Relatività Generale

Prof. E. Castorina, a.a. 2024-25

Leonardo Cerasi[1]

GitHub repository: LeonardoCerasi/notes

[1] leo.cerasi@pm.me

Indice

Introduzione

Nello studio delle interazioni a distanza si introducono le cosiddette teorie di campo: un campo è un'entità fisica che esiste in ogni punto dello spaziotempo (es: campo elettrico, magnetico, etc...) e che viene modificata dalla presenza di portatori della carica associata al campo.
Nel caso del di una teoria di campo per descrivere la gravità, è necessario un campo gravitazionale che sia influenzato dalla massa. Nel caso Newtoniano il campo gravitazionale $\Phi(\mathbf{r}, t)$ è legato alla densità di massa $\rho(\mathbf{r}, t)$ da un'equazione di Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{1}$$

dove $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ è la costante universale di Newton.
È banale ricavare il campo gravitazionale di una massa puntiforme M: in questo caso $\rho(\mathbf{r}) = M\delta^3(\mathbf{r})$, dunque $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$. Il caso in cui invece ρ dipende dal tempo è non banale e per essere trattato necessita di un'equazione più generale di Eq. 1: l'equazione di campo di Einstein.

Analogie e differenze con l'Elettromagnetismo Superficialmente, il problema della generalizzazione relativistica della gravitazione potrebbe sembrare analogo a quello dell'elettromagnetismo: entrambe le forze, nel caso stazionario, sono governate da una legge proporzionale a r^{-2} ed entrambi i campi sono determinati da equazioni di Poisson in cui cambia solo la costante dimensionale.
La differenza tra le due teorie di campo, però, sta proprio nella descrizione matematica delle sorgenti che subentrano nelle equazioni di Poisson: nel caso dell'Elettromagnetismo, in regime stazionario il campo elettromagnetico è determinato dalla densità di carica ρ_e e dalla densità di corrente $\mathbf{J}$, e per avere una descrizione relativistica bisogna combinarle in una densità di corrente quadrivettoriale $j^\mu = (c\rho_e, \mathbf{J})$ (si può vedere che ρ_e trasforma come una componente temporale poiché $\rho_e \sim \mathrm{Vol}_3^{-1} \sim (\mathrm{Vol}_4/ct)^{-1} \sim ct$, dato che il quadrivolume è un invariante di Lorentz): ciò risulta naturalmente in un potenziale quadrivettoriale $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$.
D'altra parte, per quanto riguarda la gravitazione, bisogna ricordare l'uguaglianza relativistica tra massa energia; inoltre, a differenza della carica elettrica, l'energia non è un invariante relativistico, ma è la componente temporale del quadrivettore impulso: in particolare, a generare il campo gravitazionale sono la densità di energia ρ e la densità di momento ρ_p, alle quali sono associate una densità di corrente di energia $\mathbf{j}$ ed una densità di corrente di momento $\mathbf{T}^i$ per ciascuna componente ρ_p^i. Risulta evidente che l'equazione relativistica che descrive il campo gravitazionale sia notevolmente più complicata di quella del campo elettromagnetico, poiché le sorgenti non sono descritte da un quadrivettore, bensì da un tensore, il tensore energia-impulso:

$$T^{\mu\nu} \sim \begin{bmatrix} \rho c & \rho_p c \\ \mathbf{j} & \mathrm{T} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Naturalmente, anche il potenziale gravitazionale sarà un tensore $h_{\mu\nu}$, ed il potenziale Newtoniano sarà $h_{00} \sim \Phi$.

Scala della Relatività Generale Tramite le costanti fondamentali G e c è possibile associare ad una massa M una sua lunghezza caratteristica, detta raggio di Schwarzschild:

$$R_s := \frac{2GM}{c^2} \tag{3}$$

Le correzioni relativistiche alla teoria della gravitazione sono determinate dal parametro R_s/r e, nella maggior parte delle situazioni, sono trascurabili: basti calcolare che per la Terra $R_s \approx 10^{-2}$ m, mentre il suo raggio è $R_T = 6 \cdot 10^6$ m, dunque sulla superficie terrestre le correzioni relativistiche alla gravità Newtoniana sono dell'ordine di 10^{-8}.
Gli effetti relativistici diventano importanti quando si considerano oggetti compatti come stelle di neutroni e buchi neri.

