1 Magnetostatica

1.1 Forza di Lorentz

Consideriamo una carica elettrica q con velocità $\vec{v}$ immersa in un campo magnetico (o campo di induzione magnetica, u.d.m. tesla $\mathrm{T} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{C}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) $\vec{B}$: sperimentalmente, si osserva che la forza agente sulla carica è pari a $\vec{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B}$.
Se consideriamo anche la presenza di un campo elettrico $\vec{E}$, otteniamo l'espressione della forza di Lorentz:

$$\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.1.1}$$

Per misurare $\vec{B}$ sono necessarie almeno due misure di velocità e forza, poiché, data una forza ed una velocità, esistono infinite combinazioni di $\vec{B}$ e θ che danno lo stesso prodotto vettoriale, e inoltre se $\vec{B}$ genera una determinata forza, anche $\vec{B} + k\vec{v}$ genera la stessa forza; con due coppie di misure $(\vec{v}_1, \vec{F}_1)$ e $(\vec{v}_2, \vec{F}_2)$ si ottiene:

$$\vec{B} = \frac{1}{qv_1^2} \left[\vec{F}_1 \times \vec{v}_1 + \frac{(\vec{F}_2 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1}{v_2^2} \vec{v_1} \right] \tag{1.1.2}$$

È importante notare che la forza magnetica non compie lavoro: infatti, essendo essa sempre perpendicolare a $\vec{v}$, si ha che $dW_B = \vec{F_B} \cdot d\vec{l} = \vec{F_B} \cdot \vec{v}\, dt = 0$; pertanto, essa modificherà soltanto la direzione della velocità della carica, ma non il suo modulo.
Inoltre, sempre dato che $\vec{F_B} \perp \vec{v}$, essa darà luogo ad un moto a spirale attorno alla linea di campo magnetico, dato dalla somma del moto rettilineo uniforme di $\vec{v}_\parallel$ e di quello centripeto di $\vec{v}_\perp$: questo moto a spirale è detto moto di ciclotrone. Possiamo calcolare il raggio di girazione r_g dell'orbita e la rispettiva frequenza di ciclotrone ν_c imponendo $F_B = F_c$, ottenendo:

$$r_g = \frac{mv_\perp}{qB} \qquad \nu_c = \frac{qB}{2\pi m} \tag{1.1.3}$$

1.1.1 Forza magnetica su correnti elettriche

Consideriamo un filo conduttore di sezione S in cui scorre una corrente i, immerso per un tratto L in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ perpendicolare al filo.
Se nel conduttore abbiamo n cariche per unità di volume, allora in un tratto dl si avranno $n\,S\,dl$ cariche, dunque la forza totale esercitata sul tratto dal campo elettrico sarà $d\vec{F_B} = q\,n\,S\,dl\,\vec{v} \times \vec{B}$; d'altra parte, si ha che $q\,n = \rho$ densità di carica e $\rho\vec{v} = \vec{J}$ densità di corrente, dunque $d\vec{F_B} = S\,dl\,\vec{J} \times \vec{B}$, ma $S\,J = i$, quindi possiamo assegnare il verso di $\vec{J}$ a dl, ottenendo:

$$d\vec{F_B} = i\, d\vec{l} \times \vec{B} \tag{1.1.4}$$

Dato che la forza magnetica viene esercitata sulle cariche in moto nel conduttore, ma queste interagiscono meccanicamente con la sua struttura atomica, la forza agisce sull'intero conduttore, provocando lo spostamento del filo.
Prendendo una distribuzione di carica in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, assumendo che le cariche si muovano tutte con la stessa velocità $\vec{v}$, si ha $d\vec{F_B} = dq\,\vec{v} \times \vec{B} = \rho\, dV\, \vec{v} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B}\, dV$, quindi possiamo definire la densità di forza magnetica come:

$$\frac{d\vec{F_B}}{dV} = \vec{J} \times \vec{B} \tag{1.1.5}$$

Densità di corrente Possiamo generalizzare il concetto di densità di corrente a superfici e linee: considerando un conduttore percorso da una densità di corrente $\vec{J}$, se prendiamo una superficie infinitesima approssimativamente rettangolare avremo $dS = ds\, dl$ e $di = \vec{J} \cdot d\vec{S} = \rho\vec{v} \cdot \hat{n}\, ds\, dl$.
Facendo tendere $ds \to 0$ si ha $\rho\, ds \to \sigma$ densità superficiale di carica e $di = \sigma\vec{v} \cdot \hat{n}\, dl$, quindi possiamo definire la densità superficiale di corrente $\vec{K} \equiv \sigma\vec{v}$ (u.d.m. $\mathrm{C} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$): la corrente che scorre attraverso una superficie arbitraria attraverso una data linea è:

$$i = \int_\gamma \vec{K} \cdot d\vec{l} \tag{1.1.6}$$

Se invece facciamo tendere anche $dl \to 0$ si ha $\rho\, ds\, dl \to \lambda$ densità lineare di carica e $i = \lambda\vec{v} \cdot \hat{n}$, quindi definiamo la densità lineare di corrente $\vec{I} \equiv \lambda\vec{v}$ (u.d.m. A): dato che rimane una sola dimensione, $\vec{I}$ e $\hat{n}$

sono sempre paralleli, quindi il modulo di $\vec{I}$ corrisponde di fatto alla corrente.
A seconda delle varie distribuzioni di corrente, la forza magnetica agente è data da:

$$\vec{F}_B = \iiint_V \vec{J} \times \vec{B}\, dV \qquad \vec{F}_B = \oiint_S \vec{K} \times \vec{B}\, dS \qquad \vec{F}_B = \oint_\gamma \vec{I} \times \vec{B}\, dl \tag{1.1.7}$$

1.2 Legge di Biot-Savart

A differenza della legge di Coulomb, la forza di Lorentz non dice nulla sull'ontologia dei generatori del campo magnetico: date le osservazioni sperimentali, è ragionevole supporre che la sorgente del campo magnetico sia legata alla corrente elettrica, ma la questione è più complessa (ad esempio i magneti permanenti, che richiedono una teoria quantistica della materia).
Consideriamo un filo percorso da una corrente stazionaria i ed un suo elemento infinitesimo dl; empiricamente si trova che il campo magnetico $d\vec{B}$ generato da dl in un punto a distanza $\vec{r}$ da esso è dato dalla legge di Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \tag{1.2.8}$$

dove $d\vec{l}$ ha il verso di i e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$ è detta permeabilità magnetica del vuoto.
Questa legge vale solo in condizioni stazionarie (corrente continua): in queste condizioni ρ non dipende dal tempo, e dato che $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, la legge di Biot-Savart vale quando $\nabla \cdot \vec{J} = 0$.

1.2.1 Filo percorso da corrente

Consideriamo un filo abbastanza lungo percorso da una corrente stazionaria i e concentriamoci nella porzione lontana dalle estremità, così da poterlo approssimare come infinito: in questo caso, è evidente che il campo è indipendente dalla posizione lungo il filo, dunque possiamo fissare un sistema di assi con origine lungo il filo ed asse x lungo esso.
Dato che il sistema gode di evidente simmetri cilindrica, calcoliamo il campo magnetico in un punto P ad una generica distanza a dal filo, WLOG lungo l'asse y: prendendo il generico elemento di filo dal quale P dista $\vec{r}$, si ha $d\vec{l} = dl\, \hat{e}_x \equiv dx\hat{e}_x$ e $\hat{r} = -\cos\theta\, \hat{e}_x + \sin\theta\, \hat{e}_y$, quindi $d\vec{l} \times \hat{r} = dl \sin\theta\, \hat{e}_z$; dato che $x = r\cos(\pi - \theta) = -r\cos\theta$ e $r = a/\sin(\pi - \theta) = a/\sin\theta$, si ha $x = -a\cot\theta$, dunque $dx = a\csc^2\theta\, d\theta$ e possiamo scrivere:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, dx\, \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{a} \sin\theta\, d\theta \tag{1.2.9}$$

Integrando su tutto il filo ($\theta \in [0, \pi]$) e passando alle coordinate cillindriche per meglio esprimere il fatto che le linee di campo sono circonferenze centrate nel filo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{e}_\phi \tag{1.2.10}$$

1.2.2 Spira circolare percorsa da corrente

Consideriamo ora una spira circolare di raggio a percorsa da una corrente stazionaria i e fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro della spira ed asse z ortogonale ad essa.
Vogliamo calcolare il campo magnetico in un punto lungo l'asse della spira, ovvero $\vec{r}_2 = z\, \hat{e}_z$: dato che il generico elemento $d\vec{l}$ ha posizione $d\vec{r}_1 = a(\cos\theta\, \hat{e}_x + \sin\theta\, \hat{e}_y)$, si ha $d\vec{l} = \frac{d\vec{r}_1}{d\theta} d\theta$ e quindi:

$$\begin{aligned} d\vec{l} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) &= (-a\sin\theta\, \hat{e}_x + a\cos\theta\, \hat{e}_y) \times (z\, \hat{e}_z - a\cos\theta\, \hat{e}_x - a\sin\theta \hat{e}_y)\, d\theta \\ &= \left[az\cos\theta\, \hat{e}_x + az\sin\theta\, \hat{e}_y + a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, \hat{e}_z\right] d\theta \\ &= (z\cos\theta\, \hat{e}_x + z\sin\theta\, \hat{e}_y + a\, \hat{e}_z)\, a\, d\theta \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Inoltre, abbiamo che $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3 = (a^2 + z^2)^{3/2}$, dunque:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \frac{z\cos\theta\, \hat{e}_x + z\sin\theta\, \hat{e}_y + a\, \hat{e}_z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta \tag{1.2.12}$$

Integrando su tutta la spira ($\theta \in [0, 2\pi]$) si ottiene:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}\, \hat{e}_z \tag{1.2.13}$$

Il calcolo del campo in posizioni diverse dall'asse della spira è complesso e richiede l'utilizzo di integrali ellittici: qualitativamente, le linee di campo sono linee chiuse che avvolgono la spira, diventando sempre più circolari via via che si avvicinano ad essa.

1.2.3 Monopoli magnetici

Al contrario del campo elettrico, il campo magnetico non ha sorgenti definite, ma è associato alla presenza di correnti elettriche (anche nel caso dei magneti permanenti, associati alle correnti atomiche): fino a prova sperimentale contraria, possiamo affermare che il campo magnetico non ha sorgenti, ovvero che i monopoli magnetici non esistono.
Di conseguenza, per la legge di Gauss, ci aspettiamo che il campo magnetico sia solenoidale, ed è proprio così.
Consideriamo una distribuzione di corrente $\vec{J}(\vec{r})$: dato che $\vec{i} = \vec{J}S$ e che $\vec{J} \parallel d\vec{l}$, possiamo scrivere la legge di Biot-Savart come:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} S\, dl \tag{1.2.14}$$

dunque considerando superfici normali al percorso della corrente, possiamo trasformare l'integrale di linea in $S\,dl$ in un integrale di volume in dV su tutto il volume del conduttore in cui scorre corrente, ottenendo la forma integrale della legge di Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' \tag{1.2.15}$$

Calcoliamo esplicitamente la divergenza di $\vec{B}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla_r \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' \\ & \qquad \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \\ & \qquad \nabla_r \times \vec{J}(\vec{r}\,') = 0 \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla_r \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) dV' = 0 \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

che è proprio quello che avevamo previsto col teorema di Gauss.

1.3 Legge di Ampère

Per cercare una relazione tra campo magnetico e correnti elettriche, dato che le linee di campo sono sempre chiuse, ragioniamo sulla circuitazione di $\vec{B}$.
Consideriamo un filo infinito percorso da corrente; abbiamo visto che le linee di campo sono circonferenza attorno al filo, dunque prendiamo come loop per calcolare la circuitazione il rettangolo curvilinee delimitato tra due linee di campo, a distanze $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, determinato da un angolo $\Delta\theta$:

$$\begin{aligned} \Gamma \equiv \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_{12}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_{21}} \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ & \qquad \vec{B} \cdot d\vec{l}_{12} = \vec{B} \cdot d\vec{l}_{21} = 0 \\ &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} r_1 \Delta\theta + \frac{\mu_0 i}{2\pi r_2} r_2 \Delta\theta = 0 \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Se invece prendiamo un loop circolare centrato nel filo:

$$\Gamma = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i \tag{1.3.18}$$

La differenza tra i due casi è che il primo loop non ha nessuna corrente concatenata ad esso.
Dato che qualsiasi loop generico può essere approssimato con tratti radiali ed archi di circonferenze, la validità di quanto appena mostrato è generale e si esprime tramite la legge di Ampère: la circuitazione del campo magnetico lungo un loop di N avvolgimenti attorno a M correnti stazionarie concatenate è:

$$\Gamma = N\mu_0 \sum_{k=1}^{M} i_k \tag{1.3.19}$$

Possiamo generalizzare ad una distribuzione di corrente $\vec{J}$ stazionaria ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$):

$$\Gamma = \mu_0 \oint\!\!\!\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{1.3.20}$$

Utilizzando il teorema di Stokes, otteniamo la forma differenziale della legge di Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{1.3.21}$$

Nel calcolo del rotore, analogamente a quello della divergenza, dobbiamo prestare attenzione alle singolarità derivanti da oggetti che matematicamente sono monodimensionali (fili ideali) ma nella realtà non lo sono: per trattare queste singolarità, si fa di nuovo ricorso alla δ di Dirac.
Possiamo anche ottene esplicitamente la forma differenziale della legge di Ampère a partire da quella di Biot-Savart:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla_r \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) dV' \\
& \qquad \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[- \iiint_V \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla_r \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dV' + \iiint_V \vec{J}(\vec{r}\,') \left(\nabla_r \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) dV' \right] \\
& \qquad \nabla_r \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\nabla_{r'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\sum_{k=1}^{3} \iiint_V \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla_{r'} \right) \frac{x_k - x_k'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dV' + \iiint_V \vec{J}(\vec{r}\,') \, 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \, dV' \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\sum_{k=1}^{3} \iiint_V \left[\nabla_{r'} \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \frac{x_k - x_k'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) - \frac{x_k - x_k'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \nabla_{r'} \cdot \vec{J}(\vec{r}\,') \right] dV' + 4\pi \vec{J}(\vec{r}) \right] \\
& \qquad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{3} \oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \frac{x_k - x_k'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) \cdot d\vec{S}\,' + \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})
\end{aligned} \tag{1.3.22}$$

dove abbiamo usato il fatto che l'ultimo integrale si annulla considerando una superficie abbastanza grande poiché dipende da $|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-3}$.

1.4 Potenziale Vettore

Così come la conservaività del campo elettrico implica l'esistenza di un potenziale scalare, il potenziale elettrico ($\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi$), anche il fatto che il campo magnetico sia solenoidale implica l'esistenza di un potenziale, questa volta vettoriale, detto potenziale vettore: $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
Analogamente al potenziale scalare, definito a meno di una costante, anche il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di una funzione scalare ($\nabla \times \nabla = 0$).
Determiniamo il potenziale vettore a partire dalla legge di Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \tag{1.4.23}$$

Si dimostra che si può sempre scegliere un'opportuna funzione scalare $f : \nabla \cdot (\vec{A} + \nabla f) = 0$, dunque otteniamo un'equazione di Poisson (in realtà tre) anche per il potenziale vettore:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{1.4.24}$$

La condizione di esistenza della soluzione è che $\vec{J}$ all'infinito tenda a 0 più velocemente di r^{-2}, ed in tal caso una soluzione particolare è:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \tag{1.4.25}$$

Nella maggior parte dei casi d'interesse le correnti non dipendono o dipendono poco dal campo magnetico: in tal caso, non vi sono particolari condizioni al contorno da porre, dunque la soluzione particolare 1.4.25 è la soluzione finale del problema.

1.4.1 Potenziale di un campo magnetico uniforme

Consideriamo il campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$: l'equazione di Poisson diventa $\partial_y A_x - \partial_x A_y = B_0$, che non ha un'unica soluzione; una possibile soluzione è $\vec{A} = \frac{B_0}{2}(y\hat{e}_x - x\hat{e}_y)$.
Si può dimostrare che se $\vec{B}$ è uniforme ed ha un'orientazione generica, un possibile potenziale vettore è:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} \tag{1.4.26}$$

1.4.2 Potenziale di un filo rettilineo

Consideriamo un filo di raggio a percorso da una corrente stazionaria i e densità di corrente $\vec{J} = \frac{i}{\pi a^2}\hat{e}_z$: il potenziale vettore avrà solo la componente A_z data da:

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dS' dr' = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{dz'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ &\qquad \rho^2 \equiv x^2 + y^2 \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} 2\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

L'integrale ha primitiva $\ln\frac{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}+\zeta}{\rho}$, la quale diverge a $+\infty$; possiamo ovviare al problema integrando su un filo di lunghezza finita l:

$$A_z(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left[\frac{l}{\rho}\left(\sqrt{1+\frac{\rho^2}{l^2}}+1\right)\right] \tag{1.4.28}$$

Nel limite $\rho \ll l$ esso può essere approssimato da $A_z(\rho) = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\dfrac{2l}{\rho}$.

1.4.3 Potenziale di una spira

Consideriamo una spira ς di forma generica percorsa da una corrente stazionaria i: il potenziale vettore sarà dato da:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_\varsigma \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_\varsigma \frac{d\vec{r}\,'}{\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}\oint_\varsigma \left(1+\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)^{-1/2} d\vec{r}\,' \\ &\qquad r \gg r' \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right) \\ &\approx \frac{\mu_0 i}{4\pi r}\left[\oint_\varsigma d\vec{r}\,' + \frac{1}{r^2}\oint_\varsigma (\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,'\right] = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3}\oint_\varsigma (\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' \\ &\qquad (\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' = \vec{r}\,'\,(\vec{r}\cdot d\vec{r}\,') + (\vec{r}\,'\times d\vec{r}\,')\times\vec{r} \qquad \text{integrale lungo } \vec{r}\,' \\ &\qquad (\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' = d\left[\vec{r}\,'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\right] - \vec{r}\,' d\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,') = d\left[\vec{r}\,'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\right] - \vec{r}\,'\,(\vec{r}\cdot d\vec{r}\,') \\ &\qquad \Rightarrow (\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' = \frac{1}{2}\left[d\left[\vec{r}\,'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\right] + (\vec{r}\,'\times d\vec{r}\,')\times\vec{r}\right] \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\left[\oint_\varsigma d\left[\vec{r}\,'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\right] + \oint_\varsigma (\vec{r}\,'\times d\vec{r}\,')\times\vec{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{i}{2}\oint_\varsigma (\vec{r}\,'\times d\vec{r}\,')\times\vec{r} \end{aligned} \tag{1.4.29}$$

Definendo il momento di dipolo magnetico $\vec{m} \equiv \frac{i}{2}\oint_\varsigma (\vec{r}\,'\times d\vec{r}\,')$ possiamo scrivere il potenziale vettore lontano dalla spira come:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\,\vec{m}\times\hat{r} \tag{1.4.30}$$

Si può notare che il momento di monopolo magnetico $\oint_\varsigma d\vec{r} = 0$ è sempre nullo, a differenza di quello elettrico.
La definizione di dipolo magnetico è generalizzabile a qualsiasi distribuzione di corrente $\vec{J} \parallel \vec{r}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\, dV \tag{1.4.31}$$

Consideriamo ora il caso di una spira circolare di raggio a: $\vec{r} = a(\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y)$ e $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\phi}\,d\phi = a(-\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y)\,d\phi$, quindi $\vec{r}\times d\vec{r} = a^2 d\phi\,\hat{e}_z$ e, integrando sull'intera spira ($\phi \in [0, 2\pi]$):

$$\vec{m} = i\pi a^2\,\hat{e}_z \tag{1.4.32}$$

generalizzabile ad una generica spira piana di area S come $\vec{m} = iS\,\hat{e}_z$.
Avremo dunque:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{m}\times\vec{r} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\,\hat{e}_z \times (x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\,\frac{-y\,\hat{e}_x + x\,\hat{e}_y}{r} \tag{1.4.33}$$

Passando in coordinate sferiche, ricordando che $\hat{e}_\phi = \frac{1}{r}(-y\,\hat{e}_x + x\,\hat{e}_y)$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\sin\theta\,\hat{e}_\phi \tag{1.4.34}$$

Le linee di campo di $\vec{A}$ sono delle circonferenze concentriche e parallele alla spira.
Possiamo così calcolare il campo magnetico lontano dalla spira:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \nabla\times\vec{A}(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\hat{e}_\theta + \\
&\qquad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_\phi \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)\,\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\,\hat{e}_\theta \\
&= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta)
\end{aligned} \tag{1.4.35}$$

Si nota che questa espressione è matematicamente uguale a quella per il campo elettrico di un dipolo (lontano da esso) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta)$: i campi dei dipoli elettrici e magnetici hanno lo stesso andamento lontano dal dipolo, mentre vicino ad esso hanno andamenti completamente differenti.

1.5 Forze su Fili e Spire

1.5.1 Forza tra due fili percorsi da corrente

Consideriamo due fili paralleli lunghi l, distanti a e percorsi da correnti stazionarie i_1 e i_2 concordi. Ponendo $a \ll l$ così da poter approssimare come infiniti i due fili, si ha che i loro campi magnetici sono dati da $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{e}_\phi$, dunque i campi magnetici subiti rispettivamente dai due fili (assumendoli paralleli all'asse z lungo l'asse x) sono $\vec{B}_{1,2} = \pm\frac{\mu_0 i_{2,1}}{2\pi a}\hat{e}_\phi$ (segno dalla seconda regola della mano destra): la forza magnetica agente su un filo percorso da corrente è $\vec{F}_B = l\vec{i}\times\vec{B}$, quindi nel nostro caso si ha:

$$\vec{F}_{1,2} = \pm\frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi a}\hat{e}_x \tag{1.5.36}$$

che è quello che si osserva sperimentalmente: se le correnti sono concordi i fili si attraggono, se sono discordi si respingono.

