第1章 函数、极限和连续

1.1 函数

邻域

函数的性质

奇偶性
单调性
有界性
周期性

反函数和复合函数

$y=f(x),x\in D,y\in W,$该函数在D上反函数存在的充要条件为
$f(x)$在D上一一对应

初等函数

初等函数是由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数与常数经过有限次的有理运算（加、减、乘、除、有理数次乘方、有理数次开方）及有限次函数复合所产生，并且能用一个解析式表示的函数。

特殊的：幂指函数$y=x^x$也是初等函数

极坐标

1.2 极限

数列极限：（x_n收敛）

$\varepsilon-N$定义
如果$\forall\varepsilon>0,\exists$正整数$N_\varepsilon,$当$n>N_\varepsilon$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon,$则$\lim_{n\to\infty}x_n=a$

- 基本列
  a_n为实数列，对任意$\varepsilon>0,$若存在$N\in N^*,$使得对$m,n\in N^*$且$m,n>N,$有$|a_m-a_n|<\varepsilon,$则称a_n为一个基本列或$Cauchy$列
- 柯西收敛原理($Cauchy$)
  一个数列收敛当仅当它是基本列
- 列紧性定理($Bolzano-Weierstrass$)
  从任何有界数列中必可选出一个收敛的子列

函数极限

1.自变量趋于无穷大

设函数（x）在$x>a$上有定义，且$\forall\varepsilon>0,\exists M>a$使得当$x>M$时有

$|f(x)-A|<\varepsilon,$其中A是常数，则$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$

2.自变量趋于有限值

$\varepsilon-\delta$定义
设函数（x）在$\overline{U}(x_0,\delta)$上有定义，且$\forall\varepsilon>0,\exists\delta$使得$0<|x-x_0|<\delta$

$|f(x)-a|<\varepsilon,$其中a是常数，则$\lim_{x\to x_0}f(x)=a$

3.左右极限定理
$\lim_{x\to x_0}f(x)=a$的充要条件为$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a$

海涅定理($Heine$)

设函数（x）在$\overline{U}(x_0,\delta)$上有定义，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$的充要条件是

对于任意数列$x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$, 有 $\lim_{x\to\infty} f(x_n)=a$

保序性、保号性、有界性、唯一性、存在性

无穷大和无穷小

注意分母不为0

极限的运算

条件：极限要存在！！
若$limf(x)$与$limg(x)$存在，且$limf(x)=A, limg(x)=B,$则
$lim[f(x)\pm g(x)]=limf(x)\pm limg(x)=A\pm B$
$lim[f(x)\cdot g(x)]=limf(x)\cdot limg(x)=A\cdot B$
若$B\neq 0,$则$lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{limf(x)}{limg(x)}=\frac{A}{B}$
有限个无穷小的代数和、代数积仍是无穷小
有界函数·无穷小=无穷小

$Stolz$定理

设b_n是严格递增且趋近于$+\infty$的数列，
若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-a}}{b_n-b_{n-1}}=A,$ 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

1.3 极限存在准则及两个重要极限

准则I 夹逼准则($Squeeze$)

如果数列$\{x_n\},\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

$(1) y_n\leq x_n\leq z_n, n=1,2,\cdots,$

$(2)\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} z_n=a,$

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim_{n\to\infty} x_n=a.$

夹逼准则推广到函数极限亦成立

准则II 单调有界原理

单调有界数列必有极限

两个重要极限

由准则I得

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

注意：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}=1, \lim_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}=0, \lim_{f(x)\to 0}\frac{sinf(x)}{f(x)}=1$$

由准则II得

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

注意：

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \lim_{f(x)\to\infty}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$$

无穷小代换

b比 a高阶记作

$$b = o(a)$$

b与 a同阶记作

$$b = O(a)$$

b与 a同阶记作

$$b \sim a，\text{其充要条件为} b = a + o(a)$$

几个常用无穷小代换

$$sinx \sim x \quad tanx \sim x \quad 1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$arcsinx \sim x \quad arctanx \sim x \quad ln[1 + u(x)] \sim u(x)$$

$$e^{u(x)} - 1 \sim u(x) \quad a^x - 1 \sim xlna \quad [1 + u(x)]^k - 1 \sim ku(x)$$

