

# Interferometro di Michelson

Laboratorio di Ottica, Elettronica e Fisica Moderna  
C.d.L. in Fisica, a.a. 2023-2024  
Università degli Studi di Milano

Lucrezia Bioni, Leonardo Cerasi, Giulia Federica Bianca Coppi  
Matricole: 13655A, 11410A, 11823A

9 novembre 2023

## 1 Introduzione

### 1.1 Scopo

In questa esperienza ci si propone di misurare - mediante l'utilizzo dell'interferometro di Michelson - le seguenti quantità: la lunghezza d'onda di un fascio di luce monocromatica, l'indice di rifrazione dell'aria, la lunghezza di coerenza dei pacchetti d'onda di una sorgente non monocromatica e la separazione tra le due lunghezze d'onda del doppietto del sodio.

### 1.2 Metodo

Per la misurazione delle quattro grandezze interessate, si utilizza l'apparato sviluppato da Michelson riportato in figura:

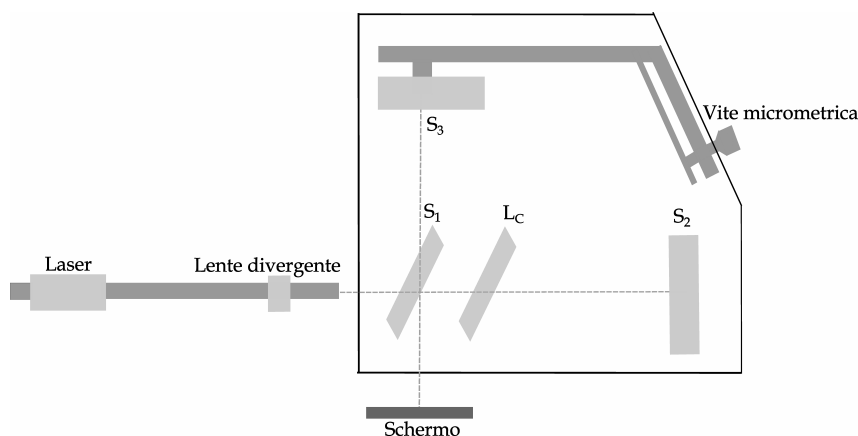


Fig. 1: Schema dell'interferometro di Michelson accoppiato con la sorgente di luce disposta su un banco ottico separato.

L'interferometro è costituito da quattro lastre di vetro ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $L_c$ ):  $S_1$  è semiriflettente - rivolta verso  $S_2$  - a facce piane e parallele,  $S_2$  ed  $S_3$  sono completamente riflettenti sulla faccia rivolta verso  $S_1$ ,  $L_c$  è una lastra trasparente il cui scopo è quello di rendere uguali i cammini ottici compiuti dai raggi lungo i due bracci dello strumento.

Dopo aver verificato che  $S_2$  ed  $S_3$  siano perpendicolari e che formino un angolo di  $45^\circ$  con  $S_1$ , il raggio luminoso inciderà su  $S_1$  sdoppiandosi: il primo verrà riflesso da  $S_2$  e dalla faccia riflettente di  $S_1$ , per poi proseguire verso lo schermo, il secondo - riflesso da  $S_1$  - verrà riflesso da  $S_3$  ed inciderà sullo schermo dove formerà delle figure di interferenza con il primo raggio - dovuta alla coerenza dei due fasci luminosi.

### 1.2.1 Lunghezza d'onda di un fascio di luce monocromatica

Si vuole misurare la lunghezza d'onda di un fascio di luce laser. Agendo sulla variazione di cammino ottico dei due fasci - spostando lo specchio  $S_3$  - si conta il numero di frange chiare (o scure) passanti per un punto prefissato dello schermo. La misura della lunghezza d'onda è pertanto data dall'equazione:

$$\lambda = \frac{2n_a \Delta x}{N_1} \quad (1.2.1)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda incognita,  $n_a$  è l'indice di rifrazione dell'aria,  $\Delta x$  è lo spostamento dello specchio  $S_3$  ed  $N_1$  è il numero di frange chiare (o scure) contate.