1.5.2 Spira in un campo magnetico uniforme

Consideriamo una spira quadrata ς di lato l percorsa da una corrente stazionaria i ed immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, formando un angolo θ con esso e potendo ruotare rispetto all'asse x.
Fissiamo un sistema di riferimento con asse z lungo $\vec{B}$, la forza agente sulla spira sarà:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= i\oint_\varsigma d\vec{l}\times\vec{B} = iB\oint_\varsigma d\vec{l}\times\hat{e}_z \\
&= iB\int_{x_-} dl\,(\sin\theta\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z)\times\hat{e}_z + iB\int_{x_+} -dl\,(\sin\theta\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z)\times\hat{e}_z + \\
&\qquad + iB\int_{z_+} dx\,\hat{e}_x\times\hat{e}_z + iB\int_{z_-} -dx\,\hat{e}_x\times\hat{e}_z \\
&= i\,lB\sin\theta\,\hat{e}_x - i\,lB\sin\theta\,\hat{e}_x - i\,lB\,\hat{e}_y + i\,lB\,\hat{e}_y = 0
\end{aligned} \tag{1.5.37}$$

Dunque la spira non trasla, bensì ruota a causa del momento torcente dovuto alle forze espresse dagli ultimi due integrali (asse di rotazione è x):

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- \\ &= -\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\hat{e}_y + \sin\theta\,\hat{e}_z\right) \times \left(-ilB\,\hat{e}_y\right) + \frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\hat{e}_y + \sin\theta\,\hat{e}_z\right) \times \left(ilB\,\hat{e}_y\right) \\ &= i\,l^2 B\sin\theta\,\hat{e}_x = mB\sin\theta\,\hat{e}_x\end{aligned} \tag{1.5.38}$$

Si riconosce un prodotto vettoriale, ottenendo la formula generale (per spire piane):

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{1.5.39}$$

Possiamo anche calcolare il lavoro necessario a far ruotare la spira di un angolo θ:

$$W = \int_0^\theta \vec{\tau}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\theta} = -\int_0^\theta \tau\,d\theta = -i\,l^2 B \int_0^\theta \sin\theta\,d\theta = -i\,l^2 B\,(1-\cos\theta) \tag{1.5.40}$$

quindi possiamo definire l'energia potenziale della spira (a meno di sostante il^2B):

$$U(\theta) = -\vec{m}\cdot\vec{B} \tag{1.5.41}$$

1.5.3 Spira in campo magnetico non uniforme

Consideriamo di nuovo una spira quadrata di lato l parallela al piano xy, questa volta in un campo magnetico non uniforme $\vec{B}$ ortogonale ad essa.
Assumiamo per semplificare che $\vec{B} = \vec{B}(x)$: le forze sui lati y_+ e y_- sono continuamente bilanciate, quindi possiamo concentrarci su quelle sui lati x_+ e x_-: $\vec{F}_- = -i\,lB_-\,\vec{e}_x$ e $\vec{F}_+ = i\,lB_+\,\vec{e}_x$. Il lavoro effettuato per portare la spira da una regione a campo nullo x_0 alle posizioni finali x_- e x_+ è:

$$\begin{aligned}W = W_- + W_+ &= -\int_{x_0}^{x_+} \vec{F}_+ \cdot d\vec{l} - \int_{x_0}^{x_-} \vec{F}_- \cdot d\vec{l} = -i\,l\int_{x_0}^{x_+} B(x)\,dx + i\,l\int_{x_0}^{x_+} B(x)\,dx \\ &= -i\,l\int_{x_-}^{x_+} B(x)\,dx\end{aligned} \tag{1.5.42}$$

Supponendo che la spira sia piccola rispetto alla scala di distanze su cui varia il campo magnetico, possiamo assumere che su tutta la spira e per tutto il moto il campo magnetico sulla spira assuma il valore che ha al suo centro, quindi $W \approx -i\,l^2B(x_c) = -m\,B(x_c)$; inoltre, dato che $\vec{F} = i\,l\left(\vec{B}(x_+) - \vec{B}(x_-)\right)$, sviluppando al prim'ordine otteniamo la forza totale agente sulla spira:

$$\vec{F} = m\frac{\partial B}{\partial x}\hat{e}_x \tag{1.5.43}$$

Consideriamo ora il caso più generale $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$, ponendo ora la spira nel piano yz: approssimiamo comunque il valore del campo magnetico su ciascun lato al valore che esso assume nei rispettivi punti medi:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= i\oint_\varsigma d\vec{l}\times\vec{B} = i\left[\int_{z_-}^{(1)} d\vec{l}\times\vec{B} + \int_{y_+}^{(2)} d\vec{l}\times\vec{B} + \int_{z_+}^{(3)} d\vec{l}\times\vec{B} + \int_{z_-}^{(4)} d\vec{l}\times\vec{B}\right] \\ &= i\left[\int_0^l dy\,\hat{e}_y \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_3) + \int_0^d dz\,\hat{e}_z \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_4)\right] \\ &\qquad \text{sviluppo rispetto al centro della spira} \\ &= i\,l\left[-\int_0^l dy\,\hat{e}_y \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial z} + \int_0^l dz\,\hat{e}_z \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right] = m_c\left[-\hat{e}_y \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial z} + \hat{e}_z \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right] \\ &= m_c\left[-\frac{\partial B_z}{\partial z}\hat{e}_x + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{e}_z - \frac{\partial B_y}{\partial y}\hat{e}_x + \frac{\partial B_x}{\partial y}\hat{e}_y\right] \\ &\qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= m_0\left[\frac{\partial B_x}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial B_y}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial B_z}{\partial z}\hat{e}_z\right] = m_0\nabla B_x\end{aligned} \tag{1.5.44}$$

Si nota che il dipolo orientato lungo l'asse x seleziona la componente B_x per calcolare la forza totale sulla spira; si può generalizzare ad un'orientazione generica del dipolo:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \tag{1.5.45}$$

1.5.4 Strato di corrente uniforme

Consideriamo uno strato infinito di spessore $2a$ (spessore lungo asse x) percorso da una densità di corrente $\vec{J} = J\,\hat{e}_z$ uniforme: per la legge di Biot-Savart $\vec{B} \perp \vec{J}$, quindi $B_z = 0$; inoltre, se per assurdo fosse $B_x \neq 0$, allora invertendo $\vec{J}$ si dovrebbe invertire anche il segno di B_x, ma, dato che lo strato è infinito, invertire $\vec{J}$ significa invertire l'asse x, e non ha senso fisico che il campo magnetico dipenda dal sistema di riferimento, quindi bisogna avere anche $B_x = 0$, quindi per simmetria $\vec{B} = B(x)\,\hat{e}_y$; infine, sempre per la legge di Biot-Savart, ed in particolare per il termine $\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')$, si deve avere $B(0) = 0$ e $\operatorname{sgn} B(x) = \operatorname{sgn} x$.
Poniamoci nel caso $x > 0$ e distinguiamo tra $x < a$ e $x > a$, considerando sempre un loop γ rettangolare sul piano xy di lunghezza l sull'asse y: nel caso $x < a$ il loop è completamente contenuto nello strato, quindi la legge di Amère dà:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(x)l - B(0)l = B(x)l = \mu_0 i = \mu_0 \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 Jxl \implies B(x) = \mu_0 Jx \tag{1.5.46}$$

Per $x > a$, invece, il loop intercetta la corrente solo fino ad $x = a$, dunque si trova che $B(x) = \mu_0 Ja$; in definitiva, l'espressione del campo magnetico è:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 Jx\,\hat{e}_y & |x| < a \\ \mu_0 Ja\,\mathrm{sgn}(x)\,\hat{e}_y & |x| \geq a \end{cases} \tag{1.5.47}$$

1.5.5 Guscio sferico carico rotante

Consideriamo un guscio sferico uniformemente carico di raggio R e carica superficiale σ, in rotazione con velocità angolare $\vec{\Omega}$, e fissiamo gli assi in modo che l'asse z sia allineato a $\vec{r}$ e $\vec{\Omega}$ giaccia sul piano xz: poiché la carica è in movimento, si avrà una densità superficiale di corrente $\vec{K}(\vec{r}\,') = \sigma\vec{v}\,' = \sigma\vec{\Omega} \times \vec{r}\,'$.
Detto ψ l'angolo tra Ω e $\hat{e}_z$ e posto $\vec{r} = r\,\hat{e}_z$, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times \vec{r}\,' &= (\omega \sin\psi\,\hat{e}_x + \omega\cos\psi\,\hat{e}_z) \times R(\sin\theta'\cos\phi'\,\hat{e}_x + \sin\theta'\sin\phi'\,\hat{e}_y + \cos\theta'\,\hat{e}_z) \\ &= R\omega\left[-\cos\psi\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{e}_x + (\cos\psi\sin\theta'\cos\phi' - \sin\psi\cos\theta')\,\hat{e}_y + \sin\psi\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{e}_z\right] \end{aligned} \tag{1.5.48}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}\,'} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta'} \tag{1.5.49}$$

Il potenziale vettore è dato da $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dS' = \frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\vec{\Omega}\times\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$, ma il denominatore non dipende da ϕ', mentre il numeratore vi dipende solo tramite funzioni trigonometriche semplici che hanno integrale nullo su $[0, 2\pi]$, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0\sigma R^3\omega}{4\pi} 2\pi\sin\psi \int_0^\pi \frac{-\cos\theta'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta'}} \sin\theta' d\theta'\,\hat{e}_y \\ &\qquad \cos\theta' = x \\ &= \frac{\mu_0}{2}\sigma R^3\omega\sin\psi \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}} dx \\ &= \frac{\mu_0}{2}\sigma R^3\omega\sin\psi \left[-\frac{1}{3R^2r^2}\left((r^2 + R^2 + rR)\,|R - r| - (r^2 + R^2 - rR)(R + r)\right)\right] \end{aligned} \tag{1.5.50}$$

Semplificando, otteniamo:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{3}\sigma rR\omega\sin\psi\,\hat{e}_y & r < R \\ -\frac{\mu_0}{3}\sigma\dfrac{R^4}{r^2}\omega\sin\psi\,\hat{e}_y & r > R \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3}\sigma R\vec{\Omega} \times \vec{r} & r < R \\ \frac{\mu_0}{3}\sigma\dfrac{R^4}{r^3}\vec{\Omega} \times \vec{r} & r > R \end{cases} \tag{1.5.51}$$

Si nota che per $r > R$ il potenziale ha la stessa forma matematica del potenziale di dipolo 1.4.30, ponendo $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^4\sigma\vec{\Omega}$.

Ruotiamo ora il sistema di riferimento in modo che l'asse z sia lungo $\vec{\Omega}$: ora $\vec{\Omega} = \omega\hat{e}_z = \omega(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta)$ e $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$, quindi $\vec{\Omega}\times\vec{r} = \omega r\sin\theta\,\hat{e}_\phi$ e:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{3}\sigma r R\omega\sin\theta\,\hat{e}_\phi & r < R \\ -\frac{\mu_0}{3}\sigma\dfrac{R^4}{r^2}\omega\sin\theta\,\hat{e}_\phi & r > R \end{cases} \tag{1.5.52}$$

Per calcolare il campo magnetico, ricordiamo il rotore in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \nabla\times\vec{A} \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right)\hat{e}_\theta + \\ &\qquad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_\phi \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)\,\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\,\hat{e}_\theta \end{aligned} \tag{1.5.53}$$

Nel caso $r < R$:

$$B_r = \frac{\mu_0}{3}\frac{\sigma r R\omega}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\theta = \frac{2\mu_0}{3}\sigma R\omega\cos\theta \tag{1.5.54}$$

$$B_\theta = -\frac{\mu_0}{3}\sigma R\omega\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta) = -\frac{2\mu_0}{3}\sigma R\omega\sin\theta \tag{1.5.55}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R\,\hat{e}_z \tag{1.5.56}$$

Nel caso $r > R$:

$$B_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mu_0}{3}\frac{\sigma R^4\omega}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\theta = \frac{2\mu_0}{3}\frac{\sigma R^4\omega}{r^3}\cos\theta \tag{1.5.57}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\mu_0}{3}\sigma R^4\omega\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mu_0}{3}\frac{\sigma R^4\omega}{r^3}\sin\theta \tag{1.5.58}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{3r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right) \tag{1.5.59}$$

Quindi in definitiva:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R\,\hat{e}_z & r < R \\ \dfrac{\mu_0\sigma R^4\omega}{3r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right) & r > R \end{cases} \tag{1.5.60}$$

Si noti che all'interno del guscio il campo magnetico è uniforme e diretto lungo l'asse di rotazione, mentre all'esterno è equivalente a quello di un dipolo magnetico con $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^4\sigma\vec{\Omega}$.

2 Relatività

2.1 Relatività Ristretta

La relatività ristretta si basa su due postulati:

1. tutte le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, non esiste un sistema di riferimento privilegiato;

2. la velocità della luce nello spazio vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Il secondo postulato è in evidente contrasto con la relatività galileiana ma ha evidenze sia di natura teorica che sperimentale.

2.1.1 Equivalenza dei sistemi di riferimento

Consideriamo il seguente Gedankenexperiment: una persona è in un vagone che viaggia a velocità $\vec{v}$ e si guarda in uno specchio posto a distanza l in direzione opposta al verso del moto: se la velocità della luce risentisse del sistema di riferimento dell'osservatore, si avrebbe:

$$\Delta t = \Delta t_{\text{andata}} + \Delta t_{\text{ritorno}} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \tag{2.1.61}$$

quindi il viaggiatore potrebbe così misurare la velocità del vagone ad ogni istante, distinguendo tra sistemi inerziali diversi e quindi violando il primo postulato.

2.1.2 Equivalenza delle leggi fisiche

Uno dei principali risultati della teoria di Maxwell è stato l'unificazione dei fenomeni elettrici e magnetici nel campo elettromagnetico, predicendo l'esistenza di onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto alla velocità costante $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$: poiché le leggi fisiche devono essere le stesse in ogni sistema inerziale, c non può dipendere dal sistema di riferimento.

2.1.3 Esperimento di Michelson-Morley

Al tempo della loro teorizzazione e scoperta, era ragionevole pensare che le onde elettromagnetiche si propagassero in un mezzo trasparente e non interagente con la materia, detto etere.
Per rilevare la presenza di questo etere, si cercò di evidenziare la differenza di tempo impiegata da due raggi luminosi per viaggiare per la stessa distanza in due direzioni perpendicolare e parallela al vento d'etere, assumendo che questo viaggi a $v \ll c$:

$$\Delta t_{\parallel} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{2.1.62}$$

Per quanto riguarda la direzione ortogonale al vento d'etere, bisogna contare che mentre il raggio percorre $c\Delta t'$ l'intero sistema trasla ortogonalmente ad esso di $v\Delta t'$, quindi per il teorema di Pitagora $c^2\Delta t'^2 = v\Delta t'^2 + l^2$, ovvero:

$$\Delta t_{\perp} = 2\Delta t' = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{2.1.63}$$

Si vede quindi che la differenza tra i due tempi è $\frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2}$, che per la velocità di rivoluzione della Terra è dell'ordine di 10^{-7}s. Invece di misurarla direttamente, Michelson e Morley misurarono il diagramma di interferenza generato dai due fasci, ruotando l'apparato in varie direzioni per vedere in quale i diagrammi risultassero diversi: contrariamente all'ipotesi dell'esistenza dell'etere, non si evidenziò alcuna variazione di tali diagrammi.

2.2 Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo due sistemi di riferimento $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$, inizialmente coincidenti e con $\mathcal{S}'$ in moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$.
Innanzitutto, le trasformazioni che legano le coordinate tra i due sistemi devono essere lineari, altrimenti ad esempio si avrebbe che la lunghezza di un segmento dipenderebbe dalla sua posizione, contraddicendo il principio di omogeneità ed isotropia dello spazio; possiamo poi notare che il moto interessa soltanto la direzione x, dunque (y', z') possono dipendere solo da (y, z), e dato che all'istante iniziale le origini coincidono si ha $y' = \alpha y$, $z' = \beta z$.
Consideriamo una sbarra di lunghezza l lungo l'asse y: l'osservatore in $\mathcal{S}'$ la misurerà lunga $l' = \alpha l$; viceversa, se la sbarra si trova lungo y', l'osservatore in $\mathcal{S}$ la misurerà lunga $l = \frac{1}{\alpha} l'$. Dato che i due sistemi di riferimento devono essere equivalenti, si deve avere $l = l'$ (altrimenti sarebbero distinguibili), quindi $\alpha = 1$, ovvero $y' = y$ ed analogamente $z = z'$.
Consideriamo ora che, nel sistema $\mathcal{S}$, $O' = (vt, 0, 0, t)$, dunque per $x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t$ vale il vincolo $0 = \alpha vt + \beta y + \gamma z + \delta t \; \forall y, z \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \beta = \gamma = 0 \wedge \delta = -v\alpha$, quindi $x' = \alpha(x - vt)$; inoltre, dato il principio di isotropia dello spazio, t' può dipendere solo da (x, t), ovvero $t' = \beta x + \gamma t$.
Dal secondo postulato sappiamo che una sorgente luminosa puntiforme si espande come simmetria sferica in entrambi i sistemi ed alla stessa velocità c, quindi possiamo scrivere $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ e $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ e otteniamo:

$$(x^2 - x'^2) + (y^2 - y'^2) + (z^2 - z'^2) - c^2(t^2 - t'^2) = 0 \tag{2.2.64}$$

Sostituendo le espressioni trovate prima e svolgendo i calcoli, otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 1 - \alpha^2 + c^2\beta^2 = 0 \\ c^2\delta^2 - \alpha^2 v^2 - c^2 = 0 \\ \alpha^2 v + c^2\beta\delta = 0 \end{cases} \tag{2.2.65}$$

che ha come soluzione $\alpha = \delta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ e $\beta = -\frac{v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.
Definendo il fattore di Lorentz $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \in [1, \infty)$, otteniamo quindi l'espressione delle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \gamma\,(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \tag{2.2.66}$$

2.2.1 Contrazione delle lunghezze

Consideriamo una barra in moto rettilineo uniforme con $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$: nel sistema di riferimento solidale alla barra essa ha coordinate $x'_1 = 0$ e $x'_2 = l'$, mentre, assumendo di effettuare la misura a $t = 0$, per un osservatore essa ha estremi $x_1 = 0$ e $x_2 = l$: per le trasformazioni di Lorentz, sappiamo che $x' = \gamma(x - vt)$, quindi osserviamo il fenomeno della contrazione delle lunghezze (poiché $\gamma \geq 1$):

$$l = \frac{l'}{\gamma} \tag{2.2.67}$$

ovvero un osservatore in quiete misura una lunghezza minore di un oggetto in movimento rispetto ad un osservatore solidale all'oggetto. Ciò non è un effetto apparente, ma è una vera contrazione dello spazio stesso, il quale diventa appunto relativo.

2.2.2 Dilatazione dei tempi

Consideriamo ora un orologio in $\mathcal{S}'$ in una posizione fissata x'_1 e immaginiamo che un osservatore solidale a $\mathcal{S}'$ faccia due misure di tempi t'_1 e t'_2: allora per le trasformazioni di Lorentz un osservatore in $\mathcal{S}$ misurerà $t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_1\right)$ e $t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1\right)$, dunque possiamo osservare il fenomeno della dilatazione dei tempi:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{2.2.68}$$

ovvero un osservatore in quiete misura dei tempi maggiori per un evento rispetto ad un osservatore solidale a tale evento: il tempo non è più un'entità assoluta.

È possibile ricavare la dilatazione dei tempi anche senza trasformazioni di Lorentz: consideriamo un orologio costituito da un segnale luminoso che rimbalza tra due specchi in $\mathcal{S}'$ posti a distanza l': evidentemente $\Delta t' = \frac{2l'}{c}$. Per l'osservatore in $\mathcal{S}$ il segnale luminoso compie un moto a zig-zag rimbalzando tra gli specchi in moto, percorrendo in un rimbalzo una distanza $l\,:\,l^2 = l'^2 + \frac{v^2\Delta t^2}{4}$, con Δt il tempo che il segnale compie per completare un periodo (ovvero due rimbalzi): dato che, d'altra parte, anche in $\mathcal{S}$ la luce viaggia a c, si ha $4\left(l'^2 + \frac{v^2\Delta t^2}{4}\right) = c^2\Delta t^2 \;\Rightarrow\; \Delta t^2 = \frac{4l'^2}{c^2}\gamma^2$, ovvero proprio la dilatazione dei tempi $\Delta t = \gamma\Delta t'$.

2.3 Quadrivettori e Tensore Metrico

Come suggerito dalle trasformazioni di Lorentz, spazio e tempo non sono indipendenti ma legati tra loro, quindi adottiamo un punto di vista quadri-dimensionale definendo $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$; possiamo scrivere le trasformazioni di Lorentz come:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{2.3.69}$$

dove è stato definito $\beta \equiv \frac{v}{c}$.
Adottando la convezione di sommatoria sottintesa di Einstein, definiamo il quadrivettore controvariante $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$ e il suo corrispettivo covariante $x_\mu \equiv (ct, -x, -y, -z)$: le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la quantità $x^\mu x_\mu \equiv x \cdot x$, detto invariante di Lorentz.
Per passare dalle componenti controvarianti a quelle covarianti e viceversa si utilizza il tensore metrico $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$: $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\mu$.
Possiamo scrivere le trasformazioni di Lorentz come:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2.3.70}$$

dove la matrice di trasformazione Λ^μ_ν è data da 5.2.194.

2.3.1 Cinematica relativistica

Dato che le trasformazioni di Lorentz sono lineari, anche il differenziale di un quadrivettore gode di tutte le proprietà di un quadrivettore; se prendiamo il suo modulo:

$$dx^\mu dx_\mu = c^2dt^2 - |d\vec{r}|^2 \equiv d\tau^2 \tag{2.3.71}$$

Possiamo dunque definire il tempo proprio (ha però le dimensioni di una distanza):

$$d\tau = c\,dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{|d\vec{r}|}{dt}\right)^2} = \frac{c}{\gamma}\,dt \tag{2.3.72}$$

invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz (ovvero lo stesso in tutti i sistemi di riferimento inerziali).
Vediamo come trasforma la velocità $\vec{u}$ di un punto $P \in \mathcal{S}$ in un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ in moto relativo rettilineo uniforme rispetto ad esso con velocità $\vec{v}$; dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} dx^0 &= \gamma(dx'^0 + \beta dx'^1) \qquad & dx^2 &= dx'^2 \\ dx^1 &= \gamma(\beta dx'^0 + dx'^1) \qquad & dx^3 &= dx'^3 \end{aligned} \tag{2.3.73}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} u^1 &= c\frac{dx^1}{dx^0} = c\frac{\beta dx'^0 + dx'^1}{dx'^0 + \beta dx'^1} = \frac{v + u'^1}{1 + \frac{vu'^1}{c^2}} \\ u^{2,3} &= c\frac{dx^{2,3}}{dx^0} = \frac{u'^{2,3}}{\gamma(1 + \frac{vu'^1}{c^2})} \end{aligned} \tag{2.3.74}$$

ovvero, generalizzando:

$$u_\parallel = \frac{v + u'_\parallel}{1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}\,'}{c^2}} \qquad\qquad u_\perp = \frac{1}{\gamma}\frac{u'_\perp}{1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}\,'}{c^2}} \tag{2.3.75}$$

Si possono notare due importanti conseguenze: innanzitutto se $|u'| = c$ allora anche $|u| = c$, in accordo con il secondo postulato; inoltre, se la quantità di moto è conservata in un sistema di riferimento, in generale essa non sarà conservata anche nell'altro.
Da queste leggi di trasformazione notiamo che la velocità non è un quadrivettore; per avere una velocità che abbia le proprietà dei quadrivettori, dobbiamo definire la quadrivelocità:

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\,(1, \vec{\beta}) \tag{2.3.76}$$

Si nota che $\eta^2 = 1$, ovvero che η^μ è una quantità adimensionale.
Analogamente, definiamo il quadrimomento:

$$p^\mu \equiv m_0 c^2 \eta^\mu = \gamma m_0 c^2 (1, \vec{\beta}) \tag{2.3.77}$$

dove m_0 è la massa a riposo del corpo.
Si nota che $p^2 = m_0^2\, c^4$, ovvero che p^μ ha le dimensioni di un'energia.

