Linear Algebra 03

时间：2022年4月21日

1. If A is $m \times n$ and $\operatorname{rank} A = m$, then the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is one-to-one. (T/F?)

   A. False. Counterexample: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. If rank $A = n$ (the number of columns in A), then the transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is one-to-one.

1. $A_{m\times n}$. rank $A = m$. 说明A的维数为m.

现判断 $\vec{x} \to A\vec{x}$ 是不是一对一的?

回顾一下 一对一的定义，则对任意 $f(x)=f(y)$. 都有 $x=y$. $f(x)\neq f(y)$, $x\neq y$.

即这样的坐标变换是唯一的.

对于 $A_{m\times n}$ 我们会发现 $\vec{x}_{n\times 1}$ 向量 在变换后 也是唯一的，也就是不会把两个不同的 $\vec{x}$ 向映射到 相同的 $A\vec{x}$ 之上.

所以由教材77页 定理12可知：当且仅当A的列线性无关.

故本题 False.

若 rank $A = n$ （A的列数），那么本题为 True.

2. Construct a nonzero 2×2 matrix that is invertible but not diagonalizable.

[解答]

31. 构造一个非零的2×2可逆但不可对角化的矩阵.

考察：对角化的定义，矩阵可逆，构造法

[解答思路]：我们不妨设先考察一个上三角矩阵. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$

① 矩阵A可逆 $\Rightarrow \det A = ad \neq 0 \Rightarrow a\neq 0$ 且 $d \neq 0$.

② 矩阵A不可对角化 ⇒ 我们不妨回顾一下 对角化的计算思路.

<1> $A-\lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & d-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = (\lambda-a)(\lambda-d)=0$.

① 若 $a=d$.

则 $\lambda_1=\lambda_2=a=d$ 则，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ $(A-\lambda I)\vec{x}=0 \Rightarrow (A-\lambda I)\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

得：$bx_2=0$ 得出条件：$x_2=0$. 得 $x_1\in R$, $x_2=0$. $\Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

此外，我们在 $a=d$ 的条件下 找不到其它的特征向量（线性无关）

<1> $A-\lambda I=\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & d-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=(\lambda-a)(\lambda-d)=0$.

① 若 $a=d$.

则 $\lambda_1=\lambda_2=a=d$ 则，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ $(A-\lambda I)\vec{x}=0 \Rightarrow (A-\lambda I)\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

提：$bx_2=0$ 在$\forall b$条件：$x_2=0$. 提 $x_1\in R$，$x_2=0$. $\Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

此外，我们在$a=d$的条件下 找不到其它的特征向量（线性无关）

② 若 $a\neq d$. $\lambda_1=a$. $\Rightarrow (A-\lambda I)=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d-a \end{bmatrix} \Rightarrow$ 特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\vec{x}_1$

$\lambda_2=d$. $\Rightarrow (A-\lambda I)=\begin{bmatrix} a-d & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (a-d)x_1+bx_2=0 \Rightarrow \vec{x}_2=\begin{bmatrix} -b \\ a-d \end{bmatrix}$

可取$b=0$（正交）. $a-d\neq 0$. 故 $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 为线性无关 特征向量，可对角化

故我们取 $a=d$，切题即可.

当然对于 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的分析同理.

3. 用初等变换法求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & -15 \end{bmatrix}$ 的秩.

【解析】

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & 26 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 3 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 26 & 8 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & -44 \\ 0 & 0 & 26 & -52 & -143 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & -44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而得 $r(\boldsymbol{A})=3$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & 26 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -14 \end{bmatrix} \sim$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 3 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 26 & 8 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & -44 \\ 0 & 0 & 26 & -52 & -143 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -52 & -143 \end{bmatrix}$

由于 $\frac{2}{26} = \frac{4}{52} = \frac{11}{11\times 13}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rank(A)=3.

4. 设 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是互不相同的实数, 且

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^4 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_5 & a_5^2 & \cdots & a_5^4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

求线性方程组 $Ax = b$ 的解.

(4的推广，供有兴趣的同学尝试)

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的实数, 且

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

求线性方程组 $Ax = b$ 的解.

4. 首先回顾一下克拉默法则（教材 T_{177}）

① 矩阵可逆，矩阵的秩不为0，

② $A\vec{x} = \vec{b}$ 的唯一解 等价于 $\vec{x}_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

我们知道 $|A_i|$ 是 $A\vec{b}$ 代换 $|A|$ 中的第 i 列得到的行列式.

由于 $i = 2, 3, 4, \cdots, n$ 时，$|A_i|$ 中有两列均为1组成

$$|A_i| = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots \end{vmatrix} \quad i \neq 1.$$

故 $|A_i|$ 中有两列线性相关，则 $\det A_i = 0$. 即 $|A_i| = 0$.

对于 $i=1$ 而言. $|A_i| = |A_1| = |A|$.