Parte I

Il Principio d'Equivalenza

Capitolo 1

Geodetiche

Nelle teorie classiche di campo vengono considerati due oggetti distinti: le particelle e i campi. I campi determinano il moto delle particelle, mentre le particelle determinano le oscillazioni dei campi.

1.1 Particelle non-relativistiche

Per descrivere il moto di una particella tra due punti fissati $\mathbf{x}(t_1) \equiv \mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}(t_2) \equiv \mathbf{x}_2$ si studia l'azione S associata alla traiettoria $\mathbf{x}(t)$, definita come:

$$S\left[\mathbf{x}(t)\right] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \tag{1.1}$$

dove L è la lagragiana che descrive la particella.
La traiettoria percorsa dalla particella, per il principio di minima azione, è quella che estremizza S, ovvero tale per cui $\delta S = 0\ \forall \delta\mathbf{x}(t) : \delta\mathbf{x}(t_1) = \delta\mathbf{x}(t_2) = 0$; esplicitando:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta \dot{x}^i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right)\delta x^i + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove si è usata la convenzione di somma di Einstein.
Si vede subito che il termine di bordo è nullo, dunque estremizzare l'azione equivale alle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \tag{1.3}$$

1.1.1 Equazione geodetica

In generale, il moto di una particella libera su una generica varietà differenziale è descritto dalla lagrangiana $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$; bisogna dunque tener conto della metrica della varietà considerata:

$$L = \frac{m}{2}g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{1.4}$$

dove x rappresenta collettivamente tutte le coordinate x^i sulla varietà. Si ricordi che, per una varietà reale n-dimensionale, $g_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice reale simmetrica.

Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano dunque:

$$\frac{m}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{d}{dt}\left(mg_{ik}\dot{x}^i\right) = 0 \tag{1.5}$$

Espandendo il secondo termine:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j - g_{ik}\ddot{x}^i = 0 \tag{1.6}$$

Del termine $g_{ik,j} - \frac{1}{2}g_{ij,k}$, essendo contratto con un fattore simmetrico $\dot{x}^i\dot{x}^j$, sopravvive solo la parte simmetrica rispetto agli indici i e j, ovvero:

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \tag{1.7}$$

A questo punto, si contrae per la metrica inversa g^{lk}, che per definizione soddisfa $g^{lk}g_{ik} = \delta^l_i$, così da ottenere (rinominando gli indici):

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{1.8}$$

dove è stato definito il simbolo di Christoffel:

$$\Gamma^i_{jk} := \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) \tag{1.9}$$

Questa equazione del moto è nota come equazione geodetica e le sue soluzioni sono dette geodetiche.

1.2 Particelle relativistiche

È possibile estendere la meccanica lagrangiana allo spaziotempo di Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, descritto dalla metrica:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-1, +1, +1, +1\right) \tag{1.10}$$

Dato che questa metrica non è definita positiva, è possibile classificare due punti deparati da una distanza infinitesima $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ in base al segno di ds^2: se $ds^2 < 0$ si dicono timelike-separated, se $ds^2 > 0$ spacelike-separated e se $ds^2 = 0$ lightlike-separated (o null).
A differenza del caso classico, in cui l'orbita è parametrizzata dal tempo (che è assoluto), nel caso relativistico essa deve essere parametrizzata da un generico $\sigma \in \mathbb{R}$ monotono crescente lungo la traiettoria.
In ambito relativistico, il principio di minima azione ha un'interpretazione geometrica: la traiettoria deve estremizzare la distanza tra due punti dello spaziotempo. Di conseguenza, dato che una particella di massa m deve seguire una traiettoria timelike, si definisce l'azione come:

$$S = -mc\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{-ds^2} = -mc\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}} \tag{1.11}$$

Il coefficiente è necessario per rendere l'azione dimensionalmente omogenea con $\hbar$.
L'azione così definita presenta due simemtrie:

1. invarianza di Lorentz: l'azione è invariante per $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, con $\Lambda : \Lambda^\mu{}_\rho\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$;

