Linear Algebra

1. 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵，若$AB=O$，证明$rank(A)+rank(B)\leq n$.

   [解答]

   分析：总体思路：采用矩阵分块的方式求解.题目具有一定难度.

   证明：
   对矩阵B按照列分块，我们记B = $[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_s]$
   那么有

$$\begin{aligned} AB &= A\left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_s\right] \\ &= \left[A\beta_1 \quad A\beta_2 \quad A\beta_3 \quad \cdots \quad A\beta_s\right] \\ &= \left[\vec{0} \quad \vec{0} \quad \vec{0} \quad \cdots \quad \vec{0}\right] \end{aligned}$$

   于是我们有$A\beta_j=\vec{0}, j=1,2,3,\cdots,s$,
   所以B的列向量都是齐次方程组$A\vec{x}=\vec{0}$的解，由于方程组$A\vec{x}=\vec{0}$的解向量的$rank(\vec{x})=n-rank(A)$,这里的$\vec{x}$与$\vec{\beta}$含义等价，所以

$$rank(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_s)\leq n-rank(A)$$

   我们又知道

$$rank(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_s)=rank(B)$$

   所以：$rank(A)+rank(B)\leq n$.

2. 设有实矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&b&c\\2&b^2&c+1\end{bmatrix}$，其中 a,b,c 为实常数. 已知齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解，试求 a,b,c 的值.

   [解答]

   解:由题意，矩阵 A 和 B 必然有相同的秩，从而 A 必然不满秩，于是

$$\det A=\det\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&2\\1&1&a\end{bmatrix}=0$$

   得 $a=2$.
   设 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$，解方程组 $AX=0$ 得 $X=t(1,1,-1)^T$，其中 t 为任意实数. 这也说明两个方程组的解空间维数都是 1，从而矩阵 A 和 B 的秩都是 2 .
   令 $B\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=0$，得 $\begin{cases}b-c+1=0\\b^2-c+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}$.
   进一步计算可得，当 $b=0,c=1$ 时， B 的两行线性相关，此时 B 的秩为 1；而当 $b=1,c=2$ 时， B 的两行线性无关，此时 B 的秩为 2 .
   综上所述， $a=2,b=1,c=2$.

3. 证明替换定理：设向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+b_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_s\boldsymbol{\alpha}_s$. 如果 $b_i\neq 0$，那么用 $\boldsymbol{\beta}$ 替换 $\boldsymbol{\alpha_i}$ 后得到的向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 也线性无关.
   [解答]

   证明：设存在标量 $c_1,c_2,\ldots,c_s$ 使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+c_i\boldsymbol{\beta}+c_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$$

   即

$$(c_ib_1+c_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(c_ib_2+c_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(c_ib_{i-1}+c_{i-1})\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+b_i\boldsymbol{\alpha}_i+(c_ib_{i+1}+c_{i+1})\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+(c_ib_s+c_s)\boldsymbol{\alpha}_s=0$$

   因为向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 线性无关，所以

$$c_ib_1+c_1=c_ib_2+c_2=\cdots=c_ib_{i-1}+c_{i-1}=b_ic_i=c_ib_{i+1}+c_{i+1}=\cdots=c_ib_s+c_s=0$$

   因为 $b_i\neq 0$，所以 $c_i=0$，所以 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$.
   这说明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 是线性无关的.

4. 范德蒙行列式形式: $D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}$

遇到类似于上式的行列式时，可以使用范德蒙行列式直接计算此行列式的值。具有上式特征的行列式的值为:

$\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}=(x_i-x_j)$

上式表示: 行列式 D 的值为所有的 (x_i-x_j) 的乘积 (其中 $\mathrm{i}>\mathrm{j}$).