于是 解为 $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$. 故 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的唯一解为 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

15.【解析】因 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同, 故由范德蒙德行列式知, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 根据克拉肥法则,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解, 且

$$x_i=\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}, i=1,2,\cdots,n,$$

其中, $|\boldsymbol{A}_i|$ 是 $\boldsymbol{b}$ 代换 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 i 列所得的行列式, 有

$$|\boldsymbol{A}_1|=|\boldsymbol{A}|, |\boldsymbol{A}_i|=0, i=2,3,\cdots,n,$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的唯一解为 $\boldsymbol{x}=[1,0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$.

证明范德蒙德行列式:

[范德蒙行列式 - 知乎 (zhihu.com)]

现在我们证明 $A=\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$ 中 $\det A=|A|\neq 0$

简证: 为了表达方便,

我们直接对A进行转置. 令 $B=A^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & & & & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & \cdots & & & a_n^2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & & & & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$

拿第3行减去第2行的 a_1 倍, 后面同理

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1-a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_1^2-a_1^2 & a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1 & \cdots & \cdots & a_n^2-a_1^2 \\ a_1^3-a_1\cdot a_1^2 & a_2^3-a_1\cdot a_2^2 & \cdots & & \cdots & a_n^3-a_1\cdot a_n^2 \\ \vdots & & & & & \\ a_1^{n-1}-a_1\cdot a_1^{n-2} & a_2^{n-1}-a_1\cdot a_2^{n-2} & \cdots & & \cdots & a_n^{n-1}-a_1\cdot a_n^{n-2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_1-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_1^2-a_1^2 & a_2^2-a_1 a_2 & \cdots & a_n^2-a_1\cdot a_n \\ a_1^3-a_1^3 & a_2^3-a_1\cdot a_2^2 & \cdots & a_n^3-a_1\cdot a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}-a_1^{n-1} & a_2^{n-1}-a_1\cdot a_2^{n-2} & & a_n^{n-1}-a_1\cdot a_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (a_2-a_1)\cdot 1 & & (a_n-a_1)\cdot 1 \\ 0 & (a_2-a_1)a_2 & & (a_n-a_1)\cdot a_n \\ 0 & (a_2-a_1)a_2^2 & & (a_n-a_1)\cdot a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (a_2-a_1)a_2^{n-2} & & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ 0 & a_2 & & a_n \\ 0 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} & & a_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

我们不妨继续考察 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{bmatrix}$

采取同样的方式，后一行减去前一行的 a_2 倍

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2-a_2 & a_3-a_2 & & a_n-a_2 \\ a_2^2-a_2\cdot a_2 & a_3^2-a_2\cdot a_3 & & a_n^2-a_2\cdot a_n \\ a_2^3-a_2\cdot a_2^2 & a_3^3-a_2\cdot a_3^2 & & a_n^3-a_2\cdot a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}-a_2\cdot a_2^{n-3} & a_3^{n-2}-a_2\cdot a_3^{n-3} & & a_n^{n-2}-a_2\cdot a_n^{n-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (a_3-a_2)\cdot 1 & & (a_n-a_2)\cdot 1 \\ 0 & (a_3-a_2)\, a_3 & & (a_n-a_2)\cdot a_n \\ \vdots & (a_3-a_2)\, a_3^2 & & (a_n-a_2)\cdot a_n^2 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & (a_3-a_2)\, a_3^{n-3} & & (a_n-a_2)\, a_n^{n-3} \end{bmatrix}$$

$$= (a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & a_3 & a_4 & & a_n \\ \vdots & a_3^2 & a_4^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_3^{n-3} & a_4^{n-3} & & a_n^{n-3} \end{bmatrix}$$

递归执行 $n-5$ 次后，我们得到 $A_{n-3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-2}^2 & a_{n-1}^2 & a_n^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{n-2}-a_{n-2} & a_{n-1}-a_{n-2} & a_n-a_{n-2} \\ a_{n-2}^2-a_{n-2}a_{n-2} & a_{n-1}^2-a_{n-2}a_{n-1} & a_n^2-a_{n-2}a_n \end{bmatrix}$

所以 $|A| = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)$

$\cdot (a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)$

$\cdot (a_4-a_3)(a_5-a_3)\cdots(a_n-a_3)$

$\vdots$

$(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2}) = (a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} = (a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})\cdot(a_n-a_{n-1})$

$\cdot (a_n-a_{n-1}) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

可以建议Linear Algebra 04 参考

[测试1]

b. If A is $m \times n$ and the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is onto, then $\operatorname{rank} A = m$. (T/F?)

B. True. If $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is onto, then $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^m$ and $\operatorname{rank} A = m$. See Theorem 12(a) in Section 1.9.

[测试2]

b. Construct a nondiagonal 2×2 matrix that is diagonalizable but not invertible.