Linear Algebra 05

时间：2022年5月5日

1. a. A matrix *A* is orthogonally diagonalizable if and only if *A* is symmetric. (T/F?) True

   <1> 矩阵A是可正交对角化的当且仅当A是对称的.
   教材P_{396}页定理2.
   详细阅读教材7.1节

   b. The set of all vectors in $\mathbb{R}^n$ orthogonal to one fixed vector is a subspace of $\mathbb{R}^n$.(T/F?) True

   [解答]$\mathbf{k}$. True. This is a special case of the statement in the box following Example 6 in Section 6.1 (and proved in Exercise 30 of Section 6.1).

   <2>. R^n中所有正交于一个固定向量的集合是R^n的一个子空间.
   教材P_{332}页例6. 显然我们依据结论2可知: $W^\perp$是R^n的一个子空间, 我们在$W^\perp=L$中取一个固定的向量即可.
   大家感兴趣可以证明一下P_{335}页6.1节习题29和30
   证明向量空间的子空间也是向量空间的三步曲.

2. Find a QR factorization of $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. 回顾QR分解的流程. P253页教材例2.

①首先求解单位正交集 $\{\vec{v_1}', \vec{v_2}', \vec{v_3}'\}$

由于 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ 我们可以用 $\vec{v_1}=\vec{x_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

再依据 $\vec{v_1}$ 求解 $\vec{v_2}'=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\dfrac{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\dfrac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}\backsim\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

$\vec{v_3}'=\vec{x_3}-\mathrm{proj}_{W_2}\vec{x_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}?\end{bmatrix}$

$\mathrm{proj}_{W_2}\vec{x_3}=\dfrac{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\dfrac{\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}{9+1+1+1}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

故 $\vec{v_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\backsim\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\dfrac{1}{3}\sim\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix}$.

② 所以正交集 $\begin{bmatrix}1&-3&0\\1&1&-2\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-3}{\sqrt{12}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{\sqrt{12}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

我们知: $A=QR$ 由于 $QQ^T=I$.

所以 $Q^TA=Q^T(QR)=(Q^TQ)R=IR=R$. (不可以 $Q^T=Q^{-1}$ (×) Q非 $n\times n$)

则 $R=Q^TR=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\frac{3}{2}&1\\0&\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{2}{\sqrt{12}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$ 可以采用 $A=QR$ 验证一下.

[解答]

The columns of A are the vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, and $\mathbf{x}_3$ in Example 2 . An orthogonal basis for $\operatorname{Col} A=\operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ was found in that example:

$$
\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2'=\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\-2/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}
$$

To simplify the arithmetic that follows, scale $\mathbf{v}_3$ by letting $\mathbf{v}_3'=3\mathbf{v}_3$. Then normalize the three vectors to obtain $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, and $\mathbf{u}_3$, and use these vectors as the columns of Q :

$$
Q=\begin{bmatrix}1/2 & -3/\sqrt{12} & 0\\1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6}\\1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6}\\1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}
$$

By construction, the first k columns of Q are an orthonormal basis of S pan $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$. From the proof of Theorem $12, A=QR$ for some R. To find R, observe that $Q^TQ=I$, because the columns of Q are orthonormal. Hence

$$
Q^TA=Q^T(QR)=IR=R
$$

and

$$
R = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}
$$

3. 设 $\alpha_1 = (1,2,1,0)^T$，$\alpha_2 = (1,1,1,2)^T$，$\alpha_3 = (3,4,3,4)^T$，$\alpha_4 = (1,1,2,1)^T$，$\alpha_5 = (4,5,6,4)^T$ 是实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中的一个向量组， L 是该向量组生成的 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

(1) 试证明: $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 和 $\beta_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 分别是 L 的两组基;

(2) 求从基 β_1 到基 β_2 的过渡矩阵.

3.解: $\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

1.要证明 $\beta_1 = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4\}$ 和 $\beta_2 = \{\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5\}$ 构成 L 的一组基

即证明 β_1 构成向量空间的一个极大线性无关集. 也就是向量空间 V 的一组基.

则说明, $\vec{\alpha}_3$ 和 $\vec{\alpha}_5$ 可以用 $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_4$ 线性表示

$$
\begin{cases} \vec{\alpha}_3 = \lambda_{11}\vec{\alpha}_1 + \lambda_{12}\vec{\alpha}_2 + \lambda_{14}\vec{\alpha}_4 \\ \vec{\alpha}_5 = \lambda_{21}\vec{\alpha}_1 + \lambda_{22}\vec{\alpha}_2 + \lambda_{24}\vec{\alpha}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{14} = 0,\ \lambda_{12} = 2,\ \lambda_{11} = 1. \Rightarrow \vec{\alpha}_3 = \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + 0\cdot\vec{\alpha}_4
$$

当然 $\vec{\alpha}_5$ 的求解同理, 大家可以求得 $\lambda_{21} = 1$, $\lambda_{22} = 1$. $\lambda_{24} = 2$. $\vec{\alpha}_5 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + 2\vec{\alpha}_4$

所以 β_1 构成 L 的一组基

现在我们知道 $\dim L = 3$.

