

Misura dell'indice di rifrazione di un vetro con lo spettrometro a prisma

Laboratorio di Ottica, Elettronica e Fisica Moderna

C.d.L. in Fisica, a.a. 2023-2024

Università degli Studi di Milano

Lucrezia Bioni, Leonardo Cerasi, Giulia Federica Bianca Coppi

Matricole: 13655A, 11410A, 11823A

23 novembre 2023

1 Introduzione

1.1 Scopo

Mediante l'utilizzo di un prisma a sezione isoscele, si vuole misurare l'indice di rifrazione del materiale che lo compone. Si vuole inoltre verificare la legge di dispersione secondo la formula di Cauchy:

$$n^2(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (1.1.1)$$

dove n è l'indice di rifrazione, λ è la lunghezza d'onda, A e B sono dei coefficienti. Questi possono essere determinati per un materiale interpolando l'equazione ad indici di rifrazione misurati per lunghezze d'onda note.

1.2 Metodo

In seguito alla misurazione dello spettro di emissione della lampada ai vapori di mercurio - effettuata con il reticolo di diffrazione -, si utilizzano le lunghezze d'onda trovate per misurare l'indice di rifrazione del materiale vetroso che compone il prisma.

Tale misurazione viene effettuata attraverso il metodo della deviazione minima: si può ricavare la dipendenza dell'angolo δ in funzione dell'angolo di incidenza i , dimostrando inoltre che la funzione $\delta(i)$ presenta un minimo. La condizione di deviazione minima si presenta nel momento in cui viene soddisfatta l'equazione:

$$\cos i \cdot \cos r' = \cos r \cdot \cos i' \quad (1.2.2)$$

dove i è l'angolo di incidenza, i' è l'angolo di emergenza, r è l'angolo di rifrazione sulla faccia di entrata del prisma e r' l'angolo di incidenza sulla seconda faccia del prisma.

Queste quantità sono legate a δ dalle seguenti relazioni:

$$r + r' = \alpha \quad \delta = i + i' - \alpha \quad (1.2.3)$$

dove α è l'angolo al vertice del prisma.

L'indice di rifrazione del prisma, in condizioni di minima deviazione, risulterà essere quindi:

$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1.2.4)$$

dove $n(\lambda)$ è l'indice di rifrazione del materiale in funzione della lunghezza d'onda λ considerata, α l'angolo al vertice della sezione del prisma, δ_m l'angolo di minima deviazione della lunghezza d'onda considerata.

2 Misure

2.1 Angolo del prisma

Per misurare l'angolo α del prisma si sfrutta il fenomeno della riflessione: in particolare, si misurano le posizioni angolari θ_1 , θ_2 delle immagini della fenditura riflesse da due facce consecutive del prisma. tramite un nonio sessagesimale di risoluzione $1'$. I dati sono riportati in Tab. 4.

2.2 Angolo di deviazione minima

Per procedere alla misura dell'angolo di deviazione minima, bisogna prima determinare la posizione angolare iniziale θ_0 della fenditura in assenza di prisma: le misurazioni sono riportate in Tab. 5.

Una volta determinato θ_0 , si procede alla ricerca dell'angolo di deviazione minima per ciascuna lunghezza d'onda considerata: per fare ciò, si misura la posizione angolare θ_λ del punto di inversione del moto della riga spettrale considerata. I dati così ottenuti sono riportati in Tabb. 6 - 12.

3 Analisi dati

3.1 Elaborazione dati

3.1.1 Angolo del prisma

Dalla misura della posizione del fascio di luce riflessa da due delle facce del prisma, si ricava la posizione dell'angolo α compreso tra le due facce attraverso la seguente relazione:

$$\alpha = 180^\circ - \Delta\theta \quad (3.1.5)$$

dove $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, e θ_1 è la posizione angolare del fascio riflesso dalla prima faccia, mentre θ_2 è la posizione angolare del fascio riflesso dalla seconda. Tale calcolo è stato eseguito per ogni set di misure di θ_1 e θ_2 (vedere Tab. 4), ed è stata effettuata una media aritmetica per determinare il valore finale di α , pari a:

$$\alpha = 59^\circ 53' \pm 12' \quad (3.1.6)$$

Dove l'errore è stato attribuito come da Par. 3.2.1.