等价无穷小替换在加减的应用定理
$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', lim\frac{\alpha}{\beta} = C,$

若$C \neq -1,$则$\alpha + \beta \sim \alpha' + \beta'$

若$C \neq 1,$则$\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'$

1.4 连续

连续的判断

称函数在x_0处是连续的，如果它满足：
（1）$f(x)$在x_0处有定义
（2）$f(x)$在x_0处极限存在，设为A
（3）$f(x)$在x_0处的极限值等于函数值，即$A = f(x_0)$

间断点

第一类间断点：左右极限存在

- 可去间断点：左右极限存在且相等的,如$\frac{sinx}{x}$在$x = 0$处
- 跳跃间断点：左右极限存在且不相等，如$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0, \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$在$x = 0$处

第二类间断点：第一类之外的间断点

- 无穷间断点：两边有无穷，如$\frac{1}{x-1}$在$x = 1$处
- 震荡间断点：在两个值之间无限次振动，如$sin\frac{1}{x}$在$x = 0$处

反函数和复合函数的连续性

- 注意：初等函数在其定义区间上都是连续的

最大值最小值定理

介值定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则对于$f(a)$与$f(b)(f(a) \neq f(b))$
之间的任何数c，在开区间(a, b)内至少存在一点ξ，使
$f(\xi) = c, \ \xi \in (a, b)$
推论：根的存在性定理（零点存在定理）

第2章 导数与微分

2.1 导数的概念

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

或 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

可导与连续

可导必连续(在某一点处)，反之则不真
分段函数分界点处的导数采用定义法求出

2.2 导数的基本公式与运算法则

四则运算法则

反函数

反函数的导数等于原函数导数的倒数

复合函数

链式法则：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

常见求导公式汇集

$C'=0$
$(x^u)'=ux^{u-1}$
$(sinx)'=cosx$
$(cosx)'=-sinx$
$(tanx)'=sec^2x$
$(cotx)'=-csc^2x$
$(secx)'=secx\cdot tanx$
$(cscx)'=-cscx\cdot cotx$
$(a^x)'=a^x\cdot lna$
$(e^x)'=e^x$
$(log_a|x|)'=\frac{1}{x\cdot lna}$
$(ln|x|)'=\frac{1}{x}$
$(arcsinx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arccosx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctanx)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(arccotx)'=-\frac{1}{1+x^2}$
$(shx)'=chx$
$(chx)'=shx$
$(thx)'=\frac{1}{ch^2x}$
$(arshx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$(archx)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$(arthx)'=\frac{1}{1-x^2}$

- 一切初等函数的导数仍是初等函数

2.3 高阶导数、隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

高阶导数

- 大于等于二阶的导数称为高阶导数

$$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(sinx)^{(n)}=sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$(cosx)^{(n)}=cos(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$[ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\text{莱布尼兹}(Leibniz)\text{公式：}(nv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

隐函数的导数

由参数方程所确定的函数的导数

对于参数方程

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

一阶导数:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}$$

二阶导数:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''x'-y'x''}{(x')^3}$$

2.4 微分

概念与计算

- 微分等于函数的导数与自变量增量的乘积，即 $dy=f'(x)\cdot\Delta x$
- 微分的计算同求导（可微和可导互为充要）
- $df(x)=f'(x)dx$

应用

- 微分外推法
- 误差分析
- 求近似解
- 收敛性定理

第3章 中值定理和导数的应用

3.1 微分中值定理

费马引理($Fermat$)

设 $f(x)$在$U(x_0)$内有定义且在x_0出可导，若对于$\forall x\in U(x_0)$,
有 $f(x)\leq f(x_0)$(或$f(x)\geq f(x_0)$), 则 $f'(x_0)=0$

罗尔定理($Rolle$)