[证明]

通过观察范德蒙行列式，拿行列式的第一列来说，相邻的两个元素，上面的元素比下面的元素少乘 一次 x_1 。根据这一特征，可以试着从第 n 行开始，每个元素都减去前一行元素的 x_1 倍，行列式就变为:

$$D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & \\ x_1-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ x_1^2-x_1\cdot x_1 & x_2^2-x_1\cdot x_2 & x_3^2-x_1\cdot x_3 & \dots & x_n^2-x_1\cdot x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_1^{n-2}-x_1\cdot x_1^{n-3} & x_2^{n-2}-x_1\cdot x_2^{n-3} & \dots & \dots & x_n^{n-2}-x_1\cdot x_n^{n-3}\\ x_1^{n-1}-x_1\cdot x_1^{n-2} & x_2^{n-1}-x_1\cdot x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-1}-x_1\cdot x_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ x_1-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_n-x_1\\ x_1^2-x_1^2 & x_2^2-x_1\cdot x_2 & x_3^2-x_1\cdot x_3 & \dots & x_n^2-x_1\cdot x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_1^{n-2}-x_1^{n-2} & x_2^{n-2}-x_1\cdot x_2^{n-3} & \dots & \dots & x_n^{n-2}-x_1\cdot x_n^{n-3}\\ x_1^{n-1}-x_1^{n-1} & x_2^{n-1}-x_1\cdot x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-1}-x_1\cdot x_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_n-x_1\\ 0 & x_2^2-x_1\cdot x_2 & x_3^2-x_1\cdot x_3 & \dots & x_n^2-x_1\cdot x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & x_2^{n-2}-x_1\cdot x_2^{n-3} & \dots & \dots & x_n^{n-2}-x_1\cdot x_n^{n-3}\\ 0 & x_2^{n-1}-x_1\cdot x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-1}-x_1\cdot x_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

$$=1\times\begin{bmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_n-x_1\\ x_2^2-x_1\cdot x_2 & x_3^2-x_1\cdot x_3 & \cdots & x_n^2-x_1\cdot x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_2^{n-2}-x_1\cdot x_2^{n-3} & \dots & \dots & x_n^{n-2}-x_1\cdot x_n^{n-3}\\ x_2^{n-1}-x_1\cdot x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-1}-x_1\cdot x_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

如上图所示: 第一列提公因式 (x_2-x_1) 得

$$1\cdot(x_2-x_1)\times\begin{bmatrix}1 & x_3-x_1 & \dots & x_n-x_1\\ x_2 & x_3^2-x_1\cdot x_3 & \dots & x_n^2-x_1\cdot x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_2^{n-3} & \dots & \dots & x_n^{n-2}-x_1\cdot x_n^{n-3}\\ x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-1}-x_1\cdot x_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

如上图所示: 第二列提公因式 (x_2-x_1) 得:

$$1\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_3-x_1)\times\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & x_n-x_1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n^2-x_1\cdot x_n\\ \dots & \cdots & \cdots & \dots\\ x_2^{n-3} & \cdots & \cdots & x_n^{n-2}-x_1\cdot x_n^{n-3}\\ x_2^{n-2} & \cdots & \cdots & x_n^{n-1}-x_1\cdot x_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

依此类推：依此从第三列，第四列、第五列......第n列提公因式得:

$$1\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_4-x_1)\dots\cdot(x_n-x_1)\times\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ x_2 & x_3 & \dots & x_n\\ \dots & \dots & \cdots & \dots\\ x_2^{n-3} & \dots & \dots & x_n^{n-3}\\ x_2^{n-2} & \dots & \dots & x_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

此时又是一个范德蒙行列式，按照如上的方法将此范德蒙行列式可以试着从第 n 行开始，每个元 素都减去前一行元素的 x_2 倍，然后提取公因式，如此循环，直至行列式化为数值 1 。通过对第 一轮的简化，依此计算得: $\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}=(x_i-x_j)$

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&-a\\1&-2&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\9\\-6\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，求 a.

[解答]

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解等价于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$.

因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&-a\\1&-2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}a\\1&-2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}$$
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}a-1\\0&-3&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}a-1\\0&0&3a+2\end{bmatrix}$$

所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\begin{cases}3,a\neq-\frac{2}{3}\\2,a=-\frac{2}{3}\end{cases}$.

而同理可知，无论 a 取何值，总有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$.

故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解当且仅当 $a=-\frac{2}{3}$.

【另解】显然 $\boldsymbol{b}$ 不在 $\boldsymbol{A}$ 的列空间内. 故方程组无解等价于 $\det\boldsymbol{A}=-3a-2=0$，即 $a=-\frac{2}{3}$

2022年4月23日