那我们可以 β_2 中采用 $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_3$, $\vec{\alpha}_5$ 说明 β_2 线性无关即可.

则说明 $[\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5]$ 有三个主元列 也即 $A = [\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5]$ 满秩

$$
[\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

说明矩阵A的秩为3. 故 $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_3$, $\vec{\alpha}_5$ 构成向量空间的一组基

[解答] (1) 要证明 $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的某个子集 β' 是 L 的一组基，只需证明在 β 中但不在 β' 中的向量能被 β' 中的向量线性表示出.

设 $\begin{cases} \alpha_3 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_4 \\ \alpha_5 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_4 \end{cases}$，解线性方程组可得（具体过程略）

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4,$

所以 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 是 L 的一组基.

由此知， $\dim L = 3$，所以要证明 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 是 L 的一组基，只需证明该集合线性无 关，

只需证明矩阵 $A := (\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 满秩.

通过初等行变换，可将 A 化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，说明矩阵 A 的秩为 3，得证.

2. 从基 β_1 到 β_2 的坐标变换矩阵.

$\left.\begin{array}{l} P_{\beta_1}\vec{x}_{\beta_1}=\vec{x} \\ P_{\beta_2}\vec{x}_{\beta_2}=\vec{x} \end{array}\right\}$ 教材 P241页 例3. 则 $P_{\beta_1}\vec{x}_{\beta_1}=P_{\beta_2}\vec{x}_{\beta_2} \Rightarrow [\vec{x}]_{\beta_2}=P_{\beta_2}^{-1}P_{\beta_1}[\vec{x}]_{\beta_1}$

故 $\beta_1\to\beta_2$ 的坐标变换矩阵为 $\underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}=P_{\beta_2}^{-1}P_{\beta_1}$ ······ ①可以这样写，但是有点点复杂

②我们可以采用例2中的方式去写：$[P_{\vec{\beta}_2} \,\vdots\, P_{\vec{\beta}_1}]$ 将 $P_{\vec{\beta}_2}$ 化为单位矩阵的过程 $P_{\vec{\beta}_1}$ 也随之变化.

即等价于 $[P_{\vec{\beta}_2} \,\vdots\, P_{\vec{\beta}_1}] \sim [I \,\vdots\, P_{\vec{\beta}_2}^{-1}P_{\vec{\beta}_1}] \sim [I \,\vdots\, \underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}]$. 这是一种比较快速的解法.

③本题可以思考如何将 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$ 映射到 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_5$. 则 $\vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_5=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+2\vec{\alpha}_4$

则 $\underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}=[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_4 \mid \vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_5]$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \underset{\beta_2\leftarrow\beta_1}{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 设 I 是 L 上的恒等变换，则所求过渡矩阵为 $Q=[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$.

由 (1) 知，$\alpha_2=\alpha_2,\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4$，

所以过渡矩阵为 $Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. 设 A 为 n 阶矩阵, λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值, x_1,x_2 是 A 的分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 证明: x_1+x_2 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

4. 证明：正难则反.

我们已知：$A\vec{x}_1=\lambda_1\vec{x}_1$，$A\vec{x}_2=\lambda_2\vec{x}_2$

要证明 $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\lambda(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ 对 $\forall\lambda\in R$ 都不成立.

反证法.

我们不妨假设 $\forall\lambda\in R$，使得 $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\lambda(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ 成立 ---①

那么 $A\vec{x}_1=\lambda_1\vec{x}_1$，$A\vec{x}_2=\lambda\vec{x}_2$，故 $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2$ ---②

由①②可知：$\lambda\vec{x}_1+\lambda\vec{x}_2=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2$

$\Rightarrow (\lambda-\lambda_1)\vec{x}_1+(\lambda-\lambda_2)\vec{x}_2=0$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 则对应于不同特征值的两个特征向量无关

故 $\vec{x}_1$ 与 $\vec{x}_2$ 线性无关.

故 $\begin{cases}\lambda-\lambda_1=0 \\ \lambda-\lambda_2=0\end{cases} \Rightarrow \lambda=\lambda_1=\lambda_2$. 这与 $\lambda_1=\lambda_2$ 矛盾!

故原命题成立. 证毕 □

[解答]反证法.

设 x_1+x_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 则存在数 λ, 使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$, 则

$$(\lambda-\lambda_1)x_1+(\lambda-\lambda_2)x_2=\mathbf{0}.$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 x_1,x_2 线性无关, 则 $\begin{cases}\lambda-\lambda_1=0, \\ \lambda-\lambda_2=0\end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$. 矛盾, 故得证.