3.1.2 Angolo di deviazione minima

Per determinare la posizione angolare θ_0 del cannocchiale nella direzione da cui proviene l'immagine diretta della fenditura, si è eseguita la media aritmetica tra i valori di θ_0 misurati (vedere Tab. 5):

$$\theta_0 = -(1^\circ 18' 0'' \pm 40'') \quad (3.1.7)$$

Per ciascuna lunghezza d'onda dello spettro del mercurio, si determina l'angolo di inversione δ del moto dell'immagine osservata mediante il cannocchiale attraverso la seguente relazione:

$$\delta = |\theta_0 - \theta_\lambda| \quad (3.1.8)$$

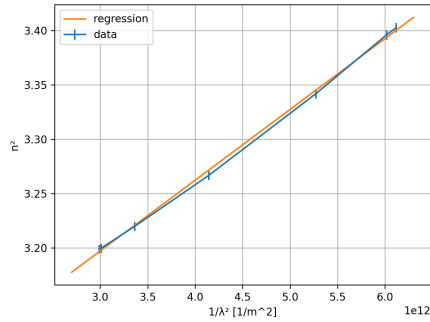
dove θ_λ è la posizione angolare misurata del punto di inversione del moto (vedere Tabb. 6 - 12). Attraverso la media aritmetica dei valori di δ ottenuti, se ne determina la miglior stima: i valori ottenuti per ciascuna lunghezza d'onda osservata, con le loro incertezze (ricavate come da Par. 3.2.2), sono riportati nella seguente tabella:

Colore	$\delta \pm \sigma_\delta$
Viola 1	$74^\circ 9' 0'' \pm 1' 8''$
Viola 2	$73^\circ 53' 0'' \pm 1' 44''$
Indaco	$71^\circ 47' 0'' \pm 27'$
Ciano	$68^\circ 58' 0'' \pm 1' 32''$
Verde	$67^\circ 16' 0'' \pm 23''$
Giallo 1	$66^\circ 33' 0'' \pm 23''$
Giallo 2	$66^\circ 32' 0'' \pm 23''$

Tab. 1: Valori di δ e relativi errori.

3.1.3 Indice di rifrazione del vetro

Ottenuti i valori dell'angolo di deviazione minima δ per ciascuna lunghezza d'onda e dell'angolo α al vertice del prisma, attraverso la relazione 1.2.4, si ricavano i seguenti valori di indice di rifrazione del vetro del prisma n in funzione della lunghezza d'onda λ :



Colore	$\lambda \pm \sigma_\lambda$ [nm]	$n(\lambda) \pm \sigma_n$
Viola 1	404.32 ± 0.08	1.845 ± 0.004
Viola 2	407.70 ± 0.10	1.843 ± 0.004
Indaco	435.57 ± 0.08	1.828 ± 0.004
Ciano	491.21 ± 0.08	1.807 ± 0.004
Verde	545.44 ± 0.08	1.794 ± 0.004
Giallo 1	576.46 ± 0.08	1.789 ± 0.004
Giallo 2	578.41 ± 0.08	1.789 ± 0.004

Fig. 1 & Tab. 2: Relazione di Cauchy.

Per verificare la relazione di Cauchy 1.1.1, sono stati riportati sul grafico i valori ottenuti dalle misure e dalla loro elaborazione. In particolare, si è posto sulle ascisse il termine $\frac{1}{\lambda^2}$ e sulle ordinate il valore n^2 . Attraverso la regressione lineare pesata si sono ottenuti come valori del coefficiente angolare A e del termine noto B i seguenti:

$$A = (3.002 \pm 0.006) \quad (3.1.9)$$

$$B = (6.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-14} \text{m}^2 \quad (3.1.10)$$

Per verificare l'effettivo andamento lineare dei risultati ottenuti è stato effettuato un test del χ^2 :

$$\chi^2 = 0.5623 \quad (3.1.11)$$

Tale valore restituisce una compatibilità con un andamento lineare di probabilità 76.07%.

3.2 Stima degli errori

3.2.1 Angolo del prisma

L'errore attribuito ai singoli valori di α è stato ottenuto propagando l'errore su θ_1 e θ_2 nella 3.1.5:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{2} \cdot \sigma_\theta = 12' \quad (3.2.12)$$

Al valore finale di α è stata attribuita come incertezza la deviazione standard della media delle misure effettuate. Si è scelto di attribuire l'incertezza statistica come errore poiché superiore all'incertezza sistematica, pari a

$$\sigma_{\alpha, \text{sist}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma_\theta}{\sqrt{10}} = 27'' \quad (3.2.13)$$

3.2.2 Angolo di deviazione minima

L'errore attribuito al valore medio di θ_0 è stato ricavato attraverso la deviazione standard della media delle misure effettuate. Tale valore è superiore all'incertezza sistematica, ottenuta dalla propagazione dell'errore sulla singola misura di θ_0 nella formula per calcolare la media aritmetica:

$$\sigma_{\theta_0, \text{sist}} = \frac{\sigma_{\theta_0}}{\sqrt{10}} = 19'' \quad (3.2.14)$$

dove σ_{θ_0} è l'incertezza attribuita alle singole misure di θ_0 .

