

# Relatività Generale

Prof. E. Castorina, a.a. 2024-25

Leonardo Cerasi<sup>1</sup>

GitHub repository: [LeonardoCerasi/notes](#)

<sup>1</sup>[leo.cerasi@pm.me](mailto:leo.cerasi@pm.me)

---

# Indice

Indice	ii
Introduzione	1
<b>I Il Principio d'Equivalenza</b>	<b>3</b>
<b>1 Geodetiche</b>	<b>4</b>
1.1 Particelle non-relativistiche . . . . .	4
1.1.1 Equazione geodetica . . . . .	4
1.2 Particelle relativistiche . . . . .	5
1.2.1 Equazione geodetica . . . . .	6
1.2.2 Momento coniugato . . . . .	7
1.2.3 Interazioni . . . . .	7
1.3 Principio di Equivalenza . . . . .	8
1.3.1 Metrica di Kottler-Möller . . . . .	8
1.3.2 Gravitational time dilation . . . . .	10

---

# Introduzione

Nello studio delle interazioni a distanza si introducono le cosiddette teorie di campo: un campo è un'entità fisica che esiste in ogni punto dello spaziotempo (es: campo elettrico, magnetico, etc...) e che viene modificata dalla presenza di portatori della carica associata al campo.

Nel caso del di una teoria di campo per descrivere la gravità, è necessario un campo gravitazionale che sia influenzato dalla massa. Nel caso Newtoniano il campo gravitazionale  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  è legato alla densità di massa  $\rho(\mathbf{r}, t)$  da un'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1)$$

dove  $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  è la costante universale di Newton.

È banale ricavare il campo gravitazionale di una massa puntiforme  $M$ : in questo caso  $\rho(\mathbf{r}) = M\delta^3(\mathbf{r})$ , dunque  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$ . Il caso in cui invece  $\rho$  dipende dal tempo è non banale e per essere trattato necessita di un'equazione più generale di Eq. 1: l'equazione di campo di Einstein.

**Analogie e differenze con l'Elettromagnetismo** Superficialmente, il problema della generalizzazione relativistica della gravitazione potrebbe sembrare analogo a quello dell'elettromagnetismo: entrambe le forze, nel caso stazionario, sono governate da una legge proporzionale a  $r^{-2}$  ed entrambi i campi sono determinati da equazioni di Poisson in cui cambia solo la costante dimensionale.

La differenza tra le due teorie di campo, però, sta proprio nella descrizione matematica delle sorgenti che subentrano nelle equazioni di Poisson: nel caso dell'Elettromagnetismo, in regime stazionario il campo elettromagnetico è determinato dalla densità di carica  $\rho_e$  e dalla densità di corrente  $\mathbf{J}$ , e per avere una descrizione relativistica bisogna combinarle in una densità di corrente quadri-vettoriale  $j^\mu = (c\rho_e, \mathbf{J})$  (si può vedere che  $\rho_e$  trasforma come una componente temporale poiché  $\rho_e \sim \text{Vol}_3^{-1} \sim (\text{Vol}_4/ct)^{-1} \sim ct$ , dato che il quadrivolume è un invariante di Lorentz): ciò risulta naturalmente in un potenziale quadri-vettoriale  $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ .

D'altra parte, per quanto riguarda la gravitazione, bisogna ricordare l'uguaglianza relativistica tra massa energia; inoltre, a differenza della carica elettrica, l'energia non è un invariante relativistico, ma è la componente temporale del quadri-vettore impulso: in particolare, a generare il campo gravitazionale sono la densità di energia  $\rho$  e la densità di momento  $\rho_p$ , alle quali sono associate una densità di corrente di energia  $\mathbf{j}$  ed una densità di corrente di momento  $\mathbf{T}^i$  per ciascuna componente  $\rho_p^i$ . Risulta evidente che l'equazione relativistica che descrive il campo gravitazionale sia notevolmente più complicata di quella del campo elettromagnetico, poiché le sorgenti non sono descritte da un quadri-vettore, bensì da un tensore, il tensore energia-impulso:

$$T^{\mu\nu} \sim \begin{bmatrix} \rho c & \rho_p c \\ \mathbf{j} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Naturalmente, anche il potenziale gravitazionale sarà un tensore  $h_{\mu\nu}$ , ed il potenziale Newtoniano sarà  $h_{00} \sim \Phi$ .

