Elettromagnetismo

Leonardo Cerasi

1 Magnetostatica

2 Matematica

2.1 Rotore

Seguendo l'esempio del teorema di Gauss, ci chiediamo qualora sia possibile esprimere in forma differenziale la legge $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$: per fare ciò, è necessario definire il rotore.
Consideriamo una curva chiusa γ ed una superficie $S : \partial S = \gamma$ (tale superficie non è univoca); consideriamo un campo vettoriale $\vec{F}$ e la sua circuitazione $\Gamma \equiv \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l}$: suddividendo γ in due loops γ_1 e γ_2 tali da avere un lato in comune, è evidente che $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, dunque in generale possiamo suddividere γ in $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, così da avere $\Gamma = \sum_k \Gamma_k$. Dato che Γ_k tende ad annullarsi all'aumentare del numero dei loops, possiamo prendere come rotore il limite del rapporto tra Γ_k e l'area S_k racchiusa da γ_k: per eliminare l'ambiguità della superficie scelta, definiamo il rotore rispetto ad una particolare direzione, la quale fornisce la direzione del vettore normale alla superficie, mentre il verso è stabilito dalla regola della mano destra; abbiamo dunque la definizione di rotore:

$$(\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_k = \lim_{S_k \to 0} \frac{\Gamma_k}{S_k} \tag{2.1.1}$$

Dunque avremo che:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{N} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_k S_k \xrightarrow[N\to\infty]{} \oiint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot d\vec{S} \tag{2.1.2}$$

Abbiamo ricavato il teorema di Stokes:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oiint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot d\vec{S} \tag{2.1.3}$$

2.1.1 Rotore in coordinare cartesiane

Consideriamo un loop rettangolare γ sul piano (x, y) ed una corrispondente superficie chiusa con normale $\hat{n} = \hat{e}_z$ e calcoliamo la componente del rotore $(\text{rot}\vec{F})_z \equiv (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{e}_z$; detti $\vec{r}_0$ il punto centrale del rettangolo, $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_4$ i punti medi dei suoi lati e $\Delta x, \Delta y$ le loro lunghezze (supposte infinitesime), abbiamo che la circuitazione sarà:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \vec{F}_1 \cdot \hat{e}_x \Delta_x + \vec{F}_2 \cdot \hat{e}_y \Delta_y - \vec{F}_3 \cdot \hat{e}_x \Delta_x - \vec{F}_4 \cdot \hat{e}_4 \Delta_4 \\ &= \left[\frac{\partial F_x}{\partial y} \left(-\frac{\Delta y}{2} \right) - \frac{\partial F_x}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - \frac{\partial F_y}{\partial x} \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \\ &= \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \Delta x \Delta y \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Dato che l'area della superficie è $S = \Delta x \Delta y$, si ha che $(\text{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$.
Per analogia si trovano anche le altre componenti e si arriva a:

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} \tag{2.1.5}$$

2.1.2 Teorema di Helmholtz

Il teorema di Stokes permette una comoda caratterizzazione dei campi conservativi: $\vec{F}$ è un campo conservativo $\iff \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \nabla \times \vec{F} = 0 \iff$ esiste una funzione scalare $\phi : \vec{F} = \nabla\phi$.
Da ciò è possibile ricavare il teorema di Helmholtz: dato un campo vettoriale $\vec{F}(\vec{r})$ di cui sono noti la divergenza $\nabla \cdot \vec{F} = \rho(\vec{r})$ e il rotore $\nabla \times \vec{F} = \vec{J}(\vec{r})$, se queste due funzioni si annullano all'infinito più velocemente di $\frac{1}{r^2}$, allora il campo è univocamente determinato da:

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}, \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla \cdot \vec{F}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\vec{r}\,', \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla \times \vec{F}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\vec{r}\,' \tag{2.1.6}$$

ovvero esso è dato da una componente irrotazionale e da una solenoidale.