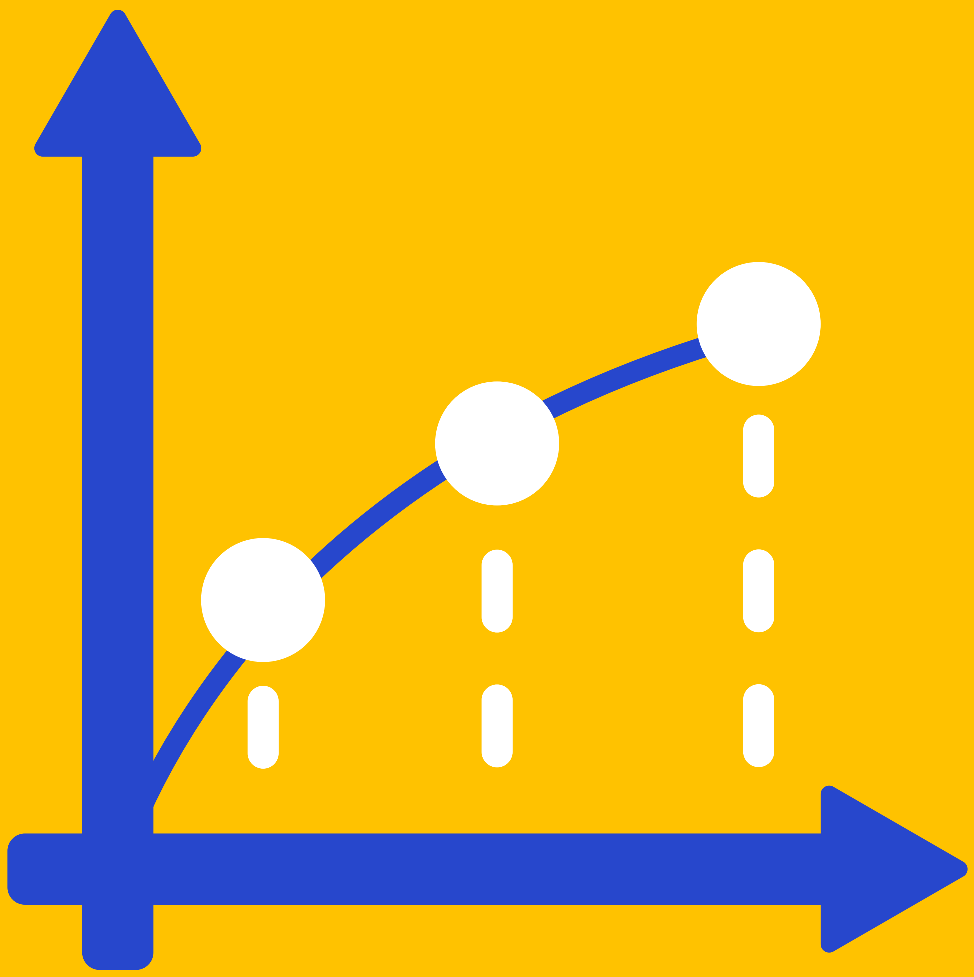
Livro Aberto de Matemática

Coleção do Ensino Médio

Funções

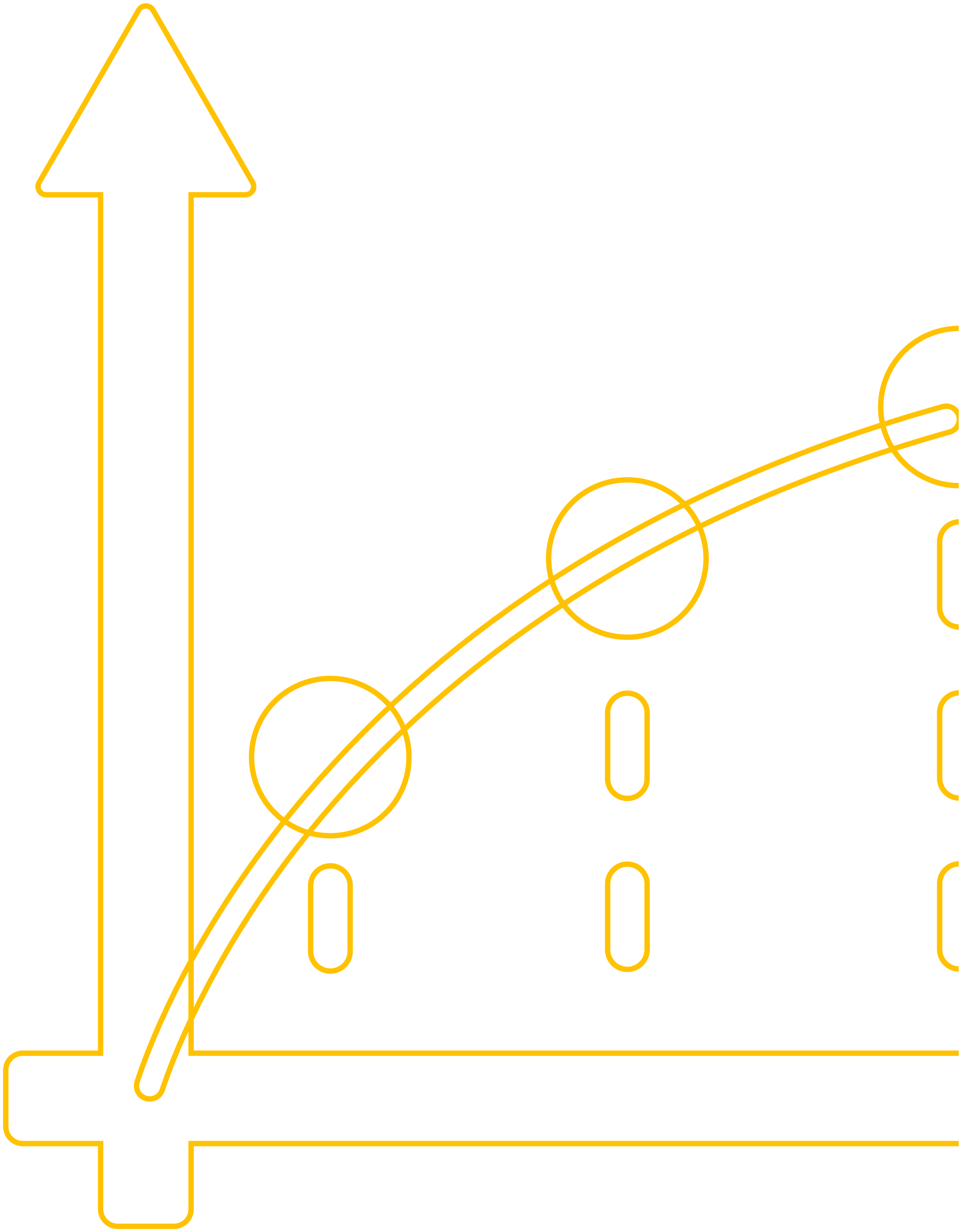


Associação Livro Aberto

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Sumário



Capítulo 1

Função Quadrática

Michel Cambrainha de Paula

Projeto: Livro Aberto de Matemática

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título:	Função Quadrática
Ano/ Versão:	2022 / versão 0.1 de 23 de setembro de 2022
Editora	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
Realização:	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
Produção:	Associação Livro Aberto
Coordenação:	Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)
Autor (a)	Michel Cambrainha de Paula
Revisão:	
Design:	Enzo Esberard
Diagramação:	Tarso Boudet Caldas

Desenvolvido por

Patrocínio:

O que?

Função quadrática e suas representações: gráficos, tabelas, expressões. Parábola e suas propriedades. Aplicações em problemas de reconhecimento e produção de padrões quadráticos, problemas de otimização. Progressões aritméticas de segunda ordem.

Por que?

A função quadrática, no que diz respeito a sua expressão algébrica, apresenta-se como sequência natural ao estudo da função afim. Trata-se de um modelo para certos fenômenos de taxa de variação não constante (não há proporcionalidade entre as variáveis): movimentos de aceleração constante, áreas, produtos de expressões polinomiais de 1º grau, etc. Com este tipo de modelo temos a oportunidade de fazer e responder perguntas sobre características quantitativas dos fenômenos, como crescimento e decrescimento, taxas de variação, pontos de mudança de comportamento, zeros da função, pontos de máximo e mínimo. Estes últimos são especialmente úteis em problemas de otimização em que precisamos determinar valores máximos ou mínimos para uma grandeza.

Introdução ao Professor

O estudo das funções quadráticas tem um papel estratégico no estudo geral das funções reais de variável real. Elas se apresentam como o primeiro modelo formal de variação não linear, se constituindo assim, porta de entrada para o estudo de modelos mais gerais que o da proporcionalidade, bastante explorado nos anos finais do ensino fundamental. Em contraste com os outros modelos comumente apresentados aos estudantes no ensino médio (exponenciais, logarítmicos, trigonométricos) as funções quadráticas têm a particularidade de serem algebricamente familiares aos estudantes, o que nos permite partir de um ponto mais avançado em relação aos outros e propor explorações mais aprofundadas. Por outro lado, é preciso ter certo cuidado para que essa familiaridade não leve a condução deste conteúdo a focar demasiadamente nos aspectos algébricos, dando menor atenção às ideias e aos conceitos matemáticos que são novos para os estudantes, como por exemplo, a relação funcional.

Consideramos importante destacar com os estudantes, sempre que possível, que embora na maioria das vezes estejamos lidando com expressões e manipulações algébricas conhecidas, a **natureza dos objetos matemáticos** e o **papel dos símbolos nas expressões** são completamente diferentes. Por exemplo, a letra x tem um determinado papel na expressão $x^2+2x-1=0$ (uma incógnita da equação) e outro completamente diferente na expressão $y=x^2+2x-1$ (uma variável da função). Outro exemplo de papéis bem definidos ocorre restrito ao contexto das funções, quando escrevemos $y=f(x)$, as variáveis, normalmente, não podem trocar de papel: x é a variável independente e y a que depende de x. Para uma função afim (não constante), basta uma manipulação algébrica e podemos também enxergar x como função (afim) de y, ou seja, y passa a ser a variável independente. No caso das funções quadráticas é um pouco mais delicado, pois, a menos que haja uma restrição adequada no domínio, não é possível x e y trocarem de papel: a relação inversa nem sempre é uma função. (Matos & Da Ponte, 2008).

Um aspecto que acreditamos merecer um pouco mais de atenção é o que diz respeito à **interpretação de dados e modelagem**. Grande parte dos problemas que envolvem variação quadrática somente são apresentados de maneira que o estudante deduza o modelo algebricamente: tem uma variável claramente apresentada e depois de uma sequência de operações e manipulações algébricas (em geral extraídos de contextos geométricos) chega-se a um modelo quadrático. Neste capítulo propomos outros caminhos para abordar a modelagem que passam por analisar diferenças de segunda ordem (modelo discreto da segunda derivada de uma função) e também pelo uso de **recursos tecnológicos digitais** para investigação e exploração de dados.

Um outro aspecto, que tem grande importância tanto para os modelos matemáticos quanto para os estudos posteriores de Cálculo Diferencial, é que as funções quadráticas permitem explorar com certa facilidade o conceito de **valores extremos** de uma função. A partir da exploração das simetrias do gráfico, é possível relacionar as coordenadas do vértice da parábola com os valores máximo ou mínimo atingidos pelas imagens da função, abrindo espaço para se trabalhar com problemas de otimização. Problemas esses que podem ser de natureza puramente matemática, ou podem surgir de outros contextos como: maximizar o lucro de uma empresa, minimizar prejuízos, calcular altura máxima atingida por um objeto que é lançado sob ação apenas da gravidade, dentre outros. Na Física (Cinemática), são as funções quadráticas que aparecem como modelos naturais para a posição em situações de aceleração constante. A aceleração é a segunda derivada da posição, assim quando ela é constante, significa que a posição poderá ser bem modelada por uma função quadrática. Apesar de acharmos de extrema importância que o estudante consiga relacionar as ideias de função quadrática com as noções da Cinemática, não está entre os objetivos deste capítulo esgotar as analogias e os significados de cada parâmetro do modelo no dado contexto.

Neste capítulo optamos por **explorar outras apresentações**, diferentes da convencional, **do trinômio quadrático**, $y=ax^2+bx+c$. Acreditamos ser importante que o estudante seja capaz de identificar as funções quadráticas por outras características que vão além da expressão algébrica reduzida (com termos semelhantes agrupados). As formas fatorada $y=a(x-p)(x-q)$ e canônica $y=a(x-h)^2+k$ revelam de maneira imediata propriedades e características da função(e/ou do seu gráfico) que não são evidentes na forma reduzida. Além de, em alguns casos, facilitarem a apresentação de algumas fórmulas. Embora essas formas (fatorada, canônica e reduzida) sejam apresentadas e exploradas ao longo do capítulo, acreditamos que memorizar suas nomenclaturas seja uma distração para o estudante, e por este motivo, não as colocamos no texto.

O capítulo está organizado em três blocos: o primeiro explora o modelo de variação quadrática e sua relação com as progressões aritméticas. Analisando padrões geométricos e dados em tabelas, o estudante é conduzido a analisar as diferenças entre valores (imagens) consecutivos para decidir quando os dados podem ser modelados por uma expressão polinomial quadrática. No segundo bloco, apresentamos a função quadrática propriamente dita, seu domínio, imagem, intervalos de crescimento e decrescimento, características do gráfico: simetria, vértice, etc. No terceiro e último bloco são apresentados as aplicações: problemas de otimização e aproximações com dados reais (na seção "Para Saber $+$").

Objetivos Gerais

- Identificar a função quadrática em suas representações algébrica e gráfica.
- Identificar e calcular os elementos principais de uma parábola (vértice, interseções com os eixos coordenados, eixo de simetria, concavidade), relacionando-os com as características e propriedades da função quadrática (zeros, imagem, pontos extremos)
- Compreender o modelo de variação que determina uma função quadrática e relacioná-lo com progressões aritméticas de segunda ordem.
- Propor modelos e resolver problemas de otimização que envolvam funções quadráticas.

Habilidades da BNCC

Neste capítulo contemplam-se as seguintes habilidades da versão homologada da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio (Brasil, 2018):

EM13MAT502 Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax2.

EM13MAT402 Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

EM13MAT503 Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Distratores

- "[...]os estudantes ficam confusos quando as equações quadráticas são apresentadas de maneira não usual pois não são exatamente como estes estão acostumados a vê-las. Por exemplo, ao apresentar $x^2 + 3x + 1 = x + 4$ que não está em forma padrão, vários alunos apresentam dificuldades quando solicitados a realizarem várias tarefas" (Kotsopoulos, 2007). Este tipo de confusão pode ser estendido para as diferentes apresentações da expressão da função quadrática.
- Há uma grande dificuldade em utilizar processos simples de fatoração para representar uma função quadrática em sua forma fatorada, consequentemente na busca dos zeros da função. (Parent, 2015)
- Ao fazer alusão com a função afim alguns alunos acreditam equivocadamente que o coeficiente "a" da forma polinomial ou canônica representa a taxa de variação da função ou a "inclinação" de uma função quadrática. (Parent, 2015)
- Os estudantes confundem os papéis dos parâmetros nas diferentes formas de apresentar a função quadrática, por exemplo, para representar graficamente, colocam o vértice da parábola $y = x^2 + 2x - 3$ no ponto $(2, -3)$. Isto pode estar ligado ao fato de o estudante repetir procedimentos aprendidos sem fazer as conexões ou pensar nos significados das ações que ele está executando. (Eraslan, 2008)

1.1 Um novo modelo de variação

O objetivo desta seção é apresentar ao estudante, sistematicamente, o modelo de variação quadrática, diferenciando-o do modelo linear, explorando o fato de que possui primeira variação linear (a diferença entre as imagens $f(x+1) - f(x)$ é uma progressão aritmética) e, portanto, segunda variação constante. Isso será feito a partir de observação e cálculo com dados apresentados em tabelas, ou extraídos em contextos de problemas ou mesmo em reconhecimento de padrões.

Ao final desta seção o estudante deverá ser capaz de identificar em que situações (especialmente aquelas em que o domínio é discreto, ou que pelo menos o conjunto de dados analisados é finito) os dados sugerem um crescimento e/ou decrescimento do tipo quadrático. Ele deverá ser capaz de recorrer à estratégia de analisar a primeira (e segunda) variação, de observar a disposição dos pontos no plano cartesiano e de utilizar tecnologias digitais para teste de conjecturas.

É importante observar que para aplicar esta estratégia os elementos do domínio precisam estar em uma progressão aritmética (a maioria dos casos apresentados aqui têm razão 1), uma vez que o resultado que estamos nos valendo é o seguinte: Dadas uma função quadrática f e uma progressão aritmética a_n então a sequência $f(a_n)$ é uma P.A. de segunda ordem. Não estamos propondo que isso seja enunciado ou demonstrado para os estudantes, mas que seja uma atenção que você, como professor, tenha durante a execução das tarefas que envolvem diferenças de primeira e segunda ordem. Interessante observar também que a diferença de primeira ordem $f(x+1) - f(x)$ coincide com a taxa de variação média no intervalo $[x, x+1]$.

Por último, sugerimos evitar foco demasiado nas expressões algébricas neste primeiro momento, embora inevitavelmente apareçam. Com isso, pretendemos que a relação entre as situações e tais expressões se dê de maneira mais natural e construtiva, evitando a imposição antecipada de uma forma “padrão” para o modelo quadrático.

Objetivos Específicos

Qual é o padrão?

- Analisar e identificar padrões de crescimento quadrático;
- Propor modelo algébrico para a variação observada a partir dos dados em uma tabela.

Sugestões e discussões

Qual é o padrão?

- Nos itens aparecem todas as formas (completa e incompletas) do trinômio padrão: x^2, x^2+c, x^2+bx, x^2+bx+c;
- Sugira aos estudantes colorir as figuras de modo a identificar as diferentes parcelas do trinômio. Discuta com eles sobre as características geométricas que cada monômio evidencia nas figuras: x^2 relacionado a área, bx relacionado a comprimentos (lados, diagonais) e c relacionado a blocos independentes que não variam de um estágio para o outro.
- Uma possibilidade interessante é fazer esta atividade com material manipulável (quadradinhos de EVA, por exemplo) e depois pedir que os estudantes alinhem ou empilhem os quadrados de cada estágio (formando uma espécie de histograma) percebendo assim o crescimento quadrático.

Solução

Qual é o padrão?

a)
b)
c)
d)

Objetivos Específicos

Explorando os dados

- Identificar os dados de variação quadrática como aqueles que têm primeira variação linear;
- Examinar características das representações gráficas de dados de variação quadrática;

Atividade 1

Qual é o padrão?

Observe a Figura 1.1 onde estão representados blocos cuja quantidade aumenta seguindo determinado padrão. No estágio 1, há um bloco apenas. No estágio 2, há 4 blocos iguais e nos seguintes 9 e 16 blocos, respectivamente.

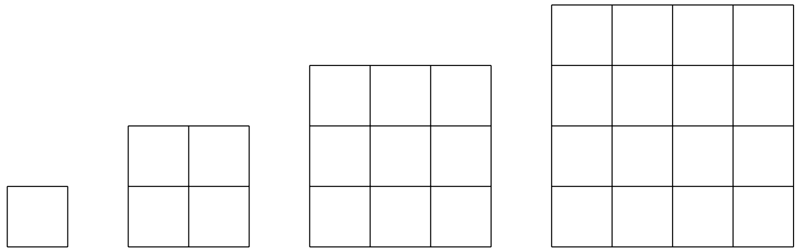


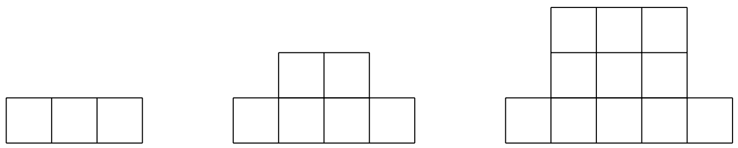
Figura 1.1

a) Identifique e explicite algum padrão de construção das figuras, e então complete a tabela abaixo com a previsão do número de blocos iguais para os próximos estágios. Explique o seu raciocínio.