### 1.2.2 Indice di rifrazione dell'aria

Tra gli specchi  $S_1$  ed  $S_2$  viene inserita una cameretta contenente una pompa per la creazione del vuoto. Il cammino ottico percorso dal fascio luminoso nel vuoto cambia, poichè questo è legato all'indice di rifrazione del mezzo che attraversa come mostrato dall'equazione 1.2.1. Quindi, facendo rientrare lentamente l'aria nella cameretta e contando le frange di interferenza passanti per un dato punto sullo schermo, si riuscirà a fornire una stima del valore dell'indice di rifrazione dell'aria  $n_a$  secondo la seguente equazione:

$$2(n_a - 1) = N_2 \lambda \quad (1.2.2)$$

dove  $n_a$  è l'indice di rifrazione dell'aria,  $N_2$  è il numero di frange contate su un punto dello schermo e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda del fascio emesso dalla sorgente monocromatica.

### 1.2.3 Lunghezza dei pacchetti d'onda di una sorgente non monocromatica

Il fascio di luce prodotto da una sorgente non monocromatica è costituito da impulsi di lunghezza limitata. L'interferenza dei fasci luminosi riflessi dagli specchi  $S_2$  ed  $S_3$  si manifesta quando la distanza tra le due sorgenti immagine è inferiore alla lunghezza del pacchetto. Quando viene superata tale lunghezza, si osserva sullo schermo una figura uniformemente illuminata. Dunque, si misura la distanza tra due zone di uniforme illuminazione - mediante la misura dello spostamento di  $S_3$  - per quantificare tale grandezza.

### 1.2.4 Differenza tra le lunghezze d'onda del doppietto del sodio

Si utilizza ora una sorgente luminosa al sodio per misurare le due lunghezze d'onda che emette e la loro conseguente separazione. Quando le frange di interferenza delle due lunghezze d'onda si vanno a sovrapporre, sullo schermo si vede una figura di interferenza con frange molto nette - in particolare quando la differenza di cammino ottico tra i fasci provenienti da  $S_2$  ed  $S_3$  è nulla. Si misura quindi lo spostamento dello specchio  $S_3$  e si ricava:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{m \bar{\lambda}^2}{2 \Delta x} \quad (1.2.3)$$

dove  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono le due lunghezze d'onda del doppietto del sodio,  $m$  è il numero di alternanze tra le condizioni di interferenza netta,  $\bar{\lambda}$  è la media delle due lunghezze d'onda e  $\Delta x$  è lo spostamento dello specchio  $S_3$ .

## 2 Misure

### 2.1 Lunghezza d'onda di un fascio di luce monocromatica

La misura della lunghezza d'onda del fascio laser viene effettuata prendendo 5 misure dello spostamento dello specchio mobile e contando le frange passanti per un punto fissato dello schermo. Le misure effettuate sono riportate nella seguente Tabella:

$N_1$	$x_1$ [mm]	$x_2$ [mm]
195	10.00	10.30
194	10.00	10.30
150	10.00	10.23
150	10.00	10.23
180	10.00	10.28

Tab. 1: Misure di  $N_1$ ,  $x_1$  e  $x_2$  effettuate per valutare la lunghezza d'onda della sorgente laser

Al conteggio  $N_1$  viene fornito un errore di  $\pm 5$ , a seguito di una valutazione dell'errore commesso dagli sperimentatori; mentre alle misure di  $x_1$  e  $x_2$  viene fornita come incertezza la risoluzione dello strumento, pari a 0.01 mm.

Gli spostamenti  $x_1$  e  $x_2$  sono effettuati attraverso una vite micrometrica che permette spostamenti fini dello specchio  $S_3$  pari ad  $\frac{1}{5}$  di quelli impressi dallo sperimentatore.

