# MOTI OSCILLATORI (PARTE 3 DI 3)

C.so di Laboratorio di Fisica con elementi di statistica

2023/04/04

# L’esperienza sui Moti Oscillatori

- L’esperienza verte sul moto oscillatorio di un sistema massa-molla
- Si articola in 3 giornate:
  1. *Determinazione delle costanti elastiche delle molle*
     a. Metodo statico: legge di Hooke
     b. Metodo dinamico: oscillatore armonico
     c. Confronto
  2. *Determinazione dello smorzamento del sistema*
     - + Utilizzo dell’oscilloscopio
  3. *Osservazione del fenomeno di risonanza dell’oscillatore*

4 aprile

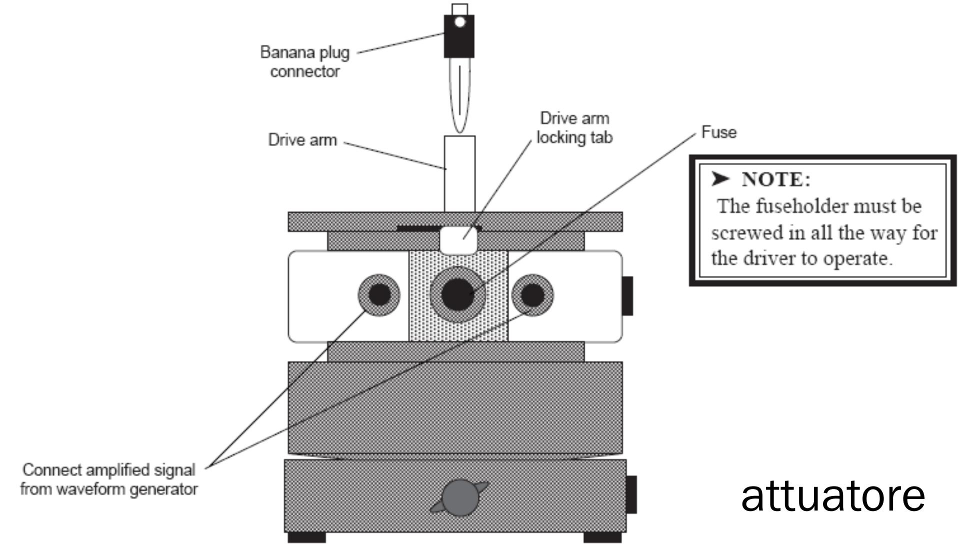
2 maggio

oggi

# Scopo dell’esperienza (parte 3)

- Osservare il fenomeno della risonanza nelle oscillazioni di un sistema smorzato e forzato
- Vogliamo misurarel’ampiezza di oscillazione per diverse frequenze/pulsazioni in un intorno della condizione di risonanza e costruire la curva “Lorentziana” <u>sperimentale</u>
- Vogliamo costruire la curva “Lorentziana” <u>attesa</u> in base ai parametri del sistema che abbiamno caratterizzato nella parte 2 dell’esperienza
- Vogliamo verificare l’accordo tra le due curve
- Bonus track: vogliamo osservare il fenomeno dei battimenti