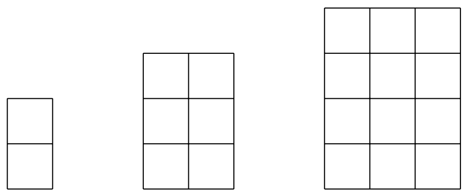
Estágio	Número de blocos iguais
1	1
2	4
3	9
4	16
5	
6	

b) Identifique e explicite algum padrão e preencha a tabela para as novas sequências de blocos. Registre o seu raciocínio para cada uma delas.

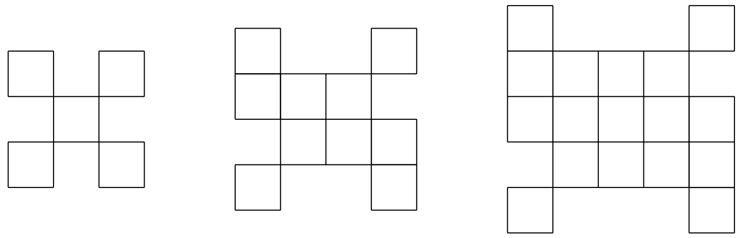
(I)



(II)



(III)



	Número de blocos iguais		
Estágio	(I)	(II)	(III)
1	3	2	5
2			
3			
4			
5			
6			

c) Escreva, para cada um dos exemplos anteriores, expressões algébricas que representem o número de blocos iguais em função do estágio. O que elas têm em comum? Como essas semelhanças se refletem nas figuras formadas pelos blocos?

d) Crie seu próprio padrão que tenha alguma semelhança com os que foram apresentados e desafie seus colegas de turma.

Atividade 2

Explorando os dados

Observe as três tabelas abaixo, nas quais y é dado como função de x.

x	y	
1	0	–
2	5	
3	10	
4	15	
5	20	

x	y	
1	1,5	–
2	3	
3	5,5	
4	9	
5	13,5	

x	y	
1	8	–
2	11	
3	10	
4	5	
5	-4	

a) Analise os dados das três tabelas. Que padrões você consegue perceber nos valores de x e de y em cada uma das tabelas?

Sugestões e discussões

Explorando os dados

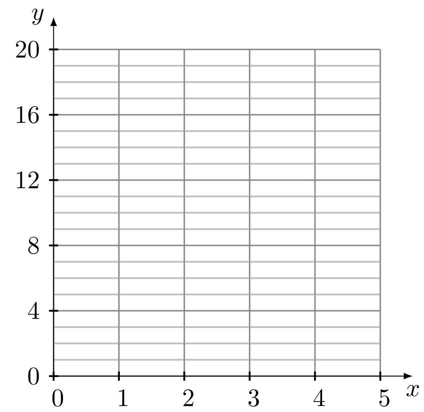
- No item (a) a análise é livre e não há uma resposta única esperada. Estimule a criatividade e permita que tirem suas próprias conclusões. É natural que tentem fazer as diferenças consecutivas. Na primeira tabela, encontrarão diferença constante (função afim) e na segunda e terceira encontrarão diferença com variação linear (função quadrática).
- Para o item (c), caso não percebam, pergunte sobre as variações dos valores obtidos como diferenças consecutivas.
- No item (e), para os dados quadráticos espera-se apenas a constatação de que os pontos não estão alinhados. O objetivo é perceber que, graficamente, esses dados produzem pontos que "se curvam" no plano.
- Pode acontecer de algum estudante afirmar que as terceiras colunas das três tabelas estão em progressão aritmética. De fato, toda sequência constante (por exemplo, a da terceira coluna da primeira tabela) é um PA de razão zero. Caso isso aconteça, chame a atenção para o fato de quando a diferença de primeira ordem é uma PA de razão zero, os dados têm variação linear (função linear ou afim), e quando a razão da PA é diferente de zero, teremos esse "novo tipo de variação" que estamos estudando aqui, o quadrático.

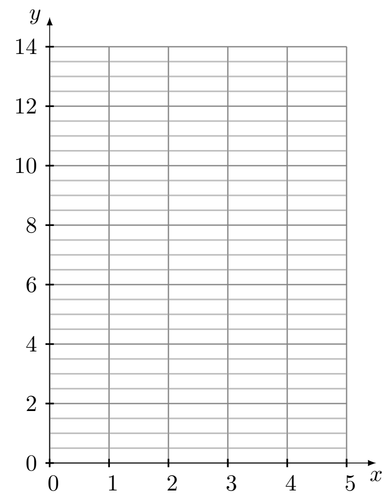
b) Alguma das três tabelas apresenta, na segunda coluna, dados em progressão aritmética? Como você chegou a essa conclusão?

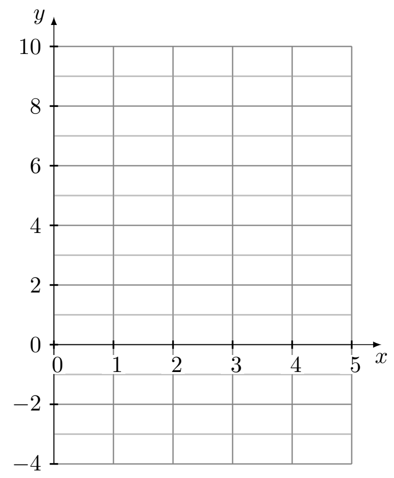
c) Complete a terceira coluna de cada tabela com as diferenças entre as imagens (y) de valores consecutivos de x. Existem características em comum entre as terceiras colunas das tabelas? Quais?

d) Associe corretamente cada uma das expressões $y = 5x - 5$, $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, $y = -2x^2 + 9x + 1$ aos dados das tabelas.

e) Represente os dados de cada uma das tabelas em sistemas de coordenadas, descreva características que você observa, destacando semelhanças e diferenças.







Organizando — Um novo modelo de variação

****Começar explicando o que é variação linear e relacionar com PA e função afim... incluir representações simbólicas

Não é incomum, ao se deparar com sequências numéricas ou de padrões geométricos como os da Atividade 1, que nossa primeira tentativa seja verificar se há variação linear. Normalmente, a primeira coisa que tentamos verificar é se os valores da sequência podem ser obtidos somando algum valor fixo ao anterior. Quando isso ocorre, estamos diante de uma progressão aritmética, como vimos no capítulo sobre as funções afins. Aqui, nas atividades anteriores, entretanto, nos deparamos com um modelo de variação diferente, chamado de **variação quadrática**.

O nome *quadrática* está relacionado ao fato de que essas sequências podem ser geradas por expressões polinomiais cujo maior expoente é igual a 2.

Vejamos que características têm as sequências de variação quadrática. Observe o exemplo na Figura 1.2:

A sequência pode ser enxergada seguindo o padrão geométrico sugerido pelas cores. Na primeira posição há 4 bolinhas: uma bolinha laranja, uma verde e duas pretas. Na segunda posição há 10 bolinhas: dois arranjos 2×2, um laranja e um verde e mais duas bolinhas pretas. O terceiro elemento da sequência tem 20 bolinhas: dois arranjos 3×3 de cores laranja e verde e mais duas bolinhas pretas. Continuando desta maneira o processo, na quarta posição teríamos dois arranjos 4×4 mais duas bolinhas pretas, ou seja, $2 \cdot 4^2 + 2 = 34$ bolinhas, e assim sucessivamente.

Quando tentamos examinar as diferenças consecutivas neste caso, obtemos uma sequência que claramente não é constante (e portanto, já podemos afirmar que não se trata de um crescimento linear).

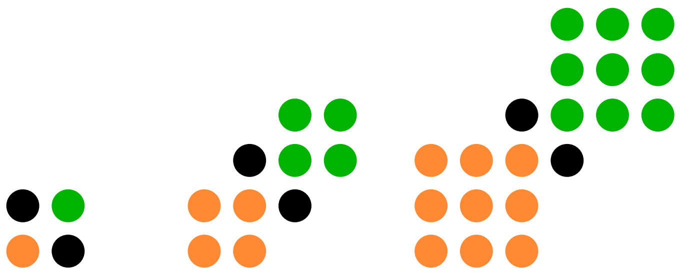


Figura 1.2

Posição na sequência	Nº de bolinhas
1	4
2	10
3	20

Tabela 1.1

Posição	Nº de bolinhas
1	$4 = 2 \cdot 1 + 2$
2	$10 = 2 \cdot 2^2 + 2$
3	$20 = 2 \cdot 3^2 + 2$
4	$34 = 2 \cdot 4^2 + 2$
5	$52 = 2 \cdot 5^2 + 2$
$\vdots$	$\vdots$
n	$2 \cdot n^2 + 2$

Entretanto, com um olhar mais atento, podemos perceber que a sequência das diferenças consecutivas apresenta um comportamento do tipo afim, ou seja, tem variação linear.

No exemplo acima a sequência $(6, 10, 14, 18, 22, 26,)$ é uma progressão aritmética de razão 4. Assim, podemos dizer que a sequência do número de bolinhas apresenta segunda diferença (ou diferença de segunda ordem) constante.

Esta é exatamente a propriedade que define as **sequências de variação quadrática**: são sequências que têm a segunda diferença entre termos consecutivos sempre igual a uma constante diferente de zero. Tais sequências também são chamadas de progressões aritméticas de segunda ordem.

É possível demonstrar que toda sequência quadrática pode ser gerada a partir de uma fórmula que envolve uma expressão polinomial do segundo grau, ou seja, que existem números reais a, b e c tais que o n-ésimo termo da sequência pode ser calculado pela expressão $a \cdot n^2 + b \cdot n + c$. Encontrar esses valores nem sempre é uma tarefa simples, mas outras características dessas sequências podem ajudar nessa tarefa.

No exemplo acima da sequência (4, 10, 20, 34, 52, 74, 100, ...) nós deduzimos, por um argumento geométrico, que os valores dos coeficientes são $a = 2$, $b = 0$ e $c = 2$, ou seja, a expressão é $2n^2 + 2$.

Reciprocamente, se uma sequência é gerada por uma expressão polinomial do segundo grau $x_n = a{\cdot}n^2{+}b{\cdot}n{+}c$,

Posiçãoa	Nº de bolinhas	Diferença
1	4	—
2	10	$10 - 4 = 6$
3	20	$20 - 10 = 10$
4	34	$34 - 20 = 14$
5	52	$52 - 34 = 18$
6	74	$74 - 52 = 22$
7	100	$98 - 74 = 26$

Posição na sequência	Número de bolinhas	Primeira Diferença (Diferença de 1ª ordem)	Segunda Diferença (Diferença de 2ª ordem)
1	4	—	—
2	10	6	—
3	20	10	$10 - 6 = 4$
4	34	14	$14 - 10 = 4$
5	52	18	$18 - 14 = 4$
6	74	22	$22 - 18 = 4$
7	100	26	$26 - 22 = 4$

é simples se convencer de que a segunda diferença entre termos consecutivos deve ser uma constante, e ainda que essa constante depende apenas do valor de a.

Posição na sequência (n)	$x_n = an^2 + bn + c$	Primeira Diferença (Diferença de 1ª ordem)	Segunda Diferença (Diferença de 2ª ordem)
1	$a + b + c$	—	—
2	$4a + 2b + c$	$3a + b$	—
3	$9a + 3b + c$	$5a + b$	$2a$
4	$16a + 4b + c$	$7a + b$	$2a$
5	$25a + 5b + c$	$9a + b$	$2a$
...	...	...	...

Quanto à representação gráfica de pontos com variação quadrática, podemos perceber que, como a primeira diferença não é constante, os pontos não serão colineares (para visualizar isso precisamos de pelo menos três pontos marcados no plano cartesiano). Eles "se curvarão" no espaço de uma maneira específica que estudaremos mais adiante neste capítulo.

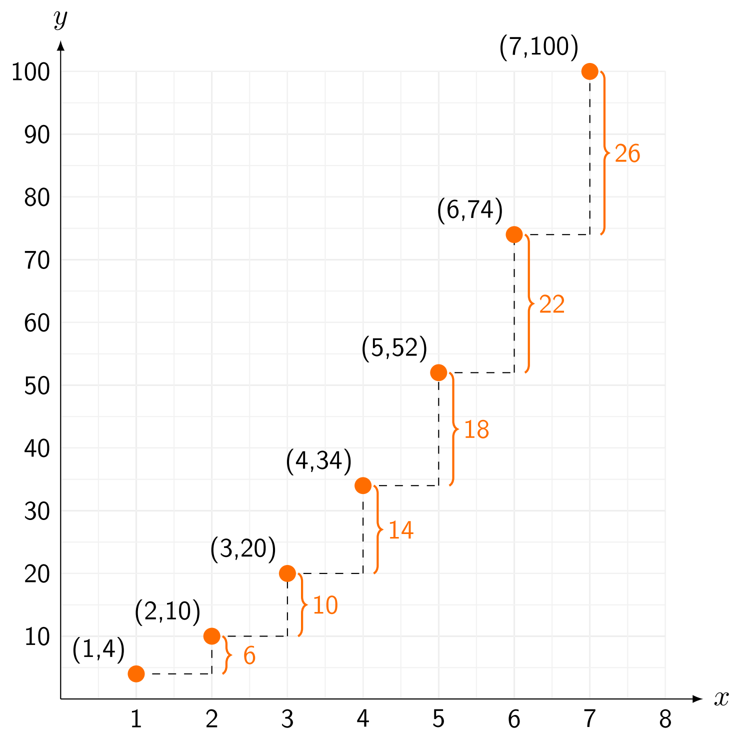


Figura 1.3: Gráfico de $f(n) = 2n^2 + 2$ para $n \in \{1, 2, ..., 7\}$

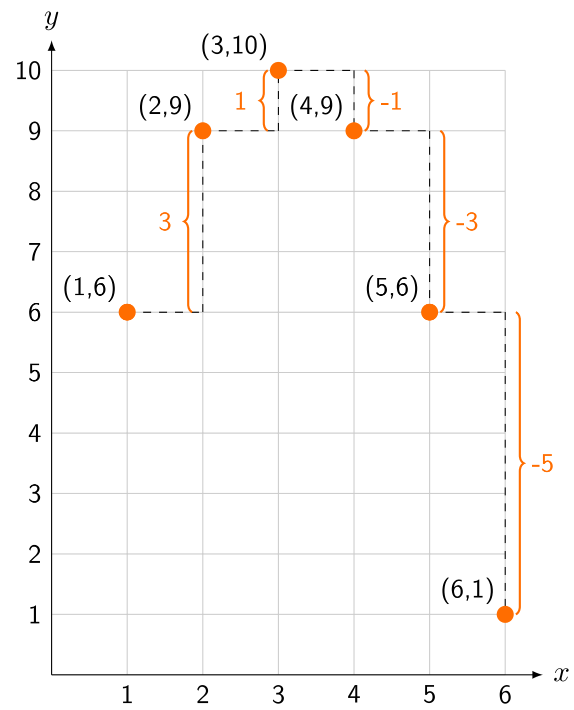


Figura 1.4: Gráfico de $g(n) = -n^2 + 6n + 1$ para $n \in \{1, 2, ..., 6\}$

Praticando **Um novo modelo de variação**

Atividade 3

Força no bíceps

A força muscular que uma pessoa tem em seu bíceps está relacionada à circunferência deste músculo. Quanto maior a circunferência do bíceps, maior a carga que ele aguenta levantar, ou seja, as grandezas estão relacionadas segundo uma função crescente.

Objetivos Específicos

Força no bíceps

- Identificar uma sequência de variação quadrática em uma situação-problema.
- Relacionar o crescimento quadrático com contextos em que uma variável é proporcional ao quadrado da outra.

Sugestões e discussões

Força no bíceps

- Os estudantes devem calcular as diferenças de segunda ordem para identificar que os dados são quadráticos.
- Um ponto importante para ficar atento aqui, e não necessariamente discutir com os estudantes, é que este método (das diferenças de segunda ordem) funciona porque os dados do domínio estão equidistantes, ou seja, formam uma progressão aritmética. Intervalos de comprimentos diferentes não vão proporcionar a propriedade desejada.
- Sugira aos estudantes que criem novas linhas na tabela para analisar as afirmações feitas nos itens (b) e (d).
- Relembrar o que é uma seção transversal para a resolução do item (d).

Solução

Força no bíceps

-

Objetivos Específicos

Desafio dos pontos

- Criar padrões em arranjos de pontos que exibam crescimento linear ou quadrático.
- Relacionar diferentes representações para justificar os crescimentos linear e quadrático.

Circunferência do bíceps (cm)	Carga máxima levantada (kg)
12,5	30
15	43,2
17,5	58,8
20	76,8
22,5	97,2
25	120
27,5	145,2

Tabela 1.2

a) O padrão observado apresenta crescimento linear? Quadrático? De algum outro tipo? Explique seu raciocínio.

b) Um pesquisador ao analisar os dados acima, faz a seguinte afirmação:

> "A carga máxima suportada por um bíceps é proporcional ao quadrado da circunferência deste músculo."

Como podemos justificar ou refutar tal afirmação?

c) Com esses dados é possível encontrar alguma expressão para a função que relaciona a carga máxima e a circunferência?

d) Quais das seguintes afirmações são também verdadeiras em relação aos dados da tabela? Justifique.

(1) A força muscular é proporcional ao diâmetro do músculo.

(2) A força muscular é proporcional ao quadrado do diâmetro do músculo.

(3) A força muscular é proporcional à área da seção transversal do músculo.

Atividade 4

Desafio dos pontos

Observe o arranjo de pontos da Figura 1.5:

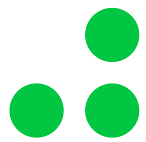


Figura 1.5

a) Crie uma sequência com mais 4 casos de arranjos de pontos que tenha esse arranjo como primeiro estágio e cuja quantidade de bolinhas em função da posição na sequência obedeça a um padrão que seja afim ou quadrático.

b) Use várias representações (tabela, gráfico, descrição escrita) do padrão visual para justificar o crescimento como linear ou quadrático. Use códigos de cores, setas, e palavras para embasar a justificativa.

c) Escreva uma expressão que generalize o padrão: quantidade de pontos em função da posição que o arranjo aparece na sequência.

d) Desenhe os três primeiros casos em uma folha separada e entregue a um colega para que ele possa analisar e descobrir o padrão criado.

Saiba Mais — **Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética**

Atividade 5

Fita Aritmética

O livro Antologia Matemática de Malba Tahan, conta um episódio cuja personagem principal é o "príncipe da matemática" Carl Friedrich Gauss (1777 — †1855). Não se sabe se o episódio é real, mas conta-se que aos sete anos de idade, chegando para mais um dia de aula, Gauss e seus colegas teriam encontrado o professor com pouca paciência. Assim, o professor, com o intuito de entreter seus alunos por longo tempo e não precisar dar-lhes qualquer atenção, pediu para que todos somassem os números naturais desde 1 até 100. Contudo, o jovem Gauss em pouco tempo levou o resultado do exercício, sem nenhum cálculo escrito, para o impaciente professor e este, ficou surpreso por ele ter sido o único a resolver a questão. Mais tarde, depois de se acalmar, o professor reconheceu o acerto no método e no resultado dado pelo jovem.

Como o jovem Gauss teria obtido este resultado por um método aparentemente desconhecido do irritado professor e com tanta rapidez? Com a finalidade de responder a essa pergunta sugerimos uma atividade. Ela necessitará de uma fita métrica padrão de 150 cm, das normalmente usadas para costura.

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tape_measures_-_centymetr.jpg#metadata

Figura 1.6: Fita métrica

Como as fitas métricas comercializadas tem um tamanho padrão, em nossa atividade vamos entender como o jovem Gauss fez a soma começando por somar os números da fita métrica, ou seja, vamos começar resolvendo a expressão:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \quad + 147 + 148 + 149 + 150$$

a) Para começar, faça um chute inicial do valor dessa soma.

b) De posse da fita métrica, perceba que ela tem os dois lados numerados. Cada um desses lados tem todos os números que queremos somar?

