Questão 11 - Seminário de Eletromagnetismo II

Leonardo Camargo Rossato

2021

1 Questão 11

11. Lorrain & Corson [30-11] The Brewster angle for magnetic media A wave is incident in air on a nonconducting magnetic medium such as ferrite.

(a) Show that the ratio $(E_{R,m}/E_{I,m})_{||}$ is Zero for:

$$tan^2\theta_I = \frac{\epsilon_r(\epsilon_r - \mu_r)}{\epsilon_r\mu_r - 1} \tag{1}$$

There is a Brewster angle only if $\epsilon_r > \mu_r$.

(b) Show that $(E_{R,m}/E_{I,m})_{\perp}$ is Zero when:

$$tan^2\theta_I = \frac{\mu_r(\mu_r - \epsilon_r)}{\mu_r\epsilon_r - 1} \tag{2}$$

Now there is a Brewster angle, but only if $\mu_r > \epsilon_r$.

2 Solução da Letra a) :

Dado a Equação de Fresnel:

$$(E_{R,m}/E_{I,m})_{\|} = \frac{Z_2Cos(\theta_T) - Z_1Cos(\theta_I)}{Z_2Cos(\theta_T) + Z_1Cos(\theta_I)}$$

Queremos achar uma relação onde essa fração resulte em zero:

$$\frac{Z_2Cos(\theta_T) - Z_1Cos(\theta_I)}{Z_2Cos(\theta_T) + Z_1Cos(\theta_I)} = 0$$

Para isso, precisamos que o numerador dessa fração seja zero, ou seja:

$$Z_2Cos(\theta_T) - Z_1Cos(\theta_I) = 0 \tag{3}$$

Se a Impedância Z_1 corresponde a Impedância do Ar e Z_2 a Impedância de um material like ferrite, obtemos:

$$Cos(\theta_I) - \frac{Z_2}{Z_1}Cos(\theta_T) = 0 \tag{4}$$

Fazendo uma pequena mudança nas relações das impedâncias - aproximando o Ar como Impedância do Meio Livre; e o material like-ferrite em termos de suas componentes relativas - obtemos:

$$Cos(\theta_I) - \frac{Z_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}}{Z_0}Cos(\theta_T) = 0$$

$$Cos(\theta_I) - \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}Cos(\theta_T) = 0$$

$$Cos^2(\theta_I) - \frac{\mu_r}{\epsilon_r}Cos^2(\theta_T) = 0$$

$$Cos^2(\theta_I) = \frac{\mu_r}{\epsilon_r}Cos^2(\theta_T) \tag{5}$$

→ **Usando a Identidade Fundamental da Trigonometria:** $Sen(\theta)^2 + Cos(\theta)^2 = 1$, obtemos:

$$Cos^2(\theta_I) = \frac{\mu_r}{\epsilon_r}(1 - sen^2(\theta_T)) \tag{6}$$

→ **Agora vamos obter a Relação De Snell afim de chegarmos em um valor para** $Sen(\theta_T)$**:**

$$n_1 Sen(\theta_I) = n_2 Sen(\theta_T)$$

Usando que o valor de Refração do Ar vale 1, temos $n_1 = 1$; E para $n_2 = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$:

$$Sen(\theta_I) = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}Sen(\theta_T)$$

$$Sen(\theta_T) = \frac{Sen(\theta_I)}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \tag{7}$$

Tendo essa Relação de Snell 7, podemos substituir na Eq. 6 , obtendo:

$$Cos^2(\theta_I) = \frac{\mu_r}{\epsilon_r}(1 - \frac{sen^2(\theta_I)}{\mu_r\epsilon_r}) \tag{8}$$

→ **Dividindo toda equação 8 por Cosseno, obtemos:**

$$1 = \frac{\mu_r}{\epsilon_r}(\frac{1}{Cos^2(\theta_I)} - \frac{sen^2(\theta_I)}{Cos^2(\theta_I)\mu_r\epsilon_r})$$

$$1 = \frac{\mu_r}{\epsilon_r}(Sec^2(\theta_I) - \frac{tg^2(\theta_I)}{\mu_r\epsilon_r}) \tag{9}$$

$\rightarrow$ **Usando a Identidade Fundamental da Trigonometria:** $Sec(\theta)^2 = tg(\theta)^2 + 1$, obtemos

$$\therefore \quad 1 = \frac{\mu_r}{\epsilon_r}[(1 + tg^2(\theta_I)) - \frac{tg^2(\theta_I)}{\mu_r \epsilon_r}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\epsilon_r}{\mu_r} = 1 + tg^2(\theta_I)[1 - \frac{1}{\mu_r \epsilon_r}]$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^2(\theta_I)[1 - \frac{1}{\mu_r \epsilon_r}] = \frac{\epsilon_r}{\mu_r} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^2(\theta_I)[\frac{\mu_r \epsilon_r - 1}{\mu_r \epsilon_r}] = \frac{\epsilon_r}{\mu_r} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^2(\theta_I) = (\frac{\epsilon_r - \mu_r}{\mu_r})(\frac{\mu_r \epsilon_r}{\mu_r \epsilon_r - 1})$$

E finalmente, chegamos na Relação que queríamos demonstrar:

$$\therefore \quad tg^2(\theta_I) = \frac{\epsilon_r(\epsilon_r - \mu_r)}{\mu_r \epsilon_r - 1} \tag{10}$$

.