## 2.2 Indice di rifrazione dell'aria

La camera usata per creare il vuoto ha lunghezza  $D = 0.05$  m - valore considerato senza incertezza. Fissato un punto dello schermo, durante la reimmissione dell'aria nella camera, si conta il numero di frange d'interferenza che vi passano: in 5 misurazioni di fila, si è sempre ottenuto il valore  $N_2 = 42 \pm 5$ .

## 2.3 Lunghezza dei pacchetti d'onda di una sorgente non monocromatica

Vengono fatte, attraverso la lettura della posizione della vite micrometrica, 6 misure dello spostamento dello specchio per valutare la lunghezza del treno di impulsi come descritto nel Paragrafo 1.2.3. I risultati sono riportati in tabella:

$x_1$ [mm]	$x_2$ [mm]
15.58	15.54
15.58	15.54
15.57	15.54
15.57	15.54
15.57	15.54
15.57	15.54

Tab. 2: Misure della posizione iniziale e finale dello specchio  $S_3$

A queste misure viene sempre fornita l'incertezza strumentale pari a 0.01mm.

## 2.4 Differenza tra le lunghezze d'onda del doppietto del sodio

Per valutare la differenza  $\Delta\lambda$  tra le due lunghezze d'onda emesse dal sodio, si misura, attraverso la vite micrometrica, lo spostamento che intercorre tra due posizioni di  $S_3$  tali per cui si osservi un pattern di interferenza completamente diffusa. Vengono prese 8 misure dello spostamento dello specchio  $S_3$ , fornendo anche il numero  $m$  di alternanze di interferenze nette sullo schermo durante lo spostamento dello specchio mobile. Le misure vengono riportate in tabella:

$m$	$x_1$ [mm]	$x_2$ [mm]
1	16.24	17.73
1	17.73	19.11
1	19.11	20.66
1	20.66	22.07
1	22.07	23.58
1	23.58	24.98
1	17.72	19.15
2	19.15	22.17

Tab. 3: Misure di  $m$ ,  $x_1$  e  $x_2$  effettuate per valutare  $\Delta\lambda$  del doppietto di  $Na$

Dove l'indice  $m$  rappresenta il numero di interferenze nitide osservate tra le posizioni iniziale e finale dello specchio rilevate. L'incertezza attribuita alle misure di  $x_1$  e  $x_2$  è quella strumentale: 0.01mm.

### 3 Analisi Dati

Ogni volta che si è misurato lo spostamento  $\Delta x$ , si è dovuto considerare quanto osservato in precedenza: lo spostamento effettivo dello specchio  $S_3$  risulta essere  $\frac{1}{5}$  di quello effettuato mediante vite micrometrica. Da una propagazione dell'errore sulla singola misura di posizione, e tenuto conto del meccanismo di funzionamento dello strumento, l'incertezza risulta essere:

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_1}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_2}}{5}\right)^2} = 3 \mu\text{m} \quad (3.4)$$

#### 3.1 Lunghezza d'onda di un fascio di luce monocromatica

A partire dai dati in Tab. 1 e approssimando l'indice di rifrazione dell'aria a  $n_a \approx 1$ , tramite la relazione 1.2.1, si sono ricavati i valori di  $\lambda_0$ :

$\lambda_0 \pm \sigma_{\lambda_0}$ [nm]
$615 \pm 33$
$617 \pm 33$
$613 \pm 43$
$613 \pm 43$
$622 \pm 36$

Tab. 4: Valori della lunghezza d'onda ricavati dal set di misure.

dove l'incertezza è stata attribuita mediante propagazione degli errori sulle grandezze  $\Delta x$  e  $N_1$  nella 1.2.1:

$$\sigma_{\lambda_0} = \sqrt{\left(\frac{2n_a}{N_1}\right)^2 \sigma_{\Delta x}^2 + \left(\frac{2n_a \Delta x}{N_1}\right)^2 \sigma_{\Delta x}^2} \quad (3.1.5)$$

Attraverso la media ponderata dei valori di  $\lambda_0$  ottenuti, si ottiene una stima della misura della lunghezza d'onda della luce laser:

$$\lambda_0 = 617 \pm 16 \text{ nm} \quad (3.1.6)$$

dove l'incertezza è quella di una media ponderata.