2.3.2 Dinamica relativistica

Riprendiamo le tre leggi di Newton:

1. prima legge: viene inglobata nel primo postulato di Einstein;
2. seconda legge: vale anche in relatività ristretta come $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, con $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$;
3. terza legge: non vale in relatività ristretta, poiché si basa sulla simultaneità delle forze, concetto che cambia in relatività rispetto alla meccanica classica.

Consideriamo una particella soggetta ad una forza costante $\vec{F}$ e consideriamo un sistema di riferimento con asse x orientato lungo $\vec{F}$, facendo l'ulteriore semplificazione che $\vec{p}(0) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p}(t) \parallel \vec{F}\; \forall t \in \mathbb{R}^+$, così da poter scrivere:

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad p(t) = Ft = \frac{m_0 v(t)}{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \tag{2.3.78}$$

Prendendo il modulo quadro:

$$\frac{m_0^2\, c^2 \beta^2}{1-\beta^2} = F^2 t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v^2(t) = c^2 \frac{F^2 t^2}{m_0^2\, c^2 + F^2 t^2} \tag{2.3.79}$$

Si evidenziano due comportamenti asintotici:

- limite non-relativistico: $Ft \ll m_0 c \;\Rightarrow\; v(t) \approx \frac{F}{m_0} t$;
- limite ultra-relativistico: $Ft \gg m_0 c \;\Rightarrow\; v(t) \to c$.

Possiamo determinare la traiettoria integrando:

$$\begin{aligned} x(t) = c \int_o^t \frac{Ft'}{\sqrt{m_0^2\, c^2 + F^2 t'^2}} dt' &= c \int_0^t \frac{\frac{Ft'}{m_0 c}}{\sqrt{1 + (\frac{Ft'}{m_0 c})^2}} \\ y \equiv \frac{Ft'}{m_0 c} & \\ = \frac{m_0 c^2}{F} \int_0^{\frac{Ft}{m_0 c}} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy + x_0 &= \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right) + x_0 \end{aligned} \tag{2.3.80}$$

Nel limite non relativistico $\frac{Ft}{m_0 c} \ll 1$, quindi $x(t) \approx x_0 + \frac{1}{2}\frac{F}{m} t^2$, che è proprio quello che ci aspetteremmo dalla meccanica classica: la soluzione classica è un ramo di parabola, mentre quella realtivistica è un ramo di iperbole.
Vediamo ora come diventa il teorema dell'energia cinetica in ambito relativistico:

$$\begin{aligned} W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^t \frac{d\vec{p}}{dt'} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt'} dt' &= \int_0^t \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt'} + \frac{1}{2} \frac{m_0 2 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt'}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right] \cdot \vec{v}\, dt' \\ = \int_0^t \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \frac{dv}{dt'} \left[1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] dt' &= \int_0^t \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt'} dt' = \int_0^t \frac{d}{dt'} \left(\gamma m_0 c^2\right) dt' \end{aligned} \tag{2.3.81}$$

Dato che $W = K$, abbiamo le espressioni per l'energia totale, l'energia cinetica e l'energia a riposo della particella:

$$E = \gamma m_0 c^2 \qquad K = m_0 c^2(\gamma - 1) \qquad E_0 = m_0 c^2 \tag{2.3.82}$$

Nel limite non relativistico $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, quindi si ottiene giustamente $K \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$.
Infine, possiamo vedere come trasforma la forza $\vec{F}$ in un sistema di riferimento in moto relativo con $\vec{v} = -v\,\hat{e}_x$:

$$F'_{y,z} = \frac{dp'_{y,z}}{dt'} = \frac{dp_{y,z}}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)} = \frac{F_{y,z}}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}v_x)} \tag{2.3.83}$$

Dato che $p^\mu = (E, c\vec{p})$, si ha $dp'_x = \frac{dp'^1}{c} = \gamma(-\beta\frac{dE}{c} + dp_x)$, quindi:

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma(-\beta\frac{dE}{c} + dp_x)}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)} = \frac{F_x - \frac{\beta}{c}\frac{dE}{dt}}{1 - \frac{\beta}{c}v_x} = \frac{F_x - \frac{\beta}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}}{1 - \frac{\beta}{c}v_x} \tag{2.3.84}$$

dove abbiamo ripreso $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$. Generalizzando:

$$F_\parallel = \frac{F_\parallel - \frac{\beta}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}}{1 - \frac{\beta}{c}\,|\vec{v}|} \qquad F_\perp = \frac{F_\perp}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}\,|\vec{v}|)} \tag{2.3.85}$$

Si può anche definire un quadrivettore forza, detto forza di Minkowski:

$$f^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \vec{F}\right) \tag{2.3.86}$$

2.4 Campo Elettromagnetico

I pilastri dell'elettrostatica sono la legge di Coulomb e quella di Gauss: il linea di principio, non ci sarebbe nessun motivo per cui esse debbano valere anche per cariche in moto, ed infatti la legge di Coulomb vale solo per cariche ferme (o, in maniera approssimativa, se $v \ll c$); d'altra parte, sperimentalmente si osserva che la legge di Gauss vale anche per cariche in moto, quindi in un certo senso essa è una legge più generale di quella di Coulomb.
Una conseguenza di ciò è che la carica è un invariante relativistico: essa è indipendente dal sistema di riferimento, e dunque dalla velocità (a differenza, ad esempio, della massa, per la quale vale $m = \gamma m_0$): intuitivamente, ciò viene evidenziato, ad esempio, considerando un conduttore neutro e notando che aumentandone, la temperatura, la velocità degli elettroni aumenta più della velocità degli ioni, quindi se la carica dipendesse dalla temperatura si potrebbe caricare il conduttore semplicemente scaldandolo.
Se la carica è invariante, si vede che le densità di carica non lo sono.
Consideriamo una superficie piana con densità di carica $\sigma = \frac{q}{S}$: se essa si muove con velocità $\vec{v}$ nella direzione di uno dei due lati, il lato parallelo a $\vec{v}$ subirà la contrazione di un fattore γ^{-1} per un osservatore esterno, dunque $S' = \gamma^{-1}S$:

$$\sigma' = \gamma\sigma \tag{2.4.87}$$

2.4.1 Trasformazioni di Lorentz del campo elettrico

Consideriamo un condensatore a facce piane parallele con densità di carica $\pm\sigma$ a riposo in un sistema di riferimento $\mathcal{S}$ e calcoliamo il campo elettrico in un sistema $\mathcal{S}'$ in moto con $\vec{v} = -v\,\hat{e}_x$: il campo elettrico tra le armature in $\mathcal{S}$ è $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{e}_y$, ma a priori non sappiamo come esso sia visto da $\mathcal{S}'$, quindi assumiamo che abbia un componente lungo $\hat{e}_x$ (ignoriamo per il momento il campo magnetico).
Se prendiamo il campo tra le due armature, dato che le densità di carica sono opposte in segno anche le componenti E_x dei due campi elettrici saranno opposte in segno, quindi si elideranno tra loro: tra le due armature il campo elettrico rimane ortogonale ad esse. Se prendiamo come superficie gaussiana un parallelepipedo di sezione orizzontale S che intersechi una delle due armature (WLOG quella con $+\sigma$), la legge di Gauss ci dà $\Phi(E') = E'S' = \frac{\sigma' S'}{\epsilon_0}$, dunque ricaviamo la legge di trasformazione:

$$E'_\perp = \gamma E_\perp \tag{2.4.88}$$

Applicando la stessa analisi ad un condensatore che invece si muova parallelamente al campo elettrico, ad esempio $\vec{v} = v\,\hat{e}_z$, si trova:

$$E'_\parallel = E_\parallel \tag{2.4.89}$$

Queste trasformazioni sono generali e valgono per qualsiasi configurazione delle sorgenti.

2.4.2 Campo elettrico di una carica in moto

Consideriamo una carica q a riposo in un sistema di riferimento $\mathcal{S}$: il suo campo elettrico è dato da:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \quad \text{(campo radiale)} \tag{2.4.90}$$

Consideriamo ora un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ in moto con $\vec{v} = -v\,\hat{e}_x$ (O' vede la carica muoversi con $+v\,\hat{e}_x$) tale che le origini coincidano a $t=0$: in generale $x = \gamma(x' + \beta ct')$ e $t = \gamma(t' - \frac{\beta}{c}x')$, quindi all'istante iniziale si ha $x = \gamma x'$ e $y = y'$, quindi:

$$\vec{E}'(\vec{r}\,') = E'_x\,\hat{e}_x + E'_y\,\hat{e}_y = E_x\,\hat{e}_x + \gamma E_y\,\hat{e}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma x'\,\hat{e}_x + \gamma y'\,\hat{e}_y}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} \tag{2.4.91}$$

Quindi il campo continua ad essere radiale ($\frac{E'_y}{E'_x} = \frac{y'}{x'}$). Per quando riguarda il modulo, svolgendo i calcoli si trova:

$$E'(\vec{r}\,') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{2.4.92}$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{r}\,'$ e $\vec{v}$.
Tenendo r' fissato, si vede subito che $E'(\frac{\pi}{2}) = \gamma E \geq E = E'(0)$, ovvero il campo elettrico di una carica in moto è maggiore nella direzione perpendicolare allo spostamento: di conseguenza, il campo elettrico non è più conservativo, poiché $\oint_\gamma \vec{E}'\cdot d\vec{l} \neq 0$ se si considera ad esempio un arco di corona tra $[r'_1, r'_2]$ e $[0, \frac{\pi}{2}]$, ovvero $\nabla\times\vec{E}' \neq 0$.
Dato che il campo elettrico varia in modulo in base alla direzione e che col passare del tempo la carica si muove, se fissiamo un punto nello spazio e misuriamo il campo elettrico lì ad ogni istante misureremo un campo diverso: una carica in moto genera un campo elettrico variabile nel tempo.
Consideriamo ora una carica inizialmente ferma in $x=0$: il campo elettrico è radiale e non dipende dalla direzione.
Se la carica si mette in moto, nelle sue immediate vicinanze il campo elettrico è quello di una carica in movimento, appena determinato; lontano dalla carica, invece, e più precisamente all'esterno di una sfera centrata in $x=0$ e di raggio ct, l'informazione che la carica si è messa in moto non è ancora arrivata ed il campo è ancora quello elettrostatico: si viene quindi a creare un guscio sferico all'interfaccia tra queste due regioni, viaggiante a c, in cui le linee di campo si devono raccordare, dunque non sono radiali ma essenzialmente tangenti alla sfera (lo spessore di questo guscio dipende dall'accelerazione iniziale della carica).
L'accelerazione della carica ha quindi generato un impulso viaggiante alla velocità della luce in cui il campo elettrico è praticamente perpendicolare alla direzione di propagazione dell'impulso: si vedrà che questo impulso è associato ad un campo magnetico e che il fronte della perturbazione è un'onda elettromagnetica che si propaga.
Supponiamo ora che la carica si fermi bruscamente in un istante che ridefiniremo come $t=0$ ed in una nuova posizione $x=0$: in ogni istante successivo a $t=0$ il campo interno alla sfera centrata in $x=0$ e di raggio ct è quello elettrostatico di una carica puntiforme, mentre, all'esterno di questa sfera l'informazione ancora non è arrivata ed il campo è ancora quello di una carica in moto che si trovasse dopo il punto in cui la carica si è fermata, ovvero nel punto $x = vt$; all'interfaccia tra le due ragioni si viene a creare di nuovo un guscio sferico analogo al precedente.
Consideriamo una linea di campo singola (WLOG nel caso di decellerazione) e cerchiamo la relazione tra il suo tratto all'interno del guscio sferico e all'esterno di esso, caratterizzati da due angoli θ_0 e ϕ_0 (dentro e fuori) rispetto alla direzione di $\vec{v}$ (WLOG $\hat{e}_x$): per farlo, consideriamo il loop in figura.

INSERIRE LA FIGURA

In particolare, consideriamo i punti A ed F tali che essi si trovino ad una distanza fissata r rispettivamente $x=0$ e da $x=vt$ e prendiamo la superficie gaussiana data dalla rotazione del loop attorno all'asse x: per il teorema di Gauss il flusso totale del campo elettrico attraverso questa superficie deve esse nullo, ed inoltre si nota che gli unici tratti del loop che contribuiscono al flusso sono i due archi all'interno ed all'esterno del guscio, poiché in tutti gli altri tratti il campo è parallelo alla superficie. Questi flussi sono:

$$\Phi_{\text{interno}} = \int_{\text{arco interno}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}2\pi r^2\int_0^{\theta_0}\sin\theta\,d\theta = -\frac{q}{2\epsilon_0}(1-\cos\theta_0) \tag{2.4.93}$$

$$\Phi_{\text{esterno}} = \int_{\text{arco esterno}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2\pi r^2 \int_0^{\phi_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\phi)^{3/2}} \sin\phi \, d\phi \tag{2.4.94}$$

Risolvendo l'integrale si trova il flusso totale $\Phi = \Phi_{\text{interno}} + \Phi_{\text{esterno}}$:

$$\Phi = -\frac{q}{2\epsilon_0}(1-\cos\theta_0) + \frac{q}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{\sqrt{2}\cos\phi_0}{\sqrt{2-\beta^2+\beta^2\cos 2\phi_0}}\right] = 0 \tag{2.4.95}$$

da cui:

$$\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{2}\cos\phi_0}{\sqrt{2(1-\beta^2\sin^2\phi_0)}} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\theta_0 = \frac{\cos^2\phi_0}{1-\beta^2\sin^2\phi_0} \tag{2.4.96}$$

Semplificando:

$$\tan^2\theta_0 = \sin^2\theta_0 \frac{1-\beta^2\sin^2\phi_0}{\cos^2\phi} = \left[1 - \frac{\cos^2\phi_0}{1-\beta^2\sin^2\phi_0}\right]\frac{1-\beta^2\sin^2\phi_0}{\cos^2\phi_0} = \frac{1-\cos^2\phi_0}{\cos^2\phi_0} - \beta^2\tan^2\phi_0 \tag{2.4.97}$$

Dato che $1-\cos^2\phi_0 = \sin^2\phi_0$ e $1-\beta^2 = \gamma^{-2}$, otteniamo la relazione semplificata:

$$\tan\phi_0 = \gamma\tan\theta_0 \tag{2.4.98}$$

2.4.3 Trasformazioni di $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Consideriamo di nuovo un condensatore a facce piane parallele che si muove con velocità $\vec{u} = u\,\hat{e}_x$ in un sistema di riferimento $\mathcal{S}$, nel quale i piani hanno densità di carica $\pm\sigma$ e corrente $\vec{K} = \pm\sigma\vec{u}$, le quali generano un campo elettrico $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{e}_y$ ed uno magnetico $\vec{B} = \mu_0\sigma u\,\hat{e}_z$ nello spazio fra i piani.
Consideriamo ora un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ in moto rispetto ad $\mathcal{S}$ con $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$: in esso il condensatore avrà velocità:

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} = c\frac{\beta_u - \beta}{1-\beta_u\beta} \tag{2.4.99}$$

Di conseguenza:

$$\gamma_{u'}^2 = \frac{1}{1-\frac{u'^2}{c^2}} = \frac{(1-\beta_u\beta)^2}{(1-\beta_u\beta)^2-(\beta_u-\beta)^2} = \frac{(1-\beta_u\beta)^2}{1+\beta_u^2\beta^2-\beta_u^2-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta_u^2}\frac{1}{1-\beta^2}(1-\beta_u\beta)^2 \tag{2.4.100}$$

ovvero:

$$\gamma_{u'} = \gamma_u\gamma(1-\beta_u\beta) \tag{2.4.101}$$

Per quanto riguarda le sorgenti, nel sistema di riferimento solidale al condensatore si ha $\sigma_0 = \frac{\sigma}{\gamma_u}$, mentre in $\mathcal{S}'$ si ha $\sigma' = \sigma_0\gamma_{u'} = \sigma\gamma(1-\beta_u\beta)$ e $\vec{K}' = \sigma' u'\,\hat{e}_{x'} = \sigma\gamma c(\beta_u-\beta)\,\hat{e}_{x'}$.
Possiamo quindi scrivere:

$$E'_{y'} = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \gamma\frac{\gamma}{\epsilon_0}\beta_u\beta = \gamma E_y - \gamma\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2}uv = \gamma E_y - \gamma\sigma\mu_0 uv = \gamma(E_y - vB_z) \tag{2.4.102}$$

$$B'_{z'} = \mu_0 K' = \mu_0\sigma\gamma c\beta_u - \mu_0\sigma\gamma c\beta = \gamma\mu_0\sigma u - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2}\sigma\gamma v = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \tag{2.4.103}$$

ovvero:

$$E'_{y'} = \gamma(E_y - \beta c B_z) \qquad cB'_{z'} = \gamma(cB_z - \beta E_y) \tag{2.4.104}$$

che sono simili a $x' = \gamma(x-\beta ct)$ e $ct' = \gamma(ct-\beta x)$.
Facendo lo stesso ragionamento su un sistema con piani paralleli al piano xy e che si muove sempre lungo $\vec{e}_x$ si ricava:

$$E'_{z'} = \gamma(E_z + \beta c B_y) \qquad cB'_{y'} = \gamma(cB_y + \beta E_z) \tag{2.4.105}$$

Consideriamo ora un solenoide a riposo in $\mathcal{S}$ con n spire per unità di lunghezza ed in cui scorre una corrente i: il suo campo magnetico è $\vec{B} = \mu_0 ni\,\hat{e}_x$ (direzione dell'asse del solenoide).
In un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ in moto con $\vec{v} = -v\,\hat{e}_x$ il campo magnetico è sempre diretto lungo x' e, per la contrazione delle lunghezze, $n' = \gamma n$, mentre $i' = \frac{dq}{dt'} = \gamma^{-1}i$, quindi il campo rimane invariato: $B_x = B'_{x'}$ (analogamente al campo elettrico).
Possiamo dunque scrivere le leggi di trasformazione per il campo elettrico e per quello magnetico:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \qquad & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}\times\vec{B}_{\perp}) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \qquad & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \tfrac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}_{\perp}) \end{aligned} \tag{2.4.106}$$

Queste trasformazioni suggeriscono che i campi elettrico e magnetico non siano indipendenti, ma manifestazioni di una stessa grandezza fisica: il campo elettromagnetico.
Notiamo due casi particolari:

- $\vec{B} = 0$: se a riposo non è presente un campo magnetico, in un sistema di riferimento generico è presente $\vec{B}' = \vec{B}'_\perp = -\gamma\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}_\perp = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}'_\perp$, ma $\vec{v} \times \vec{E}_\parallel = 0$, quindi vale $\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}'$;

- $\vec{E} = 0$: se a riposo non è presente un campo eletttrico, in un sistema di riferimento generico è presente $\vec{E}' = \vec{E}'_\perp = \gamma\vec{v} \times \vec{B}_\perp = \vec{v} \times \vec{B}'_\perp$, ma $\vec{v} \times \vec{B}'_\parallel = 0$, quindi vale $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$.

Si può inoltre dimostrare che ci sono due invarianti: $\vec{E} \cdot \vec{B}$ e $E^2 - c^2B^2$. Di conseguenza:

- Se in un sistema inerziale uno dei due campi è nullo, allora in ogni altro sistema inerziale $\vec{E} \perp \vec{B}$ (poiché $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ cost.);

- Se in un sistema inerziale $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, allora ci sono tre casi:

  1. $E^2 - c^2B^2 > 0$: esiste un sistema $\mathcal{S}'$ tale che $\vec{B}' = 0$ e il modulo della sua velocità relativa è $v = c^2\frac{B}{E}$;
  2. $E^2 - c^2B^2 < 0$: esiste un sistema $\mathcal{S}'$ tale che $\vec{E}' = 0$ e il modulo della sua velocità relativa è $v = \frac{E}{B}$;
  3. $E^2 - c^2B^2 = 0$: in ogni sistema inerziale vale $E = cB$ ed è un'onda elettromagnetica che si propaga a velocità c.

2.4.4 Carica in moto rettilineo uniforme

Consideriamo una carica q a riposo in un sistema di riferimento $\mathcal{S}$ ed un sistema $\mathcal{S}'$ in moto relativo con $\vec{v} = -v\,\hat{e}_x$ (vede la carica muoversi con $\vec{v}\,' = +v\,\hat{e}_x$): in $\mathcal{S}$ si ha $\vec{B} = 0$.
In $\mathcal{S}'$ vale $\vec{B}' = \frac{1}{c^2}\vec{v}\,' \times \vec{E}'$, ma anche (fissato r'):

$$\vec{E}'(\theta') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\sin^2\theta'}\,\hat{r}' \equiv E'(\theta')\,\hat{r}' \tag{2.4.107}$$

quindi:

$$\vec{B}' = E'(\theta')\frac{1}{c^2}\frac{v}{r'}(z\,\hat{e}_y - y\,\hat{e}_z) \tag{2.4.108}$$

In $\mathcal{S}'$ non solo il campo magnetico aumenta di intensità in direzione ortogonale al moto, ma è anche presente un campo magnetico sempre ortogonale al moto e con linee di campo circolari centrare sull'asse della direzione del moto.
Nel limite non-relativistico $\beta \to 0$ si ha $\vec{B}' \to \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r'^2}\vec{v}\,' \times \hat{r}'$, che, ricordando $q\vec{v}\,' = i\vec{l}$, non è altro che la legge di Biot-Savart.

2.4.5 Barretta conduttrice in moto rettilineo uniforme

Consideriamo una barretta conduttrice a riposo nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ (barretta sul piano xy) immersa in un campo magnetico costante, omogeneo ed uniforme $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$ e con $\vec{E} = 0$.
Supponiamo ora che la barretta si muova con $\vec{v} = v\,\vec{e}_y$: per effetto del movimento, si sviluppa una forza $\vec{F} = F\,\hat{e}_x$ sulle cariche della barretta, quindi si crea uno sbilanciamento di cariche ed un campo elettrico $\vec{E}$ che riporta le cariche in una situazione stazionaria; l'equilibrio tra forza di Lorentz e campo elettrico indotto porta a $\vec{E}_{\text{int}} = -\vec{v} \times \vec{B}$: il campo elettrico esterno così generato non è né omogeneo né uniforme (vedere figura).

