

# Misura dell'indice di rifrazione di un vetro con lo spettrometro a prisma

Laboratorio di Ottica, Elettronica e Fisica Moderna

C.d.L. in Fisica, a.a. 2023-2024

Università degli Studi di Milano

Lucrezia Bioni, Leonardo Cerasi, Giulia Federica Bianca Coppi

Matricole: 13655A, 11410A, 11823A

23 novembre 2023

## 1 Introduzione

### 1.1 Scopo

Mediante l'utilizzo di un prisma a sezione isoscele, si vuole misurare l'indice di rifrazione del materiale che lo compone. Si vuole inoltre verificare la legge di dispersione secondo la formula di Cauchy:

$$n^2(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (1.1.1)$$

Dove  $n$  è l'indice di rifrazione,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda,  $A$  e  $B$  sono i coefficienti che possono essere determinati per un materiale interpolando l'equazione ad indici di rifrazione misurati per lunghezze d'onda note.

### 1.2 Metodo

In seguito alla misurazione dello spettro di emissione della lampada ai vapori di mercurio - effettuata con il reticolo di diffrazione -, si utilizzano le lunghezze d'onda trovate per misurare l'indice di rifrazione del materiale vetroso che compone il prisma.

Tale misurazione viene effettuata attraverso il metodo della deviazione minima: si può ricavare la dipendenza dell'angolo  $\delta$  in funzione dell'angolo di incidenza  $i$ , dimostrando inoltre che la funzione  $\delta(i)$  presenta un minimo. La condizione di deviazione minima si presenta nel momento in cui viene soddisfatta l'equazione:

$$\cos i \cdot \cos r' = \cos r \cdot \cos i' \quad (1.2.2)$$

Dove  $i$  è l'angolo di incidenza,  $i'$  è l'angolo di emergenza  $r$  è l'angolo di rifrazione sulla faccia di entrata del prisma e  $r'$  l'angolo di incidenza sulla seconda faccia del prisma.

Queste quantità sono legate a  $\delta$  dalle seguenti relazioni:

$$r + r' = \alpha \delta = i + i' - \alpha \quad (1.2.3)$$

Dove  $\alpha$  è l'angolo al vertice del prisma.

L'indice di rifrazione del prisma, in condizioni di minima deviazione, risulterà essere quindi:

$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1.2.4)$$

Dove  $n(\lambda)$  è l'indice di rifrazione del materiale in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$  considerata,  $\alpha$  l'angolo al vertice della sezione del prisma,  $\delta_m$  l'angolo di minima deviazione della lunghezza d'onda considerata.

## 2 Misure

### 2.1 Angolo del prisma

Per misurare l'angolo  $\alpha$  del prisma si sfrutta il fenomeno della riflessione: in particolare, si misurano le posizioni angolari  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  delle immagini della fenditura riflesse da due facce consecutive del prisma. I dati sono riportati in Tab. 4.

### 2.2 Angolo di deviazione minima

Per procedere alla misura dell'angolo di deviazione minima, bisogna prima determinare la posizione angolare iniziale  $\theta_0$  della fenditura in assenza di prisma: le misurazioni sono riportate in Tab. 5.

Una volta determinato  $\theta_0$ , si procede alla ricerca dell'angolo di deviazione minima per ciascuna lunghezza d'onda considerata: per fare ciò, si misura la posizione angolare  $\theta_\lambda$  del punto di inversione del moto della riga spettrale considerata. I dati così ottenuti sono riportati in Tabb. 6 - 12.