Sugestões e discussões

Desafio dos pontos

- Esta atividade foi pensada para ser realizada em duplas ou trios.
- Quando os alunos tiverem trocado padrões entre si, solicite que façam o seguinte: - Estudem o padrão visual de outra dupla de alunos na turma. O padrão é afim ou quadrático? - Prepare um argumento convincente, usando variadas representações, para justificar se o padrão é linear ou quadrático; - Escreva uma expressão geral para o padrão. - Responda às perguntas a seguir: Qual seria a aparência do 50º caso? Quantos pontos haveria no 74º caso?
- Discuta pelo menos um caso de cada tipo (afim e quadrático) com a turma toda, retomando as reflexões apontadas na seção Organizando.
- Para as justificativas dos crescimentos espera-se argumentos do tipo: primeira ou segunda variação constante, pontos colineares no plano (para o caso afim), expressões polinomiais (de 1º e 2º graus).
- A atividade explora o "processo inverso" apontado por Duval (2012), que afirma que o estudante que é capaz de dar conta dele revela entendimento do tema.
- Inspirado na atividade "A Forma das Coisas" https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Semana-3-A-Forma-das-Coisas.docx.pdf

Solução

Desafio dos pontos

-

Objetivos Específicos

Fita Aritmética

- Reconhecer a função quadrática na expressão da soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética.

Sugestões e discussões

Fita Aritmética

-

Solução

Fita Aritmética

-

c) Qual o número que corresponde ao verso (outro lado da fita) do número 1? E quais são os números dos versos correspondentes de 18 e 75?

d) Agora, vamos fazer algumas somas de um número com o seu correspondente no verso da fita. Faça:

- 1+ seu correspondente;
- 15+ seu correspondente;
- 31+ seu correspondente;
- 49+ seu correspondente;
- 75+ seu correspondente.

e) Qual o resultado obtido sempre que se soma um número com o seu correspondente no verso desta fita?

f) Com base na resposta do item anterior, qual o resultado da soma de todos os números dos dois lados dessa fita?

g) A soma de todos os números em ambos os lados da fita é o resultado que queríamos obter?

h) Que operação devemos fazer com a soma de todos os números da fita para que ele seja o resultado da expressão $1+2+3+4+5+\cdots+147+148+149+150$? Qual é o valor dessa expressão? Ela está próxima do chute inicial que você fez?

i) Imagine agora uma outra fita que tenha em cada lado, todos os números de 1 até 100 (veja a Figura 1.7).

frente	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
verso	100	99	98	97	96	95	94	93	$\cdots$

Figura 1.7

j) Utilizando o mesmo raciocínio, tente responder a mesma pergunta feita para a turma do jovem Gauss, ou seja, quanto dá $1+2+3+\ \ +97+98+99+100$?

k) Como procederíamos se a fita fosse até um número natural qualquer n ?

frente	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
verso	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	$n-6$	$n-7$	$\cdots$

Figura 1.8

l) Com o que foi aprendido, obtenha uma expressão para o resultado da soma dos n primeiros números naturais. Ou seja, tente expressar em função de n o resultado de $1+2+3+4+5+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n$.

m) Agora imagine uma fita que tenha nos dois lados todos os números de uma progressão aritmética de n termos de primeiro termo a_1 e razão r, como na Figura 1.9.

Faça um ou dois exemplos e se convença de que as somas dos números correspondentes (frente e verso) é sempre a mesma.

n) Agora observe a maneira de expressar os números da progressão aritmética na fita expressa na Figura 1.10

frente	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$
verso	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	a_{n-4}	a_{n-5}	a_{n-6}	a_{n-7}	$\cdots$

Figura 1.9

frente	a_1	$a_1 + r$	$a_1 + 2r$	$a_1 + 3r$	$\cdots$
verso	$a_1 + (n-1)r$	$a_1 + (n-2)r$	$a_1 + (n-3)r$	$a_1 + (n-4)r$	$\cdots$

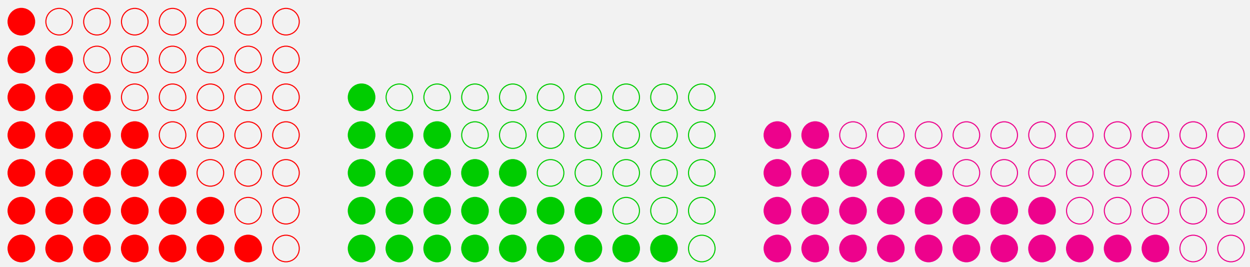
Figura 1.10

Deduza uma fórmula para a soma dos termos de uma progressão aritmética de n termos, em função de a_1, a_n e n.

o) Reescreva essa fórmula em função de a_1, n e r e conclua que a soma dos termos de uma progressão aritmética finita é uma função quadrática de n.

Para refletir

Observe os arranjos de pontos abaixo. Como eles se relacionam com as ideias da Atividade 5 (Fita aritmética)?



Sugestões e discussões

Para refletir

Em cada um dos arranjos, a quantidade de bolas preenchidas pode ser obtida como a soma de uma P.A. As bolinhas contornadas estão em emsa quantidade que as preenchidas, formando arranjo retangular de bolinhas. Sendo assim, o dobro da quantidade de bolinhas preenchidas pode ser calculado multiplicando a quantidade de linhas (n) pela soma da quantidade de bolas na primeira linha com a da última $(a_1 + a_n)$.

Nesta seção vamos apresentar a definição da função quadrática e explorar suas características como domínio (e restrições), imagem e gráfico (simetria, parábola, transformações e semelhanças).

Em geral, há uma certa tendência em se privilegiar a forma polinomial reduzida (padrão) da expressão da função quadrática: $y = ax^2 + bx + c$. Aqui nesta seção propomos um caminho diferente. Apesar de apresentarmos a definição baseada nesta forma, as diversas propriedades do gráfico e da função ficam mais evidentes em outras apresentações do polinômio (as formas conhecidas como forma canônica $y = a(x - h)^2 + k$ e a forma fatorada $y = a(x - p)(x - q)$. Por outro lado, não estamos defendendo que se demande dos estudantes nomear tais formas ou saber de memória as expressões dos elementos do gráfico dependendo de cada parâmetro.

A ideia é justamente o contrário, que se possa, ao permitir que a expressão da função seja apresentada de várias formas, focar mais nas propriedades que cada uma evidencia na função quadrática. Por exemplo, a abscissa do vértice deixa de ser identificada com a fórmula $-\frac{b}{2a}$ e passa a ter significado em si mesma, podendo ser pensada como a média aritmética das raízes, ou de quaisquer dois elementos do domínio que tenham a mesma imagem.

Sendo assim, as tabelas que aparecem na seção Organizando não são para memorização mas servem como um resumo das discussões feitas ao longo das atividades e do texto e devem ser abordadas sempre amparadas em atividades anteriores, com o cuidado para que não se tornem um convite às simples memorizações.

1.2 Função Quadrática

Atividade 6

Retângulo de barbante

Você tem um pedaço de barbante que está com as pontas unidas, formando um laço de comprimento 30 cm, e você deseja, com ele, construir um retângulo.

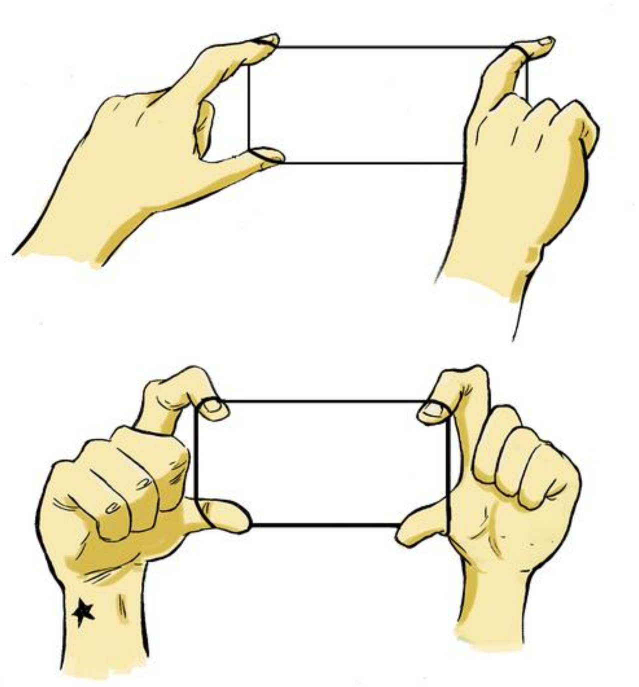


Figura 1.11

a) Faça esboços de três possíveis retângulos que são possíveis de construir dessa maneira. Escolha exemplos que você acha que vão ser diferentes dos exemplos dos seus colegas.

b) Quais são os menores e maiores valores possíveis para as dimensões (base e altura) dos retângulos? O que é correto afirmar sobre o perímetro deles? E o que você acha que acontece com as áreas desses retângulos?

c) Organize os dados em uma tabela, e para cada retângulo criado, indique seus perímetro e área. Acrescente à sua tabela os dados de pelo menos dois colegas seus de turma.

base	altura	perímetro	área

Tabela 1.3

d) Se considerarmos a base como variável independente, podemos afirmar que as outras grandezas podem ser consideradas funções da base? Por que? É possível definir expressões matemáticas para essas relações?

e) Represente os pontos de cada uma das três relações anteriores em planos cartesianos diferentes: (base, altura), (base, perímetro) e (base, área).

Objetivos Específicos

Retângulo de barbante

- Modelar os dados de um problema concreto que recai em uma função quadrática.
- Diferenciar a variação quadrática (área como função da base) da variação linear (altura como função da base) ou variação constante (perímetro como função da base).

Sugestões e discussões

Retângulo de barbante

- Se você dispões de material manipulável, considere usar barbantes para que os estudantes possam experimentar.
- É importante que os estudantes usem também exemplos não inteiros (racionais e irracionais). O final do comando do item (a) tem a intenção de provocá-los a serem criativos nas escolhas.
- Durante a discussão, recomendamos colecionar os dados de vários alunos no quadro, por exemplo, pedindo que eles vão até a lousa para registrar suas respostas. Pode ser interessante também usar uma calculadora gráfica (Geogebra, Desmos, etc) para a visualização desses dados. Quanto mais dados tiver, mais evidente ficará a forma do gráfico.

Solução

Retângulo de barbante

-

Sugestões e discussões

Para Refletir

*****Colocar as respostas e discussões da pergunta, simetrias e tal

Objetivos Específicos

Imagens e Gráficos

- Identificar os eixos de simetria do gráfico da função quadrática a partir de expressões dadas na forma canônica do trinômio $a(x-h)^2+k$.
- Reconhecer a abscissa do vértice da parábola como equidistante de valores que têm a mesma imagem.

Sugestões e discussões

Imagens e Gráficos

- As justificativas do item (c) podem ser feitas de maneira informal, com uso de linguagem comum. Não se preocupe demasiadamente com a precisão dos argumentos, mas dê mais foco para as ideias que surgirão nas argumentações.
- Os estudantes podem encontrar dificuldade em fazer o item (c) sem auxílio. Considere usar as afirmações deste item como um condutor das discussões das soluções dadas por eles para os itens anteriores.
- Estimule que os estudantes tenham sempre o olhar atento para as generalizações. Que resolvam os problemas específicos, mas que tentem pensar de maneira mais geral, como por exemplo, ao resolver um problema semelhante que características permanecerão as mesmas, que outras ficariam diferentes?
- Ressalte aos estudantes que a relação "x=constante" não caracteriza uma função, ainda que tenha para representação no plano cartesiano uma reta vertical
- O último item é uma generalização. Os estudantes podem encontrar dificuldades sobre que variável devem isolar.... Auxilie bla bla bla

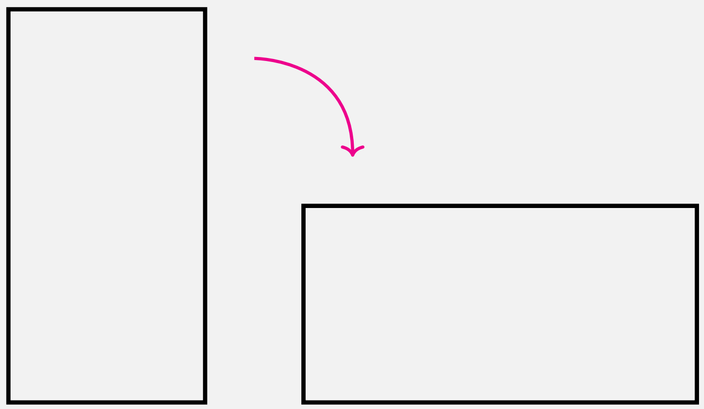
Solução

Imagens e Gráficos

-

Para refletir

Fazendo a atividade anterior, um estudante desenhou um retângulo e percebeu que apenas girando-o $90°$, sem modificar as dimensões, obtinha um outro retângulo possível. Neste caso ele percebeu que os valores para base e para a altura trocam de lugar, mas que tanto o perímetro quanto a área permanecem os mesmos.



Como é possível identificar esses dois retângulos no gráfico (base,área)? Considerando que esta propriedade é válida para qualquer retângulo, que consequências isso tem na forma do gráfico (base,área)? E se o retângulo for um quadrado, onde ele está representado no gráfico?

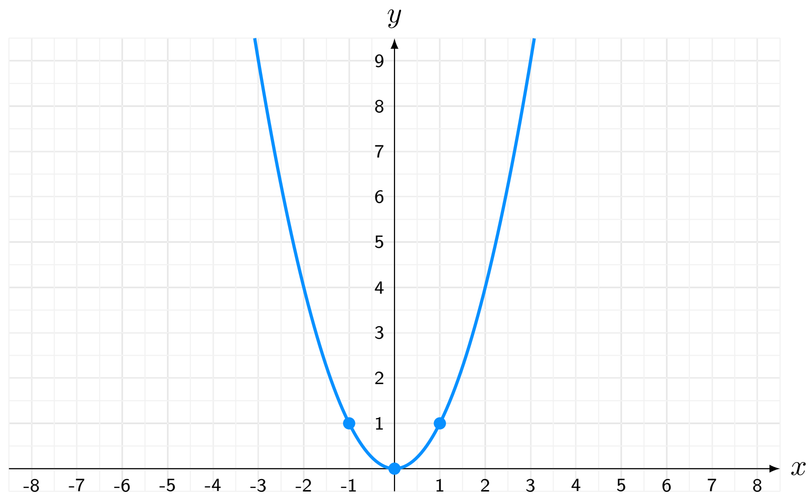
Atividade 7

Imagens e Gráficos

Para cada uma das funções de domínio $\mathbb{R}$ dadas pelas expressões abaixo complete a tabela e represente os pontos no sistema de coordenadas, quando possível.

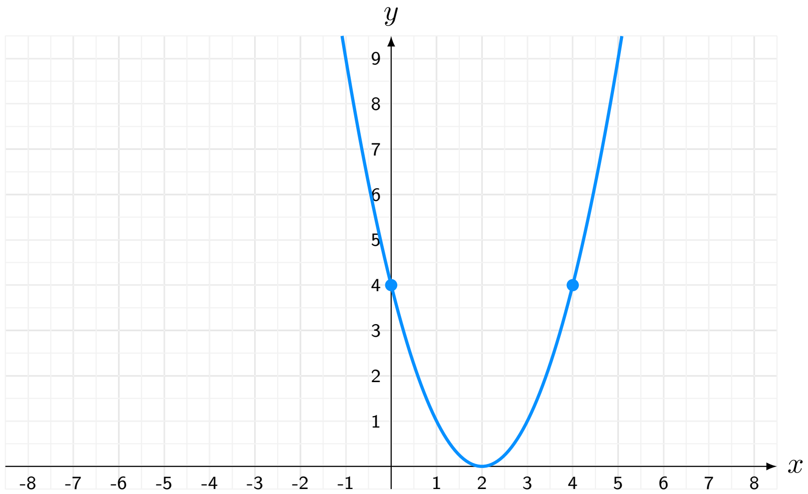
a) (i) $f(x)=x^2$

x	$y=f(x)$
0	0
1 e -1	1
	4
	5
	9
	49
	50



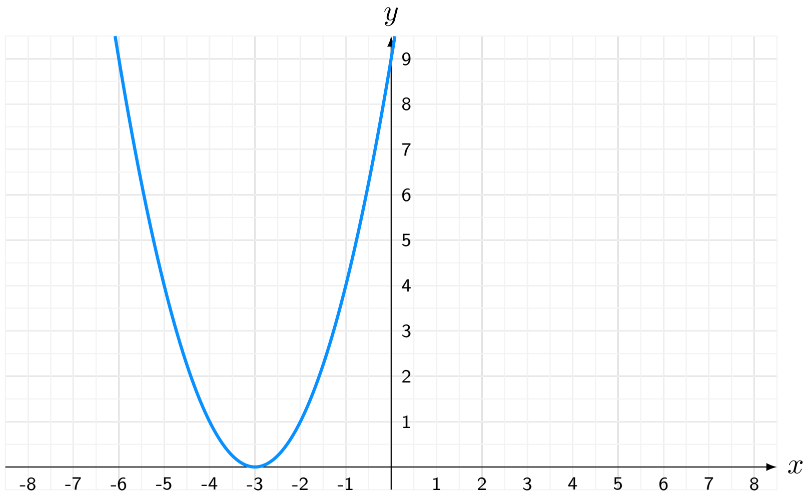
(ii) $g(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

x	$y = g(x)$
0	0
	1
0 e 4	4
	5
	9



(iii) $q(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

x	$y = q(x)$
	0
	1
	4
	5
	9

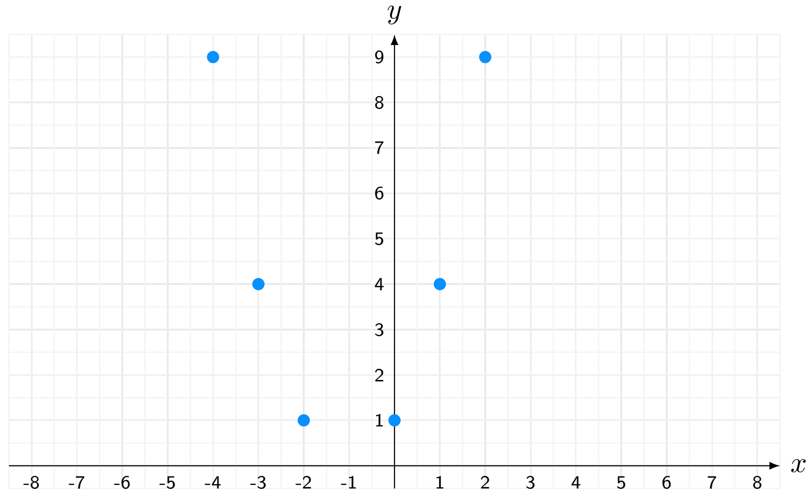


(iv) $v(x) = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

x	$y = v(x)$
	0
	1
	4
	5
	9

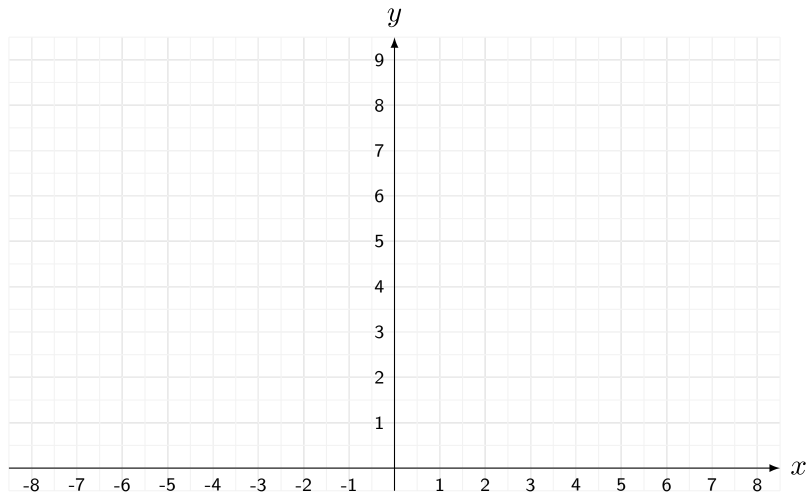
(v) $p(x) = ?$

x	$y = p(x)$
	0
0 e -2	1
1 e -3	4
	5
2 e -4	9



(vi) Crie seu exemplo, baseado nos anteriores.

