}$ 不满足加法封闭

③ $\vec{x_0}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$x_1+\cdots+x_n=1$

$\forall c\in R$，$c\vec{x}=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)^T$，$cx_1+cx_2+\cdots+cx_n=c\neq 1$.

故不满足标量乘法封闭.

故V_2不是向量空间.