L'errore sul valore di δ ottenuto per i primi quattro colori osservati (Viola 1, Viola 2, Indaco e Ciano) è stato attribuito attraverso la deviazione standard della media delle misure effettuate. Tale valore è

risultato superiore rispetto all'incertezza sistematica, calcolabile attraverso la propagazione degli errori su θ_0 e θ_λ nella 3.1.8:

$$\sigma_{\delta, sist} = \frac{\sqrt{\sigma_{\theta_0}^2 + \sigma_{\theta_\lambda}^2}}{\sqrt{10}} = 23'' \quad (3.2.15)$$

Dove σ_{θ_0} è l'incertezza attribuita alle singole misure di θ_0 e σ_{θ_λ} è l'incertezza attribuita alle singole misure di θ_λ . Nel caso degli ultimi 3 colori (Verde, Giallo 1 e Giallo 2), l'incertezza sistematica risulta invece superiore a quella statistica, ed è dunque stata attribuita come errore su δ . Le incertezze statistiche sono riportate nella seguente tabella:

Colore	$\sigma_{\delta, stat}$
Verde	0.3''
Giallo 1	0.2''
Giallo 2	0.2''

Tab. 3: Valori dell'incertezza statistica su δ .

3.2.3 Indice di rifrazione del vetro

L'incertezza attribuita a ciascun valore dell'indice di rifrazione del vetro n è stata ottenuta mediante propagazione degli errori su δ e α nella 1.2.4:

$$\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\cos \alpha - 1}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\cos \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \sigma_\delta^2} \quad (3.2.16)$$

dove σ_δ è l'incertezza attribuita all'angolo di deviazione minima δ e σ_α è l'incertezza attribuita all'angolo al centro del prisma α .

4 Conclusioni

Come si evince dai dati ottenuti e dal test statistico svolto, i risultati sono compatibili con la relazione teorica di Cauchy.

Appendice

$\theta_1 \pm \sigma_{\theta_1}$	$\theta_2 \pm \sigma_{\theta_2}$	$\alpha \pm \sigma_\alpha$ [rad]
$7^\circ 47' \pm 1'$	$128^\circ 0' \pm 1'$	1.043416 ± 0.000411
$7^\circ 56' \pm 1'$	$128^\circ 42' \pm 1'$	1.033817 ± 0.000411
$8^\circ 37' \pm 1'$	$128^\circ 41' \pm 1'$	1.046034 ± 0.000411
$8^\circ 44' \pm 1'$	$129^\circ 48' \pm 1'$	1.028581 ± 0.000411
$7^\circ 54' \pm 1'$	$127^\circ 56' \pm 1'$	1.046616 ± 0.000411
$8^\circ 46' \pm 1'$	$128^\circ 4' \pm 1'$	1.059415 ± 0.000411
$8^\circ 1' \pm 1'$	$128^\circ 16' \pm 1'$	1.042834 ± 0.000411
$0^\circ 40' \pm 1'$	$119^\circ 45' \pm 1'$	1.063196 ± 0.000411
$0^\circ - 35' \pm 1'$	$119^\circ 2' \pm 1'$	1.053888 ± 0.000411
$1^\circ - 10' \pm 1'$	$119^\circ 39' \pm 1'$	1.032944 ± 0.000411

Tab. 4: Angolo del prisma.

$\theta_0 \pm \sigma_{\theta_0}$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 15' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 15' \pm 1'$
$-1^\circ - 17' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 19' \pm 1'$
$-1^\circ - 20' \pm 1'$
$-1^\circ - 17' \pm 1'$
$-1^\circ - 18' \pm 1'$

Tab. 5: Posizione iniziale della fenditura senza prisma.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$72^\circ 47' \pm 1'$	1.293085 ± 0.000350
$72^\circ 50' \pm 1'$	1.293958 ± 0.000350
$72^\circ 59' \pm 1'$	1.296576 ± 0.000350
$72^\circ 50' \pm 1'$	1.293958 ± 0.000350
$72^\circ 51' \pm 1'$	1.294249 ± 0.000350
$72^\circ 53' \pm 1'$	1.294831 ± 0.000350
$72^\circ 49' \pm 1'$	1.293667 ± 0.000350
$72^\circ 52' \pm 1'$	1.294540 ± 0.000350
$72^\circ 47' \pm 1'$	1.293085 ± 0.000350
$72^\circ 48' \pm 1'$	1.293376 ± 0.000350