# Oscillatore forzato: strumenti

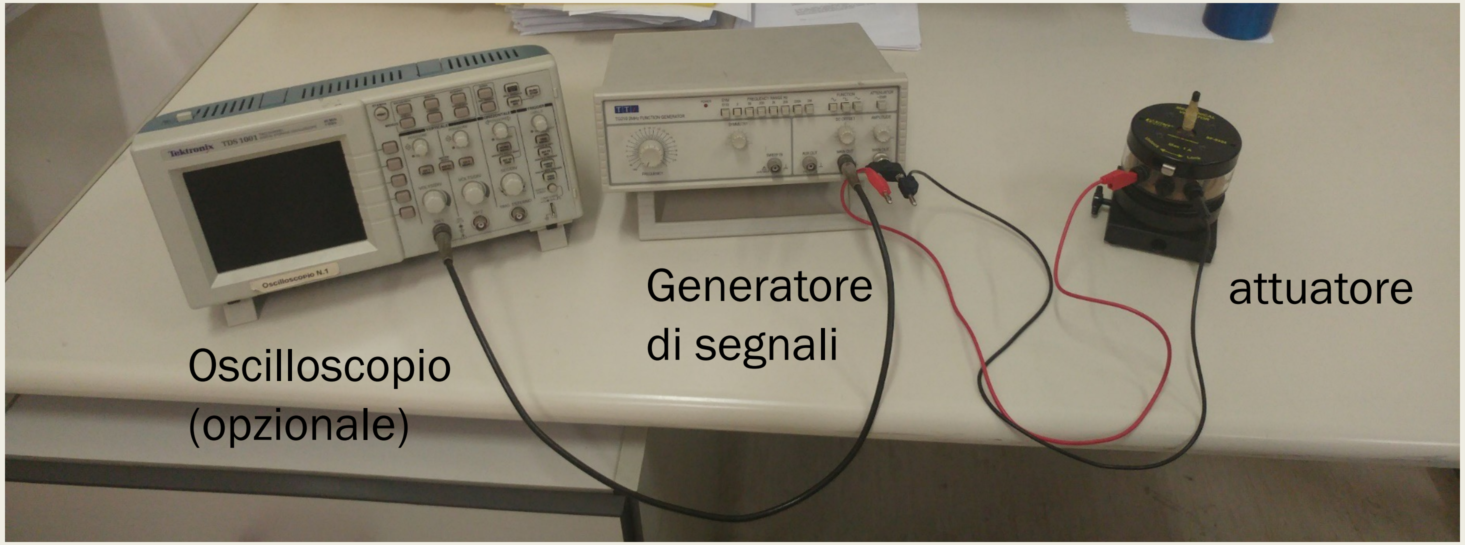



attuatore

Generatore di segnali

- L'attuatore converte un segnale elettrico in uno spostamento di un punto fisico
  - *Ad un segnale sinusoidale corrisponde uno spostamento sinusoidale*
- Lo montiamo capovolto sul nostro supporto e appendiamo la molla al suo estremo mobile
- I generatori in dotazione misurano la frequenza del segnale in uscita
  - *Tuttavia chi ha imparato ad usare l'oscilloscopio può usare anche quello per misurare questo parametro.*

# Oscillatore forzato: setup




BNC femmina
(strumenti)

BNC maschio
(cavi)

- Colleghiamo l'uscita del generatore di segnale all'attuatore con due cavetti rosso/blu con connettori "a banana" e un adattore BNC/banana
- (Se occorre) colleghiamo una seconda uscita del generatore all'oscilloscopio con un cavo coassiale BNC
- I connettori BNC si innestano *"a baionetta"*: il connettore maschio (sul cavo) ha un ghiera che gira fino a percepire uno scatto che implica il bloccaggio in posizione
  - *Connettori non bloccati in posizione possono dare contatti non affidabili o staccarsi*

# Equazione del moto smorzato

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t) - 2\gamma \frac{dx(t)}{dt}$$

Pulsazione propria dell'oscillatore

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Termine di smorzamento:
nel nostro sistema dovuto
ad attrito viscoso prop. a v ($C_2$=0)

$$2\gamma \equiv \frac{C_1}{m}$$

# Equazione del moto smorzato e forzato

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t) - 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}$$

Forzante periodica con pulsazione $\omega_f$

Pulsazione propria dell'oscillatore

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Termine di smorzamento:
nel nostro sistema dovuto
ad attrito viscoso prop. a v ($C_2$=0)

$$2\gamma \equiv \frac{C_1}{m}$$

- Equazione differenziale di secondo grando non omogenea

# Soluzione dell'equazione del moto

- La soluzione generale è una combinazione lineare de:
  - *La soluzione dell'equazione omogena associata*

$$x_1(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

  - *Una soluzione particolare del tipo:*

$$x_2(t) = A_0 e^{i\omega_f t}$$

- Ovvero:

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

# Forma della soluzione particolare

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t) - 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}$$

- Che forma deve avere $x_2(t)$ per essere soluzione? Calcolo le derivate

$$x_2(t) = A_0 e^{i\omega_f t} \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = i\omega_f A_0 e^{iw_f t} \qquad \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = -\omega_f^2 A_0 e^{i\omega_f t}$$

- E sostituisco:

$$-A_0\omega_f^2 e^{i\omega_f t} = -\omega_0^2 A_0 e^{i\omega_f t} - i2\gamma A_0 \omega_f e^{i\omega_f t} + \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}$$

- Ottengo che $x_2(t)$ è soluzione se $A_0$ vale:

$$A_0\left(\omega_f^2 - \omega_0^2 - i2\gamma\omega_f\right) + \frac{F_0}{m} = 0 \qquad A_0 = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_f^2) + i2\gamma\omega_f}$$

# Forma della soluzione particolare

$$x_2(t) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f} e^{i\omega_f t}$$

$$x_2(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \phi)$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

# La "Lorentziana"

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

(forma esatta)

- Descrive l'ampiezza di oscillazione in funzione della pulsazione della forzante $\boldsymbol{\omega}_f$ in un intorno della pulsazione di risonanza $\boldsymbol{\omega}_0$
- Cerchiamo una forma approssimata, assumendo $\omega_f \simeq \omega_0$
- Possiamo approssimare

$$\omega_0^2 - \omega_f^2 = (\omega_0 - \omega_f)\underbrace{(\omega_0 + \omega_f)}_{\simeq 2\omega_0} \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega_f)$$

- E ottenere:

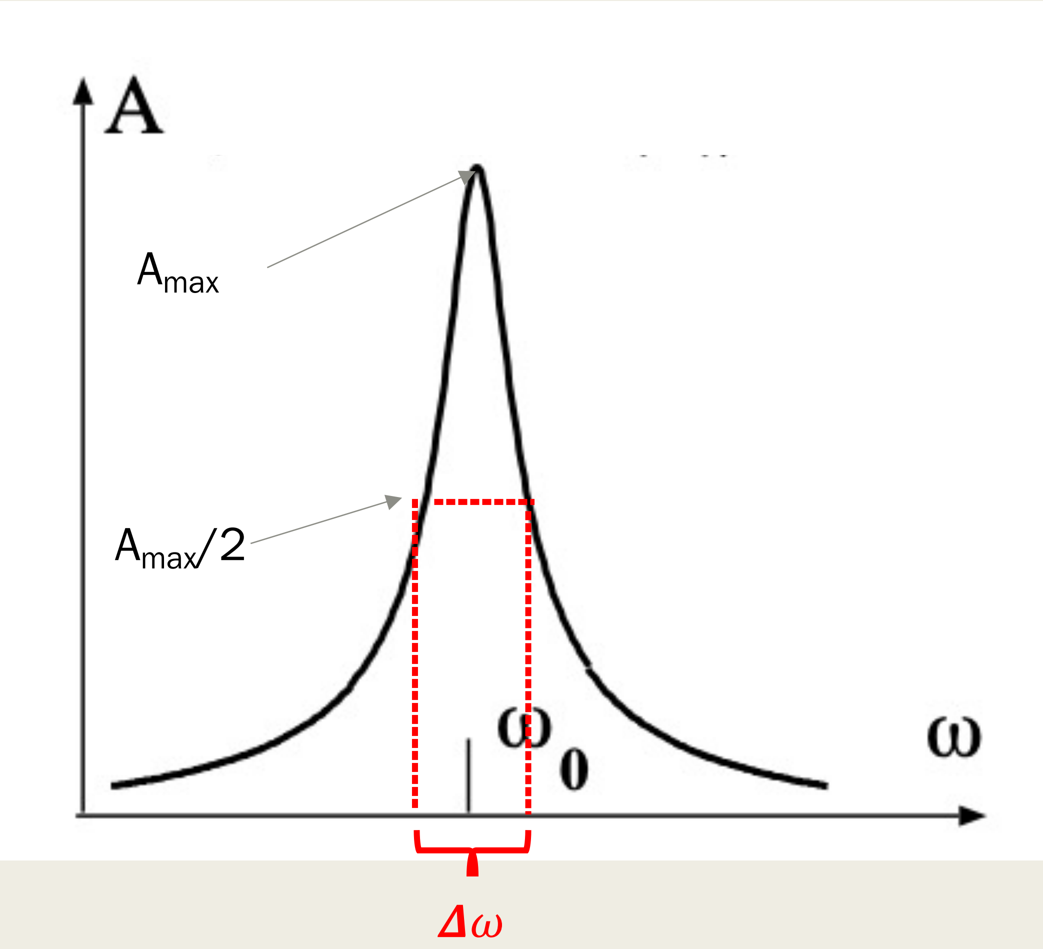
$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{2\omega_0\sqrt{\left(\omega_0 - \omega_f\right)^2 + \gamma^2}}$$