#### 3.2 Indice di rifrazione dell'aria

A partire dalle equazioni 1.2.1 e 1.2.2, si possono ricavare le seguenti espressioni per  $n_a$  e  $\lambda_a$ :

$$n_a = \frac{N_1 D}{N_1 D - N_2 \Delta x} \quad \lambda_a = \frac{2 \Delta x D}{N_1 D - N_2 \Delta x} \quad (3.2.7)$$

A questo punto, incrociando i dati in Tab. 1 con quelli riportati nel Par. 2.2, si ottengono i valori riportati in Tab. 7, nella quale i valori delle incertezze sono stati ricavati tramite le relative propagazioni degli errori:

$$\sigma_n = \frac{N_1 N_2 D \Delta x}{(N_1 D - N_2 \Delta x)^2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{N_1}}{N_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{N_2}}{N_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2} \quad (3.2.8)$$

$$\sigma_\lambda = \frac{\Delta x^2 D^2}{2(N_1 D - N_2 \Delta x)^2} \sqrt{\left(\frac{N_1}{\Delta x}\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_{N_1}}{N_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2\right) + \left(\frac{N_2}{D}\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_{N_2}}{N_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2\right)} \quad (3.2.9)$$

Il valore finale e la rispettiva incertezza di  $n_a$  e  $\lambda_a$  sono stati determinati tramite media ponderata:

$$n_a = 1.000259 \pm 0.000007 \quad \lambda_a = 617 \pm 8 \text{ nm} \quad (3.2.10)$$

### 3.3 Lunghezza dei pacchetti d'onda di una sorgente non monocromatica

Si calcola la lunghezza di coerenza del pacchetto d'onda della sorgente attraverso la seguente relazione:  $L = \Delta x$ . A tale grandezza, si attribuisce incertezza mediante propagazione degli errori su  $x_1$  e  $x_2$ . Si può inoltre ricavare l'ampiezza del pacchetto d'onda nello spazio delle frequenze:  $\Delta\nu = \frac{c}{L}$ , cui è stata attribuita un'incertezza sempre mediante propagazione degli errori:

$$\sigma_{\Delta\nu} = \frac{c}{L^2} \sigma_L \quad (3.3.11)$$

I valori di  $L$  e di  $\Delta\nu$  così ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

$L \pm \sigma_L \text{ } [\mu\text{m}]$	$\Delta\nu \pm \sigma_{\Delta\nu} \text{ } [\cdot 10^{13} \text{Hz}]$
$8 \pm 3$	$4 \pm 1$
$8 \pm 3$	$4 \pm 1$
$6 \pm 3$	$5 \pm 2$
$6 \pm 3$	$5 \pm 2$
$6 \pm 3$	$5 \pm 2$
$6 \pm 3$	$5 \pm 2$

Tab. 5: Valori della lunghezza di coerenza  $L$  e dell'ampiezza del pacchetto d'onda nello spazio delle frequenze  $\Delta\nu$  ricavati dal set di misure.

Attraverso una media ponderata, si ottengono i valori finali per  $L$  e  $\Delta\nu$  e le rispettive incertezze:

$$L = 7 \pm 1 \mu\text{m} \quad \Delta\nu = (4 \pm 1) \cdot 10^{13} \text{ Hz} \quad (3.3.12)$$

### 3.4 Differenza tra le lunghezze d'onda del doppietto del sodio

Attraverso la relazione 1.2.3, si determina la differenza tra le due lunghezze d'onda del Na, cui è attribuita un'incertezza mediante propagazione degli errori sulla grandezza  $\Delta x$ :

$$\sigma_{\Delta\lambda} = \frac{m\bar{\lambda}}{2\Delta x^2} \sigma_{\Delta x} \quad (3.4.13)$$