**Scala della Relatività Generale** Tramite le costanti fondamentali  $G$  e  $c$  è possibile associare ad una massa  $M$  una sua lunghezza caratteristica, detta raggio di Schwarzschild:

$$R_s := \frac{2GM}{c^2} \quad (3)$$

Le correzioni relativistiche alla teoria della gravitazione sono determinate dal parametro  $R_s/r$  e, nella maggior parte delle situazioni, sono trascurabili: basti calcolare che per la Terra  $R_s \approx 10^{-2}$  m, mentre il suo raggio è  $R_T = 6 \cdot 10^6$  m, dunque sulla superficie terrestre le correzioni relativistiche alla gravità Newtoniana sono dell'ordine di  $10^{-8}$ .

Gli effetti relativistici diventano importanti quando si considerano oggetti compatti come stelle di neutroni e buchi neri.

# Parte I

## Il Principio d'Equivalenza

# Geodetiche

Nelle teorie classiche di campo vengono considerati due oggetti distinti: le particelle e i campi. I campi determinano il moto delle particelle, mentre le particelle determinano le oscillazioni dei campi.

## 1.1 Particelle non-relativistiche

Per descrivere il moto di una particella tra due punti fissati  $\mathbf{x}(t_1) \equiv \mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}(t_2) \equiv \mathbf{x}_2$  si studia l'azione  $S$  associata alla traiettoria  $\mathbf{x}(t)$ , definita come:

$$S[\mathbf{x}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \quad (1.1)$$

dove  $L$  è la lagrangiana che descrive la particella.

La traiettoria percorsa dalla particella, per il principio di minima azione, è quella che estremizza  $S$ , ovvero tale per cui  $\delta S = 0 \forall \delta \mathbf{x}(t) : \delta \mathbf{x}(t_1) = \delta \mathbf{x}(t_2) = 0$ ; esplicitando:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \delta x^i + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove si è usata la convenzione di somma di Einstein.

Si vede subito che il termine di bordo è nullo, dunque estremizzare l'azione equivale alle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \quad (1.3)$$

### 1.1.1 Equazione geodetica

In generale, il moto di una particella libera su una generica varietà differenziale è descritto dalla lagrangiana  $L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ ; bisogna dunque tener conto della metrica della varietà considerata:

$$L = \frac{m}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (1.4)$$

dove  $x$  rappresenta collettivamente tutte le coordinate  $x^i$  sulla varietà. Si ricordi che, per una varietà reale  $n$ -dimensionale,  $g_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è una matrice reale simmetrica.

Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano dunque:

$$\frac{m}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{d}{dt} (m g_{ik} \dot{x}^i) = 0 \quad (1.5)$$

Espandendo il secondo termine:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j - g_{ik} \ddot{x}^i = 0 \quad (1.6)$$

Del termine  $g_{ik,j} - \frac{1}{2} g_{ij,k}$ , essendo contratto con un fattore simmetrico  $\dot{x}^i \dot{x}^j$ , sopravvive solo la parte simmetrica rispetto agli indici  $i$  e  $j$ , ovvero:

$$g_{ik} \ddot{x}^i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (1.7)$$

A questo punto, si contrae per la metrica inversa  $g^{lk}$ , che per definizione soddisfa  $g^{lk} g_{ik} = \delta_i^l$ , così da ottenere (rinominando gli indici):

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (1.8)$$

dove è stato definito il simbolo di Christoffel:

$$\Gamma_{jk}^i := \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (1.9)$$

Questa equazione del moto è nota come equazione geodetica e le sue soluzioni sono dette geodetiche.

## 1.2 Particelle relativistiche

È possibile estendere la meccanica lagrangiana allo spaziotempo di Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$ , descritto dalla metrica:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (1.10)$$

Dato che questa metrica non è definita positiva, è possibile classificare due punti separati da una distanza infinitesima  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  in base al segno di  $ds^2$ : se  $ds^2 < 0$  si dicono timelike-separated, se  $ds^2 > 0$  spacelike-separated e se  $ds^2 = 0$  lightlike-separated (o null).