设 $f(x)$满足条件：
（1）在闭区间 $[a,b]$上连续
（2）在开区间 (a,b)内可导
（3）$f(a)=f(b)$
则在 (a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理($Lagrange$)

设 $f(x)$满足条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$上连续

（2）在开区间 (a,b)内可导

则在 (a,b)内至少存在一点ξ，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

- 推论
  设 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续，在开区间 (a,b)内可导，则 $f(x)$在 $[a,b]$上为常数当仅当 $f'=0$在 (a,b)内成立

柯西中值定理($Cauchy$)

设 $f(x)$和 $g(x)$满足条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$上连续

（2）在开区间 (a,b)内可导

（3）$g'(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$

则在 (a,b)内至少存在一点ξ，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(x)}$

3.2 洛必达法则($L'Hospital$)

- 由约翰·伯努利而不是诺必达发现的
- $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,其中要求$x\to a$时，$f(x),g(x)\to 0$,或$f(x),g(x)\to\infty$
- 只有“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型可以用诺必达法则
- 出现循环则不能用洛必达法则

3.3 泰勒中值定理

泰勒中值定理($Taylor$)

如果函数 $f(x)$在含有$x0$的某个开区间 (a,b)内具有直到$n+1$阶的导数，

则当x在 (a,b)内时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中ξ为x_0与x之间的某个值

（拉格朗日型($Lagrange$)余项）

或

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$$

（佩亚诺型($Peano$)余项）

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

其中ξ为x_0与x之间的某个值

（柯西型$(Cauchy)$余项）

麦克劳林公式($Maclaurin$)

当泰勒公式中$x_0=0$时，可令$\xi=\theta x(0<\theta<1)$，得麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

或

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

常用麦克劳林公式

$0<\theta<1$时有

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{sin(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-x}=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$$

$$tanx=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(4^n-1)|B_{2n}|x^{2n-1}}{(2n)!},\text{其中}B_n\text{为伯努利数}$$

3.4 函数的单调性、极值和最大值最小值

- 区分极大、小值和极大、小值点
- x_0被称为驻点，若$f'(x_0)=0$

极值第一充要条件

$f(x)$在$U(x_0,\delta)$可导且$f'(x_0)=0$,对x_0左右两侧的x，讨论$f'(x)$的符号即可

极值第二充要条件

$f(x)$在x_0处有二阶导且$f'(x_0)=0$,对$f''(x_0)$正负讨论即可

3.5 曲线的凹凸性和函数作图

凹凸性

- 凹：$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，或 $f''(x) > 0$
- 凸：$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，或 $f''(x) < 0$
- 一条连续曲线上凹弧与凸弧的分界点称为拐点，点$(x_0, f''(x_0))$是拐点则有$f''(x_0) = 0$
- $f''(x)$在x_0左右两侧同号时，点$(x_0, f''(x_0))$不是拐点

注意：可导情况下，拐点的横坐标一定不是极值点；
亦即，若$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$拐点，且x_0为$f(x)$极值点，则$f(x)$在x_0处不可导

渐近线

- 水平渐近线
  若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$，则$y = A$是$y = f(x)$的水平渐近线（$-\infty$亦成立）
- 铅直渐近线
  若 $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$，则$x = a$是$y = f(x)$的铅直渐近线（$a-0$亦成立）
- 斜渐近线
  若 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0(a \neq 0)$，（$-\infty$亦成立）
  则$y = ax+b$是$y = f(x)$的斜渐近线，其中$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$

函数作图

（1）定义域

（2）奇偶性、周期性

（3）渐近线

（4）计算一二阶导数

（5）间断点、驻点、不可导点、拐点

（6）增减性、凹凸性、极值点、拐点

（7）特殊点、截距

3.6 弧微分 曲率

弧微分

$ds = s'(x)dx = \sqrt{1+(y')^2}dx$
弧长的微分等于自变量x的增长Δx相对应的切线段的长度

曲率

曲线L在M处曲率为$K = \lim_{\Delta s\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$