3 Solução da Letra b) :

Dado a Equação de Fresnel:

$$(E_{R,m}/E_{I,m})_\perp = \frac{Z_2 Cos(\theta_I) - Z_1 Cos(\theta_T)}{Z_2 Cos(\theta_I) + Z_1 Cos(\theta_T)}$$

Queremos achar uma relação onde essa fração resulte em zero:

$$\frac{Z_2 Cos(\theta_I) - Z_1 Cos(\theta_T)}{Z_2 Cos(\theta_I) + Z_1 Cos(\theta_T)} = 0$$

Para isso, precisamos que o numerador dessa fração seja zero, ou seja:

$$Z_2 Cos(\theta_I) - Z_1 Cos(\theta_T) = 0 \tag{11}$$

Se a Impedância Z_1 corresponde a Impedância do Ar e Z_2 a Impedância de um material like ferrite, obtemos:

$$Cos(\theta_I) - \frac{Z_1}{Z_2}Cos(\theta_T) = 0 \tag{12}$$

Fazendo uma pequena mudança nas relações das impedâncias - aproximando o Ar como Impedância do Meio Livre; e o material like-ferrite em termos de suas componentes relativas - obtemos:

$$Cos(\theta_I) - \frac{Z_0}{Z_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}}Cos(\theta_T) = 0$$

$$Cos(\theta_I) - \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}}Cos(\theta_T) = 0$$

$$Cos^2(\theta_I) - \frac{\epsilon_r}{\mu_r}Cos^2(\theta_T) = 0$$

$$Cos^2(\theta_I) = \frac{\epsilon_r}{\mu_r}Cos^2(\theta_T) \tag{13}$$

→ **Usando a Identidade Fundamental da Trigonometria:** $Sen(\theta)^2 + Cos(\theta)^2 = 1$, obtemos:

$$Cos^2(\theta_I) = \frac{\epsilon_r}{\mu_r}(1 - sen^2(\theta_T)) \tag{14}$$

→ **Agora vamos obter a Relação De Snell afim de chegarmos em um valor para $Sen(\theta_T)$:**

$$n_1 Sen(\theta_I) = n_2 Sen(\theta_T)$$

Usando que o valor de Refração do Ar vale 1, temos $n_1 = 1$; E para $n_2 = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$:

$$Sen(\theta_I) = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}Sen(\theta_T)$$

$$Sen(\theta_T) = \frac{Sen(\theta_I)}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \tag{15}$$

Tendo essa Relação de Snell 15, podemos substituir na Eq. 6 , obtendo:

$$Cos^2(\theta_I) = \frac{\epsilon_r}{\mu_r}(1 - \frac{sen^2(\theta_I)}{\mu_r \epsilon_r}) \tag{16}$$

→ **Dividindo toda Equação 16 por Cosseno, obtemos:**

$$1 = \frac{\epsilon_r}{\mu_r}(\frac{1}{Cos^2(\theta_I)} - \frac{sen^2(\theta_I)}{Cos^2(\theta_I)\mu_r \epsilon_r})$$

$$1 = \frac{\epsilon_r}{\mu_r}(Sec^2(\theta_I) - \frac{tg^2(\theta_I)}{\mu_r \epsilon_r}) \tag{17}$$

$\rightarrow$ **Usando a Identidade Fundamental da Trigonometria:** $Sec(\theta)^2 = tg(\theta)^2 + 1$, obtemos

$$1 = \frac{\epsilon_r}{\mu_r}[(1 + tg^2(\theta_I)) - \frac{tg^2(\theta_I)}{\mu_r \epsilon_r}]$$

$$\frac{\mu_r}{\epsilon_r} = 1 + tg^2(\theta_I)[1 - \frac{1}{\mu_r \epsilon_r}]$$

...

$$tg^2(\theta_I) = (\frac{\mu_r - \epsilon_r}{\epsilon_r})(\frac{\mu_r \epsilon_r}{\mu_r \epsilon_r - 1})$$

E finalmente, chegamos na Relação que queríamos demonstrar:

$$\therefore \quad tg^2(\theta_I) = \frac{\mu_r(\mu_r - \epsilon_r)}{\mu_r \epsilon_r - 1} \tag{18}$$