A differenza del caso classico, in cui l'orbita è parametrizzata dal tempo (che è assoluto), nel caso relativistico essa deve essere parametrizzata da un generico  $\sigma \in \mathbb{R}$  monotono crescente lungo la traiettoria.

In ambito relativistico, il principio di minima azione ha un'interpretazione geometrica: la traiettoria deve estremizzare la distanza tra due punti dello spaziotempo. Di conseguenza, dato che una particella di massa  $m$  deve seguire una traiettoria timelike, si definisce l'azione come:

$$S = -mc \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-ds^2} = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma \quad (1.11)$$

Il coefficiente è necessario per rendere l'azione dimensionalmente omogenea con  $\hbar$ .

L'azione così definita presenta due simmetrie:

1. invarianza di Lorentz: l'azione è invariante per  $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ , con  $\Lambda : \Lambda^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ ;

2. invarianza per riparametrizzazioni: essendo  $\sigma$  un parametro arbitrario, è normale che l'azione non dipenda dalla sua scelta, infatti se si riparametrizza con una funzione monotona  $\tilde{\sigma}(\sigma)$  si ha:

$$\tilde{S} = -mc \int_{\tilde{\sigma}_1}^{\tilde{\sigma}_2} d\tilde{\sigma} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tilde{\sigma}} \frac{dx^\nu}{d\tilde{\sigma}}} = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \left(\frac{d\sigma}{d\tilde{\sigma}}\right)^2} = S \quad (1.12)$$

Grazie all'invarianza per riparametrizzazioni, il valore dell'azione tra due punti dello spaziotempo assume un significato ben preciso, il tempo proprio, ovvero il tempo misurato dalla particella in moto stessa:

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{c} \int_0^\sigma d\sigma' \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\sigma'}} \quad (1.13)$$

Una conseguenza dell'identificazione tra azione e tempo proprio è che il principio di minima azione richiede che la traiettoria estremizzi il tempo proprio. È anche possibile riparametrizzare l'azione col tempo proprio, essendo questo una funzione monotona crescente lungo la traiettoria.

### 1.2.1 Equazione geodetica

Nel caso relativistico su una varietà differenziabile generica, la lagrangiana di una particella libera è:

$$L = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (1.14)$$

Dunque, le equazioni di Eulero-Lagrange diventano:

$$-\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{d}{d\sigma} \left( -\frac{1}{L} g_{\rho\nu} \dot{x}^\nu \right) = 0 \quad (1.15)$$

L'unica differenza con Eq. 1.5 è che  $L = L(\sigma)$ , dunque si trova un'equazione analoga all'Eq. 1.7 ma con un termine aggiuntivo:

$$g_{\mu\rho} \ddot{x}^\rho + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\sigma} g_{\mu\rho} \dot{x}^\rho \quad (1.16)$$

È possibile annullare il termine  $\frac{dL}{d\sigma}$  con un'opportuna scelta di parametrizzazione. Dall'Eq. 1.13 si vede che:

$$c \frac{d\tau}{d\sigma} = L(\sigma) \quad (1.17)$$

Dunque, riparametrizzando con  $\tau(\sigma)$ :

$$L(\tau) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = \frac{d\sigma}{d\tau} L(\sigma) = c \quad (1.18)$$

In generale, qualsiasi riparametrizzazione con  $\tilde{\tau} = a\tau + b$  (parametri affini della worldline) porta ad avere una lagrangiana costante.

Ricordando la definizione di connessione affine in Eq. 1.9, si trova l'*equazione geodetica*:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (1.19)$$



### 1.2.2 Momento coniugato

La differenza sostanziale tra lo spazio euclideo e lo spaziotempo di Minkowski è che, mentre nello spazio euclideo un corpo può rimanere fermo, nello spaziotempo nessun corpo può fermarsi nella direzione temporale. Questo fatto deve essere rispecchiato dal momento della particella:

$$p_\mu = \frac{dL}{dx^\mu} = \frac{d}{dx^\mu} (-mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}) = mc \frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{-\eta_{\rho\sigma}\dot{x}^\rho\dot{x}^\sigma}} = -\frac{m^2c^2}{L}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \quad (1.20)$$

Non tutte le componenti del 4-momento sono indipendenti:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{m^4c^4}{L^2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -m^2c^2 \quad (1.21)$$

$$(p^0)^2 = \mathbf{p}^2 + m^2c^2 \quad (1.22)$$

Di conseguenza, si ha sempre  $(p^0)^2 > 0$ .

