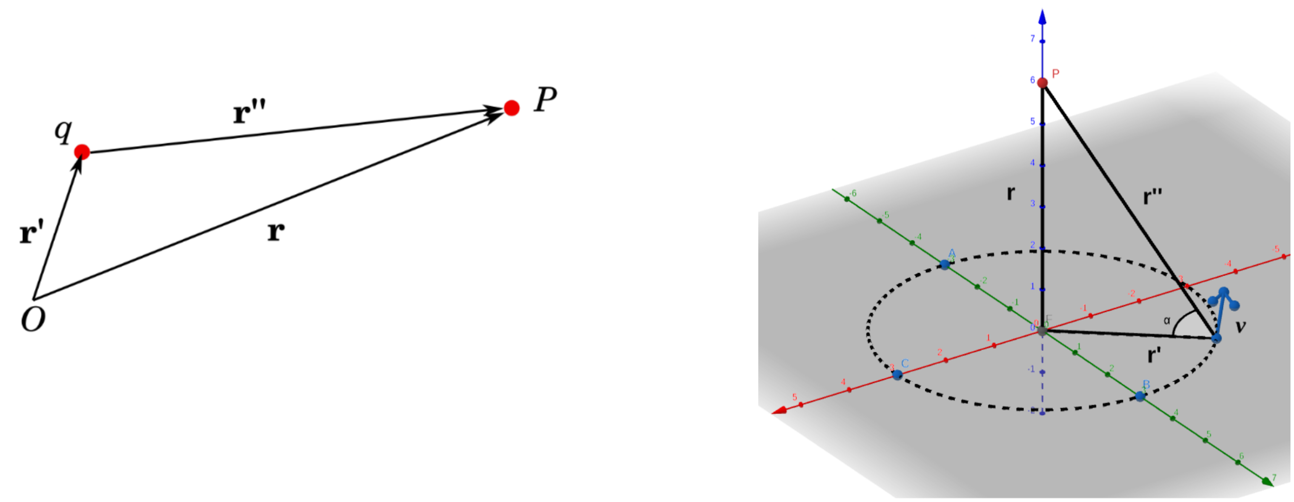
Questão 09 - Seminário 2 de Eletromagnetismo II

Leonardo Camargo Rossato

2021

1 Questão 09

Griffiths [10-13] A particle of charge q moves in a circle of radius a at constant angular velocity ω. (Assume that the circle lies in the xy plane, centered at the origin, and at time $t = 0$ the charge is at $(a, 0)$, on the positive x axis.) Find the Lienard-Wiechert potentials for points on the z axis.



(a) Vetores Carga Pontual (Esquema da Apostila Eletromag2. Figura 23.1: Carga puntual q, localização de observação P e vetores posição de ambos.)

(b) Esboço Gráfico da Carga em Movimento Circular sob o plano xy em torno da origem e do eixo z. O Eixo Verde = Eixo x; Eixo Vermelho = Eixo y; Eixo Azul = Eixo z , ortogonal ao plano xy. *Obs: esse esboço foi feito no software GeoGebra.

Figure 1: Representação do Enunciado do Problema: Uma carga se movendo ao longo de um círculo sob o plano xy, em torno do Eixo z

***OBS:** Usamos aqui a seguinte notação: **valores vetoriais estão em negrito**, enquanto escalares não;*

→ Se considerarmos que a posição de uma partícula sob um movimento circular pode ser dado como:

$$\mathbf{R(t)} = r'[cos(\theta)\,\widehat{i} + sen(\theta)\,\widehat{j}]$$

$$\triangle\omega = \frac{\triangle\theta}{\triangle t} \Leftrightarrow \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = r'[cos(\omega t)\,\widehat{i} + sen(\omega t)\,\widehat{j}\,] \tag{1}$$

Com isso a velocidade da partícula (Velocidade tangencial) fica:

$$\mathbf{v(t)} = \frac{d\mathbf{R(t)}}{dt} = \omega r'[-sen(\omega t)\,\widehat{i} + cos(\omega t)\,\widehat{j}\,] \tag{2}$$