INSERIRE LA FIGURA

Mettiamoci ora in un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ per cui $\mathcal{S}$ si muove a $\vec{v}' = -v\,\hat{e}_{y'}$ rispetto ad esso: in questo sistema il campo magnetico è $\vec{B}' = \gamma B\,\hat{e}_z$, ma non ha effetto sulle cariche poiché in questo sistema sono ferme; d'altra parte, in $\mathcal{S}'$ vi è un campo elettrico $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}' = \gamma vB\,\hat{e}_{x'}$, dunque il sistema è puramente elettrostatico: questo campo elettrico fa muovere le cariche che si dispongono sulla superficie della barretta, modificando il campo elettrico esterno e rendendolo nullo all'interno.

INSERIRE LA FIGURA

Ricapitolando:

- in $\mathcal{S}$: la barretta si muove in un campo magnetico uniforme e la forza di Lorentz fa muovere le cariche verso la superficie, generando un campo elettrico che all'interno del conduttore va ad annullare la forza totale;
- in $\mathcal{S}'$: la barretta è ferma in un campo magnetico uniforme (più intenso di prima) ed è presente un campo elettrostatico dato da $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$, il quale fa muovere le cariche verso la superficie generando un campo elettrico indotto che annulla il campo totale all'interno e si va a sommare a quello esterno.

In entrambi i sistemi la barretta è sottoposta allo stesso effetto fisico, ma i campi in gioco sono diversi.

3 Induzione Magnetica

3.1 Legge di Induzione di Faraday

Svolgendo esperimenti su coppie di circuiti, uno dei quali percorso da corrente stazionaria, Faraday si accorse della presenza di un transiente, nel circuito scollegato, in corrispondenza dell'accensione e dello spegnimento del generatore di corrente: la sua intuizione fu che questo transiente fosse legato alla variazione del flusso del campo magnetico, la quale genera un campo elettrico non conservativo la cui circuitazione è una differenza di potenziale (la forza elettromotrice) lungo la spira:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mathcal{E} \tag{3.1.109}$$

3.1.1 Primo esperimento di Faraday

Nel suo primo esperimento, Farady tenne ferma la bobina in cui scorre corrente e mosse la spira scollegata. Consideriamo una spira quadrata di lato l parallela al piano xy e vincoliamola a muoversi lungo l'asse y; consideriamo anche un campo magnetico non uniforme ortogonale alla spira, ovvero lungo l'asse z: supponiamo che esso vari secondo $\vec{B}(y) = B_0 \frac{|y|}{L}\,\hat{e}_z$, con L lunghezza caratteristica del sistema.
Consideriamo un moto della spira dato da $y(t) = vt$ e calcoliamo la f.e.m. dalla legge di Faraday:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= -\frac{d}{dt}\oiint_{\text{spira}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_{y(t)}^{y(t)+l} B(y')l\,dy' = -B_0\frac{l}{L}\frac{d}{dt}\int_{vt}^{vt+l} y'dy' \\ &= -B_0\frac{l}{2L}\frac{d}{dt}(2vt+l^2) = -B_0\frac{l}{L}lv \qquad\qquad \vec{B}_1 \equiv \vec{B}(y+l),\, \vec{B}_3 \equiv \vec{B}(y) \\ &= (B_3 - B_1)lv\end{aligned} \tag{3.1.110}$$

Si può analizzare l'esperimento anche con la forza di Lorentz, non conosciuta ai tempi di Faraday.
Sui lati della spira paralleli al moto (detti 2 e 4) si sviluppano forze ortogonali alla spira: se supponiamo la spira di spessore infinitesimo, ciò implica che le cariche non possono muoversi se non per un breve tratto, così che la forza di Lorentz viene immediatamente bilanciata dalla resistenza meccanica della struttura cristallina del conduttore e dai vincoli a cui è sottoposta la spira. D'altro canto, sui lati 1 e 3 la forza mette in moto le cariche, che si vanno a disporre lungo i lati 2 e 4 generando un campo elettrico che si oppone al moto delle cariche stesse: dato che il campo magnetico non è uniforme, le forze variano nel tempo e causano una continua ridistribuzione delle cariche.
La circuitazione di $\vec{F}$ lungo la spira vale:

$$\begin{aligned}\Gamma(\vec{F}) &= \oint_{\text{spira}} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{F}\cdot d\vec{l} \\ &= \int_1 q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} + \int_3 q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = qlv(B_3 - B_1)\end{aligned} \tag{3.1.111}$$

Dato che a questo lavoro è associata una d.d.p. $\mathcal{E} = \frac{1}{q}\Gamma(\vec{F})$, otteniamo la stessa f.e.m. indotta 5.1.187.

3.1.2 Secondo esperimento di Faraday

Nel suo secondo esperimento, Faraday tenne ferma la spira scollegata e mosse la bobina percorsa da corrente: nel sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ del laboratorio la spira è ferma, per cui non può agire la forza di Lorentz, quindi il meccanismo che genera la f.e.m. deve essere diverso da prima.
Supponendo che la velocità relativa sia direzionata lungo l'asse che congiunge i centri della spira e della bobina e che essa sia $v \ll c$, nel sistema $\mathcal{S}$ solidale alla bobina si ha $\vec{B} = \gamma^{-1}\vec{B}' \approx \vec{B}'$, mentre in $\mathcal{S}'$ vi è un campo elettrico $\vec{E}' = \vec{v}\times\vec{B}' \approx \vec{v}\times\vec{B}$: quest'ultimo non è conservativo e la sua circuitazione lungo la spira vale $\Gamma(\vec{E}) = l(E_3' - E_1') = lv(B_3' - B_1')$, alla quale è associata la f.e.m. $\mathcal{E} = lv(B_3 - B_1)$.
Si noti che questa trattazione è di natura relativistica, ma vale solo per $v \ll c$, poiché si assume che il valore dei campi ai due lati della spira sia calcolato simultaneamente nello stesso istante: la legge di Faraday non è un invariante relativistico.
Calcoliamo ora il flusso del campo magnetico, in questo caso senza assumere una sua particolare forma funzionale (e omettendo gli apici del sistema di riferimento per semplicità): il flusso infinitesimo è dato da $d\Phi_B = B(y)\,dS = B(y)l\,dy = B(y)lv\,dt$, quindi si vede subito che:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = lv(B_1 - B_3) = -\mathcal{E} \tag{3.1.112}$$

3.1.3 Spira con lato mobile

Consideriamo ora una spira immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$ ortogonale alla spira e con un lato che può scorrere sugli altri due: se lo mettiamo in moto con velocità $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$, il flusso magnetico concatenato alla spira varia nel tempo, anche se il campo è uniforme.
Nel lato mobile, le cariche sono sottoposte alla forza di Lorentz $\vec{F} = -qvB\,\hat{e}_y$, dunque nella spira agisce una f.e.m. $\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}$: l'integrale è non-nullo solo lungo il lato in moto e vale $\mathcal{E} = -lvB$ ($\vec{F}$ e $d\vec{l}$ sono discordi). D'altra parte, si ha $\Phi_B(t) = lBx(t) = lBvt$, quindi si vede che la legge di Faraday è rispettata.
Data la f.e.m., si instaura necessariamente una corrente $i = \mathcal{E}/R$ nel lato in moto (assumendolo ohmico), quindi vi è una dissipazione di energia $P = \mathcal{E}^2/R$ per effetto Joule: dato che la forza magnetica non compie lavoro, il lavoro necessario a questa dissipazione è fornito dall'esterno (ad esempio da noi) al sistema per mantenere un moto a velocità costante, in quanto il moto delle cariche è dissipativo.
Dato che la forza di Lorentz imprime una velocità lungo la barretta alle cariche, esse hanno una velocità totale $\vec{u}$ in direzione diagonale rispetto alla barretta, scomponibile nella direzione parallela $u_x = v$ e ed in quella ortogonale al moto u_y. La forza effettiva agente sulle cariche $\vec{F}_m$ è ortogonale ad $\vec{u}$ e quindi non compie lavoro: $F_{m,y}$ determina il moto delle cariche nella barretta, mentre $F_{m,x}$ si oppone alla forza esterna che mantiene in moto la barretta. Questa forza effettiva deve essere bilanciata da una forza $-\vec{F}_m$ poiché il sistema è in condizioni stazionarie: essa si scompone lungo y (parallelo alla barretta) in F_R, corrispondente alla resistenza della struttura molecolare al moto delle cariche, ed in quella x in F_{ext}, ovvero la forza esterna che mantiene la barretta in moto.
La potenza totale associata a $\vec{F}_m$ è:

$$P_m = P_{m,x} + P_{m,y} = -F_{m,x}u_x + F_{m,y}u_y = -qBu_yu_x + qBu_xu_y = 0 \tag{3.1.113}$$

come ci aspettavamo.
Possiamo quindi vedere che la forza magnetica non compie lavoro, ma fa da tramite fra la potenza spesa per applicare la forza $\vec{F}_{\text{ext}}$ e la potenza dissipata per effetto Joule: l'energia spesa per mantenere la barretta in moto viene trasferita dalla forza magnetica alle cariche, le quali instaurano una corrente stazionaria e dissipano l'energia fornita tramite gli urti col reticolo cristallino del conduttore.

3.1.4 Arbitrarietà delle superfici

La trattazione svolta finora è stata fatta solo su circuiti piani e le relative superfici piane, ma possiamo dimostrare che il flusso magnetico non dipende dalla superficie scelta, purché delimitata sempre dallo stesso circuito.
Consideriamo un circuito C e due superfici da esso delimitate S_1 ed S_2: definendo $S \equiv S_1 \cup S_2$, che è una superficie chiusa, si ha:

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{B}) &= \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{B}\,dV = 0\\ &= \oiint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S}_1 - \oiint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{S}_2\end{aligned} \tag{3.1.114}$$

dove si è usato che $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ e che, considerando la superficie chiusa, $d\vec{S}_2$ da direzione opposta a quando si integra sulla superficie aperta. Di conseguenza:

$$\oiint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S}_1 = \oiint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{S}_2 \tag{3.1.115}$$

ovvero il flusso non dipende dalla particolare superficie scelta.
Un'importante conseguenza è che, dato che $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = 0$ (identità vettoriale), si ha che anche la superficie considerata nel teorema di Stokes è indifferente, purché $\partial S = \gamma$.

3.1.5 F.e.m. da movimento

Consideriamo un generico circuito di forma qualunque γ in moto con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico statico ma non uniforme e siamo $S_{1,2}$ e $\gamma_{1,2}$ le superfici e i relativi bordi che delimitano il circuito ai tempi t e $t + dt$.
Data l'invarianza del flusso rispetto alla superficie scelta, possiamo calcolare $\Phi_B(t + dt)$ considerando

come bordo $S_1 \cup \Delta S$, dove ΔS è la superficie che unisce γ_1 e γ_2: dato che $d\vec{S}_{\Delta S} = (\vec{v}dt) \times d\vec{l_1}$, si ha:

$$\begin{aligned}\Phi_B(t+dt) &= \oiint_{S_1 \cup \Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B(t) + \oiint_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\Delta S} = \Phi_B(t) + dt \oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l_1}) \\ &\approx \Phi_B(t) + \frac{d\Phi_B}{dt} dt\end{aligned} \tag{3.1.116}$$

Quindi:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l_1}) = -\oint_{\gamma_1} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l_1} = -\frac{1}{q} \oint_{\gamma_1} \vec{F}_m \cdot d\vec{l_1} = -\mathcal{E} \tag{3.1.117}$$

che è proprio la legge di Faraday.

3.1.6 Terzo esperimento di Faraday

Nel suo terzo esperimento, Faraday tenne ferme sia la bobina che la spira, ma fece variare la corrente passante per la bobina, generando un campo magnetico variabile: in questo caso, il fenomeno non è spiegabile tramite un cambio di sistema di riferimento, quindi è necessaria una nuova legge fisica.
Consideriamo una spira γ ed una superficie $S : \partial S = \gamma$ immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t, \vec{r})$; la legge di Faraday può essere sviluppata come:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oiint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\oiint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}\end{aligned} \tag{3.1.118}$$

Dunque otteniamo la terza equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.1.119}$$

Dato il potenziale vettore $\vec{A} : \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, si ha:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.1.120}$$

ovvero:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.1.121}$$

Quindi il campo elettrico può essere espresso in funzione di un potenziale scalare e di uno vettore.
Riprendiamo il caso del circuito di forma generica in movimento, ma supponiamo questa volta che il campo magnetico sia anche variabile nel tempo:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\oiint_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(\vec{r}, t+\Delta t) \cdot d\vec{S} - \oiint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\oiint_{S(t)} \left(\vec{B}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta t \right) \cdot d\vec{S} + \oiint_{\Delta S} \left(\vec{B}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta t \right) \cdot d\vec{S} \right] + \\ &\qquad - \frac{1}{\Delta t} \oiint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\oiint_{S(t)} \left(\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta t \right) \cdot d\vec{S} + \oiint_{\Delta S} \left(\vec{B}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta t \right) \cdot \Big((\vec{v}\Delta t) \times d\vec{l} \Big) \right] \\ &= \oiint_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})\end{aligned} \tag{3.1.122}$$

dove abbiamo ignorato un termine proporzionale a Δt^2; passando al limite, otteniamo:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \oiint_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{\gamma(t)} \Big(\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \Big) \cdot d\vec{l} \tag{3.1.123}$$

Notiamo quindi due contributi alla f.e.m.: il primo termine, detto f.e.m. da induzione, associato alla f.e.m. indotta dal campo elettrico generato da un campo magnetico variabile nel tempo, ed il secondo, detto f.e.m. da movimento, legato al campo elettromotore $\vec{v} \times \vec{B}$.

3.2 Legge di Lenz

Il segno negativo nella legge di Faraday non è una pura convenzione matematica, ma ha un significato fisico profondo, legato alla conservazione dell'energia.
Consideriamo una spira immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ e supponiamo di indurvi una variazione $d\vec{B}_1$ concorde a $\vec{B}$: la corrispondente variazione di flusso magnetico genera una f.e.m. ed una corrente i_1; se invece induciamo una variazione $d\vec{B}_2$ opposta a $\vec{B}$, avremo una f.e.m. indotta ed una corrente i_2 opposta ad i_1: la legge di Lenz afferma che la f.e.m. indotta ha segno tale per cui la corrente indotta genera un campo magnetico indotto che si oppone alla variazione di flusso magnetico.
Se riprendiamo il caso della spira con un lato mobile, vediamo che la variazione del flusso genera una corrente indotta i_{ind} che scorre in modo da generare un campo magnetico indotto $\vec{B}_1$ opposto a $\vec{B}$, il cui flusso varia col moto della barretta: ciò genera un'ulteriore corrente indotta $i_{\text{ind},1}$, opposta a i_{int}, che causa una forza opposta al verso del moto: la legge di Lenz quindi assicura che la f.e.m. indotta si opponga alla variazione di flusso e rallenti la barretta; in caso contrario, si avrebbe una continua accelerazione della barretta ed una conseguente violazione della conservazione dell'energia.
Possiamo anche notare che, per il campo elettrico indotto, valgono delle equazioni formalmente identiche a quelle del campo magnetico: infatti esso è un campo non conservativo generato da una variazione del campo magnetico e non da cariche, quindi:

$$\nabla \times \vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{E}_{\text{ind}} = 0 \tag{3.2.124}$$

Per il teorema di Helmholtz, se $\vec{E}_{\text{ind}}$ si annulla abbastanza velocemente all'infinito, allora la soluzione ha una forma completamente definita.

3.2.1 Auto-induttanza e mutua induttanza

Consideriamo una spira percorsa da corrente stazionaria: con la legge di Biot-Savart, possiamo calcolare il flusso magnetico attraverso di essa:

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \oiint_S \left[\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_\gamma \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right] \cdot d\vec{S} \equiv Li \tag{3.2.125}$$

dove abbiamo definito l'auto-induttanza della spira:

$$L \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \left[\oint_\gamma \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right] \cdot d\vec{S} \tag{3.2.126}$$

che dipende solo dalle caratteristiche geometriche del della spira. In generale, essa è molto difficile da calcolare analiticamente e viene misurata sperimentalmente: la sua u.d.m. è l'Henry $\mathrm{H} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{A}^{-1}$.
Tenendo conto che $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_\gamma \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$, usando il teorema di Stokes otteniamo la formula di Neumann per l'auto-induttanza:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma \oint_\gamma \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{3.2.127}$$

Questa diverge per fili di raggio tendente a zero, dunque è necessario tener conto del raggio finito del filo.
Consideriamo ora due spire; il flusso magnetico generato dalla spira 1 sulla spira 2 è dato da:

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{3.2.128}$$

Troviamo quindi la formula di Neumann per la mutua induttanza:

$$M_{21} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{3.2.129}$$

Si vede chiaramente che:

$$M_{12} = M_{21} \tag{3.2.130}$$

Tenendo conto anche delle auto-induttanze $L_1 \equiv M_{11}$ e $L_2 \equiv M_{22}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= M_{11} i_1 + M_{12} i_2 \\ \Phi_2 &= M_{21} i_1 + M_{22} i_2 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{\Phi}_B = \underline{\mathrm{M}} \cdot \vec{i} \tag{3.2.131}$$

dove l'elemento della matrice di induttanza è dato da:

$$M_{jk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_j} \oint_{\gamma_k} \frac{d\vec{l_k} \cdot d\vec{l_j}}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \tag{3.2.132}$$

Se invece supponiamo che nella spira 2 inizialmente non scorra corrente, mentre nella spira 1 essa vari nel tempo, avremo una forza elettromotrice indotta nella spira 2 data da:

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \tag{3.2.133}$$

La variazione di i_1 nel tempo genera una f.e.m. indotta anche nella spira 1, data da:

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{3.2.134}$$

Possiamo trascurare gli effetti che la variazione della corrente nella spira 2, ed il conseguente campo magnetico indotto, avrebbero sulla spira 1 (generando una corrente indotta opposta ad i_1) supponendo che essi siano del second'ordine rispetto agli effetti dovuti ad i_1.

3.2.2 Generatore di corrente alternata

Consideriamo una spira quadrata di lato l parallela al piano xy ed immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$; supponiamo inoltre che la spira possa ruotare attorno al proprio asse (ad esempio lungo l'asse x) con velocità angolare ω. Se ad un certo tempo t la normale alla spira forma un angolo $\alpha(t) = \omega t$ col campo magnetico, si avrà che il flusso magnetico attraverso la spira sarà:

$$\Phi_B(t) = Bl^2 \cos \omega t \tag{3.2.135}$$

Di conseguenza, per la legge di Faraday, viene generata una f.e.m.:

$$\mathcal{E} = Bl^2 \sin \omega t \tag{3.2.136}$$

Dato che, per la legge di Lenz, questa f.e.m. indotta genera un campo magnetico indotto che si oppone alla rotazione della spira, sarà necessario continuare a fornirle energia per mantenerla in rotazione: essa sarà parzialmente convertita in energia elettrica e parzialmente dissipata dagli attriti meccanici.

3.2.3 Il freno elettromagnetico

Quando un conduttore si muove in un campo magnetico si sviluppa una f.e.m. indotta e le relative correnti superficiali indotte che, per la legge di Lenz, generano un campo magnetico che si oppone al campo magnetico esterno.
Ad esempio, consideriamo un foglio metallico che si muove lentamente in una regione con campo magnetico (vedi fig.): in essa, la forza di Lorentz fa muovere le cariche ortogonalmente a $\vec{v}$, creando delle correnti che si chiudono scorrendo anche al di fuori della regione del campo magnetico; queste correnti generano un campo magnetico che si oppone alla variazione del campo magnetico esterno ed al moto della lastra.

INSERITE LA FIGURA

Una variante del freno magnetico si ha prendendo un disco conduttore in rotazione al posto di un foglio metallico: questa variante è utilizzata nelle ruote dei treni ad alta velocità, mentre la versione lineare nelle giostre a caduta o nelle montagne russe.
Un'altra applicazione della legge di Lenz è la frenata rigenerativa dei veicoli elettrici: quando al motore elettrico viene tolta l'alimentazione (ad esempio sollevando l'acceleratore) la sua rotazione viene sfruttata per produrre energia elettrica che viene re-immagazzinata nella batteria ed il cui campo magnetico indotto agisce frenando i veicolo.

3.3 Circuiti con Induttanze

3.3.1 Circuito RL

Consideriamo un circuito con un solenoide collegato ad una f.e.m. $\mathcal{E}_0$: il conduttore che forma avrà una resistenza complessiva R, quindi possiamo schematizzare il circuito come una resistenza R in serie con

un'induttanza L.
Se nel circuito circola una corrente $i(t)$, il flusso concatenato al solenoide $\Phi_B(t) = Li(t)$ genera una f.e.m. indotta $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ che causa una corrente indotta i_{ind} opposta ad $i(t)$. Ridefinendo $i(t)$ così da includere anche la corrente indotta, si ha che il circuito è descritto da:

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{di(t)}{dt} = Ri(t) \tag{3.3.137}$$

Dal punto di vista qualitativo, si può vedere come per tempi lunghi il sistema raggiunga una condizione stazionaria con corrente $i_0 = \mathcal{E}_0/R$; inoltre, dato che appena dopo l'accensione $i \approx 0$, si ha $i(t) \approx \frac{\mathcal{E}_0}{L}t$.
Risolvendo analiticamente si vede che:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau \equiv \frac{L}{R} \tag{3.3.138}$$

dove τ è detta costante di tempo ($[\tau] = s$).
Supponiamo ora di togliere tensione alla bobina e che, prima di questa azione, nel solenoide circoli una corrente i_0: senza alimentazione, la corrente tende a diminuire nel tempo e ciò genera una f.e.m. indotta che si oppone alla diminuzione di corrente:

$$-L\frac{di(t)}{dt} = Ri(t) \qquad \Longrightarrow \qquad i(t) = i_0 e^{-t/\tau} \tag{3.3.139}$$

Un esempio importante di circuito RL è il trasformatore.
Consideriamo due solenoidi coassiali con n_1 ed n_2 spire, molto lunghi e di raggio praticamente uguale: il campo di induzione magnetica sarà contenuto completamente all'interno dei due solenoidi.
Colleghiamo un generatore di f.e.m. $V_P(t)$ al solenoide 1 (detto "primario"): se definiamo Φ_B come il flusso magnetico concatenato ad una singola spira, si ha $\Phi_{1,2} = n_{1,2}\Phi_B$ e $\mathcal{E}_{1,2} = -n_{1,2}\frac{d\Phi_B}{dt}$, ovvero:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{3.3.140}$$

che è l'equazione fondamentale del trasformatore.
Se assumiamo la resistenza dei solenoidi come molto piccola, allora $\mathcal{E}_1 \approx V_P(t)$ e $V_S(t) = \frac{n_2}{n_1}V_P(t)$.