x	y

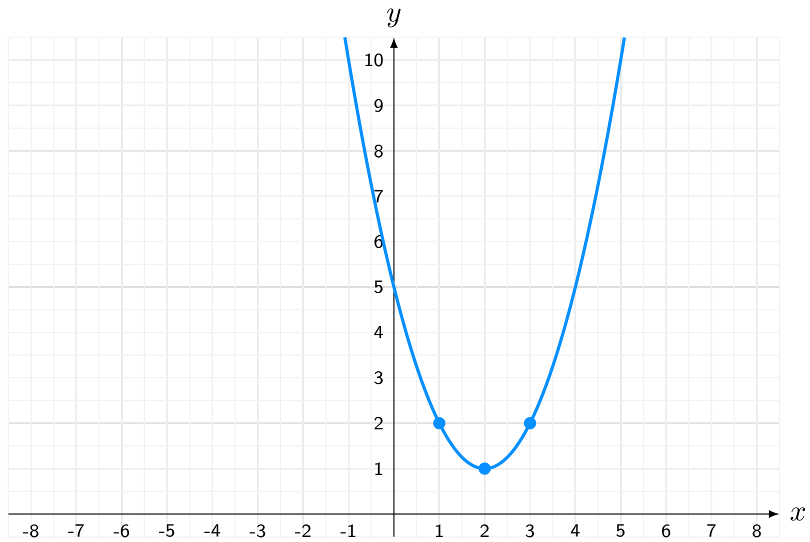


(vii) Generalize para $s(x) = (x - h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$ em que $h \in \mathbb{R}$.

x	$y = s(x)$
	0
	1
	4
	5
	9

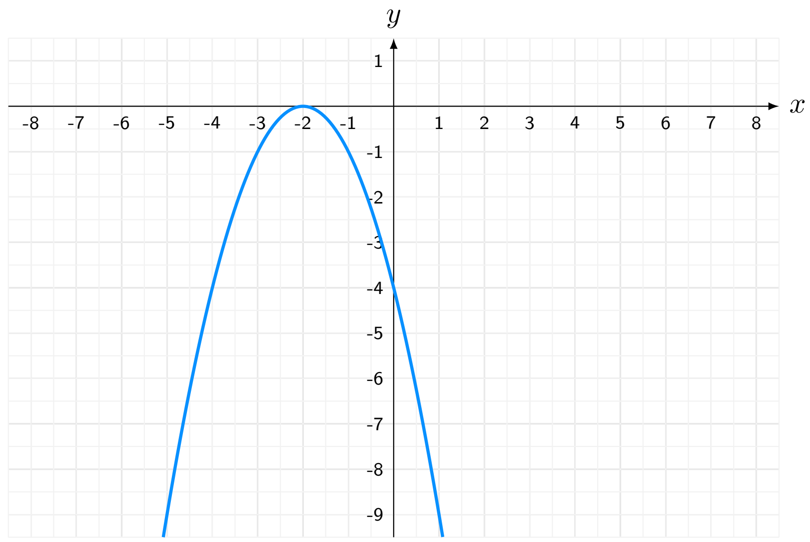
b) (i) $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$

x	$y = f(x)$
2	1
1 e 3	2
	4
	9
	10



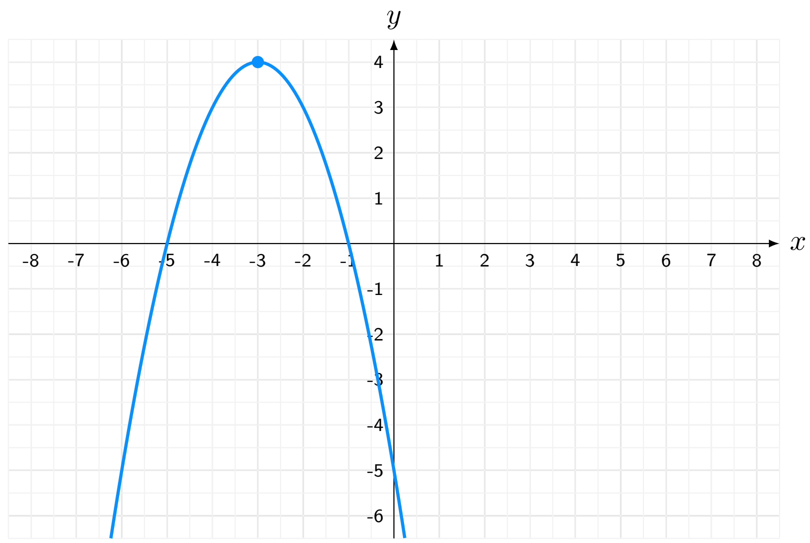
(ii) $g(x) = -(x+2)^2 = -x^2 - 4x - 4$

x	$y = g(x)$
	0
	-1
	-4
	-5
	-9



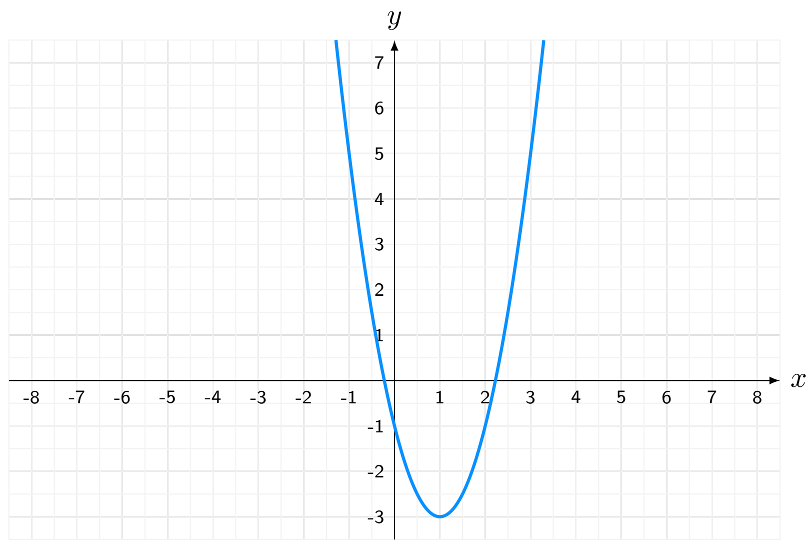
(iii) $T(x) = -(x+3)^2 + 4 = -x^2 - 6x - 5$

x	$y = T(x)$
-3	4
	3
	0
	-2
	-5



(iv) $b(x) = 2(x-1)^2 - 3 = 2x^2 - 4x - 1$

x	$y = b(x)$
1	
0 e 2	
	0
	5
	7



c) Considere a função $f(x) = a(x-h)^2 + k$, definida para qualquer valor de x real, em que a, h e k são números reais, e a é diferente de zero. Analise cada afirmação abaixo, tomando como base os exemplos anteriores. Caso julgue-a verdadeira, dê alguma justificativa e caso considere-a falsa, dê um exemplo que a contradiga.

Não se preocupe se não conseguir responder a todas! Apenas registre seus pensamentos.

(i) As imagens de $h-1$ e $h+1$ são sempre iguais.

(ii) O gráfico de f apresenta simetria em relação à reta vertical $x = h$.

(iii) Quando $k = 0$, a interseção entre o gráfico e o eixo x é um único ponto.

(iv) O gráfico sempre cruza ou toca o eixo x.

(v) O gráfico cruza o eixo y no ponto $(0, k)$.

(vi) A imagem da função f é todo o conjunto dos números reais.

(vii) O gráfico de f está sempre totalmente acima ou totalmente abaixo da reta $y = k$, tocando-lhe apenas em um único ponto.

Atividade 8

Três expressões, uma função

O lucro L (em milhares de reais), que a companhia Paraboll tem ao vender seu principal item é modelado como uma função quadrática do preço deste item, p expresso em reais. As três expressões seguintes são representações algébricas diferentes para a mesma função lucro, denotada por $L(p)$:

(1) $L(p) = -2p^2 + 24p - 54$

(2) $L(p) = -2(p-3)(p-9)$

(3) $L(p) = -2(p-6)^2 + 18$

a) Qual das três expressões equivalentes para $L(p)$ revela mais rapidamente os preços que dão lucro zero, sem que seja preciso manipulá-la algebricamente?

b) Encontre os preços que dão lucro zero.

Objetivos Específicos

Três expressões, uma função

- Reconhecer formas diferentes de escrever uma mesma função quadrática, percebendo vantagens e desvantagens de cada uma.
- Escolher de maneira conveniente dentre as diferentes expressões.

c) Qual das três expressões equivalentes para $L(p)$ revela mais rapidamente o lucro quando o preço é zero?

d) Determine o lucro quando o preço é zero.

e) Qual das três expressões equivalentes para $L(p)$ revela mais rapidamente o preço que produz o maior lucro possível?

f) Encontre o preço que produz o maior lucro possível.

g) Esboce o gráfico da função $L(p)$, indicando o domínio considerado e os pontos encontrados nos itens anteriores.

Organizando — Função Quadrática

Uma função cujo domínio é todo o conjunto dos números reais, isto é, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei é dada por uma expressão polinomial do segundo grau (maior expoente igual a 2) é chamada de **função quadrática**.

Função quadrática — Definição

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática se, e somente se, podemos encontrar números reais $a \neq 0$, b e c, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

As expressões polinomiais de grau 2 podem aparecer de diversas maneiras, e a partir de todas elas, após algumas manipulações algébricas, é possível chegar à forma padrão que enunciamos acima. Abaixo estão alguns exemplos de expressões de diferentes funções quadráticas:

$y = x(x-1)$	$y = \dfrac{(x+4)(x-7)}{2}$	$y = \sqrt{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$
$y = 9 - (x-3)^2$	$y = 4 - 6(x+5)(x+\pi)$	$y = 7x^2 - 1$

Vamos ver algumas propriedades importantes das funções quadráticas e suas representações. Apesar de todas serem funções quadráticas, e poderem ser expressas na forma $y = ax^2 + bx + c$, algumas propriedades ficam mais evidentes dependendo da maneira como a expressão é escrita.

Comecemos com o exemplo mais simples: $f(x) = x^2$. O gráfico de $f(x) = x^2$ é a curva, cuja forma lembra a letra U, representada na Figura 1.12.

Sugestões e discussões

Três expressões, uma função

- O importante neste momento **não** é como fazer as manipulações algébricas para transitar entre as três maneiras de representar o trinômio, isso será explorado mais adiante, por outras atividades. Mas pode ser interessante questionar os estudantes, durante a discussão das soluções, quais transições eles consideram possíveis ou "mais fáceis". Espera-se que eles tenham segurança em fazer '(3) para (1)' e '(2) para (1)'.
- Estimule que seus estudantes justifiquem as escolhas para o domínio e consequentes imagens para a função. Faz sentido considerar preços de venda negativos, $p < 0$? O que isto significa? O que quer dizer lucro negativo, $L(p) < 0$?

Solução

Três expressões, uma função

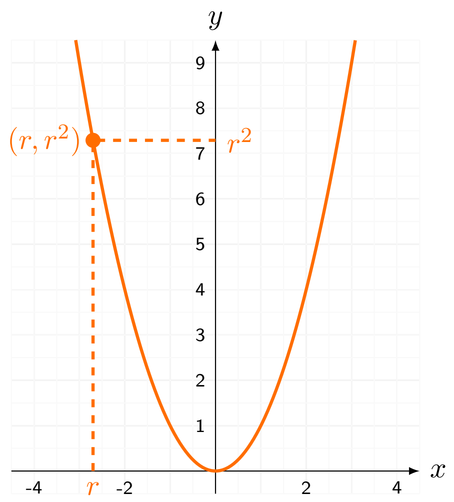


Figura 1.12

Esta curva tem algumas propriedades geométricas específicas que a classificam como um caso particular de um grupo de curvas planas chamadas **parábolas**. Mais adiante, neste capítulo, voltaremos a falar das parábolas.

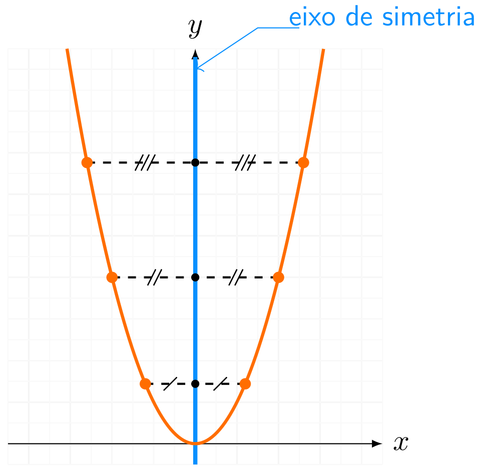


Figura 1.13

Dentre as características geométricas deste gráfico podemos destacar a simetria axial, ou seja, existe uma reta (eixo) em relação ao qual a curva é simétrica. No caso do gráfico da função $f(x) = x^2$ (Figura 1.13), o eixo de simetria é o eixo y (que também pode ser descrito como a reta $x = 0$). Essa simetria é comprovada pela sequência de igualdades:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

O gráfico indica um comportamento decrescente para valores negativos de x, e um comportamento crescente para valores positivos de x (Figura 1.14):

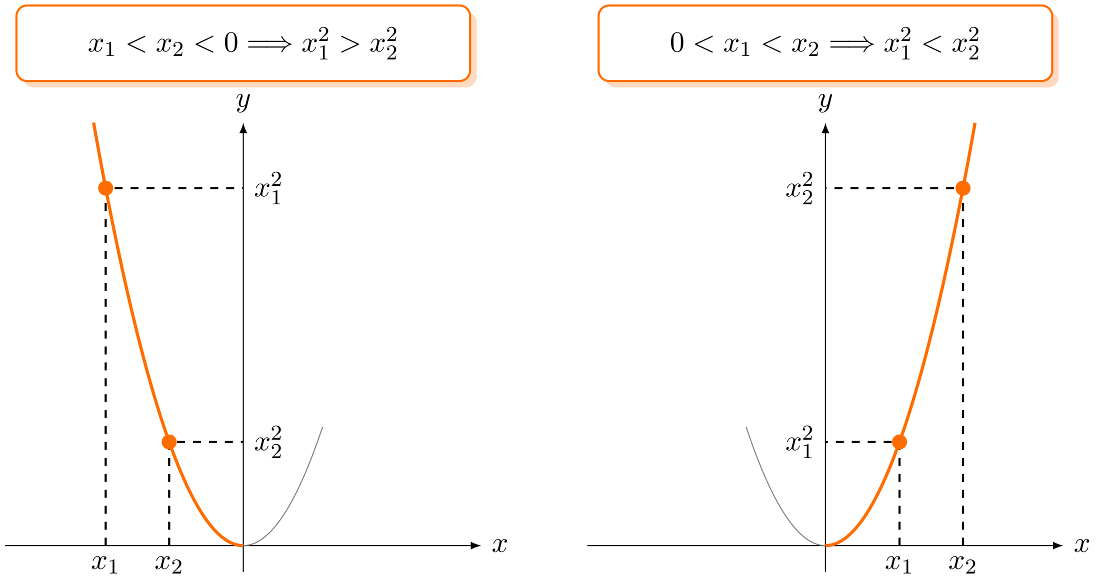


Figura 1.14

O ponto onde há a mudança de comportamento é chamado de **vértice da parábola**. Neste caso, ele corresponde ao ponto $(0,0)$, que também é o único ponto em que o gráfico intersecta o eixo x.

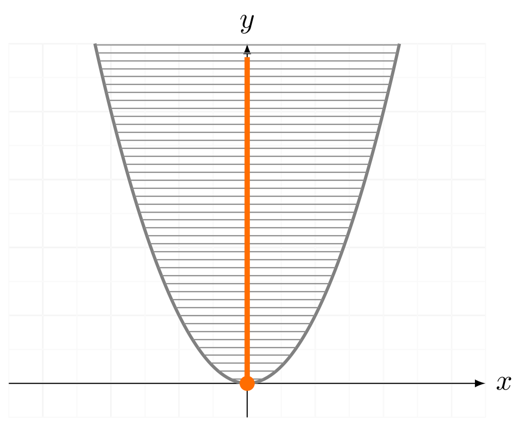


Figura 1.15

A Figura 1.15 sugere que a imagem da função $f(x) = x^2$ é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero, isto é, o intervalo $[0, +\infty[$.

De fato, para qualquer valor $p \geqslant 0$, resolvendo a equação

$$x^2 = p,$$

encontramos $x = \sqrt{p}$ e $x = -\sqrt{p}$, que são os elementos do domínio que têm imagem p.

Enquanto que, para valores negativos de p, a mesma equação acima não admite solução real. Assim, podemos afirmar que o conjunto imagem desta função é, de fato, o conjunto $[0, +\infty[$.

Expressões do tipo $y = ax^2$

Vamos considerar, agora, expressões do tipo $f(x) = ax^2$, com $a > 0$. A curva obtida como gráfico também pertence à família das parábolas e tem as mesmas propriedades que enunciamos anteriormente: eixo de simetria, intervalos de crescimento, conjunto imagem e vértice da parábola.

A principal diferença é que agora as imagens de todos os elementos ficam multiplicadas por a. O gráfico, então, será uma parábola que tem o vértice na origem e passa pelos pontos $(-1, a)$ e $(1, a)$. Assim, em uma mesma janela de visualização (mesmos valores mínimo e máximo da variável independente), quanto maior o valor de a, "mais fechada" será a parábola, e por outro lado, quanto mais próximo de zero o valor de a, "mais aberta" estará a parábola (ver Figura 1.16).

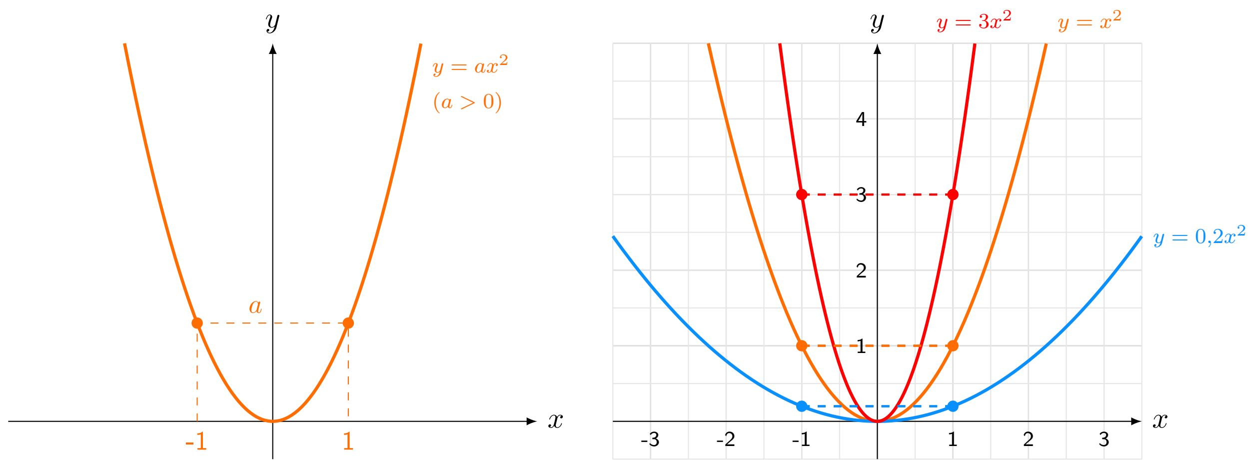
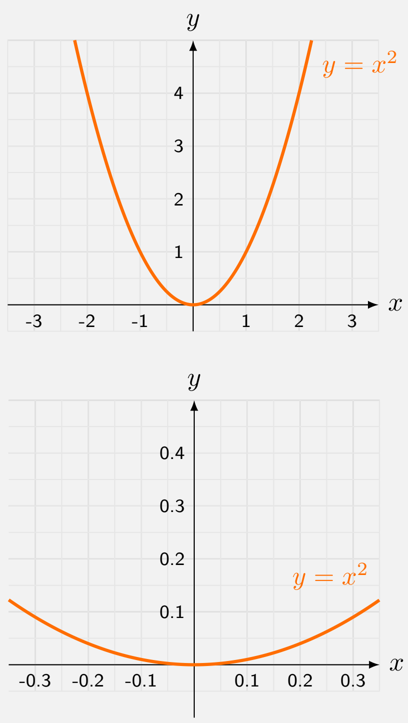


Figura 1.16

Para valores negativos de a, a parábola sofrerá uma reflexão em torno do eixo x e mudará de concavidade, ficando voltada para baixo. Neste caso, o gráfico será crescente para valores negativos de x e decrescente após o vértice, que permanece no ponto $(0,0)$. A imagem, então, será o intervalo]-∞, 0] (Figura 1.17).