Lembrando que podemos relacionar as posições entre os vetores como:

$$|\mathbf{r}''| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$
$$|\mathbf{r}''| = |\; r\;\widehat{z} - r'[cos(\omega t)\,\widehat{i} + sen(\omega t)\,\widehat{j}\,]\;|$$

$$|\mathbf{r}''| = \sqrt{r^2 + (r')^2} \tag{3}$$

Agora vamos apresentar as bases que montam a Relação do Potencial de Liénard-Wiechert Começando pela definição do tempo retardado $[t]$ que é dado por:

$$[t] = t - \frac{\mathbf{r}''}{c}$$

e depois pela definição de Carga Retardada:

$$[\rho] = \rho(\mathbf{r}, t - \frac{\mathbf{r}''}{c})$$

$\rightarrow$ Se a Velocidade $\mathbf{v(t)}$ também for dada pelo tempo de retardo, então: $\mathbf{v([t])}$. Consequentemente, a derivada dessa velocidade de retardo $[v]$ fica:

$$d[\mathbf{v}] = \frac{d[v_R]}{1 - [\mathbf{v}] \cdot \widehat{\mathbf{r}''}/c} \tag{4}$$

Com isso, chegamos a relação do **Potencial Escalar**:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{[\mathbf{v}]} \frac{[p]}{r''} \frac{d[v_R]}{1 - [\mathbf{v}] \cdot \widehat{\mathbf{r}''}/c} \tag{5}$$

Após a integração, se torna:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mathbf{r}''} \frac{q}{1 - [\mathbf{v}] \cdot \widehat{\mathbf{r}''}/c}$$
$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{r''c - [\mathbf{v}] \cdot r''} \tag{6}$$

$\rightarrow$ Já o **Potencial Vetor $\mathbf{A(r,t)}$** fica:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}, t)\frac{[\mathbf{v}]}{c^2} \tag{7}$$

Retornando aos dados do Problema

Podemos calcular, primeiramente, o produto vetorial $[\mathbf{v}] \cdot \mathbf{r}''$:

$$[\mathbf{v}] \cdot \mathbf{r}'' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'' \tag{8}$$

Aqui, podemos notar que o ângulo formado entre a velocidade tangencial da carga em movimento com o plano que contém r'' são ortogonais e por isso:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'' = 0$$

Portanto, o Potencial Escalar do Problema fica:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\mathbf{r}''c - 0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r''} \tag{9}$$

E o Potencial Vetor do Problema, se torna:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = V(\mathbf{r},t)\frac{[\mathbf{v}]}{c^2} = V(\mathbf{r},t)\frac{\mathbf{v}}{c^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{\mathbf{r}''}\ \frac{[\mathbf{v}]}{c^2}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q[\mathbf{v}]}{\mathbf{r}''c^2} \tag{10}$$

Substituindo os parâmetros de r'' e de $[v]$, obtemos a resposta do problema. OBS* A velocidade tangencial aqui é [v] ou seja v = v([t]) :

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{\sqrt{r^2+(r')^2}} \tag{11}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q\omega r'}{c^2\ \sqrt{r^2+(r')^2}}[-sen(\omega[t])\ \widehat{i} + cos(\omega[t])\ \widehat{j}\ ] \tag{12}$$

onde $[t] = t - \frac{r''}{c} = [t] = t - \frac{\sqrt{r^2+(r')^2}}{c}$;

Por questão de notação, no enunciado da questão o problema pede para que chamemos r' de a e por isso: $r' = a$. Consequentemente, os Potenciais de Liénard-Wiechert ficam:

→ **Potencial Escalar :**

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{\sqrt{r^2+(r')^2}} \tag{13}$$

→ **Potencial Vetor :**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q\omega r'}{c^2\ \sqrt{r^2+(a)^2}}[-sen(\omega[t])\ \widehat{i} + cos(\omega[t])\ \widehat{j}\ ] \tag{14}$$

onde $[t] = t - \frac{\sqrt{r^2+(a)^2}}{c}$;