## 3 Analisi dati

### 3.1 Elaborazione dati

#### 3.1.1 Angolo del prisma

Dalla misura della posizione del fascio di luce riflessa da due delle facce del prisma, si ricava la posizione dell'angolo  $\alpha$  compreso tra le due facce attraverso la seguente relazione:

$$\alpha = 180^\circ - \Delta\theta \quad (3.1.5)$$

dove  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , e  $\theta_1$  è la posizione angolare del fascio riflesso dalla prima faccia, mentre  $\theta_2$  è la posizione angolare del fascio riflesso dalla seconda. Tale calcolo è stato eseguito per ogni set di misure di  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (vedere Tab. 4), ed è stata effettuata una media aritmetica per determinare il valore finale di  $\alpha$ , pari a:

$$\alpha = 59^\circ 53' \pm 12' \quad (3.1.6)$$

Dove l'errore è stato attribuito come da Par. 3.2.1.

#### 3.1.2 Angolo di deviazione minima

Per determinare la posizione angolare  $\theta_0$  del cannocchiale nella direzione da cui proviene l'immagine diretta della fenditura, si è eseguita la media aritmetica tra i valori di  $\theta_0$  misurati (vedere Tab. 5):

$$\theta_0 = -(1^\circ 18' 0'' \pm 40'') \quad (3.1.7)$$

Per ciascuna lunghezza d'onda dello spettro del mercurio, si determina l'angolo di inversione  $\delta$  del moto dell'immagine osservata mediante il cannocchiale attraverso la seguente relazione:

$$\delta = |\theta_0 - \theta_\lambda| \quad (3.1.8)$$

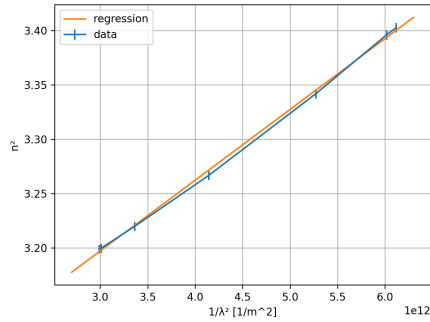
dove  $\theta_\lambda$  è la posizione angolare misurata del punto di inversione del moto (vedere Tabb. 6 - 12). Attraverso la media aritmetica dei valori di  $\delta$  ottenuti, se ne determina la miglior stima: i valori ottenuti per ciascuna lunghezza d'onda osservata, con le loro incertezze (ricavate come da Par. 3.2.2), sono riportati nella seguente tabella:

Colore	$\delta \pm \sigma_\delta$
Viola 1	$74^\circ 9' 0'' \pm 1' 8''$
Viola 2	$73^\circ 53' 0'' \pm 1' 44''$
Indaco	$71^\circ 47' 0'' \pm 27'$
Ciano	$68^\circ 58' 0'' \pm 1' 32''$
Verde	$67^\circ 16' 0'' \pm 23''$
Giallo 1	$66^\circ 33' 0'' \pm 23''$
Giallo 2	$66^\circ 32' 0'' \pm 23''$

Tab. 1: Valori di  $\delta$  e relativi errori.

### 3.1.3 Indice di rifrazione del vetro

Ottenuti i valori dell'angolo di deviazione minima  $\delta$  per ciascuna lunghezza d'onda e dell'angolo  $\alpha$  al vertice del prisma, attraverso la relazione 1.2.4, si ricavano i seguenti valori di indice di rifrazione del vetro del prisma  $n$  in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$ :



Colore	$\lambda \pm \sigma_\lambda$ [nm]	$n(\lambda) \pm \sigma_n$
Viola 1	$404.32 \pm 0.08$	$1.845 \pm 0.004$
Viola 2	$407.70 \pm 0.10$	$1.843 \pm 0.004$
Indaco	$435.57 \pm 0.08$	$1.828 \pm 0.004$
Ciano	$491.21 \pm 0.08$	$1.807 \pm 0.004$
Verde	$545.44 \pm 0.08$	$1.794 \pm 0.004$
Giallo 1	$576.46 \pm 0.08$	$1.789 \pm 0.004$
Giallo 2	$578.41 \pm 0.08$	$1.789 \pm 0.004$

Fig. 1 & Tab. 2: Relazione di Cauchy.