3.3.2 Energia del campo magnetico

La potenza erogata da un circuito RC è data da $P_{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 i(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})$ mentre quella dissipata è $P_R(t) = Ri^2(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})^2$: la differenza tra potenza erogata e potenza dissipata è trasferita al campo magnetico generato dal solenoide e vale $P_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}e^{-t/\tau}(1 - e^{-t/\tau})$. Possiamo dunque calcolare l'energia magnetica:

$$W = \int_0^\infty P_L(t)\,dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\int_0^\infty (e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau})\,dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}Li_0^2 \tag{3.3.141}$$

Se invece consideriamo il caso della scarica di un circuito RC, è presente la sola potenza dissipata $P_R(t) = Ri_0^2 e^{-2t/\tau}$, quindi:

$$W = \int_0^\infty P_R(t)\,dt = Ri_0^2\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = Ri_0^2\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}Li_0^2 \tag{3.3.142}$$

Questa energia, immagazzinata nel campo magnetico, viene quindi "reuperata" e dissipata dalla resistenza.
Possiamo quindi definire un'energia potenziale associata al campo magnetico del solenoide:

$$U_M \equiv \frac{1}{2}Li^2 \tag{3.3.143}$$

Possiamo anche slegare l'energia magnetica dalla corrente circolante nel circuito: ricordando la definizione di flusso magnetico per un'induttanza generica:

$$\begin{aligned}
U_M &= \frac{1}{2}\Phi_B i = \frac{1}{2}i\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}i\oint_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,dV = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_V \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\,dV \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\left[\iiint_V \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,dV - \iiint_V \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\,dV\right] \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\left[\iiint_V B^2 dV - \oiint_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}\right]
\end{aligned} \tag{3.3.144}$$

Dato che al di fuori del volume della spira $\vec{J}=0$, l'integrale di volume può essere esteso a tutto lo spazio, quindi il secondo integrale tende ad annullarsi poiché l'integrando è proporzionale a r^{-1}; otteniamo quindi l'espressione finale:

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V B^2 dV \tag{3.3.145}$$

Definendo la densità di energia magnetica $\rho_M = \frac{1}{2\mu_0}B^2$, possiamo notare l'analogia col campo elettrico, per il quale si ha $\rho_E = \frac{\epsilon_0}{2}E^2$.
Si può anche trovare un'utile relazione tra auto-induttanza e mutua induttanza: se consideriamo N spire accoppiate con coefficienti di mutua induttanza M_{jk}, il flusso attraverso la j-esima spira sarà $\Phi_j = \sum_{k=1}^{N} M_{jk} i_k$, quindi, dato che l'energia magnetica di una spira è $U_M = \frac{1}{2}\Phi i$, si ha che l'energia magnetica totale sarà:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} M_{jk} i_j i_k \tag{3.3.146}$$

Nel caso semplice di due spire, definendo $M \equiv M_{12} = M_{21}$:

$$U_M = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \tag{3.3.147}$$

Definendo $x \equiv i_1/i_2$ si ha $U_M = \frac{1}{2}i_2^2(L_1x^2 + 2Mx + L_2)$, che ha un minimo in $x_m = -\frac{M}{L_1}$; dato che deve essere sempre $U_M \geq 0$, la condizione in x_m implica:

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \tag{3.3.148}$$

In generale è quindi possibile scrivere $M = k\sqrt{L_1L_2}$, con $k \leq 1$, e ciò esprime il fatto che non tutte le linee di campo di una spira sono concatenate all'altra: più k è vicino ad 1, più sono le linee di campo concatenate.
Nel caso del trasformatore le linee di campo sono praticamente sovrapposte, dunque $k \approx 1$ e $M \approx \sqrt{L_1L_2}$.

3.3.3 Circuito LC

Consideriamo un circuito composto da un capacitore C ed un'induttanza L, assumendo che la resistenza dei conduttori sia trascurabile. Supponiamo che a $t = 0$ il condensatore sia carico e che non scorra corrente: $q(0) = q_{\max} \equiv CV_{\max}$, $i(0) = 0$.
Definendo V_C e V_L le cadute di potenziale ai capi del condensatore e dell'induttanza, per la seconda legge di Kirchhoff $V_C + V_L = 0$, ovvero:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{1}{LC}i \tag{3.3.149}$$

Definendo la frequenza $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, la soluzione è $i(t) = i_{\max}\sin(\omega_0 t + \phi)$. La condizione $i(0) = 0$ implica $\phi = 0$, mentre, dato che $V(t) = L\omega_0 i_{\max}\cos\omega_0 t$, la condizione $V(0) = V_{\max} = q_{\max}/C$ implica $i_{\max} = q_{\max}\omega_0$.
Ridefinendo $q_0 \equiv q_{\max}$, si ha:

$$i(t) = q_0\omega_0 \sin\omega_0 t \tag{3.3.150}$$

Ricordando che $U_E = \frac{1}{2}CV^2$ e $U_M = \frac{1}{2}Li^2$, possiamo descrivere l'oscillazione del circuito LC: nell'istante iniziale il condensatore è completamente carico e tutta l'energia è immagazzinata nel campo elettrico; successivamente, inizia a scorrere corrente finché il condensatore non si scarica e tutta l'energia viene trasferita al campo magnetico, ma la corrente continua a scorrere e arriva a caricare di nuovo completamente il condensatore ma con segni delle cariche opposti, ritornando ad immagazzinare tutta l'energia nel campo elettrico; il semi-ciclo a questo punto si ripete ma con verso della corrente e dei campi invertito, ed al suo completamente si chiude il ciclo tornando nella condizione iniziale.

3.3.4 Circuito RLC

Consideriamo ora un circuito LC in cui però viene inserita anche una resistenza: ciò porterà ad una dissipazione di energia per effetto Joule, smorzando le oscillazioni.
Sempre per la seconda legge di Kirchhoff, si ha:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \tag{3.3.151}$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $i(t) = Ae^{-\alpha t}\sin\omega t$:

$$Ae^{-\alpha t}\left[\left(\frac{1}{C} - R\alpha + L(\alpha^2-\omega^2)\right)\sin\omega t + \omega(R-2L\alpha)\cos\omega t\right] = 0 \tag{3.3.152}$$

Affinché questa equazione sia soddisfatta, i coefficienti di $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$ devono essere identicamente nulli:

$$R - 2L\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \frac{1}{C} - R\alpha + L(\alpha^2-\omega^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \tag{3.3.153}$$

Una soluzione oscillatoria richiede ω reale, pertanto, definendo $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$, si ha la condizione sul valore della resistenza $\omega_0 > R/2L$: la presenza di una resistenza, oltre a smorzare l'oscillazione, attenua anche la sua frequenza.

3.4 Legge di Ampère - Maxwell

Se consideriamo il caso del circuito LC, in esso non è mai presente una corrente stazionaria o una carica costante nel tempo sulle armature del condensatore: dall'equazione di continuità $\partial_t\rho = -\nabla\cdot\vec{J}$, si ha $\nabla\cdot\vec{J} \neq 0$; d'altro canto, dall'equazione di Ampère $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ si ha $\mu_0\nabla\cdot\vec{J} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = 0$ (identità vettoriale $\nabla\cdot\nabla\times = 0$): questa apparente inconsistenza deriva dal fatto che all'equazione di Ampère manca un termine per tenere conto di correnti variabili.
Ci aspettiamo di trovare un problema analogo in un circuito RC: se consideriamo una superficie $S : \partial S = \gamma$ che taglia il filo che collega il capacitore al resistore, avremo:

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oiint_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_0 \oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \quad\Longrightarrow\quad \mu_0 i = \mu_0 J\pi^2 a \tag{3.4.154}$$

dove a è la sezione del filo: in questo caso non sembra esserci nessuna incongruenza.
Se invece prendiamo una superficie S' delimitata dallo stesso contorno γ, ma che stavolta, al posto di tagliare il filo, si chiude fra le armature del condensatore: dato che tra di esse non scorre corrente, S' non è attraversata da nessuna corrente, dunque $\oiint_{S'}(\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{S'} = 0$; d'altra parte, γ è comunque concatenato al filo, dunque $\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i \neq 0$, in apparente contraddizione col teorema di Stokes.
Per capire quale sia il termine mancante, consideriamo l'equazione di continuità e la legge di Gauss per il campo elettrico:

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{E} \qquad\Longrightarrow\qquad \nabla\cdot\left(\vec{J} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \tag{3.4.155}$$

Il termine che viene aggiunto alla densità di corrente è detto corrente di spostamento: non è una vera e propria corrente, nel senso che non corrisponde al movimento di cariche nel tempo, ma descrive il fatto che la presenza di un campo elettrico variabile genera un campo magnetico, a sua volta variabile.
Possiamo quindi scrivere la forma generale dell'equazione di Ampère, detta equazione di Ampère-Maxwell:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{3.4.156}$$

Se applichiamo questa legge alla superficie S' considerata in precedenza, troviamo:

$$\oiint_{S'}(\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{S'} = \mu_0\epsilon_0\oiint_{S'}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S'} = \mu_0\epsilon_0\oiint_{S'}\frac{1}{\epsilon_0}\frac{d\sigma}{dt}dS' = \mu_0\frac{d\sigma}{dt}S' = \mu_0\frac{dq}{dt} = \mu_0 i \tag{3.4.157}$$

poiché tra le armature del condensatore $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$. Vediamo quindi che, contando anche la corrente di spostamento, non vi è più alcuna inconsistenza.

4 Materia Magnetizzata

4.1 Classificazione

Immaginiamo di realizzare un dispositivo per misurare la forza magnetica su vari materiali, ad esempio costruendo un solenoide cavo dentro il quale inserire dei porta-campioni: con riferimento alla figura, esso sarebbe lungo 40 cm e con una cavità di circa 10 cm, con avvolgimenti di rame in grado di sopportare una potenza elettrica fino a 400 kW e con un circuito di raffreddamento (cavità rettangolari) per dissipare il calore prodotto per effetto Joule; un solenoide di questo tipo genera un campo magnetico pressoché uniforme nella parte centrale con intensità di 3 T, mentre all'imboccatura vale circa 1.7 T.
Immaginiamo inoltre di avere una bilancia con porta-campioni da inserire all'interno della cavità, così da poter misurare l'effetto della forza esercitata dal campo magnetico sul materiale da testare: essa non è massima dove è maggiore l'intensità del campo, ovvero al centro, bensì all'imboccatura, dove si ha la maggior variazione di intensità.
La forza magnetica agente sulla sostanza può variare molto sia qualitativamente che quantitativamente, a seconda della sostanza, dunque distinguiamo le seguenti tipologie di materiali:

1. materiali diamagnetici: vengono debolmente respinti con una forza proporzionale a B^2;
2. materiali paramagnetici: vengono debolmente attratti con una forza proporzionale a B^2;
3. materiali ferromagnetici: vengono attratti con forze di vari ordini di grandezza più intense rispetto ai materiali paramagnetici.

Tutti i materiali hanno un comportamento diamagnetico, e questo effetto è indipendente dalla temperatura.
Nei materiali paramagnetici è presente una forza attrattiva che supera la componente diamagnetica, ed essa è proporzionale alla temperatura: la forza aumenta al diminuire della temperatura.
Nei materiali ferromagnetici è presente una forza attrattiva di almeno $2-3$ ordini di grandezza superiore alla componente diamagnetica, ed in questo caso la forza dipende linearmente dal campo.
Per comprendere la scala delle energie in gioco, consideriamo l'ossigeno liquido, uno dei materiali paramagnetici con la forza più intensa ($\sim 75\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$): per allontanare di 10 cm dal campo magnetico 1 kg di ossigeno liquido è necessario un lavoro pari a $W \sim 75\,\mathrm{N}\cdot 10\,\mathrm{cm} \sim 10\,\mathrm{J}$, ovvero circa 10^{-24} J per molecola di ossigeno (1 kg di O_2 ha circa $2\cdot 10^{25}$ molecole); la vaporizzazione della stessa quantità di ossigeno liquido, invece, richiede circa $2.1\cdot 10^5$ J, ovvero circa 10^{-20} J per molecola.
Vediamo dunque che per materiali diamagnetici e paramagnetici, anche in presenza di campi magnetici abbastanza intensi, le energie in gioco sono piccole rispetto alle energie chimiche di legame; d'altro canto, nei materiali ferromagnetici, a seconda dell'intensità del campo, queste energie possono diventare comparabili a quelle chimiche di legame.

4.2 Correnti Atomiche

Sebbene i monopoli magnetici non siano esclusi dalle teorie di fisica fondamentale, il fatto che essi non siano ancora stati osservati sperimentalmente ci porta a concludere che, se esistono, sono molto rari.
Per questo motivo, per spiegare i comuni effetti magnetici nella materia dobbiamo far ricorso all'ipotesi che essi siano generati da correnti elettriche esistenti a livello microscopico.
L'esistenza di correnti atomiche emerge naturalmente dal modello atomico della materia ed esse sono alla base del comportamento diamagnetico di tutti i materiali.
Consideriamo un caso semplice, ovvero un elettrone che ruota attorno ad un protone con velocità $\vec{v}$ e frequenza $\nu = \frac{v}{2\pi r}$: a questo moto possiamo associare la corrente $i = e\,\nu = \frac{ev}{2\pi r}$; ovviamente stiamo trattando un modello semplificato che non tiene conto né della natura quantistica della materia, né del fatto che la corrente non è distribuita uniformemente lungo la circonferenza.
La presenza di una corrente a livello atomico implica la presenza di un momento magnetico $\vec{m} = i\pi r^2\,\hat{e}_z$, con l'asse z ortogonale al piano dell'orbita (dato che $q = -e < 0$, con questo asse si ha che i scorre in senso antiorario e $\vec{v}$ in senso orario): sostituendo l'espressione trovata prima, si ha $\vec{m} = \frac{1}{2}evr\,\hat{e}_z$; d'altra parte, l'elettrone ha un momento angolare pari a $\vec{L} = -rm_e v\,\hat{e}_z$ (segno dato dal verso di $\vec{v}$ discusso prima), quindi:

$$\vec{m} = \frac{-e}{2m_e}\vec{L} \tag{4.2.158}$$

Si può dimostrare che questa relazione è valida in generale, anche tenendo conto della meccanica quantistica e di orbite non circolari; bisogna però ricordare la regola di quantizzazione del momento angolare

$L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$, $\ell \in \mathbb{N}$.
Le particelle atomiche sono dotate anche di un momento intrinseco detto spin, un effetto puramente quantistico visualizzabile come il momento legato ad una rotazione della particella su sé stessa. La proiezione del momento angolare di spin lungo qualunque direzione può assumere solo due valori: $S = \pm\frac{\hbar}{2}$.
Anche lo spin ha una relazione con un momento magnetico associato, dipendente da una costante di proporzionalità $g = 2$:

$$\vec{m}_S = g\frac{-e}{2m_e}\vec{S} \tag{4.2.159}$$

Date le regole di quantizzazione per il momento angolare e lo spin, anche il momento magnetico dell'elettrone deve essere quantizzato secondo le stesse regole.
Anche protoni e neutroni hanno un momento magnetico, ma dato che la loro massa è circa 2000 volte la massa dell'elettrone il loro effetto è trascurabile.
Sviluppando una teoria quantistica completa del momento (angolare e magnetico) si trova che, per il principio di esclusione di Pauli (sulla stessa orbita non possono coesistere elettroni aventi lo stesso stato), se il numero di elettroni è pari allora il momento angolare/magnetico totale è nullo, poiché sono presenti un egual numero di elettroni con versi opposti sia di momento angolare che di spin.
Di conseguenza, le sostanze con un numero pari di elettroni sono quelle che presentano solo un comportamento diamagnetico, mentre quelle con un numero dispari di elettroni possono avere un momento magnetico residuo che è alla base dei fenomeni paramagnetici e ferromagnetici.

4.3 Diamagnetismo

4.3.1 Carica in moto circolare

Immaginiamo una carica positiva q di massa m che ruota attorno ad un punto centrale con velocità $\vec{v}_0$: possiamo immaginare che il moto sia permesso da una fune che esercita una tensione $F_0 = m\frac{v_0^2}{r}$ (naturalmente negli atomi la forza centripeta è fornita dall'attrazione coulumbiana).
Immaginiamo ora di accendere un campo magnetico, che passa in un tempo t da 0 a $\vec{B}_1$: ciò determina un campo elettrico indotto tale per cui $\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2\frac{dB}{dt}$ (ignorando il segno), ma anche $\mathcal{E} = \oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 2\pi rE$, quindi $E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$.
La presenza di un campo elettrico indotto determina un'accelerazione:

$$m\frac{dv}{dt} = qE = q\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta v = q\frac{r}{2m}\int_0^{B_1} dB = \frac{qr}{2m}B_1 \tag{4.3.160}$$

Ciò determina anche un aumento di forza centripeta:

$$F_1 = \frac{m}{r}(v+\Delta v)^2 \approx \frac{m}{r}v_0^2 + 2\frac{m}{r}v_0\Delta v + o(v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta F = 2\frac{m}{r}v_0\Delta v \tag{4.3.161}$$

Oltre alla tensione della fune, ora è presente anche la forza di Lorentz:

$$F_m = q(v_0+\Delta v)B_1 = q(v_0+\Delta v)\frac{2m}{qr}\Delta v \approx 2\frac{m}{r}v_0\Delta v = \Delta F \tag{4.3.162}$$

Vediamo quindi come il campo magnetico fornisca anche la necessaria forza centripeta aggiuntiva necessaria per mantenere il raggio dell'orbita costante, indipendentemente dal tipo di legame della particella col punto centrale dell'orbita.
Determiniamo ora il segno di $\Delta\vec{v}$ dato dalla legge di Lenz: dato che abbiamo una carica in moto, ci sarà un campo magnetico da essa indotto $\vec{B}_{\text{ind}}$. WLOG la carica ruota in senso antiorario, dunque $\vec{B}_{\text{ind}}$ è diretto verso l'alto, quindi se viene acceso $\vec{B}_1$ WLOG verso il basso avremo che $\Delta\vec{v}$ si deve oppore a questa variazione, ovvero $\Delta\vec{B}_{\text{ind}}$ deve essere diretto verso l'alto, ovvero $\Delta\vec{v}$ deve essere in senso antiorario, quindi la velocità aumenta. Questo ragionamento è indipendente dal verso di $\vec{v}_0$, ma dipende solo da quello di $\vec{B}_1$: l'unica differenza è che se $\vec{v}_0$ fosse stata in senso orario, allora la velocità sarebbe diminuita.

4.3.2 Momento magnetico indotto

Consideriamo un setup analogo al precedente, ma stavolta ragioniamo sul momento magnetico: esso inizialmente vale $\vec{m} = i\pi r^2\,\hat{e}_z = \frac{1}{2}qv_0r\,\hat{e}_z$; quando accendiamo il campo magnetico, per il ragionamento fatto prima, si ha una variazione di momento magnetico indipendente dal verso iniziale di $\vec{m}$:

$$\Delta\vec{m} = \frac{q}{2m}\Delta\vec{L} = \frac{q}{2m}\vec{r}\times m\Delta\vec{v} = \frac{q}{2m}r\frac{qr}{2m}m(-\vec{B}) \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\vec{m} = -\frac{q^2r^2}{4m}\vec{B} \tag{4.3.163}$$

Possiamo vedere come essa sia effettivamente dipendente solo da $\vec{B}$, ed in particolare opposta ad esso, come ci aspetteremmo dalla legge di Lenz.
Questo risultato è generalizzabile al caso in cui abbiamo molti atomi con Z elettroni, numero atomico A ed orbite orientate casualmente rispetto al campo magnetico esterno. Considerando che $Z/A \sim 1/2$, è possibile dimostrare che il momento magnetico indotto dal campo esterno è:

$$\vec{m} = -\frac{1}{2} M \mathcal{N}_A \frac{e^2 R_0^2}{6m_e} \vec{B} \tag{4.3.164}$$

dove $\mathcal{N}_A$ è il numero di Avogadro e R_0 è il raggio atomico medio.
Ricordando che la forza legata ad un momento magnetico è $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$, dato che nel nostro sistema di riferimento sia $\vec{m}$ che $\vec{B}$ sono lungo $\hat{e}_z$, l'unica componente della forza sarà:

$$F_z = -M \mathcal{N}_A \frac{e^2 R_0^2}{6m_e} B \frac{\partial B}{\partial z} \tag{4.3.165}$$

Si nota che la forza è diretta nel verso in cui il campo decresce; inoltre: è proporzionale al quadrato del campo magnetico, dipende dal gradiente del campo (quindi non è presente se il campo è uniforme) ed è diretta in verso opposto ad esso, dunque ha tutte le caratteristiche osservate sperimentalmente per la forza che sviluppano i materiali diamagnetici.

4.4 Paramagnetismo

Le particelle che compongono gli atomi hanno un momento angolare intrinseco, lo spin, che è un vettore, ma del quale possiamo misurare solo la componente lungo un determinato asse quando effettuiamo una misura: su qualunque asse, per un elettrone tale componente può essere solo $S = \pm\frac{\hbar}{2}$; di conseguenza, anche il momento magnetico di spin sarà quantizzato e pari a:

$$m_S = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \equiv \pm\mu_B \tag{4.4.166}$$

detto magnetone di Bohr.
Negli atomi con Z pari il momento magnetico di spin totale si annulla, dunque rimane solo l'effetto del diamagnetismo, mentre se Z è dispari i momenti magnetici di spin non vengono completamente cancellati ed ogni atomo ha un momento magnetico residuo: questi sono orientati casualmente ed in assenza di un campo magnetico esterno il momento magnetico globale è nullo.
Quando una sostanza paramagnetica si trova in un campo magnetico esterno, i momenti intrinseci degli atomi tendono ad allinearsi con il campo esterno, ovvero in verso opposto al diamagnetismo: per dare una descrizione qualitativa, dobbiamo considerare la statistica con cui sono distribuiti gli elettroni in base al momento magnetico.
L'energia potenziale di un dipolo magnetico $\vec{m}$ in un campo magnetico esterno $\vec{B}$ è data da $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, dunque per un elettrone essa può assumere i valori $U = \pm\mu_B B$. Il numero di elettroni su un determinato livello energetico è dato dalla statistica di Boltzmann $n = A\exp(-U/k_B T)$, quindi data la quantizzazione del momento magnetico e il fatto che $N = n_{\text{up}} + n_{\text{down}}$, si ha:

$$n_\pm = N \frac{e^{\pm\mu_B B/k_B T}}{e^{\mu_B B/k_B T} + e^{-\mu_B B/k_B T}} \tag{4.4.167}$$

Quindi il momento magnetico totale sarà:

$$m_T = n_+\mu_B + n_-(-\mu_B) = N\mu_B \frac{e^{\mu_B B/k_B T} - e^{-\mu_B B/k_B T}}{e^{\mu_B B/k_B T} + e^{-\mu_B B/k_B T}} \quad \Longrightarrow \quad m_T = N\mu_B \tanh\frac{\mu_B B}{k_B T} \tag{4.4.168}$$

Da questa relazione è chiaro che abbiamo un bilancio tra il campo magnetico, che tende ad allineare reciprocamente gli spin, e la temperatura, che invece tende a rompere tale allineamento, come si evince dalla figura:

INSERIRE LA FIGURA

Questa teoria del paramagnetismo può essere estesa anche ad atomi e molecole con configurazioni di momento angolare più complicate, come si evince dai fit sperimentali (SI PUÒ INSERIRE FIGURA DA SLIDE 39-49), sebbene bisogni tener conto in maniera più rigorosa del formalismo quantistico applicato alla struttura della materia.

