

# Fisica Quantistica 2

Prof. S. Forte, a.a. 2024-25

Leonardo Cerasi<sup>1</sup>, Lucrezia Bioni

GitHub repository: [LeonardoCerasi/notes](#)

<sup>1</sup>[leo.cerasi@pm.me](mailto:leo.cerasi@pm.me)

---

# Indice

Indice	ii
Introduzione	1
<b>I   Meccanica Quantistica in più Dimensioni</b>	<b>2</b>
<b>1   Sistemi Quantistici Multidimensionali</b>	<b>3</b>
1.1   Spazio prodotto diretto . . . . .	3
1.2   Sistemi multidimensionali . . . . .	3
1.2.1   Coordinate cartesiane . . . . .	4
1.3   Separabilità . . . . .	5
1.3.1   Problemi separabili in coordinate cartesiane . . . . .	5

---

# Introduzione

La fisica quantistica è una teoria stocastica, non probabilistica, poiché permette di prevedere la probabilità che il sistema si trovi in un determinato stato e non le probabilità dei singoli eventi: questi avvengono con la misura, la quale fa cambiare l'informazione sul sistema in modo discontinuo. L'evoluzione temporale dello stato del sistema è data da trasformazioni unitarie che permettono di prevedere lo stato futuro del sistema.

La generalizzazione della meccanica quantistica unidimensionale a sistemi in più dimensioni e con più corpi introduce una notevole complessità nella trattazione che porta a sviluppi formali legati ai principi della fisica quantistica.

La teoria quantistica si sviluppa in direzioni diverse in base a due tipi di sistemi:

- sistemi riducibili, i quali vengono ricondotti a problemi più semplici a bassa dimensionalità (analogamente alla separazione del problema dei due corpi nel problema del baricentro e in quello del moto relativo), introducendo di conseguenza nuove osservabili associate alle trasformazioni possibili del sistema (studio dei gruppi di simmetria del sistema);
- sistemi irriducibili, che invece non possono essere semplificati per via di fenomeni come l'entanglement (*Verschränkung*) che emergono nei sistemi a più corpi.

La trattazione di sistemi complessi può essere semplificata in vari modi:

- limite classico: formulazione completamente diversa della meccanica quantistica introdotta da Feynman e basata sul concetto di integrale di cammino (path integral), permette di capire la relazione tra fisica classica e quantistica;
- metodi perturbativi: permettono di trovare soluzioni approssimate e non esatte; in particolare, si usano due classi di metodi perturbativi in base al sistema considerato:
  - indipendenti dal tempo, importanti per lo studio degli stati legati (es. atomo di elio);
  - dipendenti dal tempo, utilizzati per studiare gli stati del continuo (es. teoria d'urto).

# Parte I

## Meccanica Quantistica in più Dimensioni

# Sistemi Quantistici Multidimensionali

## 1.1 Spazio prodotto diretto

Per definire formalmente i sistemi quantistici in più dimensioni, è necessario definire prima il prodotto diretto tra spazi di Hilbert.

**Definizione 1.1.1.** Dati due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  con basi  $\{|e_i\rangle\}$  e  $\{|\tilde{e}_j\rangle\}$ , si definisce il loro prodotto diretto come  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} := \{|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |e_i\rangle \otimes |\tilde{e}_j\rangle\}$ . In questo spazio si definisce il prodotto scalare tra due vettori  $|\psi_1\rangle = |e_{i_1}\rangle \otimes |\tilde{e}_{j_1}\rangle$  e  $|\psi_2\rangle = |e_{i_2}\rangle \otimes |\tilde{e}_{j_2}\rangle$  come  $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle e_{i_1}|e_{i_2}\rangle \langle \tilde{e}_{j_1}|\tilde{e}_{j_2}\rangle$ .

Per semplificare la scrittura, si adotta la notazione  $|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle \equiv |e_i e_j\rangle$  (o si sottintende  $\otimes$ ).

Si noti che osservabili relative a spazi diversi sono sempre compatibili.

In generale, il generico  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  non è scrivibile come prodotto diretto  $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\tilde{\phi}\rangle$ , con  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  e  $|\tilde{\phi}\rangle \in \mathcal{K}$ , poiché in generale non è detto che  $c_{ij}$  sia fattorizzabile in  $\alpha_i$  e  $\tilde{\alpha}_j$ : in questo caso si dice che lo stato è entangled.

**Definizione 1.1.2.** Uno stato  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  si dice entangled se non è fattorizzabile.

*Esempio 1.1.1.* Dati due qubit, uno stato entangled è  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ , dato che il generico stato fattorizzabile è  $(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$ .