Tab. 6: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Viola 1.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$72^\circ 35' \pm 1'$	1.289595 ± 0.000350
$72^\circ 36' \pm 1'$	1.289886 ± 0.000350
$72^\circ 37' \pm 1'$	1.290176 ± 0.000350
$72^\circ 34' \pm 1'$	1.289304 ± 0.000350
$72^\circ 36' \pm 1'$	1.289886 ± 0.000350
$72^\circ 35' \pm 1'$	1.289595 ± 0.000350
$72^\circ 36' \pm 1'$	1.289886 ± 0.000350
$72^\circ 34' \pm 1'$	1.289304 ± 0.000350
$72^\circ 37' \pm 1'$	1.290176 ± 0.000350
$72^\circ 29' \pm 1'$	1.287849 ± 0.000350

Tab. 7: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Viola 2.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$70^\circ 30' \pm 1'$	1.253234 ± 0.000350
$70^\circ 27' \pm 1'$	1.252361 ± 0.000350
$70^\circ 27' \pm 1'$	1.252361 ± 0.000350
$70^\circ 28' \pm 1'$	1.252652 ± 0.000350
$70^\circ 27' \pm 1'$	1.252361 ± 0.000350
$70^\circ 29' \pm 1'$	1.252943 ± 0.000350
$70^\circ 31' \pm 1'$	1.253525 ± 0.000350
$70^\circ 29' \pm 1'$	1.252943 ± 0.000350
$70^\circ 30' \pm 1'$	1.253234 ± 0.000350
$70^\circ 28' \pm 1'$	1.252652 ± 0.000350

Tab. 8: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Indaco.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$67^\circ 37' \pm 1'$	1.202910 ± 0.000350
$67^\circ 42' \pm 1'$	1.204364 ± 0.000350
$67^\circ 41' \pm 1'$	1.204074 ± 0.000350
$67^\circ 38' \pm 1'$	1.203201 ± 0.000350
$67^\circ 42' \pm 1'$	1.204364 ± 0.000350
$67^\circ 40' \pm 1'$	1.203783 ± 0.000350
$67^\circ 41' \pm 1'$	1.204074 ± 0.000350
$67^\circ 39' \pm 1'$	1.203492 ± 0.000350
$67^\circ 40' \pm 1'$	1.203783 ± 0.000350
$67^\circ 41' \pm 1'$	1.204074 ± 0.000350

Tab. 9: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Ciano.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$65^\circ 57' \pm 1'$	1.173821 ± 0.000350
$65^\circ 58' \pm 1'$	1.174112 ± 0.000350
$65^\circ 59' \pm 1'$	1.174403 ± 0.000350
$65^\circ 57' \pm 1'$	1.173821 ± 0.000350
$65^\circ 58' \pm 1'$	1.174112 ± 0.000350
$65^\circ 58' \pm 1'$	1.174112 ± 0.000350
$65^\circ 59' \pm 1'$	1.174403 ± 0.000350
$65^\circ 57' \pm 1'$	1.173821 ± 0.000350
$65^\circ 57' \pm 1'$	1.173821 ± 0.000350
$65^\circ 59' \pm 1'$	1.174403 ± 0.000350

Tab. 10: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Verde.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$65^\circ 15' \pm 1'$	1.161604 ± 0.000350
$65^\circ 15' \pm 1'$	1.161604 ± 0.000350
$65^\circ 16' \pm 1'$	1.161895 ± 0.000350
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350
$65^\circ 15' \pm 1'$	1.161604 ± 0.000350
$65^\circ 15' \pm 1'$	1.161604 ± 0.000350
$65^\circ 15' \pm 1'$	1.161604 ± 0.000350
$65^\circ 16' \pm 1'$	1.161895 ± 0.000350
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350
$65^\circ 16' \pm 1'$	1.161895 ± 0.000350

Tab. 11: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Giallo 1.

$\theta_\lambda \pm \sigma_{\theta_\lambda}$	$\delta \pm \sigma_\delta$ [rad]
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350
$65^\circ 13' \pm 1'$	1.161022 ± 0.000350
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350
$65^\circ 13' \pm 1'$	1.161022 ± 0.000350
$65^\circ 13' \pm 1'$	1.161022 ± 0.000350
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350
$65^\circ 13' \pm 1'$	1.161022 ± 0.000350
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350
$65^\circ 14' \pm 1'$	1.161313 ± 0.000350

Tab. 12: Angolo di deviazione minima per la riga spettrale Giallo 2.