4.5 Campo magnetico della materia magnetizzata

Ricordiamo che, nel caso di un conduttore molto sottile, il potenziale vettore può essere scritto in funzione della densità superficiale di corrente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dS \tag{4.5.169}$$

Consideriamo un blocco di materia uniformemente magnetizzato e fissiamo un sistema di riferimento con asse z parallelo alla magnetizzazione $\vec{M}$, ovvero alla somma dei contributi di tutti i dipoli magnetici elementari contenuti nel blocco.
Suddividendo il blocco in fette perpendicolari ad $\vec{M}$ e le fette in cubetti con momento di dipolo magnetico $\vec{m} = \vec{M}dV = \vec{M}dSdz$: dato che ogni cubetto è equivalente ad una spira di area dS in cui scorre una corrente i, si ha $m = i\,dS$, quindi, essendo la magnetizzazione costante, si ha che sul bordo di ogni cubetto scorre la stessa corrente $i = Mdz$; dato che nelle parti interne le correnti si elidono a vicenda, la magnetizzazione del blocco è equivalente ad una densità superficiale di corrente che scorre sulla superficie esterna del blocco: dato che $i = \int_0^L Mdz$ e $i = \int_0^L Kdz$, segue che $K = M$.
È possibile dimostrare che il campo macroscopico generato dai dipoli magnetici all'interno del blocco è quello generato dalla densità di corrente superficiale $\vec{K}$: naturalmente si tratta di un campo macroscopico, nel quale i contributi microscopici a livello atomico, fortemente variabili, vengono mediati (così come nell'equivalente caso elettrico).
Supponiamo ora che la magnetizzazione vari lungo la direzione y, continuando però ad essere orientata lungo z, e suddividiamo il blocco in cubetti in cui $\vec{M}$ sia approssimativamente costante: ognuno di essi può essere sostituito da una corrente superficiale $i(y) = M_z(y)\Delta z$, quindi tra due cubetti vicini vale $i(y+\Delta y) \approx (M_z(y) + \frac{\partial M_z}{\partial y}\Delta y)\Delta z$, quindi $\Delta i = \frac{\partial M_z}{\partial y}\Delta y \Delta z$ (lungo x, si vede graficamente); d'altro canto, se consideriamo una magnetizzazione variabile lungo z e direzionata lungo y, otteniamo analogamente che $\Delta i = -\frac{\partial M_y}{\partial z}\Delta y \Delta z$ (sempre lungo x, il $-$ si vede graficamente). In generale, dunque, avremo una variazione $\Delta i_x = (\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z})\Delta y \Delta z \equiv J_x \Delta y \Delta z$, quindi generalizzando ad una magnetizzazione generica otteniamo la densità di corrente di magnetizzazione:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \tag{4.5.170}$$

che è analoga alla densità di carica di polarizzazione $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$.

4.5.1 Campo $\vec{B}$

Supponiamo di avere un volume di materia magnetizzata con magnetizzazione $\vec{M}(\vec{r})$: un volume infinitesimo dV' avrà un momento magnetico $d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}\,')dV'$, dunque dall'espressione del potenziale vettore a grande distanza da un dipolo otteniamo $d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$, quindi:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d\vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{r}\,') \times \nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \\
&\qquad \nabla \times (f\vec{C}) = f(\nabla \times \vec{C}) - \vec{C} \times \nabla f \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla_{r'} \times \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \\
&\qquad \iiint_V \nabla_{r'} \times \vec{A}\, dV' = \oiint_S \hat{n}' \times \vec{A}\, dS' \quad \text{(non dimostriamo)} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \\
&\qquad \vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{n}' \equiv \vec{K}(\vec{r}\,') \quad \text{(densità superficiale di corrente)} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'
\end{aligned} \tag{4.5.171}$$

Vediamo come il potenziale vettore sia dato da due termini: quello legato alle correnti di magnetizzazione, dovute alle disomogeneità del vettore di magnetizzazione del materiale, e quello legato alle correnti magnetiche che si instaurano sulla superficie del corpo.

4.5.2 Discontinuità di $\vec{B}$

Così come un campo elettrico presenta discontinuità quando attravera una densità superficiale di carica, anche un campo magnetico presenta discontinuità quando attraversa una densità superficiale di corrente. Consideriamo una densità superficiale di corrente $\vec{K}$ su una superficie e consideriamo una cammino rettangolare chiuso γ (con altezze infinitesime e che racchiude una superficie S) perpendicolare alla superficie: per la legge di Ampère, si ha:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad \Longrightarrow \qquad (B_{1,t} - B_{2,t})L = \mu_0 KL \tag{4.5.172}$$

ovvero, per la componente tangente:

$$\Delta B_t = \mu_0 K \tag{4.5.173}$$

Se invece consideriamo una superficie cilindrica chiusa S (di altezza infinitesima) perpendicolare alla superficie, dato che $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ si ha:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B_{1,n} - B_{2,n} = 0 \tag{4.5.174}$$

ovvero, per la componente normale:

$$\Delta B_n = 0 \tag{4.5.175}$$

Possiamo condensare entrambe le relazioni in:

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{K} \times \hat{n} \tag{4.5.176}$$

Nonostante ciò, il potenziale vettore è sempre continuo:

- componente tangenziale: col cammino tangenziale precendente, si ha $\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oiint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B$, ma, dato che le altezze sono infinitesime, il flusso attraverso la superficie tende a zero, per cui la componente tangenziale cambia con continuità attraverso la superficie su cui scorre la corrente;
- componente normale: sfruttando il fatto che il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di uno scalare, è sempre possibile trovare una funzione scalare tale per cui $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$ (basta che $\nabla^2 f = -\nabla \cdot \vec{A}$), per cui anche la componente normale del potenziale vettore varia con continuità attraverso la superficie.

4.5.3 Campo $\vec{H}$

Consideriamo un corpo di volume V_c e superficie S_c avente una magnetizzazione $\vec{M}$: il suo potenziale vettore sarà:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_c} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S_c} \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dS' \tag{4.5.177}$$

Possiamo immaginare di estendere gli integrali a tutto lo spazio, poiché al di fuori di V_c la magnetizzazione è nulla, ottenendo:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \tag{4.5.178}$$

poiché $\vec{K} = 0$ su ogni superficie al di fuori del corpo. Ovviamente l'effetto delle correnti di superficie non è magicamente scomparso, ma viene inglobato dalla discontinuità di $\vec{M}$ lungo S_c (incluso nel dominio di integrazione): integrando su tali discontinuità di ottengono dei termini con δ di Dirac, i quali rappresentano l'effetto delle correnti superficiali.
Scriviamo ora la legge di Ampère per il corpo, considerando sia le correnti libere che quelle di magnetizzazione:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_f + \vec{J}_M) \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f \tag{4.5.179}$$

Possiamo quindi definire il seguente campo di magnetizzazione (u.d.m. $\mathrm{A \cdot m^{-1}}$):

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \qquad\qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f \tag{4.5.180}$$

analogo al campo $\vec{D}$ in elettrostatica. Diversamente da quest'ultimo, il campo $\vec{H}$ è molto utilizzato: mentre $\vec{D}$ è legato alle cariche elettrostatiche libere, difficili da controllare poiché si ha controllo piuttosto sui potenziali a cui si trovano i conduttori, $\vec{H}$ è legato alle correnti libere, che sono proprio ciò su cui si ha controllo.
Assumendo una dipendenza lineare di $\vec{M}$ da $\vec{H}$, ad esempio $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, si ha:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m) \equiv \mu_0 \mu_r \tag{4.5.181}$$

dove χ_m è detta suscettività magnetica e μ_r permeabilità magnetica relativa.
Se μ non dipende dalla posizione, il mezzo di dice omogeneo, mentre se non dipende da $\vec{H}$ si dice lineare. Inoltre, se $\chi_m < 0$ il mezzo è diamagnetico, mentre se $\chi_m > 0$ è paramagnetico; se invece μ dipende da $\vec{H}$ il mezzo è ferromagnetico.
Equivalentemente al caso elettrostatico, anche nel caso di un campo magnetico in della materia polarizzata bisogna tener conto, ai fini del calcolo dell'energia magnetica $U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V B^2 dV$, dell'energia di magnetizzazione:

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H}\, dV \tag{4.5.182}$$

che tiene conto dell'energia che è stata necessaria per magnetizzare la materia. La forza magnetica associata è $\vec{F}_m = \nabla U_m$ (poiché l'energia potenziale è l'opposto di quella magnetica).

4.5.4 Condizioni al contorno per $\vec{H}$

Innanzitutto, dato che $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, vale che $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$.
Considerando le stesse superfici prese per il campo $\vec{B}$, abbiamo analogamente che:

$$\oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oiint_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} \qquad \oiint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = -\oiint_S \vec{M} \cdot d\vec{S} \tag{4.5.183}$$

quindi:

$$\Delta \vec{H}_t = \vec{K}_f \qquad \Delta \vec{H}_n = -\Delta \vec{M}_n \tag{4.5.184}$$

Nel campo $\vec{H}$ non è continua neanche la componente normale.

4.6 Ferromagnetismo

A differenza dei materiali diamagnetici e paramagnetici, in quelli ferromagnetici la forza dipende linearmente dal campo magnetico, quindi, dato che $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$, si evince che il momento magnetico non varia col campo magnetico: in altre parole, si raggiunge un limite di saturazione nell'allineamento dei dipoli magnetici e l'aumentare il campo magnetico non può rafforzare ulteriormente il campo magnetico generato dalla magnetizzazione.
Inoltre, i materiali ferromagnetici possono rimanere magnetizzati anche in assenza di campo magnetico: il ferromagnetismo è un fenomeno che dipende dalla temperatura e scompare al di sopra di una temperatura caratteristica per ogni materiale, detta temperatura di Curie.
Consideriamo ad esempio il ferro: si trova sperimentalmente, con il setup sperimentale discusso in precedenza, che 1 kg di ferro è soggetto per ferromagnetismo a 4000 N quando $\left|\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right| = 17\,\mathrm{T/m}$, quindi, dato che $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$, $m = \frac{F}{|\partial \vec{B}/\partial t|} = 235\,\mathrm{J/T}$; essendo la densità del ferro $7800\,\mathrm{kg/m^3}$, il volume sarà $V = 7800^{-1}\,\mathrm{m^3}$ e la magnetizzazione $M = \frac{m}{V} = 1.83 \cdot 10^6\,\mathrm{JT^{-1}m^{-3}}$. Dato che il valore così trovato è il valore massimo che può assumere M, essendo quest'ultimo $M = n\mu_B$ (n numero di elettroni per unità di volume), si ha $n = M/\mu_B = 2 \cdot 10^{29}\,\mathrm{m^{-3}}$: nel ferro ci sono circa 10^{29} atomi per metro cubo, quindi possiamo concludere che ogni atomo contribuisce alla magnetizzazione con circa 2 elettroni.
Il fenomeno del ferromagnetismo è complesso ed una sua descrizione richiede il formalismo quantistico; da un punto di vista qualitativo, possiamo affermare che due elettroni di atomi adiacenti si trovano in uno stato energeticamente conveniente quando i loro spin sono allineati: dividendo il corpo in "domini" magnetici, l'applicazione di un campo magnetico esterno tende ad allineare la magnetizzazione dei domini, facendoli "coalescere" e massimizzando il momento magnetico del materiale. È possibile visualizzare i domini magnetici tramite la microscopia a effetto Kerr, che sfrutta l'effetto della magnetizzazione sulla luce riflessa dai materiali.

4.6.1 Magnete toroidale con nucleo ferromagnetico

Consideriamo un toroide (solenoide chiuso a forma di toro) avvolto intorno ad un nucleo di materiale lineare (quindi non ferromagnetico) con suscettività magnetica χ_m. Detti N il numero di spire del toroide e i la corrente che vi scorre, per simmetria si ha che le linee del campo $\vec{H}$ sono circonferenze, quindi presa γ circonferenza di raggio r interna al nucleo $\oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = H2\pi r = Ni$, quindi $H = \frac{Ni}{2\pi r}$:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\vec{H} = \chi_m \vec{H} \qquad \Longrightarrow \qquad M = \chi_m \frac{Ni}{2\pi r} \tag{4.6.185}$$

La magnetizzazione è anch'essa diretta lungo circonferenze centrare nel centro del toroide, e genera una densità di corrente superficiale $K = M = \chi_m \frac{Ni}{2\pi r}$ non uniforme (mentre la corrente di magnetizzazione è naturalmente costante: $i_m = K2\pi r = \chi_m Ni$).
Supponiamo ora invece che il nucleo sia di materiale ferromagnetico: non c'è più una relazione lineare tra $\vec{B}$ e $\vec{H}$, quindi bisogna studiare sperimentalmente la curva di magnetizzazione $B(H)$ del sistema: per ogni valore di i, determiniamo H e misuriamo B; inoltre, definiamo $\mu \equiv B/H$, che non è più una costante.
Se il toroide fosse vuoto si avrebbe $B = \mu_0 H$, quindi ad esempio con $H = 300\,\mathrm{A/m}$ si dovrebbe avere $B \approx 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$, mentre con il nucleo ferromagnetico si ottiene $B = 1.3\,\mathrm{T}$, un valore 3000 volte più grande: questo campo magnetico è dato da quello del toroide sommato a quello della corrente di magnetizzazione $i_m = \chi_m Ni$.
Per un materiale ferromagnetico $\chi_m \approx \mu/\mu_0$ (dell'ordine delle migliaia), plottato nel grafico:

INSERIRE LA FIGURA

Quindi, se facciamo scorrere una corrente dell'ordine di $1\,\mathrm{A}$, otteniamo lo stesso campo magnetico che sarebbe generato dal solo toroide facendovi scorrere una corrente di varie migliaia di A.
Si nota inoltre come all'aumentare di H (cioè della corrente) il campo magnetico raggiunga un punto di saturazione dovuto al completo allineamento dei domini magnetici: da quel punto la crescita torna ad essere lineare, determinata dalla sola corrente libera.
Supponiamo di aver magnetizzato un materiale ferromagnetico e di aver raggiunto un punto della sua curva di magnetizzazione oltre il punto di saturazione; se volessimo tornare alle condizioni iniziali $H = 0$, $B = 0$, dovremmo ridurre la corrente nel toroide fino a raggiungere $H = 0$: così facendo, raggiungeremmo uno stato in cui $B \neq 0$: poiché $B = \mu_0(H+M)$, ciò ci dice che nel materiale permane una magnetizzazione $M = B/\mu_0$ anche senza eccitazione esterna. Per riportare a zero la magnetizzazione, è necessario eccitare il toroide con una corrente di segno opposto a quella iniziale, raggiungendo uno stato in cui $H = -M$ e $B = 0$; continuando a ridurre H si raggiunge una nuova regione di saturazione: facendo crescere di nuovo H si può raggiungere nuovamente lo stato di magnetizzazione iniziale percorrendo un percorso diverso nel piano $H - B$: il grafico così ottenuto è un'isteresi, che evidenzia un comportamento per il quale lo stato del sistema dipende dalla "storia" precedente.

5 Elettrodinamica

5.1 Equazioni di Maxwell nella materia

Ricordiamo le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \qquad & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \tag{5.1.186}$$

Per poterle generalizzare nella materia è necessario considerare tutte le sorgenti dei campi elettrico e magnetico.
Innanzitutto ricordiamo il vettore spostamento elettrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, che esprime il legame tra campo elettrico e cariche libere e di polarizzazione:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \tag{5.1.187}$$

A queste equazioni va aggiunta anche quella per la densità di polarizzazione $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$, che per i materiali lineari è $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$.
Risulta evidente che un campo elettrico variabile genera un vettore di polarizzazione variabile, il quale porterà ad una variazione di cariche superficiali di polarizzazione:

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \hat{n} \equiv \vec{J}_P \cdot \hat{n} \tag{5.1.188}$$

Questa è una vera a propria densità di corrente, detta densità di corrente di polarizzazione, soddisfacente l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{J}_P = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{P})}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t} \tag{5.1.189}$$

In generale, quindi, avremo per seguenti sorgenti per il campo elettromagnetico:

- cariche (campo elettrico):
  - cariche libere ρ_f;
  - cariche di polarizzazione $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$;
- correnti (campo magnetico):
  - correnti libere $\vec{J}_f$;
  - correnti di magnetizzazione $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$;
  - correnti di polarizzazione $\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

Tenendo conto di ciò, le due equazioni di Maxwell omogenee (legge di Faraday e legge di Gauss per $\vec{B}$) rimangono invariate, la legge di Gauss per $\vec{E}$ diventa $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ e la legge di Ampère diventa:

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &\qquad \implies \qquad \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} \right) \end{aligned} \tag{5.1.190}$$

Quindi, riconoscendo i campi $\vec{D}$ e $\vec{H}$, si ottengono le equazioni di Maxwell nella materia:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_f \qquad & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \qquad & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.1.191}$$

A queste vanno aggiunte le dovute condizioni, oltre che ovviamente alle relazioni fenomenologiche tra $\vec{D}$, $\vec{H}$ e $\vec{E}$, $\vec{B}$.
Nel caso più generale:

$$\Delta D_\perp = \sigma_f \qquad \Delta E_\parallel = 0 \qquad \Delta \vec{H}_\parallel = \vec{K}_f \times \hat{n} \qquad \Delta B_\perp = 0 \tag{5.1.192}$$

In presenza di un mezzo lineare $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$, quindi:

$$\epsilon_1 E_{\perp,1} - \epsilon_2 E_{\perp,2} = \sigma_f \qquad \Delta E_\parallel = 0 \qquad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{\parallel,1} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{\parallel,2} = \vec{K}_f \times \hat{n} \qquad \Delta B_\perp = 0 \tag{5.1.193}$$

5.2 Onde Elettromagnetiche

5.2.1 Esperimento di Hertz

L'esperimento consisteva in un generatore ad alta tensione (a induzione) collegato a due sfere metalliche separate da uno spazio vuoto: controllando la tensione e l'induttanza del generatore si generavano fra le sfere delle scariche elettriche di intensità variabile ad una certa frequenza (circa 100 MHz).
Ponendo una spira metallica collegata ad altre due sfere come ricevitore, Hertz osservò che fra queste due sfere si instauravano delle scariche elettriche alla stessa frequenza, dimostrando che gli elettroni in movimento generano un'onda di campo elettrico e magnetico che si propaga nello spazio.
Ponendo una lastra di rame ad una certa distanza dal generatore, in modo che le onde si riflettessero e generassero onde stazionarie, Hertz misurò la loro velocità di propagazione: ponendo il ricevitore in diverse posizioni fra il generatore e la lastra poté misurare la lunghezza d'onda λ, così da poter calcolare $v = \lambda\nu \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} = c$.

5.2.2 Equazioni di Maxwell nel vuoto

Cerchiamo di descrivere la propagazione di onde elettromagnetiche nel vuoto, ovvero con $\rho_f = 0$, $\vec{J}_f = 0$ e $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$: utilizzando l'ansatz $\vec{E}(\vec{r}, t) = e^{i\omega t}\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = e^{i\omega t}\vec{B}(\vec{r})$, con $\omega = 2\pi\nu$, le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \qquad & \nabla \times \vec{E} &= -i\omega\mu_0 \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \qquad & \nabla \times \vec{H} &= i\omega\epsilon_0 \vec{E} \end{aligned} \tag{5.2.194}$$

Applicando il rotore alla seconda equazione di Maxwell, ricordando che $\nabla\times\nabla\times = \nabla(\nabla\cdot) - \nabla^2$ e la prima equazione di Maxwell, si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = 0 \tag{5.2.195}$$

e analogamente per il campo $\vec{H}$.
Poiché siamo interessati a delle onde piane, cerchiamo soluzioni in cui il campo abbia una sola componente che vari solo lungo una direzione ortogonale ad esso; WLOG $\vec{E} = (E_x(z, t), 0, 0)$, quindi:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0\,, \quad k \equiv \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \qquad \Longrightarrow \qquad E_x(z, t) = E_+ e^{-ikz} e^{i\omega t} + E_- e^{ikz} e^{i\omega t} \tag{5.2.196}$$

Dato che $\epsilon_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$, anche $k \in \mathbb{R}$, quindi:

$$E_x(z, t) = E_+ \cos(\omega t - kz) + E_- \cos(\omega t + kz) \tag{5.2.197}$$

che sono un'onda che si muove verso $+z$ e verso $-z$ rispettivamente (basta vedere le superfici a fase $\phi = \omega t \pm kz$ costante).
La velocità a cui si muove un punto a fase costante è detta velocità di fase $v_p = \frac{dz}{dt}$, quindi:

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mp\omega t - \text{cost.}}{k}\right) = \mp\frac{\omega}{k} = \mp\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \mp c \tag{5.2.198}$$

La lunghezza d'onda è per definizione la distanza tra due punti dell'onda aventi la stessa fase:

$$(\omega t - kz) - (\omega t - k(z + \lambda)) = 2\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{\nu} \tag{5.2.199}$$

Dalla quarta equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_y \tag{5.2.200}$$

ovvero:

$$H_y(z,t) = \frac{k}{\omega\mu_0}\left(E_+ e^{i(\omega t - kz)} - E_- e^{i(\omega t + kz)}\right) \tag{5.2.201}$$

Otteniamo quindi che i campi $\vec{E}$ e $\vec{H}$ sono ortogonali tra loro ed oscillanti con la stessa fase: si parla in questo caso di modi di propagazione TEM (transverse electromagnetic). Sono possibili anche altri modi di propagazione, a seconda del mezzo e delle condizioni al contorno: ad esempio, i modi TM (transverse magnetic) con campo elettrico parallelo alla firezione di propagazione, o i modi TE (transverse electric) con campo $\vec{H}$ parallelo alla direzione di propagazione.
Si può notare che termine $\frac{k}{\omega\mu_0}$ ha le dimensioni dell'inverso di un'impedenza: infatti, si definisce l'impedenza caratteristica del vuoto come:

$$Z = \frac{\mu_0\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377\,\Omega \tag{5.2.202}$$

5.2.3 Onde elettromagnetiche in conduttori e dielettrici omogenei e isotropi

Consideriamo ora un'onda piana che si propaga in un conduttore omogeneo e isotropo di conducibilità σ, costante dielettrica ϵ e permeabilità magnetica μ: in questo caso è presente una densità di corrente $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, quindi le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad && \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \\ &\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad && \nabla \times \vec{H} = (i\omega\epsilon + \sigma)\vec{E} \end{aligned} \tag{5.2.203}$$

dalle quali si ottiene un sistema di equazioni di Helmholtz:

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} - \gamma^2\vec{E} = 0 \\ \nabla^2\vec{H} - \gamma^2\vec{H} = 0 \end{cases} \qquad \gamma = i\omega\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{1 - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{5.2.204}$$

Sebbene le equazioni siano formalmente le stesse che nel caso precedente, in questo caso la costante di propagazione è complessa: scrivendo $\gamma = \alpha + i\beta$ si ottiene:

$$E_x(z,t) = E_+ e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + E_- e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)} \tag{5.2.205}$$

dunque si ottengono comunque due onde che si propagano verso $\pm z$, ma in questo caso queste onde sono attenuate esponenzialmente.
Il campo magnetico associato si può scrivere come:

$$H_y(z,t) = -i\frac{\gamma}{\mu\omega}\left(E_+ e^{i\omega t - \gamma z} - E_- e^{i\omega t + \gamma z}\right) \tag{5.2.206}$$

Per un conduttore l'impedenza caratteristica del mezzo è:

$$Z = i\frac{\mu\omega}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1/2} \tag{5.2.207}$$

che è in generale un numero complesso.
Consideriamo ora un mezzo dielettrico senza perdite, ovvero con $\epsilon \in \mathbb{R}$: dato che in un dielettrico $\sigma = 0$, la costante di propagazione diventa $\gamma = i\omega\sqrt{\epsilon\mu} \equiv ik$, quindi le soluzioni sono quelle trovate per la propagazione nel vuoto (con le corrette ϵ e μ).
Se invece prendiamo un dielettrico con perdite, ovvero un dielettrico non ideale nel quale si instaurano delle correnti di polarizzazione, la costante dielettrica sarà complessa: $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$; definendo $\tan\delta \equiv \epsilon''/\epsilon'$, possiamo scrivere la costante di propagazione come $\gamma = i\omega\sqrt{\mu(\epsilon' - i\epsilon'')} = i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - i\tan\delta}$.
Nella maggior parte dei casi abbiamo a che fare con onde che si propagano in metalli, che sono buoni conduttori: in questi casi, le correnti conduttive prevalgono su quelle di spostamento, ovvero $\sigma \gg \omega\epsilon$:

$$\gamma = i\omega\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{1 - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \approx i\omega\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{\frac{\sigma}{i\omega\epsilon}} = \sqrt{i}\sqrt{\omega\sigma\mu} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} \equiv (1+i)\frac{1}{\delta_s} \tag{5.2.208}$$

dove è stata definita la skin depth del mezzo (u.d.m. m), che rappresenta la distanza percorsa dall'onda prima di essere attenuata di un fattore $1/e$ (infatti ricordando l'espressione per E_x si ha $\alpha = \beta = \delta_s$).