La probabilità  $P_{ij} = |c_{ij}|^2$  è detta probabilità congiunta: in generale essa non è il prodotto delle probabilità dei singoli eventi per i fenomeni di interferenza quantistica, i quali rendono tale probabilità dipendente dallo stato dell'intero sistema.

## 1.2 Sistemi multidimensionali

Per generalizzare la meccanica quantistica in  $d$  dimensioni, si introduce l'operatore posizione  $\hat{\mathbf{x}}$ :

$$\hat{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_d \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Ciascuna componente di questo vettore è un operatore hermitiano che agisce su uno spazio di Hilbert, mentre il vettore  $\hat{\mathbf{x}}$  agisce sul loro prodotto diretto  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_d$ . Su ciascuno spazio  $\mathcal{H}_j$  viene definita la base delle posizioni da  $\hat{x}_j |x_j\rangle = x_j |x_j\rangle$ , dunque la base delle posizioni in  $\mathcal{H}$  sarà  $|\mathbf{x}\rangle := |x_1\rangle \otimes \cdots \otimes |x_d\rangle$ : data  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , la sua rappresentazione sulla base delle posizioni è

$\langle \mathbf{x} | \psi \rangle \equiv \psi(\mathbf{x})$ , con  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , il cui modulo quadro dà una densità di probabilità  $d$ -dimensionale  $dP_{\mathbf{x}} = |\psi(\mathbf{x})|^2 d^d \mathbf{x}$ .

In questo caso, l'entanglement consiste nel fatto che, in generale,  $\psi(\mathbf{x}) \neq \psi_1(x_1) \dots \psi_d(x_d)$ .

Tale formalismo è generalizzabile al caso di  $n$  corpi in  $d$  dimensioni, nel qual caso si ha uno spazio prodotto diretto di  $nd$  spazi di Hilbert.

*Esempio 1.2.1.* Nel caso di 2 corpi in 3 dimensioni, si ha:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2} \\ \hat{x}_{1,3} \\ \hat{x}_{2,1} \\ \hat{x}_{2,2} \\ \hat{x}_{2,3} \end{pmatrix}$$

In questo sistema, la funzione d'onda è  $\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 | \psi \rangle = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{x} \rangle = \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2)$$

La  $\delta^{(d)}$  è il prodotto di  $d$  delte di Dirac ed è definita da  $\int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$  come distribuzione.

### 1.2.1 Coordinate cartesiane

Analogamente al caso monodimensionale, per definire l'operatore impulso si considera una traslazione spaziale; le componenti del vettore operatore impulso  $\hat{\mathbf{p}}$  sulla base delle posizioni sono definite da:

$$\langle \mathbf{x} | \hat{p}_j | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

In forma vettoriale, è possibile scrivere:

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \quad (1.4)$$

A questo punto, è facile definire le autofunzioni dell'impulso tali per cui  $\hat{\mathbf{p}} |\mathbf{k}\rangle = \hbar \mathbf{k} |\mathbf{k}\rangle$ :

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \equiv \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

Il fatto che operatori su spazi diversi commutino tra loro implica che:

$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \quad \forall j, k = 1, \dots, d \quad (1.6)$$

Dal punto di vista matematico, questo è ovvio per il lemma di Schwarz (assumendo una well-behaved  $\psi$ ), mentre da quello fisico ciò esprime il fatto che traslazioni lungo assi diversi commutano tra loro: ciò non è scontato, infatti ad esempio le rotazioni rispetto ad assi diversi non commutano (dunque le componenti del momento angolare non commuteranno).

È facile vedere che  $\hat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$ , dunque è possibile definire l'Hamiltoniana del sistema (e con essa la sua evoluzione temporale):

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \quad (1.7)$$

Ricordando che  $\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ , si ottiene l'equazione di Schrödinger sulla base delle coordinate:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}) \quad (1.8)$$

## 1.3 Separabilità

Nel caso di sistemi non-entangled, è possibile separare il problema multidimensionale in  $d$  problemi monodimensionali e scrivere la soluzione come prodotto delle soluzioni dei problemi ridotti.

### 1.3.1 Problemi separabili in coordinate cartesiane

**Proposizione 1.3.1.** *In coordinate cartesiane, condizione sufficiente affinché il problema sia separabile è che:*

$$V(\mathbf{x}) = V_1(x_1) + \cdots + V_d(x_d) \quad (1.9)$$

In tal caso, l'Hamiltoniana del sistema è somma di  $d$  sotto-Hamiltoniane (e di conseguenza lo è anche l'evoluzione temporale):

$$\hat{\mathcal{H}}_j = \frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \hat{V}(x_j) \quad (1.10)$$