(forma approssimata)

N.B.: È solo grazie allo smorzamento che la curva non presenta una divergenza per $\boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega}_0$ !

# La "Lorentziana"

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{2\omega_0\sqrt{\left(\omega_0 - \omega_f\right)^2 + \gamma^2}}$$




- Il centroide della curva è $\omega_0$
- Il valore massimo è:

$$A_{max} = \frac{F_0}{2\omega_0 m\gamma}$$

- Le pulsazioni per cui $A\ (\omega_f) = ½\ A_{max}$ sono:

$$\omega_f = \omega_0 \pm \sqrt{3}\gamma$$

- Quindi la larghezza a metà altezza (FWHM) sarà:

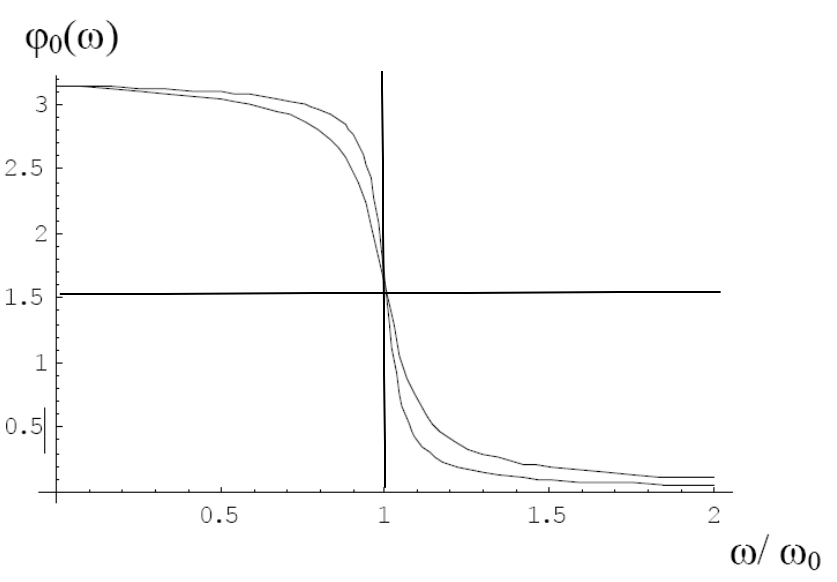
$$\Delta\omega = 2\sqrt{3}\gamma$$

- Quindi sistemi più smorzati avranno una Lorentziana più bassa e larga e viceversa