I valori così ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

$\Delta\lambda[\text{nm}]$
$0.583 \pm 0.006$
$0.629 \pm 0.006$
$0.560 \pm 0.005$
$0.616 \pm 0.006$
$0.575 \pm 0.005$
$0.620 \pm 0.006$
$0.607 \pm 0.006$
$0.575 \pm 0.003$

Tab. 6: Valori di  $\Delta\lambda$ .

Attraverso la media ponderata, si è ottenuto il valore finale, con la sua incertezza, della differenza di lunghezza d'onda del doppietto del sodio:

$$\Delta\lambda = (0.587 \pm 0.002) \text{ nm} \quad (3.4.14)$$

## 4 Conclusioni

L'indice di rifrazione dell'aria ottenuto,  $n_a = 1.000259 \pm 0.000007$ , è in accordo, entro  $2\sigma$ , con il valore universalmente accettato  $\bar{n} = 1.000273$  (assumendo condizioni STP).

Inoltre, i due valori della lunghezza d'onda del laser, ottenuti con e senza approssimazione dell'indice di rifrazione dell'aria, sono in perfetto accordo tra loro:  $\lambda_0 = 617 \pm 16 \text{ nm}$  e  $\lambda_a = 616 \pm 7 \text{ nm}$ .

La lunghezza di coerenza del pacchetto di luce non monocromatica  $L = 7 \pm 1 \mu\text{m}$  è consistente con quanto atteso: poiché la sorgente è policromatica, genera casualmente dei pacchetti non coerenti tra loro.

Infine, il valore della differenza tra le lunghezze d'onda del doppietto del sodio  $\Delta\lambda = (0.587 \pm 0.002) \text{ nm}$  è in buon accordo con il valore atteso,  $\Delta\bar{\lambda} = (0.600) \text{ nm}$ .

## Appendice

$N_1$	$\Delta x \pm \sigma_{\Delta x}$ [mm]	$N_2$	$D$ [mm]	$n_a \pm \sigma_n$	$\lambda \pm \sigma_\lambda$ [nm]
195	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000259 \pm 0.000034$	$616 \pm 33$
195	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000259 \pm 0.000034$	$616 \pm 33$
195	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000259 \pm 0.000034$	$616 \pm 33$
195	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000259 \pm 0.000034$	$616 \pm 33$
195	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000259 \pm 0.000034$	$616 \pm 33$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 43$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 43$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 43$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 43$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 43$
180	$0.056 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000261 \pm 0.000035$	$622 \pm 44$
180	$0.056 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000261 \pm 0.000035$	$622 \pm 44$
180	$0.056 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000261 \pm 0.000035$	$622 \pm 44$
180	$0.056 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000261 \pm 0.000035$	$622 \pm 44$
180	$0.056 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000261 \pm 0.000035$	$622 \pm 44$
194	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000260 \pm 0.000034$	$619 \pm 33$
194	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000260 \pm 0.000034$	$619 \pm 33$
194	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000260 \pm 0.000034$	$619 \pm 33$
194	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000260 \pm 0.000034$	$619 \pm 33$
194	$0.060 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000260 \pm 0.000034$	$619 \pm 33$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 33$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 33$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 33$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 33$
150	$0.046 \pm 0.003$	42	0.05	$1.000258 \pm 0.000036$	$613 \pm 33$

Tab. 7: Valori di indice di rifrazione dell'aria  $n_a$  e di lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce laser con rispettive incertezze, relativi a ciascuna misura di spostamento  $\Delta x$  dello specchio  $S_3$ , di spessore  $D$  della cameretta in cui si pratica il vuoto e di numero di frange luminose ( $N_1$  con variazione di cammino geometrico ed  $N_2$  con variazione di indice di rifrazione).