Atenção para o uso das expressões "mais abertas" e "mais fechadas". Elas somente fazem sentido quando consideradas relativas a uma janela de visualização fixada. Na figura abaixo, a função $y = x^2$ vista em duas janelas diferentes: em uma parece "fechada" e em outra parece "aberta".



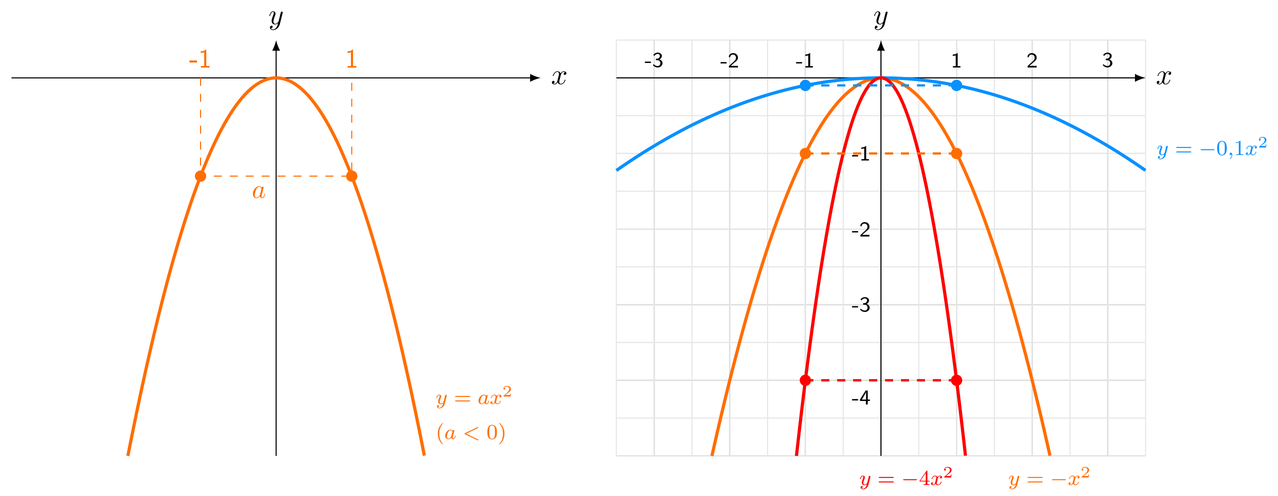


Figura 1.17

No código QR a lado ou no link https://www.desmos.com/calculator/ywdqiwvgup é possível interagir com uma construção e visualizar o efeito do coeficiente a na função $y = ax^2$.

Expressões do tipo $f(x) = (x - h)^2$

O gráfico de funções do tipo $f(x) = (x - h)^2$, como vimos na Atividade 7, podem ser obtidos fazendo-se um deslocamento horizontal no gráfico de $y = x^2$. De forma que o vértice da parábola que antes estava na origem, agora, passa a ser o ponto $(h, 0)$. De fato, $f(h) = (h - h)^2 = 0$, e para qualquer valor de $x \neq h$ tem-se $f(x) > 0$ (Figura 1.18).

Como houve mudança no vértice, mais especificamente na abscissa do vértice, os intervalos de crescimento e decrescimento também se alteram: a função é decrescente para $x < h$ e crescente para $x > h$.

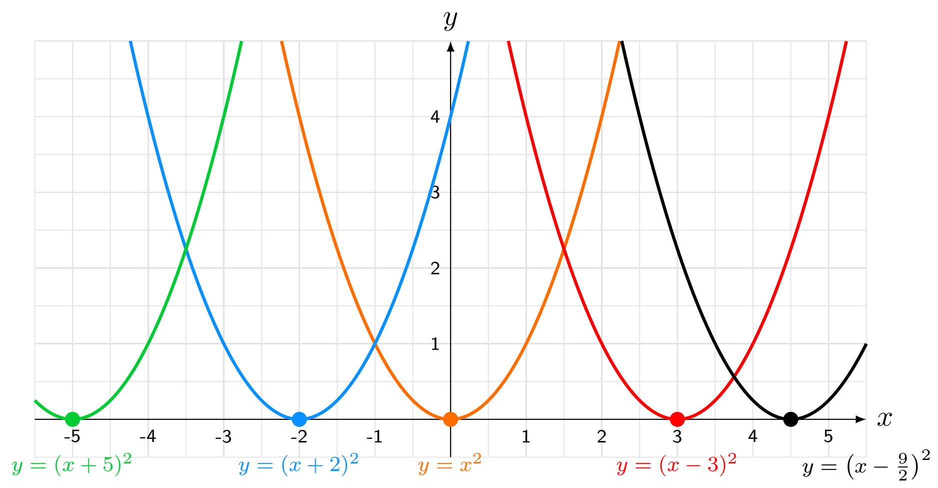


Figura 1.18

No código QR a lado ou no link https://www.desmos.com/calculator/9q7lzxdizs é possível interagir com uma construção e visualizar o efeito do parâmetro h na função $y = (x-h)^2$.

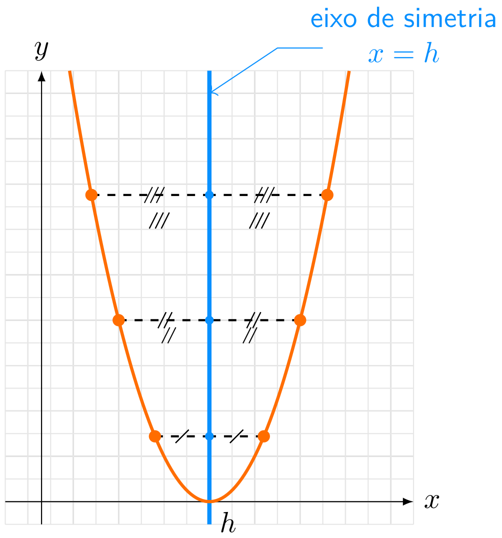


Figura 1.19

O eixo de simetria também sofrerá um deslocamento, e passa a ser a reta vertical $x = h$. Neste caso, os pontos do eixo das abscissas equidistantes do vértice terão a mesma imagem:

$$f(h+\alpha) = ((h+\alpha)-h)^2 = \alpha^2 \quad \text{e}$$
$$f(h-\alpha) = ((h-\alpha)-h)^2 = (-\alpha)^2 = \alpha^2$$

Como só houve deslocamento horizontal, o conjunto imagem será o mesmo de $y = x^2$, ou seja, $[0, +\infty[$ (Figura 1.20, à esquerda):

De fato, dado um valor p real, para saber se há elementos do domínio que o têm como imagem, basta resolver a equação quadrática

$$(x-h)^2 = p$$

Temos que,

$$(x-h)^2 = p \iff x - h = \pm\sqrt{p} \iff x = h - \sqrt{p} \text{ ou } x = h - \sqrt{p}.$$

Observe que, a equação tem solução se, e somente se, $p \geqslant 0$ e que para $p \neq 0$, os dois valores encontrados são equidistantes de h.

É interessante observar também que nestes casos o ponto de interseção com o eixo y deixa de ser a origem. Para calcular suas coordenadas, basta calcular $f(0) = (0-h)^2 = h^2$, e obtemos o ponto $(0, h^2)$ (Figura 1.20, à direita).

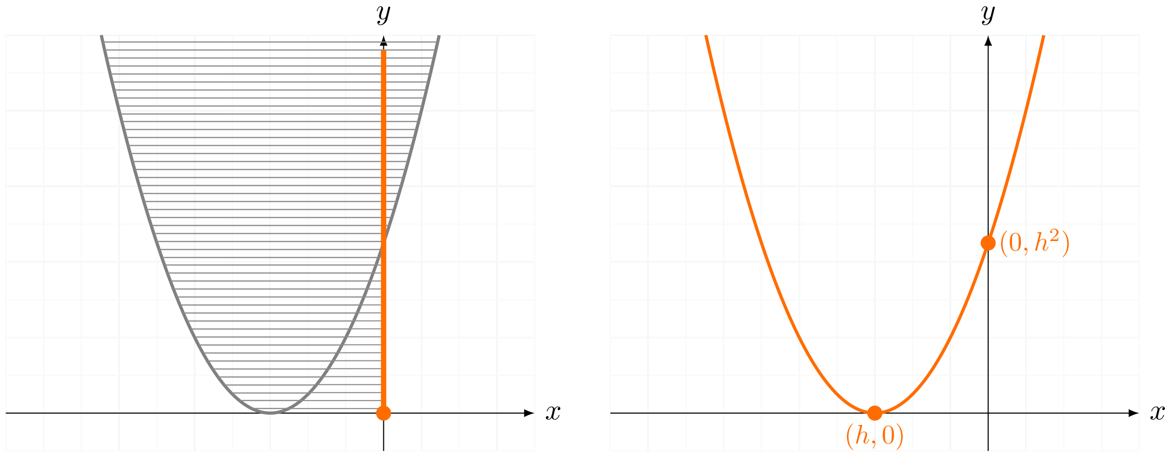


Figura 1.20

Expressões do tipo $f(x) = x^2 + k$

No código QR a lado ou no link https://www.desmos.com/calculator/y3nmkliusq é possível interagir com uma construção e visualizar o efeito do coeficiente k na função $y = x^2 + k$.

Os gráficos de funções quadráticas do tipo $y = x^2 + k$, em que $k \in \mathbb{R}$, quando comparados com $y = x^2$, ficam deslocados verticalmente: para cima quando $k > 0$, e para baixo quando $k < 0$ (Figura 1.21).

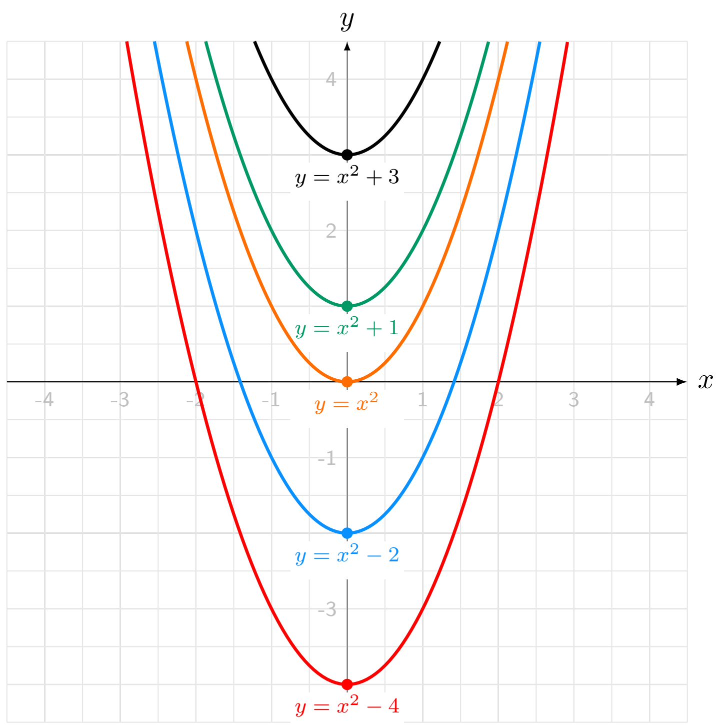


Figura 1.21

Esse deslocamento provoca uma alteração apenas na ordenada do vértice da parábola que deixa de ser a origem e passa a ser o ponto $(0, k)$. Isso tem efeito, também, no conjunto imagem da função que passa a ser o intervalo dos números reais maiores que ou iguais a k, ou seja, o intervalo $[k, +\infty[$ (Figura 1.22).

Um fenômeno diferente ocorre, nesses casos, em relação aos zeros da função, isto é, as interseções do gráfico com o eixo x:

Para valores positivos de k, o gráfico não intersecta o eixo das abscissas: isso significa que 0 não faz parte do conjunto imagem da função, ou seja, que a função não tem zeros. Por outro lado, para $k < 0$, a parábola vai intersectar o eixo x em dois pontos. Para identificá-los precisamos resolver a equação $x^2 + k = 0$:

$$x^2+k = 0 \iff x^2 = -k \iff x = -\sqrt{-k} \text{ ou } x = \sqrt{-k}.$$

Atenção: pode parecer estranho ver $-k$ dentro do símbolo de raiz quadrada, contudo, estamos resolvendo essa equação no contexto em que $k < 0$, e, portanto, $-k$ é um número positivo. Por exemplo, para $k = -81$, a equação é $x^2 - 81 = 0 \iff x = \pm\sqrt{-(-81)} = \pm 9$.

Assim, os zeros da função $f(x) = x^2 + k$, existem apenas quando $k < 0$ e são os pontos do eixo x de abscissa $-\sqrt{-k}$ e $\sqrt{-k}$ (Figura 1.22).

Não há alteração no eixo de simetria e nem nos intervalos de crescimento e decrescimento. Permanecem os mesmos que os da função $y = x^2$.

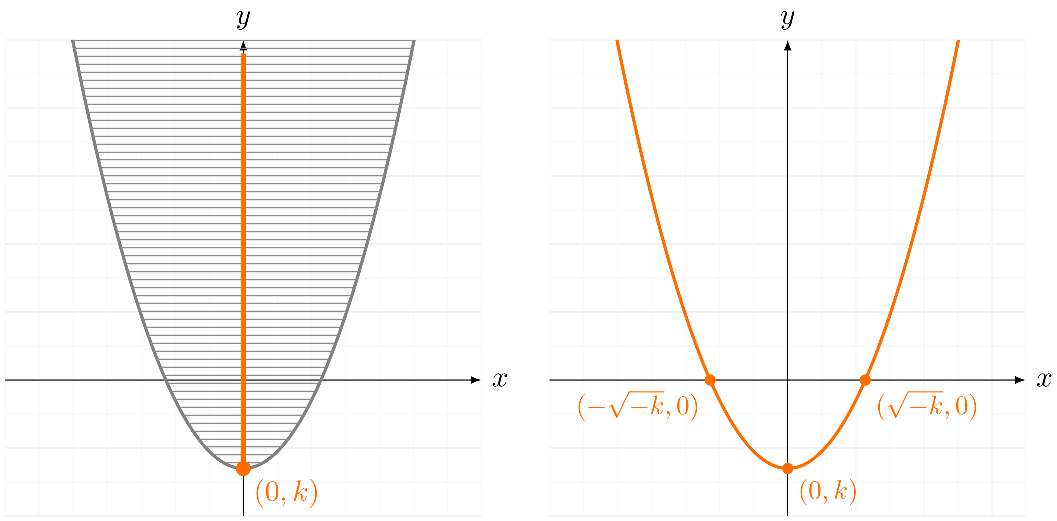


Figura 1.22

Expressões do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Podemos juntar os três últimos tipos em uma mesma expressão. Conhecidos os valores de a, h e k, para se obter o esboço do gráfico de $f(x) = a(x-h)^2 + k$, podemos aplicar uma transformação de cada vez à parábola que é o gráfico de $y = x^2$, como mostra a Figura 1.23: começamos com $y = x^2$, fazemos a translação horizontal para obtermos $y = (x-h)^2$. Em seguida, multiplicamos todas as imagens por a, e obtemos o gráfico de $y = a(x-h)^2$. Por fim, somamos k aos valores das ordenadas, e chegamos ao gráfico desejado.

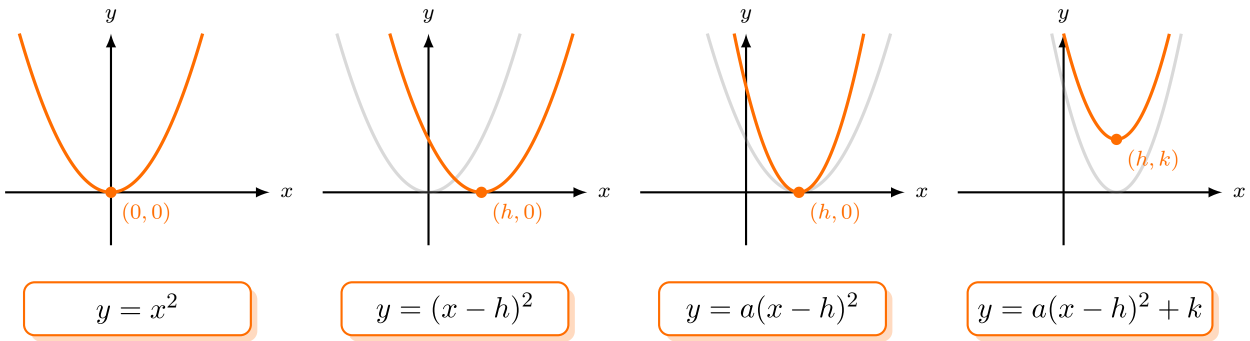


Figura 1.23: $y = a(x-h)^2 + k$: transformações no gráfico de $y = x^2$ para $h > 0, a > 1$ e $k > 0$.

No código QR a lado ou no link https://www.desmos.com/calculator/gcrbiy3fkc é possível interagir com uma construção e visualizar o efeito dos coeficientes a, h e k na função $y = a(x-h)^2 + k$

Na Figura 1.24 temos alguns exemplos de expressões quadráticas na forma $y = a(x-h)^2$ e seus respectivos gráficos.

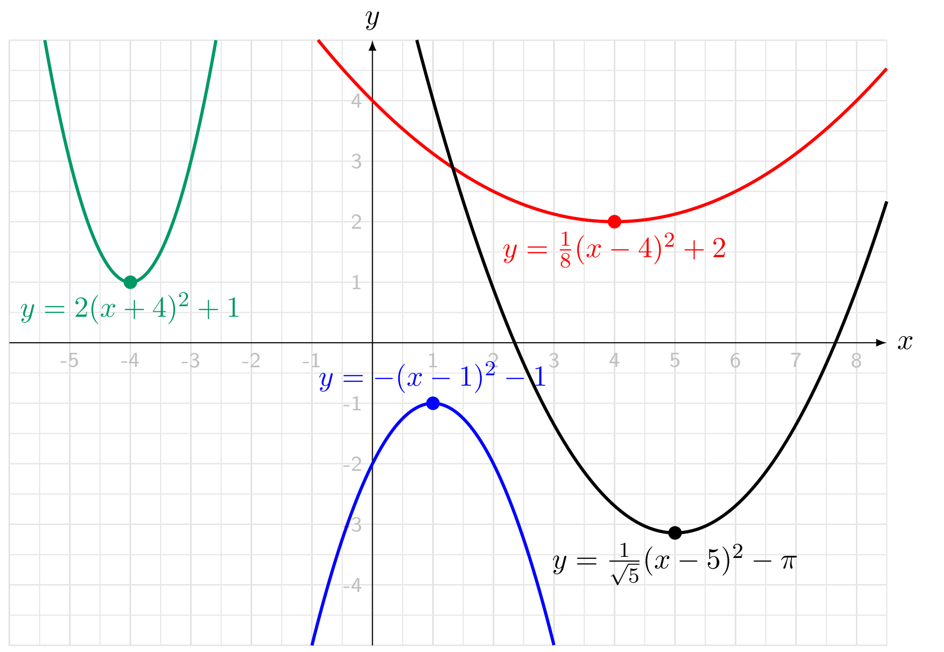


Figura 1.24

Assim, combinando as propriedades que vimos anteriormente teremos

$f(x) = a(x-h)^2 + k$	$a > 0$	$a < 0$
Concavidade	voltada para cima	voltada para baixo
Vértice da parábola	(h, k)	
Eixo de simetria	$x = h$	
Conjunto Imagem	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Intervalo de crescimento	$[h, +\infty[$	$]-\infty, h]$
Intervalo de decrescimento	$]-\infty, h]$	$[h, +\infty[$
Zeros da função	$x = h - \sqrt{\frac{-k}{a}}$ e $x = h + \sqrt{\frac{-k}{a}}$	
	As expressões estão definidas apenas para $k \leqslant 0$	As expressões estão definidas apenas para $k \geqslant 0$
Interseção com o eixo y	$(0, ah^2 + k)$	

Tabela 1.4

Expressões do tipo $f(x) = a(x-p)(x-q)$

Quando a expressão da função quadrática é dada da forma $y = a(x-p)(x-q)$ com $a \neq 0$, p e q reais, os zeros da função quadrática ficam mais evidentes, uma vez que, rapidamente identificamos

$$f(x) = 0 \iff a(x-p)(x-q) = 0 \overset{a\neq 0}{\iff} x-p=0 \text{ ou } x-q=0 \iff x=p \text{ ou } x=q.$$

Daí, concluímos que os zeros são $x = p$ e $x = q$. É simples também identificar a interseção com o eixo y, pois $f(0) = a(-p)(-q) = apq$.