Si noti che riparametrizzando la worldline col tempo proprio, dato che  $\frac{d\tau}{d\sigma} = -\frac{L}{mc^2}$ :

$$p^\mu = m \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\sigma} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.23)$$

La non-indipendenza di una delle componenti del 4-momento è naturale: da una descrizione classica del sistema risultano tre gradi di libertà  $x^i(t)$ , dunque passando ad una descrizione relativistica non può risultare un grado di libertà in più. Ciò è legato all'invarianza per riparametrizzazione: risolvendo le equazioni del moto si trovano le componenti della traiettoria  $x^\mu = x^\mu(\sigma)$ , ma il parametro  $\sigma$  non può rappresentare dell'informazione sul sistema, dunque una delle quattro equazioni del moto va utilizzata per eliminare la dipendenza da  $\sigma$ , riducendo di nuovo a tre i gradi di libertà.

### 1.2.3 Interazioni

Dall'invarianza per riparametrizzazione, è possibile scegliere come parametro  $\sigma = t$  il tempo misurato in un qualunque RF inerziale; considerando una particella libera nello spaziotempo di Minkowski, l'azione in Eq. 1.11 diventa:

$$S = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} \quad (1.24)$$

In questa forma, è chiara la presenza di soli tre gradi di libertà dovuti a  $\mathbf{x}(t)$ .

#### 1.2.3.1 Elettromagnetismo

Analogamente al caso classico, per rappresentare l'interazione elettromagnetica è necessario aggiungere un termine potenziale all'azione. Il problema è che la semplice aggiunta di  $\int d\sigma V(\mathbf{x})$  non soddisfa l'invarianza per riparametrizzazione: per soddisfare questo requisito, è necessario individuare un potenziale che cancelli il fattore Jacobiano derivante dalla trasformazione della misura  $d\sigma$ . Un'opzione è considerare un termine lineare in  $\dot{x}^\mu$ , dunque per l'invarianza di Lorentz è necessario che l'indice  $\mu$  sia contratto:

$$S = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \left[ -mc^2 \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} - q A_\mu(x) \dot{x}^\mu \right] \quad (1.25)$$

dove  $q$  è la carica associata all'interazione e  $A_\mu(x)$  è il suo potenziale quadri-vettoriale. Scrivendo  $A_\mu(x) = (\phi(x)/c, \mathbf{A}(x))$ , l'azione in Eq. 1.25 descrive l'interazione elettromagnetica; ciò diventa evidente riparametrizzando con  $\sigma = t$ :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} - q\phi(x) - q\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{x} \right] \quad (1.26)$$

### 1.2.3.2 Gravitazione

Per descrivere l'interazione gravitazione è necessario considerare un'azione generalizzata del tipo:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ -mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\Phi(\mathbf{x})}{c^2} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} \right] \quad (1.27)$$

Nel limite non-relativistico  $\dot{\mathbf{x}}^2 \ll c^2$  e  $2\Phi(\mathbf{x}) \ll c^2$ , dunque approssimando al prim'ordine:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ -mc^2 + \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - m\Phi(\mathbf{x}) \right] \quad (1.28)$$

Il primo termine (l'energia a riposo della particella) non ha effetti sull'azione poiché è costante, mentre gli altri termini descrivono il moto non-relativistico di una particella in un campo gravitazionale  $\Phi(\mathbf{x})$ . Il termine  $1 + 2\Phi(\mathbf{x})/c^2$  in Eq. 1.27 deriva dalla componente  $\eta_{00}$  della metrica, dunque si osserva che la metrica deve dipendere da  $x$ , ovvero la descrizione dell'interazione gravitazionale introduce uno spaziotempo curvo. La condizione che deve soddisfare la metrica in un weak gravitational field è:

$$g_{00}(x) \approx - \left( 1 + \frac{2\Phi(x)}{c^2} \right) \quad (1.29)$$

con  $\Phi(x)$  il campo gravitazionale Newtoniano.