在 $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$存在的条件下，有$K = |\frac{d\alpha}{ds}|$

曲率公式

$K = |\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}|$
$\rho = \frac{1}{K}$，ρ为曲率圆半径
曲率半径越大，曲率越小，曲线越平坦

曲率中心

$D(x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}, y + \frac{1+(y')^2}{y''})$

第4章 一元函数积分学及其应用

4.1 不定积分

概念

$F'(X)=F(X)$, 或 $dF(x)=f(x)dx$ 称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，
并记 $\int f(x)dx=F(x)+C$

性质

- 不定积分运算在代数和差封闭
- 非零常数可以提到积分号外
- $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx]=f(x)$
- $\int F'(x)dx=F(x)+C$

公式

$$\int kdx=kx+C$$

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,(\alpha\neq-1)$$

$$\int \frac{dx}{x}=ln|x|+C,(x\neq0)$$

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{lna}+C,(\alpha\neq-1),(a>0,a\neq1)$$

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C$$

$$\int sinxdx=-cosx+C$$

$$\int cosxdx=sinx+C$$

$$\int sec^{2}xdx=tanx+C$$

$$\int csc^{2}xdx=-cotx+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^{2}}dx=arctanx+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=arcsinx+C$$

$$\int secxtanxdx=secx+C$$

$$\int cscxcotxdx=-cscx+C$$

$$\int tanxdx=-ln|cosx|+C$$

$$\int cotxdx=ln|sinx|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}dx=arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{a^{2}+x^{2}}dx=\frac{1}{a}arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{x^{2}-a^{2}}dx=\frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}ln|\frac{a+x}{a-x}|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|+C$$

$$\int secxdx = ln|secx+tanx|+C$$

$$\int cscxdx = ln|cscx-cotx|+C$$

积分换元

- 一类换元（凑微分，复合）
  $\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx = F[\phi(x)]+C$
- 二类换元（反函数思想），常用于形如$^n\sqrt{ax+b}$,$^n\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$
  $\int f(x)dx = [\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt]_{t=\phi^{-1}(x)}$
- 当被积函数含有
- $\sqrt{a^2-x^2}$时，令$x = asint$
- $\sqrt{x^2+a^2}$时，令$x = atant$
- $\sqrt{x^2-a^2}$时，令$x = asect$

分部积分

$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$, 或 $\int udv = uv - \int vdu$

- 选择u, dv时考虑：v易求，$\int vdu$比$\int udv$易积分
- 通常按照“反对幂指三”，排在前面的作为u,排在后面的与dx结合作为dv

有理函数和三角函数有理式

对$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$,先将$Q(x)$分解成一次$[\frac{A}{(x-a)^k}]$和二次$[\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}]$的因式的和，再将原式化为分式和，求出部分分式原函数

对于三角有理式，可以采用万能公式代换，或是恒等变换

4.2 定积分

定积分($Riemann$)

$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

积分中值定理

若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

- 推论:
  若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且不变号，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

变上限函数积分（微积分基本定理）

$$d\int_a^x f(t)dt = f(x)dx$$

- f在$[a,b]$上可积，则$F(x) = \int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上连续

- 推论：
  $\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = F(\beta(x))\beta'(x) - F(\alpha(x))\alpha'(x)$

牛顿-莱布尼兹公式($Newton - Leibniz$)

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

- 推论：
  $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx = F(1) = F(0)$

换元技巧

与不定积分类似

注意：

- 奇函数在对称区间积分为0，偶函数在对称区间积分值等于半区间积分值的二倍
- 周期函数一个周期内积分值相等
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sosx)dx$
- $\int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx$

广义积分（反常积分）

- 无穷积分

函数$f(x)$在$[a,+\infty]$有定义，对任何$b > a,$函数f在$[a,b]$上可积，若极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\text{存在且有限，则记作}\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{收敛，否则无穷积分发散}$$