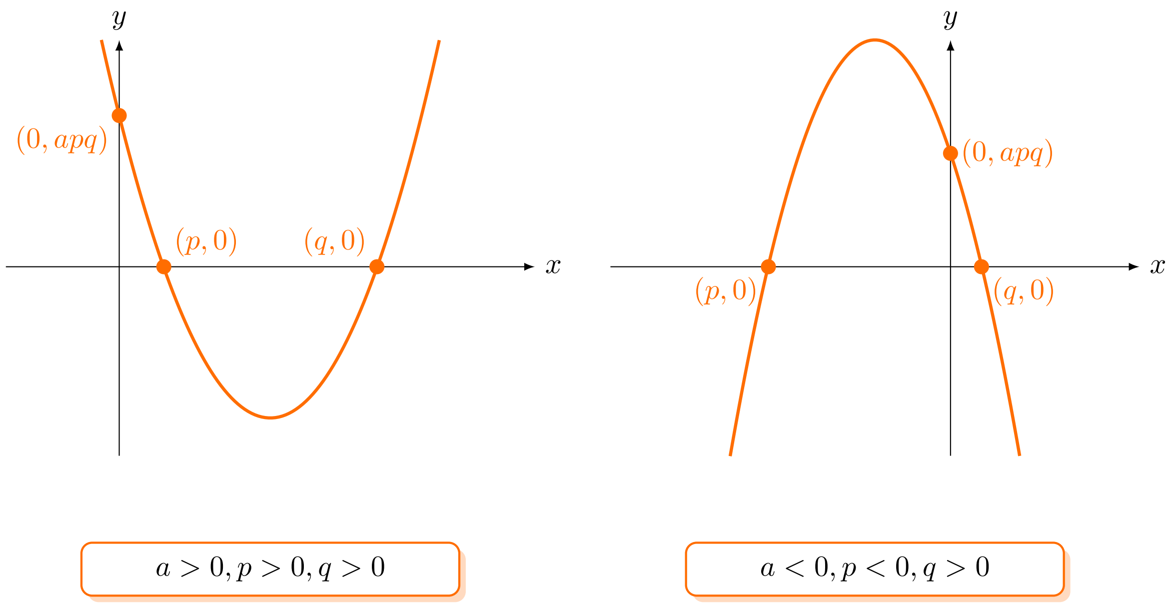


Figura 1.25

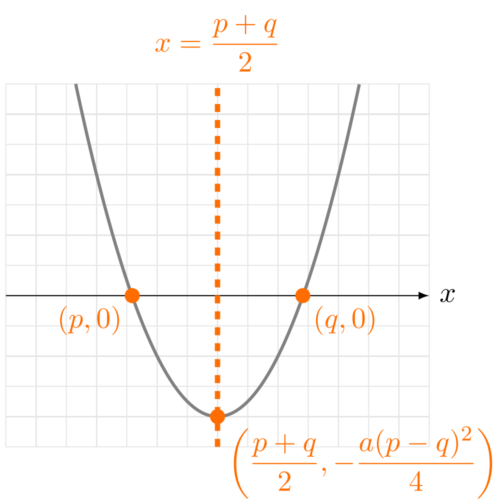


Figura 1.26

Vimos anteriormente que, por causa da simetria da parábola, a abscissa do vértice da parábola é o ponto do eixo x que está equidistante de quaisquer dois valores que tenham a mesma imagem. Como neste caso conhecemos dois valores que têm imagem zero — os zeros da função — podemos concluir que a abscissa do vértice da parábola será a média aritmética desses dois valores, ou seja, $\frac{p+q}{2}$ (Figura 1.26).

Para saber a ordenada, podemos usar a própria expressão da função e calcular a imagem:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p+q}{2}\right) &= a\left(\frac{p+q}{2} - p\right)\left(\frac{p+q}{2} - q\right) \\ &= a\left(\frac{q-p}{2}\right)\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= -\frac{a}{4}(p-q)^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, as coordenadas do vértice, neste caso, são dadas, em função dos parâmetros a, p e q como:

$$\left(\frac{p+q}{2}, -\frac{a(p-q)^2}{4}\right).$$

No código QR a lado ou no link https://www.desmos.com/calculator/uiyxeqvggk é possível interagir com uma construção e visualizar o efeito dos coeficientes a, p e q na função $y = a(x-p)(x-q)$.

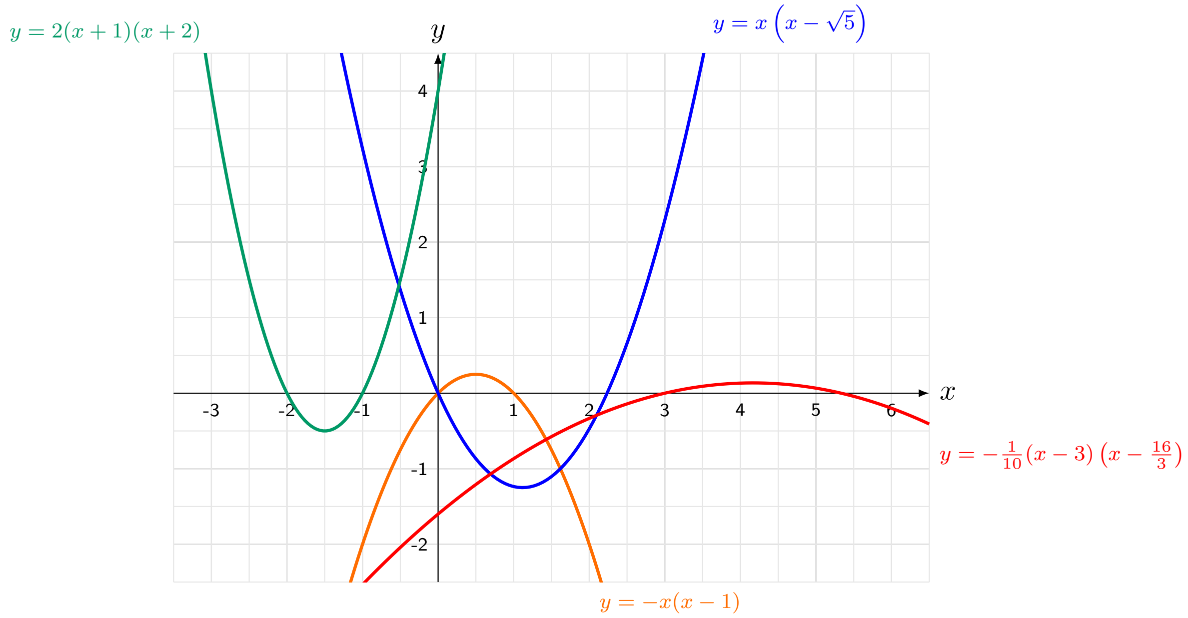


Figura 1.27

Expressões do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sejam $a \neq 0$, b e c números reais quaisquer. Expressar a função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com os monômios de mesmo grau todos agrupados, facilita a identificação de que, de fato, estamos diante de uma expressão algébrica polinomial de grau 2 para tal função.

Vejamos como identificar as características do gráfico a partir dos coeficientes.

Assim como antes o sinal do coeficiente a está ligado à concavidade da parábola: para cima se $a > 0$ e negativa se $a < 0$.

Outra característica de visualização imediata é o ponto de interseção com o eixo y. Se a expressão é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então para determinar tal ponto calculamos

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c,$$

o que nos leva ao ponto $(0, c)$ do eixo das ordenadas (Figura 1.28).

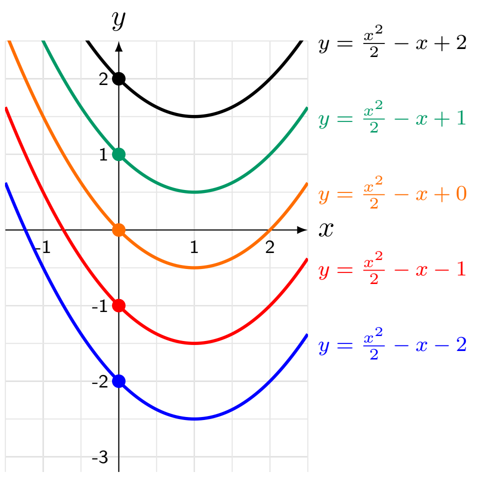


Figura 1.28

Por causa da simetria da parábola, pode haver outro elemento do domínio cuja imagem é igual a c. Para descobri-lo basta resolver a equação:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=c &\quad\iff\\
ax^2+bx=0 &\quad\iff\\
x(ax+b)=0 &\quad\iff\\
x=0 \quad \text{ou} \quad ax+b=0 &\quad\iff\\
x=0 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Nos exemplos da figura Figura 1.28, $y=\dfrac{x^2}{2}-x+c$, temos que $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{(-1)}{\frac{1}{2}}=2$.

Ou seja, em todos eles, o outro elemento do domínio que tem imagem c é $x=2$.

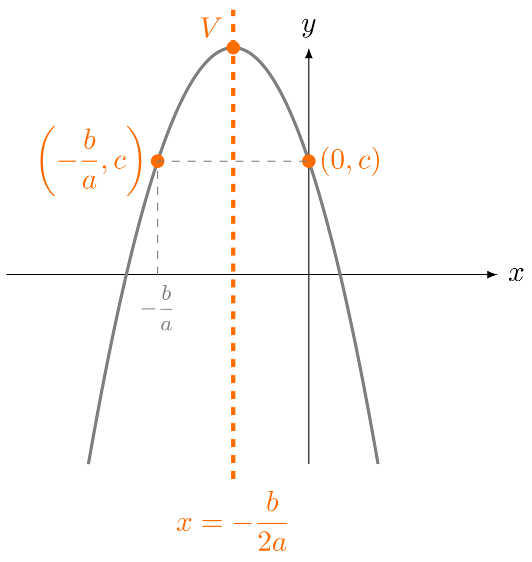


Figura 1.29

Sendo assim, $f(0)=f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=c$.

O eixo de simetria da parábola será, assim, a reta vertical composta pelos pontos cuja abscissa é a média aritmética destes dois valores: $x=0$ e $x=-\dfrac{b}{a}$. Ou seja,

$$x=\frac{0+\left(-\frac{b}{a}\right)}{2}=-\frac{b}{2a}.$$

Como o vértice, V da parábola está sobre o eixo de simetria, sua primeira coordenada está determinada, $-\dfrac{b}{2a}$ (Figura 1.29).

Para conhecer a ordenada do vértice, basta calcular a imagem de $-\dfrac{b}{2a}$ pela função f:

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c\\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{2a}+c\\
&= \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\\
&= \frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}\\
&= \frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Assim, as coordenadas do vértice são $V=\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

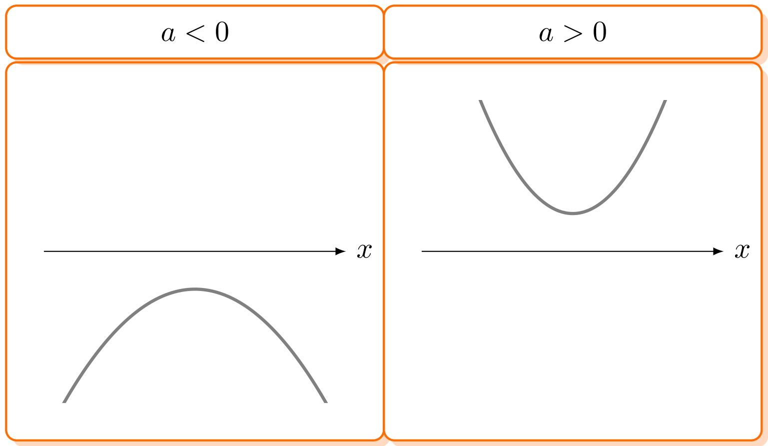
Por fim, para encontrarmos os zeros da função precisamos resolver a equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$. Usando a fórmula resolutiva por radicais (popularmente conhecida como fórmula de Bháskara), chegamos à expressão:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta=b^2-4ac.$$

Ela pode representar nenhum, um ou dois valores distintos de x, a depender do valor do discriminante Δ:

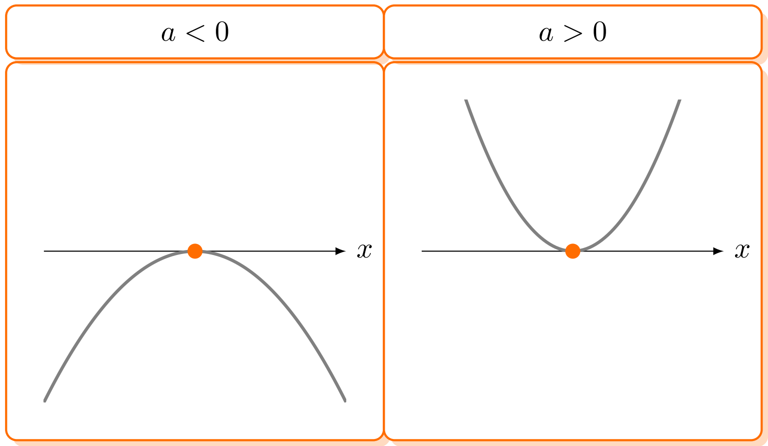
- $\Delta < 0$

Se o discriminante é negativo, sua raiz quadrada não está definida, logo não há valores de x possíveis, ou seja, o gráfico da função, neste caso, não intersecta o eixo x, a função não tem zeros.



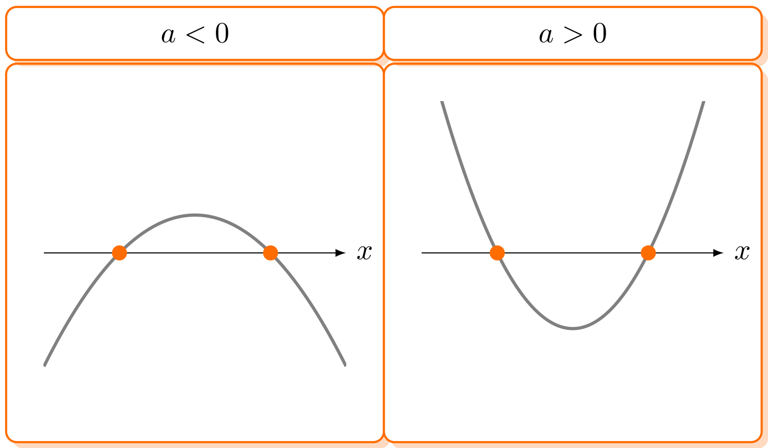
- $\Delta = 0$

Para $\Delta = 0$, ambos $\pm\sqrt{\Delta}$ serão iguais a zero, nos levando a um único valor de x. Ou seja, o gráfico tangencia o eixo x, revelando um único zero para a função.



- $\Delta > 0$

Para $\Delta > 0$, teremos duas raízes do polinômio, correspondendo a dois zeros da função. Graficamente, duas interseções do gráfico com o eixo das abscissas.



No código QR a lado ou no link https://www.desmos.com/calculator/0wex78fhiq é possível interagir com uma construção e visualizar o efeito dos coeficientes a, b e c na função $y = ax^2 + bx + c$.

Atividade 9

Correspondências

Cada um dos cartões de A a R abaixo contém alguma representação de uma função quadrática. Perceba que os cartões A, F e G são representações diferentes da mesma função quadrática. Identifique outros grupos (de 3 ou 4 cartões) que podem ser formados com os cartões restantes, ou seja, quais das representações abaixo correspondem a uma mesma função.

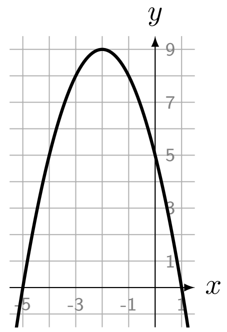
A

$$y = (x-2)^2 + 1$$

B

$$y = (x-3)(x+1)$$

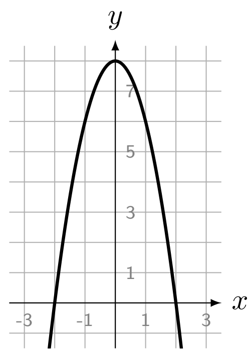
C



D

$$y = 9 - (x+2)^2$$

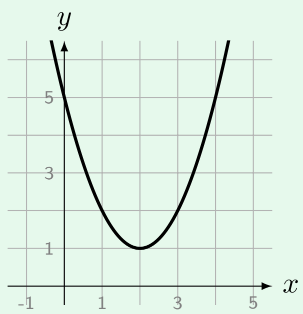
E



F

$$y = x^2 - 4x + 5$$

G



H

$$y = -2x^2 + 8$$

I

$$y = -x^2 - 4x + 5$$

Objetivos Específicos

Correspondências

- Relacionar maneiras de representar a função quadrática: expressões polinomiais equivalentes e seus correspondentes gráficos.

Sugestões e discussões

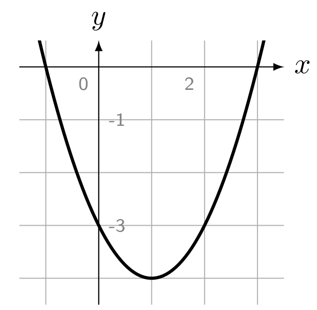
Correspondências

- A ideia da atividade é explorar as características gráficas e algébricas e relacioná-las. Por exemplo, ao encontrar um gráfico que tem a concavidade para baixo relacionamos com as expressões que têm coeficiente de x^2 negativo. Ao perceber que o gráfico corta o eixo y no ponto $(0,5)$, procuramos expressões reduzidas que tenham termo independente igual a 5, e assim por diante.
- Discutir com os estudantes porque algumas funções na tabela têm apenas três representações e outras quatro representações. Isto está ligado ao fato do polinômio ter ou não ter raízes reais.

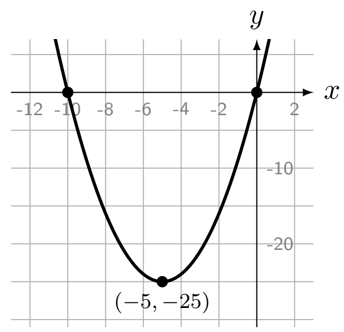
Solução

Correspondências

B, K, M, O / C, D, I, L / E, H, Q / J, N, P, R.

J	K	L
$y = x^2 + 10x$		$y = -(x+5)(x-1)$

M	M	O
$y = x^2 - 2x - 3$	$y = x(x+10)$	$y = (x-1)^2 - 4$

P	Q	R
$y = (x+5)^2 - 25$	$y = -2(x-2)(x+2)$	

Atividade 10

Parábolas

Observe os pontos marcados nos três planos cartesianos da Figura 1.30.

a) Para cada um dos três planos cartesianos, escreva uma expressão para a função quadrática cujos gráfico passa pelos três pontos marcados pontos marcados.

b) Uma estudante usou, para a função do plano 1, a expressão na forma $y = a(x-p)(x-q)$, para a função do plano 2, a expressão do tipo $y = ax^2 + bx + c$ e para do plano 3, a forma $y = a(x-h)^2 + k$. Quais foram as expressões obtidas por ela?

c) Quais são os pontos de interseção de cada um dos três gráficos com o eixo y?