Per verificare la relazione di Cauchy 1.1.1, sono stati riportati sul grafico i valori ottenuti dalle misure e dalla loro elaborazione. In particolare, si è posto sulle ascisse il termine  $\frac{1}{\lambda^2}$  e sulle ordinate il valore  $n^2$ . Attraverso la regressione lineare pesata si sono ottenuti come valori del coefficiente angolare  $A$  e del termine noto  $B$  i seguenti:

$$A = (3.002 \pm 0.006) \quad (3.1.9)$$

$$B = (6.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-14} \text{m}^2 \quad (3.1.10)$$

Per verificare l'effettivo andamento lineare dei risultati ottenuti è stato effettuato un test del  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = 5.623 \cdot 10^{-1} \quad (3.1.11)$$

Tale valore restituisce una compatibilità con un andamento lineare di probabilità 76.07%.

## 3.2 Stima degli errori

### 3.2.1 Angolo del prisma

L'errore attribuito ai singoli valori di  $\alpha$  è stato ottenuto propagando l'errore su  $\theta_1$  e  $\theta_2$  nella 3.1.5:

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sigma_\theta \quad (3.2.12)$$

Al valore finale di  $\alpha$  è stata attribuita come incertezza la deviazione standard della media delle misure effettuate. Si è scelto di attribuire l'incertezza statistica come errore poiché superiore all'incertezza sistematica, pari a

$$\sigma_{\alpha, \text{sist}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma_\theta}{\sqrt{10}} = 27'' \quad (3.2.13)$$

### 3.2.2 Angolo di deviazione minima

L'errore attribuito al valore medio di  $\theta_0$  è stato ricavato attraverso la deviazione standard della media delle misure effettuate. Tale valore è superiore all'incertezza sistematica, ottenuta dalla propagazione dell'errore sulla singola misura di  $\theta_0$  nella formula per calcolare la media aritmetica:

$$\sigma_{\theta_0, \text{sist}} = \frac{\sigma_{\theta_0}}{\sqrt{10}} = 19'' \quad (3.2.14)$$

Dove  $\sigma_{\theta_0}$  è l'incertezza attribuita alle singole misure di  $\theta_0$ . L'errore sul valore di  $\delta$  ottenuto per i primi quattro colori osservati (Viola 1, Viola 2, Indaco e Ciano) è stato attribuito attraverso la deviazione

standard della medie delle misure effettuate. Tale valore è risultato superiore rispetto all'incertezza sistematica, calcolabile attraverso la propagazione degli errori su  $\theta_0$  e  $\theta_\lambda$  nella 3.1.8:

$$\sigma_{\delta, sist} = \frac{\sqrt{\sigma_{\theta_0}^2 + \sigma_{\theta_\lambda}^2}}{\sqrt{10}} = 23'' \quad (3.2.15)$$

Dove  $\sigma_{\theta_0}$  è l'incertezza attribuita alle singole misure di  $\theta_0$  e  $\sigma_{\theta_\lambda}$  è l'incertezza attribuita alle singole misure di  $\theta_\lambda$ . Nel caso degli ultimi 3 colori (Verde, Giallo 1 e Giallo 2), l'incertezza sistematica risulta invece superiore a quella statistica, ed è dunque stata attribuita come errore su  $\delta$ . Le incertezze statistiche sono riportate nella seguente tabella:

Colore	$\sigma_{\delta, stat}$
Verde	0.3''
Giallo 1	0.2''
Giallo 2	0.2''

Tab. 3: Valori dell'incertezza statistica su  $\delta$ .

### 3.2.3 Indice di rifrazione del vetro

L'incertezza attribuita a ciascun valore dell'indice di rifrazione del vetro  $n$  è stata ottenuta mediante propagazione degli errori su  $\delta$  e  $\alpha$  nella 1.2.4:

$$\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\cos \alpha - 1}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\cos \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \sigma_\delta^2} \quad (3.2.16)$$

Dove  $\sigma_{delta}$  è l'incertezza attribuita all'angolo di deviazione minima  $\delta$  e  $\sigma_\alpha$  è l'incertezza attribuita all'angolo al centro del prisma  $\alpha$ .