## 1.3 Principio di Equivalenza

Come si evince dall'Eq. 1.28, la “carica” dell'interazione gravitazionale è proprio la massa della particella: questo fatto viene definito *weak equivalence principle* (WEP) ed è solitamente espresso tramite l'uguaglianza tra la massa inerziale e la massa gravitazionale:

$$m_i = m_g \quad (1.30)$$

Questo è un fatto sperimentale misurato con una precisione dell'ordine di  $10^{-13}$ .

### 1.3.1 Metrica di Kottler-Möller

Una conseguenza del WEP è l'indistinguibilità tra un'accelerazione costante ed un campo gravitazionale costante: ciò può essere visto in maniera analitica.

Considerando una particella di massa  $m$  con accelerazione costante  $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{e}}_x$  in un RF inerziale  $\mathcal{O}$ , dalla relatività speciale si vede subito che la traiettoria non può essere  $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ , poiché la velocità eccederebbe  $c$ ; bisogna invece ricordare la composizione relativistica delle velocità:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \quad (1.31)$$

È possibile definire la rapidità  $\varphi : v = c \tanh \varphi$ , così da poter riscrivere la composizione delle velocità come  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Un'accelerazione costante significa che la rapidità della particella aumenta linearmente rispetto al tempo proprio, ovvero  $\varphi(\tau) = a\tau/c$ , quindi:

$$v(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = c \operatorname{sech} \left( \frac{a\tau}{c} \right) \quad (1.32)$$

La relazione tra il tempo misurato nel RF inerziale ed il tempo proprio è:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(\tau) = \sqrt{\frac{1}{1 - v(\tau)^2/c^2}} = \cosh \left( \frac{a\tau}{c} \right) \implies t(\tau) = \frac{c}{a} \sinh \left( \frac{a\tau}{c} \right) \quad (1.33)$$

con costante d'integrazione tale per cui  $\tau = 0$  corrisponda a  $t = 0$ . Per quanto riguarda la traiettoria:

$$x(\tau) = \frac{c^2}{a} \cosh \left( \frac{a\tau}{c} \right) - \frac{c^2}{a} \quad (1.34)$$

con costante d'integrazione tale per cui  $x(0) = 0$ . Si trova dunque un'iperbole nello spaziotempo:

$$\left( x + \frac{c^2}{a} \right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2} \quad (1.35)$$

con asintoti  $ct = \pm (x + c^2/a)$  per  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Si può mostrare che la trasformazione tra le coordinate  $(t, x)$  nel RF inerziale e quelle  $(\tau, \rho)$  solidali alla particella è data da:

$$\begin{aligned} ct &= \left( \rho + \frac{c^2}{a} \right) \sinh \left( \frac{a\tau}{c} \right) \\ x &= \left( \rho + \frac{c^2}{a} \right) \cosh \left( \frac{a\tau}{c} \right) - \frac{c^2}{a} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Infatti, l'orbita della particella è giustamente descritta da  $\rho = 0$ . Inoltre, si vede che le coordinate  $(\tau, \rho)$  non ricoprono tutto lo spaziotempo di Minkowski  $(t, x)$ : questo dimostra che ci sono delle regioni dello spaziotempo causalmente disconnesse dalla particella.

Ricordando che  $ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{r}^2$ , sostituendo l'Eq. 1.36 si ottiene la *metrica di Kottler-Möller*:

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{a\rho}{c^2} \right)^2 c^2 d\tau^2 + d\rho^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.37)$$

Mentre la parte spaziale rimane piatta, si vede che  $g_{00} = g_{00}(x)$ ; inoltre, nel caso sub-relativistico:

$$g_{00} \approx - \left( 1 + \frac{2a\rho}{c^2} \right) \quad (1.38)$$

Definendo  $\Phi(\rho) = a\rho$ , si trova proprio la condizione 1.29: questo è proprio l'asserito del WEP, poiché un'accelerazione costante dà una metrica indistinguibile da quella di un campo gravitazionale costante (sub-relativistico).

### 1.3.1.1 Principio di equivalenza di Einstein

Dal WEP deriva il fatto che un campo gravitazionale costante può essere annullato dalla scelta di un particolare RF, il free-fall RF.