Objetivos Específicos

Parábolas

- Deduzir a expressão da função quadrática a partir de três pontos dados no plano: o vértice e dois zeros.
- Utilizar as expressões nas três formas apresentadas: $y = a(x-p)(x-q)$,

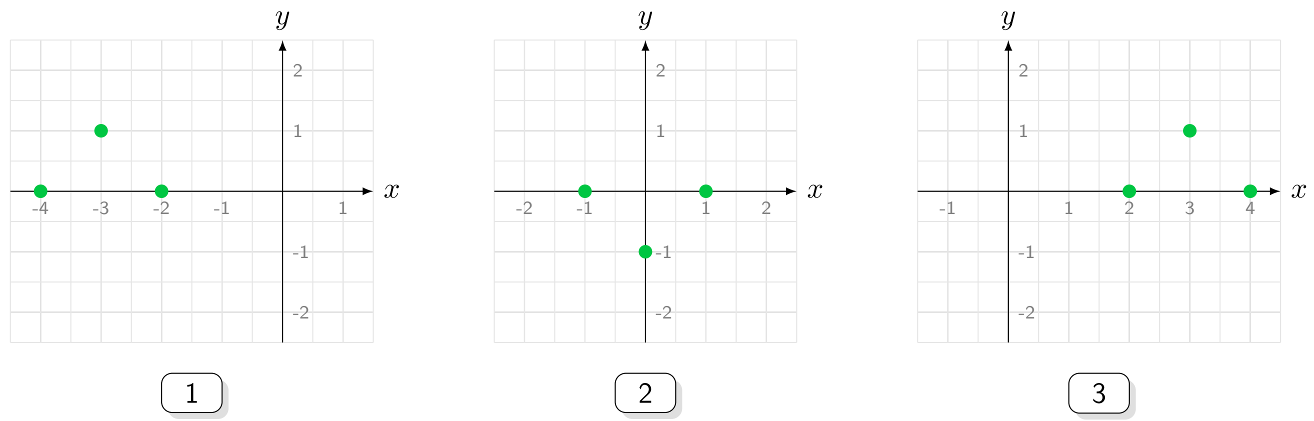


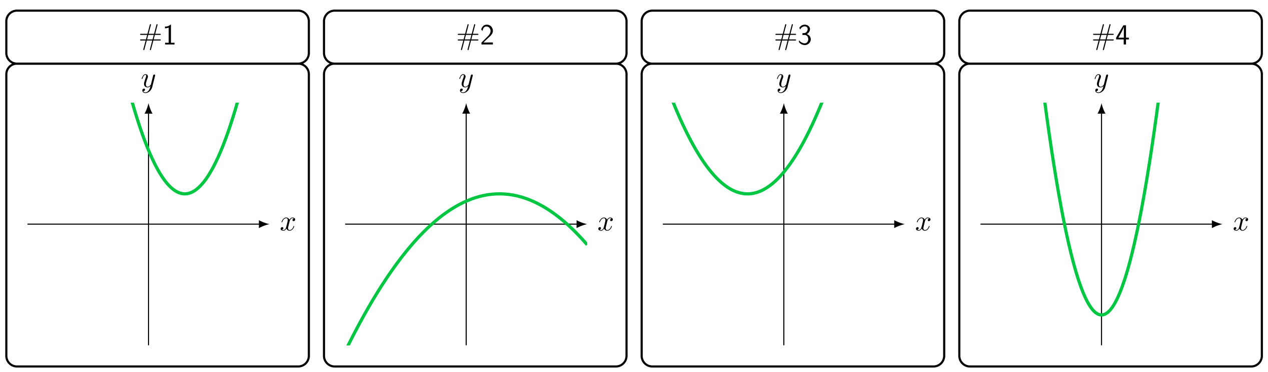
Figura 1.30

Atividade 11

Cara a Cara

Trata-se de um jogo para ser jogado em dupla. O objetivo é descobrir a imagem do seu adversário fazendo apenas perguntas cujas respostas sejam **SIM** ou **NÃO**. A dinâmica é a seguinte:

- Cada jogador escolhe uma imagem e não revela a seu adversário. Esta imagem é a que deverá ser descoberta por ele.
- Após um sorteio, o primeiro jogador começa fazendo uma pergunta que o ajude a descobrir qual é a imagem do adversário. As perguntas devem ser formuladas de forma que as únicas respostas possíveis sejam SIM ou NÃO. Por exemplo: o gráfico tem concavidade para cima? A função tem dois zeros?
- O objetivo das perguntas é ir eliminando, pouco a pouco, do conjunto de imagens aquelas que não têm as mesmas características da carta do seu adversário, até que se possa fazer um palpite seguro. Por exemplo: se na sua vez o jogador pergunta "o gráfico tem concavidade para cima?", e a resposta é SIM, então ele deve riscar da sua lista todos os gráficos que têm concavidade para baixo. Mas, caso a resposta seja NÃO, ele deve riscar aqueles que têm concavidade para cima.
- Cada jogador pergunta apenas uma vez e pode eliminar imagens apenas na sua vez.
- Se o jogador já tem um palpite, este deve ser feito no lugar da pergunta. Assim, se faz um palpite errado, a vez passa para o outro jogador imediatamente.
- O vencedor da partida é aquele que descobre a imagem do seu adversário primeiro.



$y = a(x-h)^2 + k$, $y = ax^2 + bx + c$.

Sugestões e discussões

Parábolas

- Provavelmente cada estudante escolherá a maneira de chegar à expressão com a qual teve mais facilidade e usar a mesma para chegar às três expressões e no item (b), eles são convidados a pensar de uma maneira distinta da que pensaram no item (a). Contudo, a ideia aqui não deve estar focada na manipulação algébrica para conversão entre as representações (embora possa ser também explorada), mas sim na dedução a partir das propriedades gráficas.

Solução

Parábolas

-

Objetivos Específicos

Cara a Cara

- Aplicar o vocabulário associado a características do gráfico da função quadrática: vértice, concavidade, zeros, interseção com os eixos, etc.

Sugestões e discussões

Cara a Cara

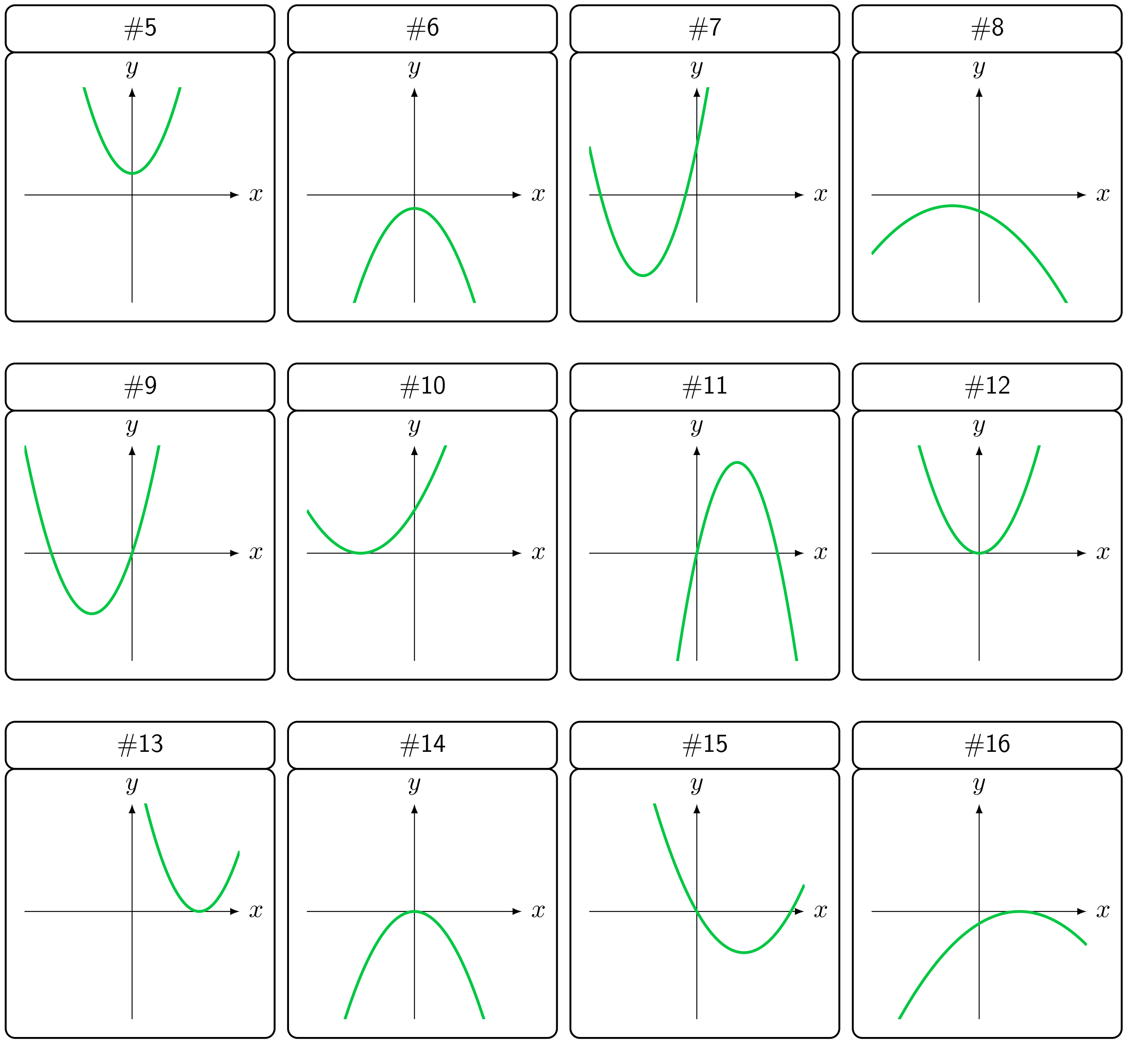
- Observe como os estudantes se apropriam dos termos aprendidos.
- Considere fazer uma rodada com a turma inteira contra você. Você escolhe uma imagem secreta, a turma vai fazendo as perguntas, e você vai orientando sobre que imagens eliminar a cada resposta dada.
- Pode ser interessante fazer este jogo com cartas (impressas ou copiadas à mão pelos próprios estudantes). Neste caso é necessário repetir o conjunto de 16 cartas 3 vezes: Um para cada jogador e outro para que possam sortear a carta secreta.
- Este jogo é inspirado no famoso jogo "Cara a Cara" e pode ser adaptado para diversos outros contextos.

Tem uma versão do jogo, um pouco mais complicada, em que cada jogador escolhe duas cartas secretas em vez de uma, e responde às perguntas baseado nas duas cartas. Assim, se a pergunta é “o gráfico tem concavidade para cima?”, a resposta será SIM se pelo menos uma delas tem esta característica. Ou seja, somente responderá não se nenhuma das duas tiver a concavidade para cima.

Solução

Cara a Cara

Não há solução para esta atividade.



A equivalência entre a primeira e segunda linhas da sequência de igualdades que calcula o valor de d só acontece por que as expressões envolvidas são sempre positivas ou zero: $(r^2-d)^2+r^2$ é uma soma de quadrados e $r^2+d>0$ pois é a soma de um termo ao quadrado com $d>0$.

Em geral, quando lidamos com equações envolvendo radicais, precisamos ser cautelosos ao “elevar ambos os membros da equação ao quadrado”. Esta ação pode conduzir a soluções que não verificam a equação original. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-4} &= x-6 & \Longrightarrow\\
(\sqrt{x-4})^2 &= (x-6)^2 & \Longleftrightarrow\\
x-4 &= x^2-12x+36 & \Longleftrightarrow\\
x^2-13x+40 &= 0 & \Longleftrightarrow\\
x = 8 &\text{ ou } x=5
\end{aligned}$$

A solução $x=8$ verifica a equação original, mas a

Você Sabia?

A parábola faz parte de uma família de curvas conhecidas como “curvas cônicas” que são obtidas a partir da interseção entre um plano e um cone circular reto, infinito e de duas folhas (Figura 1.31).

Dependendo da posição do plano em relação ao eixo e as retas geratrizes do cone teremos curvas diferentes: círculos, elipses, hipérboles e parábolas (Figura 1.32).

Quando o plano é perpendicular ao eixo central do cone a curva cônica obtida é um **círculo**.

Se inclinamos ligeiramente o plano em relação ao eixo, obtemos a curva chamada de **elipse**.

Se inclinamos ao ponto de deixar o plano paralelo às retas geratrizes do cone, obtemos a curva denominada **parábola**.

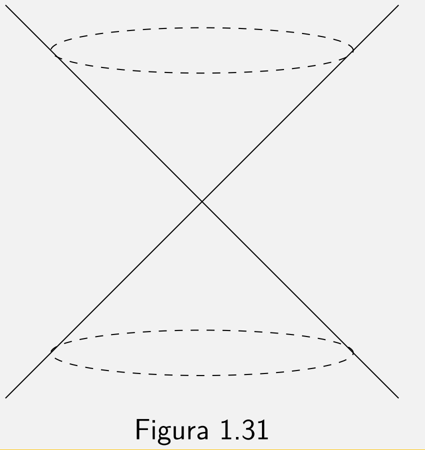


Figura 1.31

Finalmente, se inclinamos um pouco mais, o plano passará a intersectar as duas partes do cone, gerando a última integrante das curvas cônicas, a **hipérbole**.

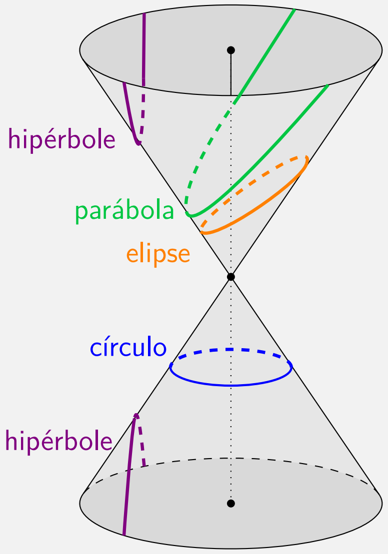


Figura 1.32

Cada uma delas tem suas características geométricas próprias que permitem que as definamos até de forma independente do cone: por exemplo, o círculo é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes a um ponto definido, chamado de centro.

Não pretendemos aqui abordar as particularidades de todas, queremos apenas destacar algumas características da parábola, que afirmamos ser o gráfico da função quadrática.

A parábola

Para definirmos esta curva precisamos de uma reta (que será chamada de **diretriz da parábola**) e um ponto que não pertence a ela (que chamaremos de **foco da parábola**).

A parábola, então é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância do foco e da diretriz.

Essa definição tem diversas consequências físicas interessantes que faz da parábola uma curva bastante presente em diversos lugares: antenas parabólicas, espelhos curvos, estruturas de pontes, movimentos acelerados etc.

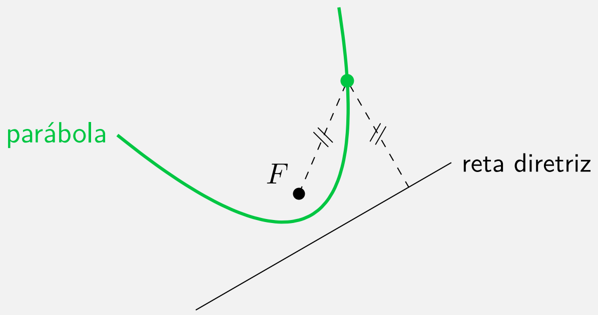
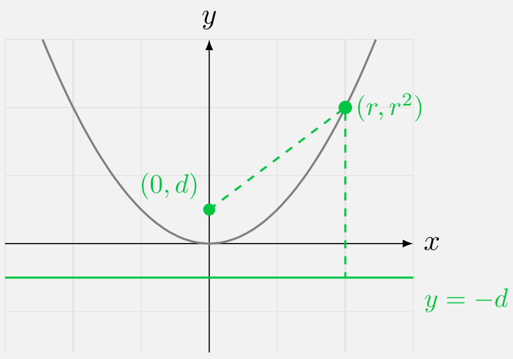


Figura 1.33

Mas será que a curva que obtemos como gráfico da função $y = x^2$ é mesmo uma parábola, no sentido da definição acima?



Para investigar essa questão vamos supor que existam um foco e uma reta diretriz, embora não conheçamos suas localizações exatas.

Bem, como a parábola $y = x^2$ tem o eixo y como seu eixo de simetria, vamos começar supondo que o foco é um ponto desse eixo, ou seja, que é da forma $F = (0, d)$ com $d > 0$.

O fato do vértice (que está na origem) ser equidistante do ponto e da diretriz, podemos supor também que a reta tem equação $y = -d$.

solução $x = 5$ não. Neste caso, a primeira linha apenas "implica" a segunda, não são equivalentes.

Escolhendo um ponto qualquer da parábola ele vai ter coordenadas (r, r^2), para algum $r \in \mathbb{R}$. O que precisamos fazer é calcular as distâncias (até o foco e até a diretriz) e igualá-las, para ver se é possível que exista o suposto d.

Para a distância até o foco, basta usarmos o teorema de Pitágoras no triângulo sombreado na Figura 1.34, com catetos de medida r e $r^2 - d$.

Assim a distância do ponto da parábola até o suposto foco é

$$\sqrt{r^2 + (r^2 - d)^2}.$$

A outra distância é mais simples de calcular, pois basta somar a altura do ponto da parábola, r^2, com a distância da suposta diretriz ao eixo x ,d, resultando em

$$r^2 + d.$$

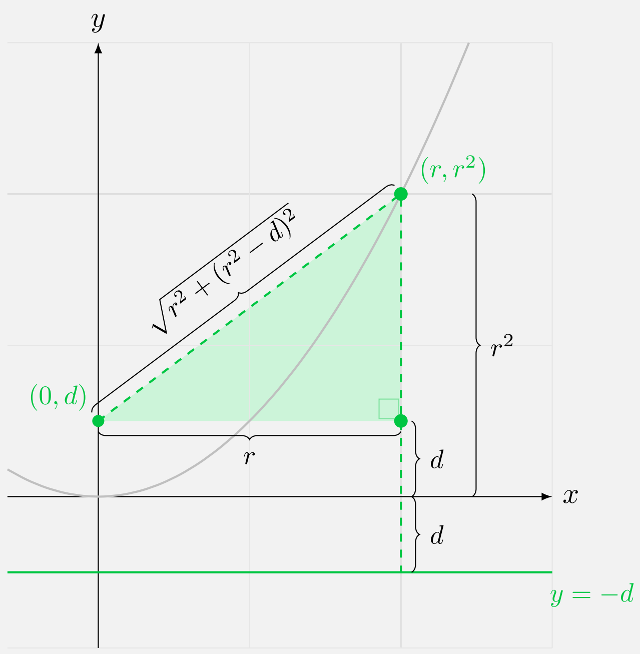


Figura 1.34

Igualando as duas expressões teremos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(r^2-d)^2 + r^2} &= r^2 + d \quad \text{(elevando ao quadrado)} && iff\\
(r^2-d)^2 + r^2 &= (r^2+d)^2 \quad \text{(expandindo as potências)} && \Longleftrightarrow\\
(r^2)^2 - 2r^2d + d^2 + r^2 &= (r^2)^2 + 2r^2d + d^2 \quad \text{(cortando os termos semelhantes)} && \Longleftrightarrow\\
-2r^2d + r^2 &= 2r^2d && \Longleftrightarrow\\
r^2 - 4r^2d &= 0 && \Longleftrightarrow\\
r^2(1-4d) &= 0 \quad \text{(essa igualdade vale para } r \neq 0) && \Longleftrightarrow\\
1 - 4d &= 0 && \Longleftrightarrow\\
d &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Como $d = \dfrac{1}{4}$ verifica, de fato, a primeira equação, concluímos assim que o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz é a reta $y = -\dfrac{1}{4}$.

Não vamos entrar em mais detalhes aqui, mas é possível, com um procedimento semelhante calcular o foco e a diretriz para as outras expressões quadráticas.