- 瑕积分

函数$f(x)$在$(a,b]$有定义，且$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty,$但对任何$\varepsilon \in (0,b-a),$
函数f在$[a+\varepsilon,b]$上可积，若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\text{存在且有限，则记作}\int_a^b f(x)dx\text{收敛，否则瑕积分发散}$$

4.3 定积分的应用

参数方程曲边梯形面积

若曲边梯形的曲边$y = f(x)(f(x) \geq 0, x \in [a,b])$由参数方程

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (t \in [\alpha,\beta])$$

给出，且$\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b, \phi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，$y = \psi(t)$连续，则曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt$$

极坐标方程曲边梯形的面积

对于曲线

$$\varphi = \phi(\theta)(\phi(\theta) > 0) \quad , \quad \theta = \alpha \quad , \quad \theta = \beta$$

所围成的曲边梯形，其面积为

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\phi(\theta)]^2 d\theta$$

旋转体体积

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$

$$V=\pi\int_c^d[\phi(y)]^2dy$$

已知平行截面面积

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

平面曲线的弧长

- 直角坐标下

$$y=f(x)\text{在其连续可导闭区间}[a,b]\text{上弧长}s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$$

- 参数方程下

$$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}(t\in[\alpha,\beta])\text{在其具有连续导数的闭区间}[\alpha,\beta]\text{上}$$

$$\text{弧长}s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

- 极坐标下

$$\rho=\rho(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)\text{在其连续可导闭区间}[\alpha,\beta]\text{上弧长}$$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$$

物理学运用

函数的平均值、均方根

第五章 常微分方程及差分方程

5.1 微分方程的基本概念

含有未知函数导数或微分的方程

分类：

- 常微分方程
  未知函数是一元函数
- 偏微分方程
  未知函数是多元函数

5.2 几种常见的一阶微分方程

可分离变量的微分方程

$$\text{形如}\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)(g(x)\neq0)$$

改写成

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$

齐次微分方程

$$\text{形如}\frac{dy}{dx}=\phi(\frac{y}{x})$$

$$\text{令}\frac{y}{x}=u,\text{则}\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

一阶线性齐次微分方程

对于方程

$$y'+P(x)y=0$$

通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

一阶线性非齐次微分方程

对于方程

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C)$$

伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$$

$\text{两边同时除}y^{\alpha},\text{令}$

$$y^{1-\alpha}=u$$

5.3 高阶微分方程

可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)}=f(x)$

连续积分n次

- $y''=f(x,y')$

令$y'=p$，$y''=p'$，则原方程化为

$$p'=f(x,p)$$

其通解为

$$p=\phi(x,C_1)$$

原方程通解为

$$y=\int\phi(x,C_1)dx+C_2$$

- $y''=f(y,y')$

令$y'=p$，则$y''=p(\frac{dp}{dy})$，则原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

二阶线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

- f(x)≡0,称为齐次的，否则为非齐次的
- P(x),Q(x)为常数，称为常系数线性的

定理

- y_1, y_2是二阶齐次线性微分方程

(i)单实根r，给出一项

$$Ce^{rx}$$

(ii)一对单复根$r_{1,2}$=$\alpha \pm i\beta$，给出两项

$$e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$$

(iii)k重实根α，给出k项

$$e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$$

(iv)一对k重复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，给出$2k$项

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1})sin\beta x]$$

二阶常系数非齐次线性方程

先求通解，再求特解

(1)方程右端为

$$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$$

则特解为

$$y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$$

其中k的取值为

条件	k的取值
λ不是特征方程的根	k=0
λ是特征方程的单根	k=1
λ是特征方程的重根	k=2

(2)方程右端为

$$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)cos\beta x + P_n(x)sin\beta x]$$

则特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)cos\beta x + R_m^{(2)}(x)sin\beta x]$$

其中m=max{l,n}，k的取值如下

条件	k的取值
λ+iβ不是特征方程的根	k=0
λ+iβ是特征方程的根	k=1

5.4 欧拉方程和常系数线性微分方程组

5.5 微分方程的应用

5.6 差分方程简介