Il *principio di equivalenza di Einstein* è una generalizzazione del WEP: esso afferma che esiste sempre un local RF in cui gli effetti di un qualsiasi campo gravitazionale sono localmente annullati. Formalmente, ciò equivale a dire che la metrica  $g_{\mu\nu}$  è sempre localmente approssimabile con la metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ .

Gli effetti di un campo gravitazionale non uniforme diventano evidenti quando è possibile svolgere misurazioni su una regione estesa di spazio. Si consideri ad esempio un osservatore confinato in un cubo chiuso in free-fall verso la Terra: non esiste alcun esperimento locale in grado di distinguere se l'osservatore stia fluttuando nello spazio oppure sia in free-fall, bensì è necessario un esperimento non-locale; un esempio di questo tipo di esperimenti consiste nel lasciare libere due masse test (quindi non influenzate vicendevolmente per interazione gravitazionale) separate da una certa distanza: se il cubo sta fluttuando nello spazio, le masse rimarranno nella loro posizione iniziale per inerzia, mentre se esso è in free-fall ciascuna massa sarà attratta verso il centro della Terra, dunque il loro spostamento avrà non solo una componente verticale (rispetto alla caduta), ma anche una orizzontale, per quanto piccola: le masse si sposteranno dunque l'una verso l'altra per effetto di una *tidal force*, uno dei principali fattori discriminanti dei campi gravitazionali non uniformi.

### 1.3.2 Gravitational time dilation

In condizioni di campo gravitazionale debole si ha  $g_{00}(x) = 1 + \frac{2\Phi(x)}{c^2}$ . Considerando il campo gravitazionale di un corpo sferico di massa  $M$  uniforme,  $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$ , si ha che un osservatore ad una distanza fissa  $r$  misurerà degli intervalli di tempo dati da:

$$d\tau^2 = g_{00}dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 \quad (1.39)$$

Dunque, definendo  $t$  il tempo misurato da un osservatore a  $r \rightarrow \infty$ , l'osservatore a  $r$  misurerà:

$$T(r) = t\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \quad (1.40)$$

ovvero il tempo scorre più lentamente vicino ad un corpo massivo.

È anche possibile mettere in relazione i tempi misurati a due distanze finite  $r_1$  ed  $r_2 = r_1 + \Delta r$ :

$$\begin{aligned} T_2 = t\sqrt{1 - \frac{2GM}{(r_1 + \Delta r)c^2}} &\approx t\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_1c^2} + \frac{2GM\Delta r}{r_1^2c^2}} \\ &\approx t\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_1c^2}} \left(1 + \frac{GM\Delta r}{r_1^2c^2}\right) = T_1 \left(1 + \frac{GM\Delta r}{r_1^2c^2}\right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

dove si è assunto che  $\Delta r \ll r_1$  e  $2GM \ll r_1c^2$ . Ad esempio, con un per un dislivello di  $10^3$  m sul livello del mare ( $\sim 6 \cdot 10^6$  m) si ha una differenza di  $10^{-12}$  s, confermato sperimentalmente.

#### 1.3.2.1 Gravitational redshift

Un'importante conseguenza della gravitational time dilation è il gravitational redshift.

Sempre in condizioni di campo debole, si consideri un segnale a distanza  $r_1$  che si ripete ad intervalli

$\Delta T_1$ : un osservatore a  $r_2$  misurerà:

$$\Delta T_2 = \sqrt{\frac{1 + 2\Phi(r_2)/c^2}{1 + 2\Phi(r_1)/c^2}} \Delta T_1 \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_2) - \Phi(r_1)}{c^2}\right) \Delta T_1 \quad (1.42)$$

Dato che  $\omega \sim T^{-1}$ , si ha:

$$\omega_2 \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_2) - \Phi(r_1)}{c^2}\right)^{-1} \omega_1 \quad (1.43)$$

Dato che  $\Phi(r) \sim r^{-1}$  (nel caso considerato), se  $r_2 > r_1$  si ha  $\omega_2 < \omega_1$  (redshift), mentre se  $r_2 < r_1$  si ha  $\omega_2 > \omega_1$  (blueshift).