5.3 Spettro Elettromagnetico

Le onde elettromagnetiche si possono propagare con un intervallo di lunghezze d'onda praticamente infinito; inoltre, dalla meccanica quantistica sappiamo che il campo elettromagnetico è quantizzato: il quanto di radiazione è il fotone, con energia $E_\gamma = h\nu$.
Possiamo classificare le onde elettromagnetiche in base alla loro lunghezza d'onda:

- onde radio: hanno una lunghezza d'onda che va da qualche metro a svariati kilometri e sono generate, ad esempio, dalle cariche in oscillazione nei fili conduttori delle antenne radio e in molti fenomeni astrofisici (emissione di sicrotrone, scattering di elettroni liberi su protoni, etc.); le onde con $\lambda > 10\,\text{km}$ vengono riflesse dall'atmosfera, dunque consentono telecomunicazioni a lunga distanza superando i limiti imposti dalla curvatura terrestre;

- microonde: hanno una lunghezza d'onda minori di $1\,\text{m}$ e fino a $1\,\text{mm}$, hanno numerose applicazioni pratiche (radar, cellulari, cottura, etc.) e sono usate in cosmologia per studiare l'universo primordiale (CMB);

- infrarosso: ha lunghezze d'onda dal millimetro al micron, è generato da qualunque oggetto a temperatura ambiente ed ha numerose applicazioni (visione notturna, telecomandi ad infrarosso, etc.); in ambito astrofisico la radiazione infrarossa è molto studiata poiché legata a processi fisici presenti nelle stellar nurseries, le zone ricche di polvere nella nostra galassia dove nascono le stelle;

- radiazione visibile: quella che noi comunemente chiamiamo luce ha una lunghezza d'onda tra circa $0.6\,\mu\text{m}$ e $0.4\,\mu\text{m}$ ed è l'unica radiazione a cui è sensibile l'occhio umano; è generata da oggetti molto caldi, ad esempio i filamenti incandescenti delle lampadine;

- ultravioletto: ha lunghezze d'onda tra circa $0.4\,\mu\text{m}$ e $0.6\,\text{nm}$ ed è generata in importanti quantità dal Sole (fonte di danni cutanei), oltre che in generale dalle stelle giovani; l'emissione UV diffusa è dominata dalla luce di stelle brillanti diffusa dalla polvere interstellare, oltre che ipoteticamente dal mezzo intergalattico e da possibili aloni galattici;

- raggi X: hanno lunghezze d'onda comprese tra qualche nanometro e il decimo di picometro ($10^{-12}\,\text{m}$), sono molto energetiche con alto potere di penetrazione, quindi con vari usi medici, e sono prodotti ad esempio dall'accelerazione di elettroni energetici che bombardano una lastra di metallo; le emissioni di origine astrofisica originano da buchi neri e stelle di neutroni in rapida rotazione (pulsar), oltre che da ammassi di galassie;

- raggi gamma: sono le onde più energetiche dello spettro elettromagnetico, con lunghezze d'onda inferiori al picometro, sono prodotte da reazioni nucleari, ad esempio in reattori termonucleari e all'interno del Sole, ed hanno un elevato potere penetrante, risultando molto pericolose per la salute; nell'universo le sorgenti di GRB (gamma ray bursts) sono estremamente brillanti e distanti, dall'origine ancora per lo più ignota (principalmente pulsar e AGN, active galactic nuclei).

5.4 Polarizzazione

Consideriamo un'onda piana che si propaga nel vuoto e fissiamo una terna cartesiana con asse z nella direzione di propagazione dell'onda (WLOG uscente dal piano); scomponiamo $\vec{E}$, che si trova interamente nel piano, nelle sue componenti:

$$\vec{E} = E_x\,\hat{e}_x + E_y\,\hat{e}_y = E_1 \sin(\omega t - kz)\,\hat{e}_x + E_2 \sin(\omega t - kz + \delta)\,\hat{e}_y \tag{5.4.209}$$

con $\omega = 2\pi\nu$, $k = 2\pi/\lambda$ e δ la differenza di fase tra i due componenti.
Fissiamoci in $z = 0$ e studiamo l'andamento di $E_x(t)$ e $E_y(t)$:

$$E_x = E_1 \sin\omega t \quad\Longrightarrow\quad \sin\omega t = \frac{E_x}{E_1} \quad\Longrightarrow\quad \cos\omega t = \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_1^2}} \tag{5.4.210}$$

$$E_y = E_2\,(\sin\omega t\cos\delta + \cos\omega t\sin\delta) = E_2\left[\frac{E_x}{E_1}\cos\delta + \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_1^2}}\sin\delta\right] \tag{5.4.211}$$

$$\frac{E_y}{E_2} = \frac{E_x}{E_1}\cos\delta + \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_1^2}}\sin\delta \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{E_y}{E_2} - \frac{E_x}{E_1}\cos\delta\right)^2 = \left(1 - \frac{E_x^2}{E_1^2}\right)\sin^2\delta \tag{5.4.212}$$

Troviamo quindi l'equazione di un'ellisse nel piano E_x, E_y:

$$\frac{1}{E_2^2 \sin^2\delta}E_y^2 - \frac{2\cos\delta}{E_1E_2\sin^2\delta}E_xE_y + \frac{1}{E_1^2\sin^2\delta}E_x^2 = 1 \tag{5.4.213}$$

A z fissato, dunque, col passare del tempo il vettore $\vec{E}$ ruota tracciando un'ellisse nel piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica.
Ci sono alcuni casi particolari:

- $E_1 = 0$ o $E_2 = 0$: caso semplice di polarizzazione lineare lungo y o x rispettivamente;
- $\delta = 0$: si ha $E_y = \frac{E_2}{E_1}E_x$, quindi anche in questo caso la polarizzazione è lineare con $\vec{E}$ inclinato di un angolo $\gamma = \tan^{-1}\frac{E_2}{E_1}$ rispetto all'asse x;
- $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ e $E_1 = E_2$: si ha $E_x^2 + E_y^2 = E^2$, ovvero la polarizzazione è circolare.

In generale, il verso di polarizzazione è stabilito dal segno di $\delta \in [-\pi, \pi]$: se $\delta > 0$ la polarizzazione è destrorsa, mentre se $\delta < 0$ è sinistrorsa; infatti, prendendo WLOG $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$, per $t = 0$ si ha $E_x = 0$, $E_y = \pm E_2$, mentre per $t = \frac{\pi}{2\omega}$ si ha $E_x = E_1$ e $E_2 = 0$, dimostrando quanto detto prima.

5.4.1 Luce non polarizzata e polarizzata

I segnali luminosi di origine naturale sono generati da transizioni energetiche a livello atomico, ovvero da elettroni che oscillano fra orbitali differenti emettendo e assorbendo fotoni: tali emissioni sono tutte incoerenti, nel senso che le varie onde che si sommano formando il segnale luminoso hanno fasi scorrelate tra loro. La luce naturale è quindi non polarizzata.
È anche possibile stimolare le oscillazioni degli elettroni in modo che siano tutte in fase e la luce risulti polarizzata: è questo il caso di un laser (light amplification by stimulated emission of radiation) o di un maser (microwave amplification by stimulated emission of radiation): quest'ultimo è un sistema in grado di generare emissione stimolata e coerente in una range di frequenze molto ampio, dal radio all'infrarosso, ed esistono vari meccanismi astrofisici che possono generare radiazione maser (atmosfere planetarie e stellari, resti di supernova, sorgenti extragalattiche, etc.).
Un'applicazione della luce polarizzata è la microscopia a polarizzazione: tali microscopi vengono utilizzati con sostanze birifrangenti, ovvero con un indice di rifrazione dipendente dalla polarizzazione della luce: in queste sostanze la luce viene rifratta in vari raggi con cammini ottici diversi, che poi si ricombinano sull'oculare formando figure d'interferenza che possono evidenziare la struttura cristallina della sostanza.

5.5 Teorema di Poynting

Ricordando che vi è un'energia associata sia al campo elettrico che a quello magnetico, possiamo definire l'energia associata al campo elettromagnetico come la loro somma:

$$U_{EM} = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) dV \tag{5.5.214}$$

Consideriamo ora una distribuzione di cariche ρ e di correnti $\vec{J}$ che genera un campo elettromagnetico: detta $\vec{v}$ la velocità delle cariche in moto (data la densità di corrente), possiamo scrivere $dq = \rho dV$ e $\vec{J}dV = \rho\vec{v}dV$, dunque definendo w la densità di lavoro abbiamo:

$$dwdV = d\vec{F_L}\cdot d\vec{l} = dq(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = dq\vec{E}\cdot\vec{v}dt = \rho dV\vec{E}\cdot\vec{v}dt = \vec{J}\cdot\vec{E}dVdt \tag{5.5.215}$$

Pertanto la potenza erogata nel volume dV, data da $dP = \frac{dw}{dt}dV$, è:

$$P = \iiint_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV \tag{5.5.216}$$

Ricavando $\vec{J}$ dall'equazione di Ampère-Maxwell:

$$\begin{aligned} P &= \iiint_V \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B} - \epsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) dV \\ &\qquad \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{C}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{C} \\ &= \iiint_V \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E} - \epsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) dV \end{aligned} \tag{5.5.217}$$

Dll'equazione di Faraday abbiamo $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, quindi:

$$
\begin{aligned}
P &= \iiint_V \left(-\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) dV - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \iiint_V \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 + \epsilon_0 E^2 \right) dV \right] \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \oiint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{5.5.218}
$$

Definiamo il vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, che ha le dimensioni di una potenza per unità di superficie ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$) ed ha la stessa direzione di propagazione del campo elettromagnetico: esso rappresenta la potenza trasportata dall'onda che si propaga. Possiamo allora scrivere:

$$
\oiint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(U_{EM} + W) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(u_{EM} + w) \tag{5.5.219}
$$

Questa è formalmente identica all'equazione di continuità, ed infatti il significato fisico è proprio quello: il flusso di energia del campo elettromagnetico attraverso una superficie chiusa è pari alla variazione di energia all'interno del volume; se il flusso è positivo significa che l'energia esce dal volume, quindi la densità di energia al suo interno deve diminuire, e viceversa.

5.6 Momento Angolare del Campo Elettromagnetico

Consideriamo un cilindro (ad esempio un solenoide) di raggio a e lunghezza infinita e supponiamo che al suo interno ci sia un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e variabile nel tempo, diretto lungo l'asse del cilindro: la variazione del campo magnetico induce un campo elettrico con $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ e $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, dunque le sue linee di campo sono chiuse. Calcoliamo questo campo elettrico, considerando circonferenze ortogonali all'asse del cilindro di raggio r:

$$
\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oiint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} E(r) 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}, & r < a \\ E(r) 2\pi r = -\pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t}, & r > a \end{cases} \tag{5.6.220}
$$

per cui abbiamo:

$$
\vec{E}(r) = \begin{cases} -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{e}_\phi, & r < a \\ \\ -\frac{a^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{e}_\phi, & r > a \end{cases} \tag{5.6.221}
$$

Se attorno al cilindro disponiamo un anello carico di raggio $b > a$ con densità lineare di carica λ e ad un certo punto spegniamo il campo magnetico (quindi $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$), la variazione di flusso durante il transiente induce un campo elettrico come descritto prima, con linee di campo concentriche, il quale agisce sull'anello con una forza tangenziale ad esso che instaura una moto rotatorio. La corrente indotta sulle cariche naturalmente induce un campo magnetico $\vec{B}_{\text{ind}}$ che si oppone alla variazione di flusso di $\vec{B}$, ma questo effetto può essere trascurato poiché $B \gg B_{\text{ind}}$.
Dato che l'anello è messo in rotazione in assenza di altre forze dissipative, esso continuerà a ruotare anche dopo lo spegnimento di $\vec{B}$: la forza agente sull'elemento di carica è $d\vec{F} = dq\vec{E} = \lambda \vec{E}\, dl = \lambda b \vec{E}\, d\theta$, quindi:

$$
d\vec{\tau} = \vec{b} \times d\vec{F} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\tau} = 2\pi b^2 \lambda E(b)\, \hat{e}_z = -\pi a^2 b \lambda \frac{\partial B}{\partial t}\, \hat{e}_z \tag{5.6.222}
$$

$$
\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad dL = \tau\, dt = -\pi a^2 b \lambda\, dB \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta L = \pi a^2 b \lambda B \tag{5.6.223}
$$

poiché il campo magnetico varia da B a 0.
Questo esempio mostra come il campo elettromagnetico abbia un momento angolare, poiché altrimenti non sarebbe possibile per l'anello mettersi in rotazione, dato che in un sistema isolato $\vec{L}$ si conserva.
Per vedere più nel dettaglio questo fatto, vediamo cosa succederebbe se il campo elettromagnetico non avesse anche una quantità di moto.
Consideriamo due cariche positive in movimento, supponendo che ad un certo istante si trovino sugli

assi x e y con velocità rispettivamente $\vec{v}_1 = -v_1\,\hat{e}_x$, $\vec{v}_2 = -v_2\,\hat{e}_y$ $(v_1, v_2 > 0)$: esse generano un campo elettrostatico tale che $\vec{F}^{(e)}_{1,2} = q_2\vec{E}_1 = -\vec{F}^{(e)}_{2,1} = q_1\vec{E}_2$ (in accordo con la terza legge di Newton); dato che le cariche sono in moto, su di loro agisce anche un campo magnetico: si trova con la seconda regola della mano destra che $\vec{B}_1$ in q_2 ha direzione $-\hat{e}_z$ e $\vec{B}_2$ in q_1 ha direzione $\hat{e}_z$, quindi $\vec{F}^{(m)}_{1,2} = q_2\vec{v}_2 \times \vec{B}_1 \neq \pm\vec{F}^{(m)}_{2,1} = q_1\vec{v}_1 \times \vec{B}_2$ (la prima è diretta lungo $\hat{e}_x$, la seconda lungo $\vec{e}_y$).
Questa è un'apparente violazione della terza legge di Newton, e quindi della conservazione della quantità di moto: il problema viene risolto introducendo la quantità di moto del campo elettromagnetico (non è un'introduzione ad hoc, ma può essere derivata dalle equazioni di Maxwell).
Consideriamo un'onda elettromagnetica piana con polarizzazione lineare, definendo $\hat{n}$ la direzione di oscillazione del campo elettrico e $\hat{k}$ quella di propagazione dell'onda: possiamo dunque scrivere:

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\,\hat{n} \qquad \vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\,\hat{k}\times\hat{n} \tag{5.6.224}$$

La densità di energia sarà dunque:

$$\begin{aligned} u_{EM} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + \frac{1}{2\mu_0 c^2}E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ &= \epsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \end{aligned} \tag{5.6.225}$$

mentre il vettore di Poynting:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c}E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\,\hat{n}\times(\hat{k}\times\hat{n}) \\ &= c\epsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\,(\hat{k}(\hat{n}\cdot\hat{n}) - \hat{n}(\hat{k}\cdot\hat{n})) \\ &= c\epsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\,\hat{k} = c u_{EM}\,\hat{k} \end{aligned} \tag{5.6.226}$$

Dunque se l'onda è piana e polarizzata linearmente il vettore di Poynting è diretto lungo la direzione di propagazione dell'onda.
Dal vettore di Poynting si dimostra che la densità di quantità di moto è $\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$: per un'onda piana polarizzata linearmente $\vec{g} = \frac{1}{c}u_{EM}\,\hat{k}$.
Si noti che sia l'energia che la quantità di moto sono grandezze rapidamente variabili: per un'onda luminosa, le variazioni avvengono con frequenze dell'ordine di 10^{16} Hz, mentre per quelle radio si ha comunque 10^3 Hz.
Di conseguenza, un dispositivo che interagisca con un'onda elettromagnetica non sarà sensibile alle variazioni di densità di energia, ma alla densità di energia media $\langle u_{EM}\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T u_{EM}(t)\,dt$, con T periodo dell'onda.
Nel caso di un'onda piana, dato che $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}$, si vede facilmente che:

$$\langle u_{EM}\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \quad\Longrightarrow\quad \langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{2}\epsilon_0 E_0^2\,\hat{k} \quad\Longrightarrow\quad \langle\vec{g}\rangle = \frac{1}{2c}\epsilon_0 E_0^2\,\hat{k} \tag{5.6.227}$$

Il valore medio del vettore di Poynting è definito intensità dell'onda $I \equiv \langle S\rangle$ (u.d.m. W$\cdot$m^{-2}) e rappresenta l'energia per unità di tempo che viene trasportata dall'onda per unità di superficie.
Nel caso generale si ha:

$$\langle u_{EM}\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0\langle E^2\rangle + \frac{1}{2\mu_0}\langle B^2\rangle \qquad \langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle\vec{E}\times\vec{B}\rangle \qquad \langle\vec{g}\rangle = \frac{1}{c^2}\langle\vec{S}\rangle \tag{5.6.228}$$

5.6.1 Pressione di radiazione

Una radiazione elettromagnetica esercita una pressione quanto incide su una superficie, derivante dal fatto che la radiazione possiede una quantità di moto.
Consideriamo un'onda piana incidente su una superficie A di materiale completamente assorbente la radiazione: sia l'energia che la quantità di moto vengono completamente trasferite al materiale. La quantità di moto trasferita da uno spessore $dx = c\,dt$ di materiale è:

$$d\vec{p} = \langle\vec{g}\rangle A\,dx = \frac{1}{2c}\epsilon_0 E_0^2 Ac\,dt\,\hat{k} \qquad\Longrightarrow\qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 A\,\hat{k} \tag{5.6.229}$$

Dunque troviamo facilmente la pressione di radiazione:

$$P_r^{(\mathrm{abs})} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \tag{5.6.230}$$

Se al contrario consideriamo un materiale perfettamente riflettente, la radiazione elettromagnetica cede energia e momento al materiale, il quale, invece di dissiparlo in calore come nel caso precedente, lo riconverte in un'onda elettromagnetica che viene riemessa in direzione opposta a quella incidente: la variazione di quantità di moto sarà dunque $d\vec{p} = d\vec{p}_\mathrm{i} - d\vec{p}_\mathrm{r} = 2d\vec{p}_\mathrm{i}$, poiché $d\vec{p}_\mathrm{r} = -d\vec{p}_\mathrm{i}$; la variazione del momento è doppia rispetto al caso precedente, dunque:

$$P_r^{(\mathrm{refl})} = \epsilon_0 E_0^2 \tag{5.6.231}$$

Possiamo anche calcolare il valore della pressione della radiazione solare, partendo dal valore della costante solare $C_s \approx 1300\,\mathrm{W/m^2}$, ovvero il valore della potenza emessa dal Sole che incide sulla Terra per unità di superficie.
Supponiamo che la luce solare sia un'onda piana polarizzata linearmente: la sua intensità è $I = \frac{c}{2}\epsilon_0 E_0^2 \equiv C_s$, ma la sua pressione di radiazione è $P_r = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$, quindi $P_r = \frac{C_s}{c} \approx 4.3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Pa}$, che è estremamente piccola se confrontata ad esempio alla pressione atmosferica, dalla quale differisce per 11 ordini di grandezza.