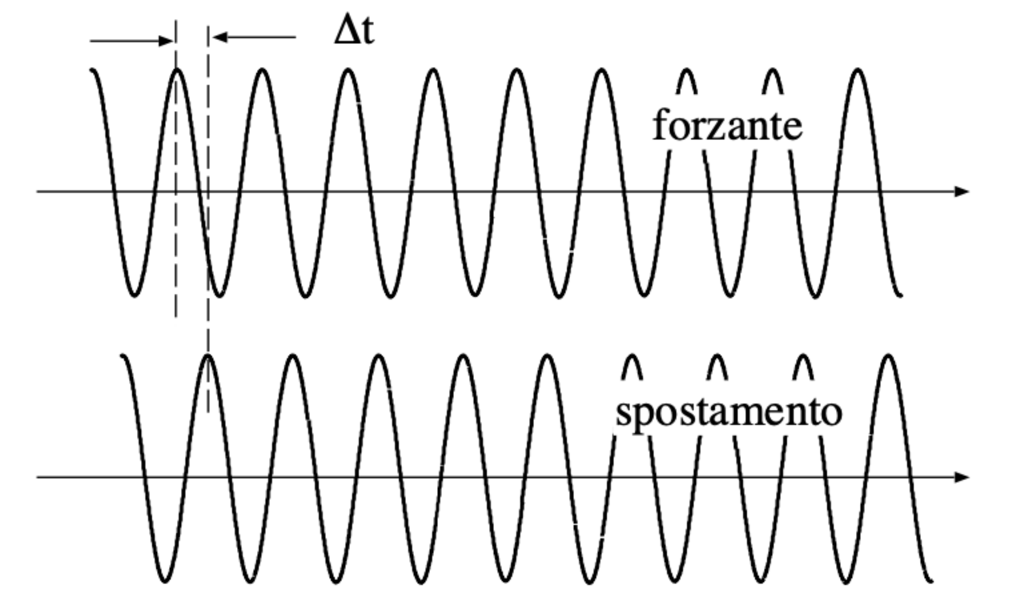
# La fase

$$x_2(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \phi)$$

- La fase di cui parliamo è la fase tra la forzante e lo spostamento del sistema
- Alla risonanza vale $\pi/2$




$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$




$$\phi = \omega\Delta t$$

# Le condizioni di risonanza

In condizioni di risonanza:

- La forzante trasferisce la massima accelerazione alla massa sempre quando la massa possiede la massima velocità (sono sfasate di π/2)
- Ad ogni ciclo viene trasferita un po' di energia dalla forzante alla massa
- L'unica sottrazione di energia al moto è dovuta dall'attrito
- Senza attrito l'ampiezza di oscillazione A($\boldsymbol{\omega}$) andrebbe all'infinito per $\boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega}_0$

# Regimi di oscillazione

Come abbiamo visto,
la soluzione generale dell'equazione del moto è:

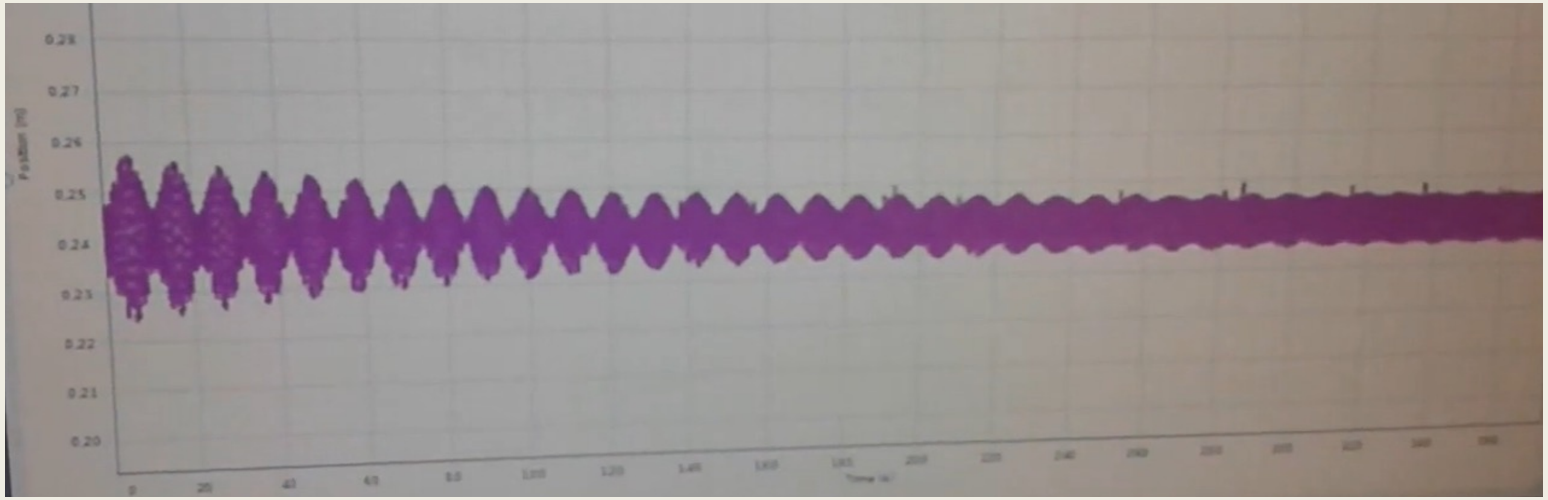
$$x(t) = aA_0 e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) + b\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+4\gamma^2\omega_f^2}}\cos(\omega_f t+\phi)$$

Soluzione dell'omogena associata
Termine <u>decrescente</u> nel tempo
*Interamente determinata dall'oscillatore senza forzante*

Soluzione particolare
Termine <u>costante</u> nel tempo

- A regime il primo termine è nullo e il sistema oscilla con $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_f$
- Quando inserisco una forzante su un sistema in movimento il primo termine non scompare all'istante, ma si smorza con il suo tempo caratteristico. Nel transiente il moto è composto da entrambi i termini.
- Cambiare (velocemente) la frequenza della forzante equivale a due operazioni <u>simultanee</u>:
  1. *disinserire la vecchia forzante: il sistema dissipa energia con la sua pulsazione propria (primo termine)*
  2. *inserire la nuova forzante (secondo termine)*
- Ottengo quindi dei battimenti finchè il sistema non ha dissipato l'energia immagazzinata precedentemente

# Battimenti



- Si intende la sovrapposizione (somma) di due frequenze prossime, nel nostro caso $\boldsymbol{\omega}_0'$ e $\boldsymbol{\omega}_f$
- Il moto risultante può essere descritto dal prodotto di una frequenza *portante* pari a $\boldsymbol{\omega}_p = |\boldsymbol{\omega}_0' + \boldsymbol{\omega}_f|/2$ e una frequenza *modulante* pari a $\boldsymbol{\omega}_m = |\boldsymbol{\omega}_0' - \boldsymbol{\omega}_f|/2$
  - *Per prosferesi*

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

- Ai fini della costruzione della Lorentziana i battimenti sono “d’intralcio”
  - *Ad ogni spostamento della frequenza della forzante devo attendere che si smorzino*
- Tuttavia in almeno un caso proviamo a “misurarli”:
  - *Calcoliamo* $\boldsymbol{\omega}_p$ *e* $\boldsymbol{\omega}_m$ *a partire da* $\boldsymbol{\omega}_0'$ *e* $\boldsymbol{\omega}_f$
  - *Misuriamo* $\boldsymbol{\omega}_p$ *e* $\boldsymbol{\omega}_m$ *dalla serie di dati che mostra i battimenti*
  - *Stimiamo le incertezze e confrontiamo i valori*