## 4 Conclusioni

I risultati ottenuti hanno permesso di verificare con ottima compatibilità la relazione di Cauchy.

## Appendice

$\theta_1 \pm \sigma_{\theta_1}$	$\theta_2 \pm \sigma_{\theta_2}$	$\alpha \pm \sigma_\alpha$ [rad]
$7^\circ 47' \pm 1'$	$128^\circ 0' \pm 1'$	$1.043416 \pm 0.000411$
$7^\circ 56' \pm 1'$	$128^\circ 42' \pm 1'$	$1.033817 \pm 0.000411$
$8^\circ 37' \pm 1'$	$128^\circ 41' \pm 1'$	$1.046034 \pm 0.000411$
$8^\circ 44' \pm 1'$	$129^\circ 48' \pm 1'$	$1.028581 \pm 0.000411$
$7^\circ 54' \pm 1'$	$127^\circ 56' \pm 1'$	$1.046616 \pm 0.000411$
$8^\circ 46' \pm 1'$	$128^\circ 4' \pm 1'$	$1.059415 \pm 0.000411$
$8^\circ 1' \pm 1'$	$128^\circ 16' \pm 1'$	$1.042834 \pm 0.000411$
$0^\circ 40' \pm 1'$	$119^\circ 45' \pm 1'$	$1.063196 \pm 0.000411$
$0^\circ - 35' \pm 1'$	$119^\circ 2' \pm 1'$	$1.053888 \pm 0.000411$
$1^\circ - 10' \pm 1'$	$119^\circ 39' \pm 1'$	$1.032944 \pm 0.000411$

Tab. 4: Angolo del prisma.

$\theta_0 \pm \sigma_{\theta_0}$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 15' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 15' \pm 1'$
$-1^\circ - 17' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 19' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 17' \pm 1'$
$-1^\circ - 18' \pm 1'$

Tab. 5: Posizione iniziale della fenditura senza prisma.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$72^\circ 47' \pm 1'$	$1.293085 \pm 0.000350$
$72^\circ 50' \pm 1'$	$1.293958 \pm 0.000350$
$72^\circ 59' \pm 1'$	$1.296576 \pm 0.000350$
$72^\circ 50' \pm 1'$	$1.293958 \pm 0.000350$
$72^\circ 51' \pm 1'$	$1.294249 \pm 0.000350$
$72^\circ 53' \pm 1'$	$1.294831 \pm 0.000350$
$72^\circ 49' \pm 1'$	$1.293667 \pm 0.000350$
$72^\circ 52' \pm 1'$	$1.294540 \pm 0.000350$
$72^\circ 47' \pm 1'$	$1.293085 \pm 0.000350$
$72^\circ 48' \pm 1'$	$1.293376 \pm 0.000350$

Tab. 6: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Viola 1.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$72^\circ 35' \pm 1'$	$1.289595 \pm 0.000350$
$72^\circ 36' \pm 1'$	$1.289886 \pm 0.000350$
$72^\circ 37' \pm 1'$	$1.290176 \pm 0.000350$
$72^\circ 34' \pm 1'$	$1.289304 \pm 0.000350$
$72^\circ 36' \pm 1'$	$1.289886 \pm 0.000350$
$72^\circ 35' \pm 1'$	$1.289595 \pm 0.000350$
$72^\circ 36' \pm 1'$	$1.289886 \pm 0.000350$
$72^\circ 34' \pm 1'$	$1.289304 \pm 0.000350$
$72^\circ 37' \pm 1'$	$1.290176 \pm 0.000350$
$72^\circ 29' \pm 1'$	$1.287849 \pm 0.000350$