2. invarianza per riparametrizzazioni: essendo σ un parametro arbitrario, è normale che l'azione non dipenda dalla sua scelta, infatti se si riparametrizza con una funzione monotona $\tilde{\sigma}(\sigma)$ si ha:

$$\tilde{S} = -mc \int_{\tilde{\sigma}_1}^{\tilde{\sigma}_2} d\tilde{\sigma} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tilde{\sigma}} \frac{dx^\nu}{d\tilde{\sigma}}} = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \left(\frac{d\sigma}{d\tilde{\sigma}}\right)^2} = S \tag{1.12}$$

Grazie all'invarianza per riparametrizzazioni, il valore dell'azione tra due punti dello spaziotempo assume un significato ben preciso, il tempo proprio, ovvero il tempo misurato dalla particella in moto stessa:

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{c} \int_0^\sigma d\sigma' \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\sigma'}} \tag{1.13}$$

Una conseguenza dell'identificazione tra azione e tempo proprio è che il principio di minima azione richiede che la traiettoria estremizzi il tempo proprio. È anche possibile riparametrizzare l'azione col tempo proprio, essendo questo una funzione monotona crescente lungo la traiettoria.

1.2.1 Equazione geodetica

Nel caso relativistico su una varietà differenziabile generica, la lagrangiana di una particella libera è:

$$L = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \tag{1.14}$$

Dunque, le equazioni di Eulero-Lagrange diventano:

$$-\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{d}{d\sigma} \left(-\frac{1}{L} g_{\rho\nu} \dot{x}^\nu \right) = 0 \tag{1.15}$$

L'unica differenza con Eq. 1.5 è che $L = L(\sigma)$, dunque si trova un'equazione analoga all'Eq. 1.7 ma con un termine aggiuntivo:

$$g_{\mu\rho} \ddot{x}^\rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\sigma} g_{\mu\rho} \dot{x}^\rho \tag{1.16}$$

È possibile annullare il termine $\frac{dL}{d\sigma}$ con un'opportuna scelta di parametrizzazione. Dall'Eq. 1.13 si vede che:

$$c \frac{d\tau}{d\sigma} = L(\sigma) \tag{1.17}$$

Dunque, riparametrizzando con $\tau(\sigma)$:

$$L(\tau) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = \frac{d\sigma}{d\tau} L(\sigma) = c \tag{1.18}$$

In generale, qualsiasi riparametrizzazione con $\tilde{\tau} = a\tau + b$ (parametri affini della worldline) porta ad avere una lagrangiana costante.
Ricordando la definizione di connessione affine in Eq. 1.9, si trova l'*equazione geodetica*:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \tag{1.19}$$

1.2.2 Momento coniugato

La differenza sostanziale tra lo spazio euclideo e lo spaziotempo di Minkowski è che, mentre nello spazio euclideo un corpo può rimanere fermo, nello spaziotempo nessun corpo può fermarsi nella direzione temporale. Questo fatto deve essere rispecchiato dal momento della particella:

$$p_\mu = \frac{dL}{dx^\mu} = \frac{d}{dx^\mu}\left(-mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}\right) = mc\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{-\eta_{\rho\sigma}\dot{x}^\rho\dot{x}^\sigma}} = -\frac{m^2c^2}{L}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \tag{1.20}$$

Non tutte le componenti del 4-momento sono indipendenti:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{m^4c^4}{L^2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -m^2c^2 \tag{1.21}$$

ovvero:

$$\left(p^0\right)^2 = \mathbf{p}^2 + m^2c^2 \tag{1.22}$$

Di conseguenza, si ha sempre $(p^0)^2 > 0$.
Si noti che riparametrizzando la worldline col tempo proprio, dato che $\frac{d\tau}{d\sigma} = -\frac{L}{mc^2}$:

$$p^\mu = m\frac{d\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\sigma} = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{1.23}$$

come dalla cinematica relativistica.
La non-indipendenza di una delle componenti del 4-momento è naturale: da una descrizione classica del sistema risultano tre gradi di libertà $x^i(t)$, dunque passando ad una descrizione relativistica non può risultare un grado di libertà in più. Ciò è legato all'invarianza per riparametrizzazione: risolvendo le equazioni del moto si trovano le componenti della traiettoria $x^\mu = x^\mu(\sigma)$, ma il parametro σ non può rappresentare dell'informazione sul sistema, dunque una delle quattro equazioni del moto va utilizzata per eliminare la dipendenza da σ, riducendo di nuovo a tre i gradi di libertà.