5.7 Ottica

5.7.1 Incidenza normale

Consideriamo l'interazione di un'onda elettromagnetica con una superficie piana semi-riflettente, supponendo che l'onda incida perpendicolarmente alla superficie: una parte dell'onda verrà trasmessa, mentre una parte verrà riflessa.
Dette 1 e 2 le regioni rispettivamente "davanti" e "dietro" la superficie, si ha:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_\mathrm{i} + \vec{E}_\mathrm{r} \qquad \vec{B}_1 = \vec{B}_\mathrm{i} + \vec{B}_\mathrm{r} \tag{5.7.232}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_\mathrm{t} \qquad \vec{B}_2 = \vec{B}_\mathrm{t} \tag{5.7.233}$$

Se l'onda è piana e polarizzata linearmente, fissata una terna cartesiana tale che la superficie giaccia nel piano xy, possiamo scrivere i campi come:

$$\vec{E}_1 = \left[E_{0,\mathrm{i}} e^{i(\omega_\mathrm{i} t - k_{z,1} z)} + E_{0,\mathrm{r}} e^{i(\omega_\mathrm{r} t + k_{z,1} z)}\right] \hat{e}_x \qquad \vec{B}_1 = \left[B_{0,\mathrm{i}} e^{i(\omega_\mathrm{i} t - k_{z,1} z)} + B_{0,\mathrm{r}} e^{i(\omega_\mathrm{r} t + k_{z,1} z)}\right] \hat{e}_y \tag{5.7.234}$$

$$\vec{E}_2 = E_{0,\mathrm{r}} e^{i(\omega_\mathrm{t} t - k_{z,2} z)}\,\hat{e}_x \qquad \vec{B}_2 = B_{0,\mathrm{t}} e^{i(\omega_\mathrm{t} t - k_{z,2} z)}\,\hat{e}_y \tag{5.7.235}$$

Inoltre ricordiamo la relazione che lega $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{v_1}\left[E_{0,\mathrm{i}} e^{i(\omega_\mathrm{i} t - k_{z,1} z)} - E_{0,\mathrm{r}} e^{i(\omega_\mathrm{r} t + k_{z,1} z)}\right] \hat{e}_y \tag{5.7.236}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{v_2} E_{0,\mathrm{r}} e^{i(\omega_\mathrm{t} t - k_{z,2} z)}\,\hat{e}_y \tag{5.7.237}$$

Stiamo dando per scontato che la direzione di polarizzazione dei campi riflesso e trasmesso sia la stessa dell'onda incidente: questo non è scontato, ma si può dimostrare imponendo le condizioni al contorno (in $z = 0$, dov'è la superficie):

$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \qquad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{\parallel} \tag{5.7.238}$$

Con queste è possibile determinare i campi:

$$\begin{aligned} E_1^{\parallel}(z=0) = E_2^{\parallel}(z=0) \quad &\Longrightarrow \quad E_{0,\mathrm{i}} e^{i\omega_\mathrm{i} t} + E_{0,\mathrm{r}} e^{i\omega_\mathrm{r} t} = E_{0,\mathrm{t}} e^{i\omega_\mathrm{t} t} \\ &\Longrightarrow \quad \omega_\mathrm{i} = \omega_\mathrm{r} = \omega_\mathrm{t} \qquad E_{0,\mathrm{i}} + E_{0,\mathrm{r}} = E_{0,\mathrm{t}} \end{aligned} \tag{5.7.239}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{\parallel}(z=0) = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{\parallel}(z=0) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{\mu_1 v_1}(E_{0,\mathrm{i}} - E_{0,\mathrm{r}}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0,\mathrm{t}} \\ &\Longrightarrow \quad (E_{0,\mathrm{i}} - E_{0,\mathrm{r}}) = \beta E_{0,\mathrm{t}} \qquad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \end{aligned} \tag{5.7.240}$$

La soluzione del sistema di equazioni ottenuto è:

$$E_{0,\mathrm{t}} = \frac{2}{1+\beta}E_{0,\mathrm{i}} \qquad E_{0,\mathrm{r}} = \frac{1-\beta}{1+\beta}E_{0,\mathrm{i}} \tag{5.7.241}$$

Dato che per la maggio parte delle sostanze $\mu_r \equiv \mu/\mu_0 \sim 1$, si può scrivere $\beta \approx v_1/v_2 = n_2/n_1$, dove $n \equiv c/v$ è l'indice di rifrazione del mezzo, così da far diventare la soluzione:

$$E_{0,\mathrm{t}} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}E_{0,\mathrm{i}} \qquad E_{0,\mathrm{r}} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}E_{0,\mathrm{i}} \tag{5.7.242}$$

Come ci aspetteremmo, se $n_1 = n_2$ l'onda è completamente trasmessa.
Se ora consideriamo l'intensità $I = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2$, abbiamo:

$$I_\mathrm{i} = \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 E_{0,\mathrm{i}}^2 \qquad I_\mathrm{r} = \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 E_{0,\mathrm{r}}^2 \qquad I_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\epsilon_2 v_2 \left(\frac{2n_1}{n_1+n_2}\right)^2 E_{0,\mathrm{t}}^2 \tag{5.7.243}$$

Ricordando $\epsilon = 1/\mu v^2$, è possibile definire i coefficienti di riflessione e trasmissione:

$$R \equiv \frac{I_\mathrm{r}}{I_\mathrm{i}} = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 \qquad T \equiv \frac{I_\mathrm{t}}{I_\mathrm{i}} = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2} \qquad T + R = 1 \tag{5.7.244}$$

5.7.2 Incidenza obliqua

Supponiamo ora che l'onda incida sulla superficie con un angolo θ_i rispetto alla normale alla superficie: una parte dell'onda verrà riflessa con un angolo θ_r ed una parte trasmessa con un angolo θ_t.
I campi delle tre onde sono:

$$\vec{E}_{\mathrm{i,r,t}}(\vec{r},t) = \vec{E}_{0,\mathrm{i,r,t}}e^{i(\omega_{\mathrm{i,r,t}}t - \vec{k}_{\mathrm{i,r,t}}\cdot\vec{r})} \qquad \vec{B}_{\mathrm{i,r,t}}(\vec{r},t) = \frac{1}{v_{1,2}}\hat{k}_{\mathrm{i,r,t}} \times \vec{E}_{\mathrm{i,r,t}}(\vec{r},t) \tag{5.7.245}$$

All'interfaccia tra le due regioni ($z = 0$), per il campo elettrico si ha la seguente condizione al contorno:

$$E_{0,\mathrm{i}}^{\|}e^{i(\omega_\mathrm{i}t - \vec{k}_\mathrm{i}\cdot\vec{r})} + E_{0,\mathrm{r}}^{\|}e^{i(\omega_\mathrm{r}t - \vec{k}_\mathrm{r}\cdot\vec{r})} = E_{0,\mathrm{t}}^{\|}e^{i(\omega_\mathrm{t}t - \vec{k}_\mathrm{t}\cdot\vec{r})} \tag{5.7.246}$$

che è equivalente a dire che le tre fasi devono essere uguali; tale condizione deve valere in ogni punto dello spazio, quindi anche nell'origine, e ad ogni tempo, quindi, ricordando che $k = \frac{\omega}{v}$, otteniamo:

$$\omega_\mathrm{i} = \omega_\mathrm{r} = \omega_\mathrm{t} \equiv \omega \qquad \Longrightarrow \qquad k_\mathrm{i} = k_\mathrm{r} = \frac{v_2}{v_1}k_\mathrm{t} = \frac{n_1}{n_2}k_\mathrm{t} \tag{5.7.247}$$

L'uguaglianza delle fasi si riduce quindi a $\vec{k}_\mathrm{i}\cdot\vec{r} = \vec{k}_\mathrm{r}\cdot\vec{r} = \vec{k}_\mathrm{t}\cdot\vec{r}$, che sul piano $z = 0$ diventa:

$$k_{x,\mathrm{i}}x + k_{y,\mathrm{i}}y = k_{x,\mathrm{r}}x + k_{y,\mathrm{r}}y = k_{x,\mathrm{t}}x + k_{y,\mathrm{t}}y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} k_{x,\mathrm{i}} = k_{x,\mathrm{r}} = k_{x,\mathrm{t}} \ (y=0) \\ k_{y,\mathrm{i}} = k_{y,\mathrm{r}} = k_{y,\mathrm{t}} \ (x=0) \end{cases} \tag{5.7.248}$$

Il significato fisico di queste relazioni è che le componenti trasversali (ortogonali a $\hat{e}_z$) dei tre vettori d'onda sono uguali, dunque questi vettori giacciono sullo stesso piano: questa non è altro che la prima legge dell'ottica geometrica, che dice che i tre raggi giacciono su uno stesso piano detto piano d'incidenza; tale piano è determinato da $\vec{k}_\mathrm{i}$ e dalla normale alla superficie.
Supponiamo per semplicità che la normale alla superficie sia $\hat{e}_z$ ed il piano di incidenza sia il piano yz: detto θ_j l'angolo che $\vec{k}_j$ forma con l'asse z, la 5.7.248 si scrive:

$$\begin{cases} k_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{i} = k_\mathrm{r}\sin\theta_\mathrm{r} \\ k_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{i} = k_\mathrm{t}\sin\theta_\mathrm{t} \end{cases} \tag{5.7.249}$$

ma $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$, e la riflessione non varia la lunghezza d'onda, dunque $k_\mathrm{i} = k_\mathrm{r}$ e $\frac{k_\mathrm{i}}{k_\mathrm{t}} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$, quindi:

$$\theta_\mathrm{i} = \theta_\mathrm{r} \qquad n_1\sin\theta_\mathrm{i} = n_2\sin\theta_\mathrm{t} \tag{5.7.250}$$

che sono la seconda e la terza legge dell'ottica geometrica.
Rimangono ora da trovare le relazioni tra le ampiezza dei campi. Sempre avendo WLOG yz come piano

d'incidenza, assumiamo che $\vec{E}$ giaccia anch'esso sul piano d'incidenza: si può dimostrare che, in questo caso, anche i campi riflesso e trasmesso giacciono sullo stesso piano; una trattazione analoga può essere fatta nel caso in cui $\vec{E}$ sia ortogonale al piano d'incidenza.
Se $\vec{E}$ è sul piano d'incidenza, $\vec{B} = \frac{1}{v}\hat{k} \times \vec{E}$ è ortogonale ad esso; inoltre, dato che $\hat{k} \perp \vec{E}, \vec{B}$, si ha $B = E/v$.
Applichiamo ora le condizioni al contorno (componente normale è z):

$$\begin{cases} \epsilon_1(E_{0z,\mathrm{i}} + E_{0z,\mathrm{r}}) = \epsilon_2 E_{0z,\mathrm{t}} \\ B_{0z,\mathrm{i}} + B_{0z,\mathrm{r}} = B_{0z,\mathrm{t}} \\ E^{\|}_{0,\mathrm{i}} + E^{\|}_{0,\mathrm{r}} = E^{\|}_{0,\mathrm{t}} \\ \frac{1}{\mu_1}(B^{\|}_{0,\mathrm{i}} + B^{\|}_{0,\mathrm{r}}) = \frac{1}{\mu_2} B^{\|}_{0,\mathrm{t}} \end{cases} \implies \begin{cases} \epsilon_1(E_{0,\mathrm{i}} \sin\theta_\mathrm{i} - E_{0,\mathrm{r}} \sin\theta_\mathrm{r}) = \epsilon_2 E_{0,\mathrm{t}} \sin\theta_\mathrm{t} \\ B_z = 0 \\ E_{0,\mathrm{i}} \cos\theta_\mathrm{i} + E_{0,\mathrm{r}} \cos\theta_\mathrm{r} = E_{0,\mathrm{t}} \cos\theta_\mathrm{t} \\ \frac{1}{\mu_1 v_1}(E_{0,\mathrm{i}} - E_{0,\mathrm{r}}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0,\mathrm{t}} \end{cases} \tag{5.7.251}$$

Dato che $\theta_\mathrm{i} = \theta_\mathrm{r}$, $\sin\theta_\mathrm{i}/v_1 = \sin\theta_\mathrm{t}/v_2$ e che $\epsilon = 1/\mu v^2$, la prima e l'ultima equazione sono equivalenti, dunque il sistema di equazioni si riduce a:

$$\begin{cases} E_{0,\mathrm{i}} + E_{0,\mathrm{r}} = \alpha E_{0,\mathrm{t}} & \alpha = \dfrac{\cos\theta_\mathrm{t}}{\cos\theta_\mathrm{i}} \\ \\ E_{0,\mathrm{i}} - E_{0,\mathrm{r}} = \beta E_{0,\mathrm{t}} & \beta = \dfrac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \end{cases} \tag{5.7.252}$$

che ha come soluzioni:

$$E_{0,\mathrm{t}} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0,\mathrm{i}} \qquad E_{0,\mathrm{r}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0,\mathrm{i}} \tag{5.7.253}$$

Si nota che per $\theta_\mathrm{i} = 0$ e $\theta_\mathrm{t} = 0$ si ritrova la legge dell'incidenza normale.
Le ampiezze così trovate dipendono dall'angolo di incidenza tramite il parametro α:

$$\alpha = \frac{1}{\cos\theta_\mathrm{i}} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin\theta_\mathrm{i}\right)^2} \tag{5.7.254}$$

Ci sono due casi limite: il primo, banale, è che $\theta_\mathrm{i} \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \to \infty$, ovvero si ha riflessione totale, mentre per $\alpha = \beta$ si ha trasmissione totale: tale fenomeno avviene quando l'angolo d'incidenza è pari all'angolo di Brewster così definito:

$$\sin^2\theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \tag{5.7.255}$$

Per luce polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza non esiste un fenomeno analogo.
Supponiamo che un fascio di luce polarizzata arbitrariamente incida su una superficie con angolo d'incidenza pari (o prossimo) all'angolo di Brewster: la componente con polarizzazione parallela al piano d'incidenza è completamente trasmessa, quindi tutta la luce riflessa ha polarizzazione perpendicolare al piano d'incidenza.
Su questo fenomeno si basa l'utilizzo dei filtri polaroid negli occhiali per ridurre i riflessi.

5.8 Potenziali Elettromagnetici

Dalla terza equazione di Maxwell $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ abbiamo visto che deve esistere una funzione vettoriale $\vec{A} : \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$; inserendolo nella seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \implies \qquad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{5.8.256}$$

quindi deve esistere una funzione scalare $\phi : \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$. Possiamo quindi scrivere sia il campo elettrico che il campo magnetico in funzione di due potenziali, detti potenziale scalare e potenziale vettore:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5.8.257}$$

Inserendo queste espressioni nella legge di Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \tag{5.8.258}$$

Ricordando che $\nabla \times \nabla \times = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}\right) = -\mu_0 \vec{J} \tag{5.8.259}$$

Se invece consideriamo la prima equazione di Maxwell:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.8.260}$$

Queste equazioni sono accoppiate dal termine $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}$, quindi è naturale chiedersi qualora sia possibile annullare questa espressione.

5.8.1 Invarianza di gauge

I potenziali elettromagnetici non sono univocamente determinati: ϕ è invariante per aggiunta di una costante, mentre $\vec{A}$ per aggiunta del gradiente di una funzione scalare; una trasformazione del tipo:

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi + \text{cost.} \\ \vec{A} &\longrightarrow \vec{A} + \nabla f \end{aligned} \tag{5.8.261}$$

è detta trasformazione di gauge (inglese per “misurare”, “calibrare”).
In questo contesto, si dice che il campo elettromagnetico è invariante per trasformazioni di gauge, nel senso che anche dopo una trasformazione del genere i campi rimangono gli stessi.
Cerchiamo dunque una trasformazione di gauge che disaccoppi le equazioni per i potenziali.
Consideriamo la trasformazione $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$: il campo elettrico sarà:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \equiv -\nabla \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \tag{5.8.262}$$

dove è stato definito $\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$. Otteniamo un'equazione per Λ:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}\right) \tag{5.8.263}$$

È possibile dimostrare che questa equazione in Λ ha sempre una soluzione, ovvero che è sempre possibile determinare il gauge nel quale le equazione dei potenziali elettromagnetici si disaccoppiano:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \tag{5.8.264}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.8.265}$$

Questo è detto gauge di Lorenz.
Si noti che nel caso stazionario si ritrovano le equazioni dell'elettrostatica $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ e della magnetostatica $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$.
Il gauge di Lorenz è uno dei vari gauge possibili, e nel caso dell'elttrodinamica esso è ragionevole poiché le equazioni dei potenziali si disaccoppiano in due equazioni d'onda non omogenee.
Nel caso statico, però, esiste un gauge più vantaggioso, detto gauge di Coulomb, poiché le equazioni da disaccoppiare in questo caso sono:

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{J} \qquad \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.8.266}$$

quindi basta annullare $\nabla \cdot \vec{A}$. Considerando di nuovo $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$, l'equazione per $\Lambda : \nabla \cdot \vec{A}' = 0$ è:

$$\nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \vec{A} \tag{5.8.267}$$

che è un'equazione di Poisson con soluzione generale data da:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla \cdot \vec{A}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{5.8.268}$$

In generale, non è necessario conoscere Λ, ma basta sapere che esiste, così da poter scrivere e risolvere le equazioni dei potenziali nel determinato gauge.

5.8.2 Potenziali ritardati

Abbiamo visto che nel caso statico le equazioni per i potenziali hanno come soluzioni:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' \tag{5.8.269}$$

È possibile dimostrare che nel caso dinamico le soluzioni sono formalmente simili:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' \qquad t_r \equiv t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \tag{5.8.270}$$

dove t_r è detto tempo ritardato: esso ha un significato profondamente fisico, poiché quantifica il fatto che l'informazione non si propaga a velocità infinita e che quindi i potenziali in un determinato punto $(\vec{r},t)$ sono determinati dalle distribuzioni di cariche e correnti ad un tempo precedente, appunto t_c.
La semplicità di tale soluzione è solo apparente, come si può notare dalle espressioni per i campi:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \left[\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - \frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_r)(\vec{r}-\vec{r}\,')}{c\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{c^2\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right] dV' \tag{5.8.271}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{c\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} \right] \times (\vec{r}-\vec{r}\,') dV' \tag{5.8.272}$$

Naturalmente per ρ e $\vec{J}$ indipendenti dal tempo ritroviamo le equazioni del caso statico.
A partire da questa soluzione generale, è possibile fornire un'approssimazione quasi-statica del campo magnetico.
Iniziamo definendo $\vec{u} \equiv \vec{r}-\vec{r}\,'$:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{u^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{cu} \right] \times \hat{u}\, dV \tag{5.8.273}$$

Consideriamo ora una densità di corrente le cui variazioni temporali abbiano una scala di tempi fissata da un parametro $\tau \equiv J(\vec{r},t)/\dot{J}(\vec{r},t)$, ed in particolare il caso di variazioni lente $\tau \gg |t-t_r|$:

$$\begin{gathered} \dot{\vec{J}}(t_r) \approx \dot{\vec{J}}(t) + \ddot{\vec{J}}(t)(t_r - t)\,, \qquad \vec{J}(t_r) \approx \vec{J}(t) + \dot{\vec{J}}(t)(t_r - t) \\ \dot{\vec{J}}(t) \approx \frac{1}{\tau}\vec{J}(t) \;\Rightarrow\; \ddot{\vec{J}}(t) \approx \frac{1}{\tau}\dot{\vec{J}}(t) \\ \approx \dot{\vec{J}}(t)\left(1 + \frac{t_r - t}{\tau}\right) \approx \dot{\vec{J}}(t) \end{gathered} \tag{5.8.274}$$

Dalla definizione di potenziale ritardato otteniamo inoltre che $u = |\vec{r}-\vec{r}\,'| = c(t-t_r)$, quindi possiamo approssimare l'espressione per il campo magnetico:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{u^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{cu} \right] \times \hat{u}\, dV \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t) + \dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)(t_r - t)}{u^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{cu} \right] \times \hat{u}\, dV \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t) - \dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t)(t - t_r)}{cu(t-t_r)} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{cu} \right] \times \hat{u}\, dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t)}{u^2} \times \hat{u}\, dV \end{aligned} \tag{5.8.275}$$

Nell'approssimazione quasi-statica ritroviamo la legge di Biot-Savart.

6 Appendice Matematica

6.1 Rotore

Seguendo l'esempio del teorema di Gauss, ci chiediamo qualora sia possibile esprimere in forma differenziale la legge $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$: per fare ciò, è necessario definire il rotore.
Consideriamo una curva chiusa γ ed una superficie $S : \partial S = \gamma$ (tale superficie non è univoca); consideriamo un campo vettoriale $\vec{F}$ e la sua circuitazione $\Gamma \equiv \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l}$: suddividendo γ in due loops γ_1 e γ_2 tali da avere un lato in comune, è evidente che $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, dunque in generale possiamo suddividere γ in $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, così da avere $\Gamma = \sum_k \Gamma_k$. Dato che Γ_k tende ad annullarsi all'aumentare del numero dei loops, possiamo prendere come rotore il limite del rapporto tra Γ_k e l'area S_k racchiusa da γ_k: per eliminare l'ambiguità della superficie scelta, definiamo il rotore rispetto ad una particolare direzione, la quale fornisce la direzione del vettore normale alla superficie, mentre il verso è stabilito dalla regola della mano destra; abbiamo dunque la definizione di rotore:

$$(\mathrm{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_k = \lim_{S_k \to 0} \frac{\Gamma_k}{S_k} \tag{6.1.276}$$

Dunque avremo che:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_k S_k \xrightarrow[N\to\infty]{} \oiint_S (\mathrm{rot}\vec{F}) \cdot d\vec{S} \tag{6.1.277}$$

Abbiamo ricavato il teorema di Stokes:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oiint_S (\mathrm{rot}\vec{F}) \cdot d\vec{S} \tag{6.1.278}$$

6.1.1 Rotore in coordinare cartesiane

Consideriamo un loop rettangolare γ sul piano (x, y) ed una corrispondente superficie chiusa con normale $\hat{n} = \hat{e}_z$ e calcoliamo la componente del rotore $(\mathrm{rot}\vec{F})_z \equiv (\mathrm{rot}\vec{F})\cdot\hat{e}_z$; detti $\vec{r}_0$ il punto centrale del rettangolo, $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_4$ i punti medi dei suoi lati e $\Delta x, \Delta y$ le loro lunghezze (supposte infinitesime), abbiamo che la circuitazione sarà:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \vec{F}_1 \cdot \hat{e}_x \Delta_x + \vec{F}_2 \cdot \hat{e}_y \Delta_y - \vec{F}_3 \cdot \hat{e}_x \Delta_x - \vec{F}_4 \cdot \hat{e}_4 \Delta_4 \\ &= \left[\frac{\partial F_x}{\partial y}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right) - \frac{\partial F_x}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta x + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - \frac{\partial F_y}{\partial x}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta y \\ &= \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\Delta x \Delta y\end{aligned} \tag{6.1.279}$$

Dato che l'area della superficie è $S = \Delta x \Delta y$, si ha che $(\mathrm{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$.
Per analogia si trovano anche le altre componenti e si arriva a:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} \tag{6.1.280}$$

6.1.2 Teorema di Helmholtz

Il teorema di Stokes permette una comoda caratterizzazione dei campi conservativi: $\vec{F}$ è un campo conservativo $\iff \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \nabla \times \vec{F} = 0 \iff$ esiste una funzione scalare $\phi : \vec{F} = \nabla\phi$.
Da ciò è possibile ricavare il teorema di Helmholtz: dato un campo vettoriale $\vec{F}(\vec{r})$ di cui sono noti la divergenza $\nabla \cdot \vec{F} = \rho(\vec{r})$ e il rotore $\nabla \times \vec{F} = \vec{J}(\vec{r})$, se queste due funzioni si annullano all'infinito più velocemente di $\frac{1}{r^2}$, allora il campo è univocamente determinato da:

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}, \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\nabla \cdot \vec{F}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\vec{r}\,', \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\nabla \times \vec{F}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\vec{r}\,' \tag{6.1.281}$$

ovvero esso è dato da una componente irrotazionale e da una solenoidale.