Tab. 7: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Viola 2.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$70^\circ 30' \pm 1'$	$1.253234 \pm 0.000350$
$70^\circ 27' \pm 1'$	$1.252361 \pm 0.000350$
$70^\circ 27' \pm 1'$	$1.252361 \pm 0.000350$
$70^\circ 28' \pm 1'$	$1.252652 \pm 0.000350$
$70^\circ 27' \pm 1'$	$1.252361 \pm 0.000350$
$70^\circ 29' \pm 1'$	$1.252943 \pm 0.000350$
$70^\circ 31' \pm 1'$	$1.253525 \pm 0.000350$
$70^\circ 29' \pm 1'$	$1.252943 \pm 0.000350$
$70^\circ 30' \pm 1'$	$1.253234 \pm 0.000350$
$70^\circ 28' \pm 1'$	$1.252652 \pm 0.000350$

Tab. 8: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Indaco.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$67^\circ 37' \pm 1'$	$1.202910 \pm 0.000350$
$67^\circ 42' \pm 1'$	$1.204364 \pm 0.000350$
$67^\circ 41' \pm 1'$	$1.204074 \pm 0.000350$
$67^\circ 38' \pm 1'$	$1.203201 \pm 0.000350$
$67^\circ 42' \pm 1'$	$1.204364 \pm 0.000350$
$67^\circ 40' \pm 1'$	$1.203783 \pm 0.000350$
$67^\circ 41' \pm 1'$	$1.204074 \pm 0.000350$
$67^\circ 39' \pm 1'$	$1.203492 \pm 0.000350$
$67^\circ 40' \pm 1'$	$1.203783 \pm 0.000350$
$67^\circ 41' \pm 1'$	$1.204074 \pm 0.000350$

Tab. 9: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Ciano.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$65^\circ 57' \pm 1'$	$1.173821 \pm 0.000350$
$65^\circ 58' \pm 1'$	$1.174112 \pm 0.000350$
$65^\circ 59' \pm 1'$	$1.174403 \pm 0.000350$
$65^\circ 57' \pm 1'$	$1.173821 \pm 0.000350$
$65^\circ 58' \pm 1'$	$1.174112 \pm 0.000350$
$65^\circ 58' \pm 1'$	$1.174112 \pm 0.000350$
$65^\circ 59' \pm 1'$	$1.174403 \pm 0.000350$
$65^\circ 57' \pm 1'$	$1.173821 \pm 0.000350$
$65^\circ 57' \pm 1'$	$1.173821 \pm 0.000350$
$65^\circ 59' \pm 1'$	$1.174403 \pm 0.000350$

Tab. 10: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Verde.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$65^\circ 15' \pm 1'$	$1.161604 \pm 0.000350$
$65^\circ 15' \pm 1'$	$1.161604 \pm 0.000350$
$65^\circ 16' \pm 1'$	$1.161895 \pm 0.000350$
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$
$65^\circ 15' \pm 1'$	$1.161604 \pm 0.000350$
$65^\circ 15' \pm 1'$	$1.161604 \pm 0.000350$
$65^\circ 15' \pm 1'$	$1.161604 \pm 0.000350$
$65^\circ 16' \pm 1'$	$1.161895 \pm 0.000350$
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$
$65^\circ 16' \pm 1'$	$1.161895 \pm 0.000350$

Tab. 11: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Giallo 1.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$
$65^\circ 13' \pm 1'$	$1.161022 \pm 0.000350$
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$
$65^\circ 13' \pm 1'$	$1.161022 \pm 0.000350$
$65^\circ 13' \pm 1'$	$1.161022 \pm 0.000350$
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$
$65^\circ 13' \pm 1'$	$1.161022 \pm 0.000350$
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$
$65^\circ 14' \pm 1'$	$1.161313 \pm 0.000350$

Tab. 12: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Giallo 2.