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

# La scelta del sistema

- Dopo la parte 2 dell'esperienza avete caratterizzato configurazioni dell'oscillatore diverse per **massa, molla e disco di smorzamento.**
- Come scegliere quella adatta per la Lorentziana?
- Vogliamo un'attrito quanto più possibile proporzionale a v
- Vogliamo una $f_0$> 1 Hz
- Vogliamo uno smorzamento sufficentemente grande per garantire che:
  - *Abbiamo gli strumenti adatti:*
    *In base alla risoluzione e stabilità in frequenza del generatore di impulsi possiamo effettuare almeno 5 misure distinte all'interno della FWHM=$2\sqrt{3}\gamma$ (in $\boldsymbol{\omega}$!)*
  - *Abbiamo il tempo ncessario:*
    *Il tempo di attesa per lo smorzamento dei battimenti (almeno $3\tau$, meglio 4 o 5) ci permette di fare almeno 10 misure in un'ora circa*
- Attenzione a non mischiare f ed $\boldsymbol{\omega}$

# Nota operativa

- Prima di fare misure, calcoliamo $\boldsymbol{\omega}_0$ e FWHM del sistema presscelto con le relative incertezze
- Mettiamo in funzione il sistema e iniziamo osservando approssimativamente la pulsazione di risonanza
  - *Se è molto diversa da quella che calcolata chiediamoci perchè*
- Scegliamo l’ampiezza della forzante <u>che terremo poi costante</u>, in modo che:
  - *Sia abbastanza grande da avere oscillazioni osservabili fino a distanza ~FWHM dal centro*
  - *Non sia troppo grande da mandare le spire della molla ”a battuta” durante la risonanza*
- Misuriamo l’ampiezza di oscillazione per ~ 10 frequenze di cui almeno 5 all’interno di ±FWHM/2 dal centro
- Ogni misura ha un’incertezza associata sia in frequenza/pulsazione che in ampiezza
  - *Come stimarle? Sono le stesse per tutte le misure?*

# Analisi dati

- A partire dai parametri del sistema possiamo calcolare la Lorentziana attesa
- Non conosciamo $F_0$ perché dipende dal guadagno dell'attuatore che non conosco
- La normalizziamo ai dati sperimentali:

$$N = \text{costante di normalizzazione}$$
$$\mathrm{L} = \mathit{Lorentziana} \qquad D = \mathit{curva\ misurata}$$
$$\sum_{J=k}^{h} L(v_j) = N \cdot \sum_{J=k}^{h} D(v_j)$$

- Tracciamo in grafico le due Lorentziane: sperimentale e attesa
- Facciamo un test del $\chi^2$, <u>tenendo conto delle incertezze</u>

| Frequenza | Ampiezza | Ampiezza calcolata |
|---|---|---|
| $f_0$ | $D_0$ | $L_0$ |
| $f_1$ | $D_1$ | $L_1$ |
| … | … | … |
| $f_i$ | $D_i$ | $L_i$ |
| … | … | … |
| $f_{10}$ | $D_{10}$ | $L_{10}$ |
| | $\mathbf{D_{sum}}$ | $\mathbf{L_{sum}}$ |

Almeno 10 punti, non necessariamente equispaziati: meglio se più fitti vicino al centroide

# Backup

## Come passiamo dalla notazione complessa a quella reale per $x_2(t)$

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right) + 2i\gamma\omega_f} e^{i\omega_f t}$$

*Per un numero complesso*

$$|a+ib| = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

*quindi*

$$|x_2(t)| = \left| \frac{F_o / m}{\omega_o^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f} \right| = \frac{F_o}{m} \left| \frac{\omega_o^2 - \omega_f^2 - 2i\gamma\omega}{\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_f\right)^2} \right| = \frac{F_o}{m} \sqrt{\frac{\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right) + \left(2\gamma\omega\right)^2}{\left(\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_f\right)^2\right)^2}}$$

$$|x_2(t)| = \frac{F_o / m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = -\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_o^2 - \omega_f^2}$$

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos\left(\omega_f t + \varphi\right)$$