Acesse os códigos QR ao lado ou links https://www.desmos.com/calculator/dkxry07bwn e https://www.desmos.com/calculator/se5x0tamie para duas construções interativas sobre o foco e diretriz das parábolas

	foco	diretriz
$y = x^2$	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$y = -\frac{1}{4}$
$y = ax^2$	$\left(0, \frac{1}{4a}\right)$	$y = -\frac{1}{4}$
$y = a(x-h)^2$	$\left(h, \frac{1}{4a}\right)$	$y = -\frac{1}{4}$
$y = ax^2 + k$	$\left(0, \frac{1}{4a} + k\right)$	$y = k - \frac{1}{4}$
$y = a(x-h)^2 + k$	$\left(h, \frac{1}{4a} + k\right)$	$y = k - \frac{1}{4}$

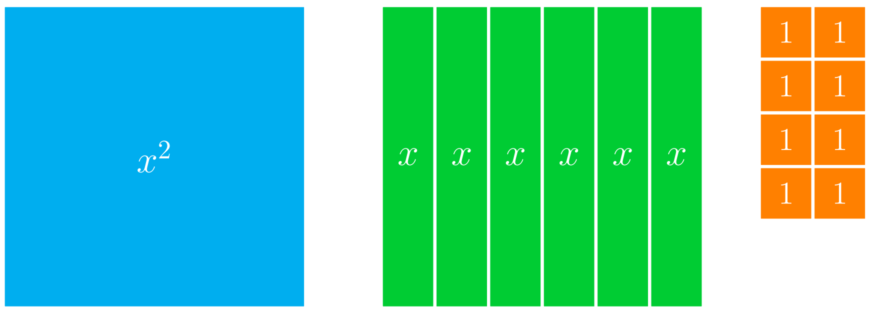
Tabela 1.5

Saiba Mais — **Completar e Fatorar Quadrados**

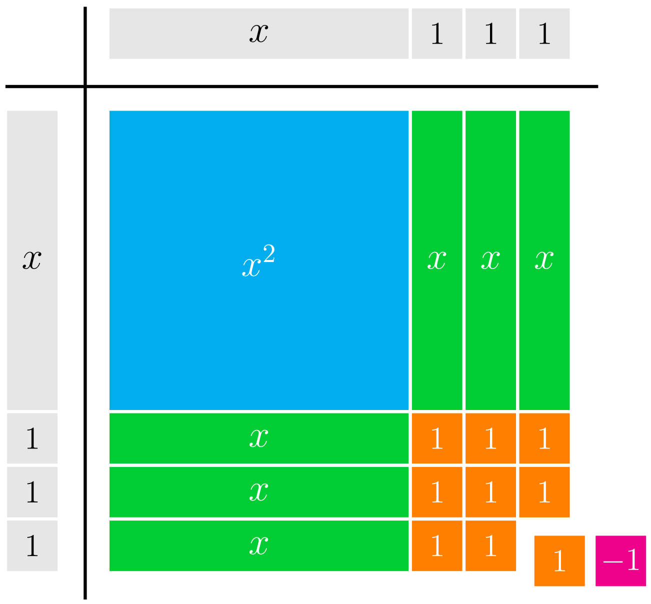
Atividade 12

Completando o quadrado

Observe os diagramas e quadros das figuras abaixo



$$x^2 + 6x + 8$$



	x	$+3$	
x	x^2	$+3x$	
$+3$	$+3x$	$+8+1$	-1

$$x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 1$$

Objetivos Específicos

Completando o quadrado

- Aplicar a técnica de completamento de quadrados para transformar uma expressão do tipo $y = x^2 + bx + c$ para a forma $y = (x-h)^2 + k$.

Sugestões e discussões

Completando o quadrado

- Esta atividade (e a próxima) visa explorar uma técnica muito comum (e também muito útil) em matemática: completamento de quadrados. Elas não são essenciais no desenvolvimento do capítulo, e por isso você pode optar por não fazê-las com os estudantes, mas ajudam na construção de ideias que facilitam a conversão entre as diversas representações algébricas do trinômio quadrático.
- Espera-se que com os itens (a) e (b) os estudantes façam um fechamento a partir do reconhecimento de um padrão e sejam capazes de resolver o item (c);
- Uma versão online desta atividade está disponível em https://mathigon.org/polypad/Dyqij0Ljp4vfOw
- MEXER!! outra construção geométrica $(x-3)^2 + 6x - 9 = x^2$ (com sobreposição);

- Estamos, com essa atividade, fazendo um paralelo entre as propriedades algébricas dos polinômios na indeterminada x e um modelo geométrico (de áreas) que dá suporte. Não se pretende por exemplo, dentro do modelo, substituir x por valores reais. A utilização de figuras com área -1 ou $-x$ é uma generalização que pode ser confirmada pela álgebra;
- Pode ser interessante fazer uma construção algébrica em paralelo. Algo como:

Sabemos que $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, então quando nos deparamos com a expressão $x^2 - 6x + 7$, podemos somar e subtrair 9 e ficamos com $x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 = x^2 - 6x + 9 - 2$, e daí concluimos que $x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$;

Solução

Completando o quadrado

Nota 1

Objetivos Específicos

Fatorando o trinômio

- Aplicar a fatoração de diferença de quadrados para transformar uma expressão do tipo $y = x^2 + bx + c$ para a forma $y = (x-p)(x-q)$.
- Identificar os casos em que é possível fazer essa fatoração a partir de relações entre os parâmetros.

Sugestões e discussões

Fatorando o trinômio

- Esta atividade depende da anterior. Após completar o quadrado o estudante é convidado a aplicar um caso de fatoração (diferença de dois quadrados) para chegar a uma nova apresentação do trinômio. Assim como na atividade anterior, não haverá grandes perdas, caso essa atividade não seja feita.
- Explicar porque o a=1.
- Explicar o caso em que partimos de $(x-h)^2 + k$.

Solução

Fatorando o trinômio

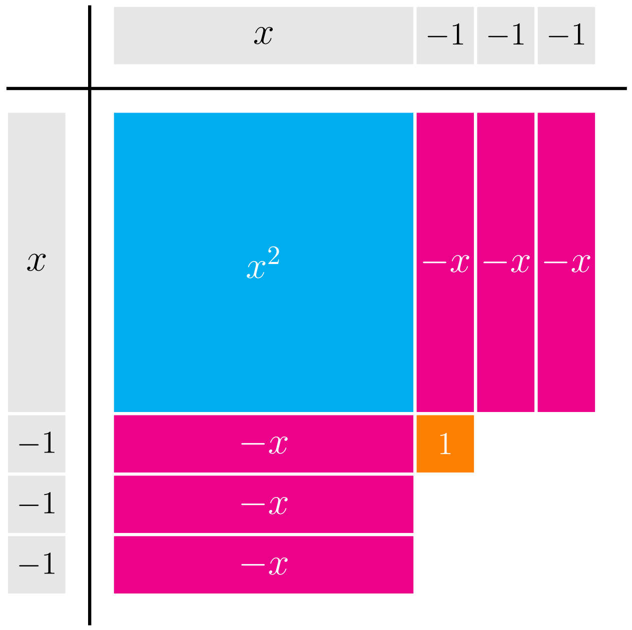
a) Faça o mesmo para os trinômios:

(i) $x^2 + 8x + 12$;

(ii) $x^2 + 10x + 16$;

(iii) $x^2 + 2x + 4$.

b) Como podemos aplicar o mesmo procedimento para o trinômio $x^2 - 6x + 1$?



	x	-3
x		
-3		

$x^2 - 6x + 18 =$

c) Observe, no esquema abaixo, o que podemos fazer para o trinômio $x^2 + 3x + 1$. Faça o mesmo para $x^2 + 5x + 3$.

	x	$+\frac{3}{2}$	
x	x^2	$+\frac{3x}{2}$	
$+\frac{3}{2}$	$+\frac{3x}{2}$	$1 + \frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$

$$x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$x^2 + 5x + 3 =$

d) Generalize o procedimento para qualquer trinômio da forma $x^2 + bx + c$, em que b e c são números reais.

e) Aplique o resultado obtido no item (d) no trinômio $x^2 + \sqrt{2}\,x + 2$.

Atividade 13

Fatorando o trinômio

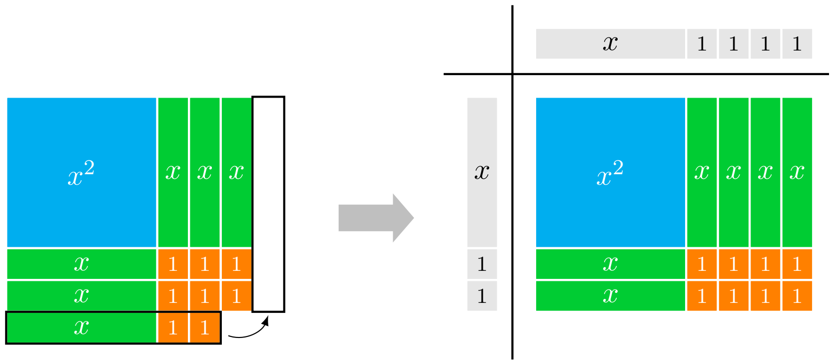
Quando nos deparamos com expressões do tipo diferença entre dois quadrados podemos fatorá-las como

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Veja abaixo o que acontece se aplicamos essa fatoração na expressão que obtivemos para o trinômio $x^2+6x+8 = (x+3)^2 - 1$ da atividade anterior:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 1 &= (x+3)^2 - 1^2 \\ &= ((x+3)-1)((x+3)+1) \\ &= (x+2)(x+4)\end{aligned}$$

Esse procedimento sugere uma reordenação dos blocos para uma forma retangular.



Contudo, nem sempre é possível realizar essa fatoração. Veja o que acontece quando completamos o quadrado na expressão $x^2 - 3x + 8$:

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 8 &= x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 8 \\ &= x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \frac{23}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}.\end{aligned}$$

Não chegamos a uma diferença de dois quadrados e, portanto, não é possível fatorar como sugerimos.

Agora é sua vez! Identifique em quais dos casos abaixo é possível aplicar o procedimento e, quando possível, fatore o trinômio.

a) $x^2 - 6x + 5$;

b) $x^2 + 4x + 1$;

c) $x^2 - 8x + 20$;

d) $x^2 - 3x + 2$;

e) Determine todos os valores reais de c para que seja possível fatorar o trinômio $x^2 - 10x + c$, de maneira análoga a acima.

f) Marque a alternativa correta:

Para o trinômio $x^2 + bx + c$, em que b e c são números reais quaisquer, é correto afirmar que podemos aplicar a fatoração anterior sempre que

a) $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4 = (x-5)(x-1)$;

b) $x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3 = \left(x + 2 - \sqrt{3}\right)\left(x + 2 + \sqrt{3}\right)$;

c) $x^2 - 8x + 20 = (x-4)^2 + 4$, impossível fatorar.

d)

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x-2)(x-1).$$

e) $x^2 - 10x + c = (x-5)^2 - (25-c)$. A condição é que $25 - c \geq 0$.

f) $x^2 + bx + c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} - c\right)$. A condição é que $\frac{b^2}{4} - c \geq 0$, e isto é equivalente a $\frac{b^2 - 4c}{4} \geq 0$, ou seja, que $b^2 - 4c \geqslant 0$. (alternativa (i)).

Contraexemplo do item (ii): quaisquer b, c;

Contraexemplo do item (iii): $b = 2, c = 2$, $b^2 - c = 2 > 0$, e $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$;

Contraexemplo do item (iv): quaisquer b, c.

i) $b^2 - 4c \geqslant 0$;

ii) $b^2 - 4c < 0$;

iii) $b^2 - c \geqslant 0$;

iv) $b^2 - c < 0$.

Para refletir

Em todos os exemplos feitos na Atividade 12 e na Atividade 13, os trinômios começavam com x^2.

Como podemos proceder para fatorar a expressão do trinômio nos casos em que o coeficiente de x^2 é diferente de 1?

Comece definindo uma estratégia para a expressão $3(x-1)^2 - 27$.

E agora, como podemos repetir os procedimentos desenvolvidos até agora para a expressão $4x^2 - 8x + 8$?

Nos casos em que $a \neq 1$, é preciso realizar um passo anterior, colocando a em evidência, para então aplicar os procedimentos desenvolvidos nesta seção.

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2 - 27 &= 3\left((x-1)^2 - 9\right) \\ &= 3\left((x-1)^2 - 3^2\right) \\ &= 3(x-1-3)(x-1+3) \\ &= 3(x-4)(x+2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x - 12 &= 4\left(x^2 - 2x - 3\right) \\ &= 4\left(x^2 - 2x + 1 - 4\right) \\ &= 4\left((x-1)^2 - 4\right) \\ &= 4(x-1-2)(x-1+2) \\ &= 4(x-3)(x+1). \end{aligned}$$

Caso considere adequado, desenvolva, com seus estudantes, a demonstração do caso geral:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right). \end{aligned}$$

Sendo as três últimas igualdades verdadeiras apenas quando $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

1.3 Problemas de Otimização

Neste último bloco exploramos problemas de otimização envolvendo funções quadráticas, ou seja, problemas que envolvem os valores máximo ou mínimo assumidos pelas imagens da função. É essencial que o estudante esteja familiarizado com o conceito de vértice da parábola e de como determinar suas coordenadas, entretanto, o estímulo à memorização das fórmulas não deve ser o foco. Em lugar disso, sugerimos recorrer à simetria do gráfico da função quadrática envolvida no problema: elementos do domínio com a mesma imagem são equidistantes da abscissa do vértice da parábola que é gráfico para tal função. Ressaltamos também a importância do contexto em cada situação e a busca de sentido para os cálculos realizados.

Na seção Para Saber +, trabalhamos brevemente algumas situações de aproximações com dados reais. Para essa seção, sugerimos o uso da calculadora gráfica online Desmos, que pode ser acessada no endereço http://www.desmos.com/calculator e também está disponível como aplicativo para *smartphones*.

Atividade 14

De volta ao barbante

Assim como na atividade "Retângulo de barbante" (Atividade 6), você tem um pedaço de barbante que está com as pontas unidas, formando um laço de comprimento 30 cm, e você deseja, com ele, construir um retângulo. Chamando a medida da base de x, você deduziu que a área do retângulo é dada pela função quadrática:

$$A(x) = x(15 - x), \quad \text{definida para } 0 \leqslant x \leqslant 15.$$

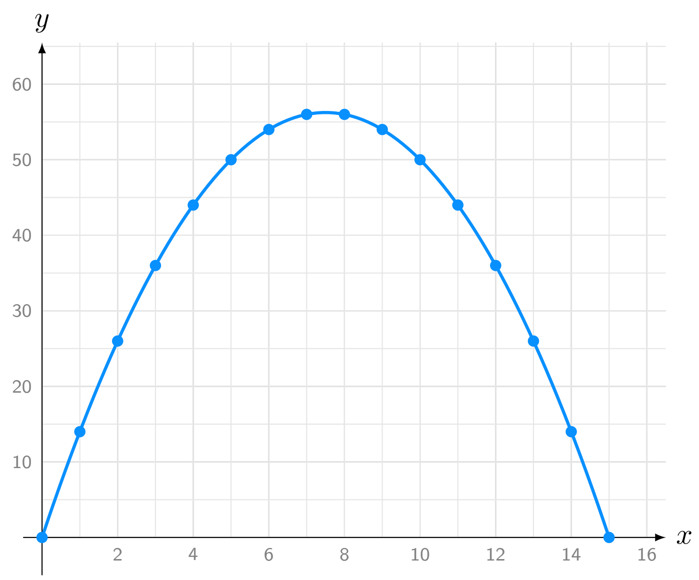


Figura 1.35

Além da expressão e do domínio da função área de variável independente x, na Figura 1.35 estão representados o gráfico e os pontos cujas abscissas são os valores inteiros do domínio. A pergunta que queremos responder aqui é:

"Dentre todos os retângulos possíveis com medida da base entre 0 e 15 cm e perímetro 30 cm, qual deles tem a maior área?"

a) Considerando apenas os retângulos que têm como medida da base um número inteiro, qual a maior área possível? Faça um esboço do(s) retângulo(s) que tem esta área.

b) Incluindo, agora, todos os números reais entre 0 e 15 como possíveis medidas em cm das bases dos retângulos, a maior área permanece a mesma calculada no item anterior? Explique seu raciocínio.

c) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que contém o gráfico de $A(x)$? Existe alguma relação destas coordenadas com o retângulo de área máxima?

d) Qual seria a área máxima se o perímetro fixo (comprimento do barbante) fosse igual a 12 cm?

e) Se, com outro barbante, a área em função da base fosse dada pela expressão $A(x) = -(x-5)^2 + 25$, qual seria a área máxima? Por que?

Objetivos Específicos

De volta ao barbante

- Identificar dentre retângulos de mesmo perímetro, aquele de área máxima.
- Correlacionar o valor máximo de uma função à ordenada do vértice da parábola que é gráfico para a função quadrática que modela o problema.
- Compreender que o valor máximo de uma função não depende apenas da sua expressão, mas também das restrições que o contexto impõe.

Sugestões e discussões

De volta ao barbante

- Há uma discussão que pode ser feita sobre $x = 0$ e $x = 15$ pertencerem ou não ao domínio da função. Nestes casos, por um lado, não há, de fato, um retângulo, já que um dos lados tem medida nula. Por outro lado, a presença destes valores pode ser uma extensão natural do fato de que podemos, pelo menos teoricamente, ter lados tão pequenos quanto se queira.
- O valor máximo ou mínimo de uma função pode se alterar dependendo do domínio que estamos considerando. Por exemplo, pode-se discutir sobre os valores mínimos quando se considera o 0 e 15 no domínio e quando não.
- No item (c), usamos a expressão "parábola que contém o gráfico de $A(x)$". Talvez a palavra **contém** cause estranheza mas esse uso se deve ao fato de que o domínio desta função é o intervalo $[0, 15]$, portanto o gráfico é apenas uma porção da parábola.

Solução

De volta ao barbante

a)

Objetivos Específicos

Arte minimalista

- Construir um modelo quadrático para um problema geométrico.

■ Definir o domínio da função a partir das limitações impostas pela situação.

■ Calcular o valor mínimo da função quadrática.

Sugestões e discussões

Arte minimalista

■ Abordando o problema geometricamente a expressão para a função $A(x)$ será uma soma de dois quadrados. Embora seja possível desenvolver os quadrados para chegar a uma expressão reduzida, esta ação não é estritamente necessária. Sabendo que a expressão determina a concavidade para cima e que $A(2) = A(14)$, pode-se deduzir que o mínimo será atingido na média entre esses valores, ou seja, em $x = 8$. E que o gráfico é simétrico em relação ao eixo $x = 8$.

Solução

Arte minimalista

a)

Objetivos Específicos

Bela tacada

■ Interpretar dados fornecidos por um modelo quadrático e dar-lhes significado no contexto do problema;

■ Relacionar a altura máxima com a ordenada do vértice da parábola que é o gráfico da função que modela o problema.

Sugestões e discussões

Bela tacada

■ Não está entre os objetivos da atividade justificar a dedução da fórmula, mas caso seus alunos já tenham estudado esse assunto em Física, aqui estão algumas informações úteis: os dados deste problema foram gerados a partir de aproximações de uma suposta tacada com velocidade escalar inicial de 58 m/s formando com a horizontal um ângulo de $14°$. A componente horizontal do movimento tem equação horária $x(t) = 56t$ e a componente vertical do movimento tem equação horária $y(t) = 14t - 5t^2$.

Atividade 15

Arte minimalista

Você tem um arame com 16 cm de comprimento e pretende cortá-lo em duas partes, para formar dois quadrados (não necessariamente iguais) para um projeto de artes.

a) Atribuindo a variável x para um dos pedaços, como podemos expressar o comprimento do outro pedaço de arame, em função de x?

b) Escreva uma função $A(x)$ que forneça a soma das áreas dos quadrados formados pelos dois pedaços de arame, em relação ao comprimento x.

c) Sabendo que o menor quadrado tem que ter área no mínimo 0,25 cm^2, determine o menor e o maior valor possível para x. Que imagens têm esses valores?

d) Trace o gráfico da função $A(x)$ para x variando no domínio encontrado e determine em que intervalos ela é crescente e em quais é decrescente.

e) Determine quanto devem medir os dois pedaços de arame para que a soma das áreas dos quadrados que eles formam seja a menor possível.

Atividade 16

Bela tacada

Quando um jogador de golfe faz uma tacada, a curva que corresponde à trajetória descrita pela bola no ar, de acordo com as teorias físicas do movimento, é bem aproximada por uma parábola se olhada a partir do ponto de vista adequado (Figura 1.36).

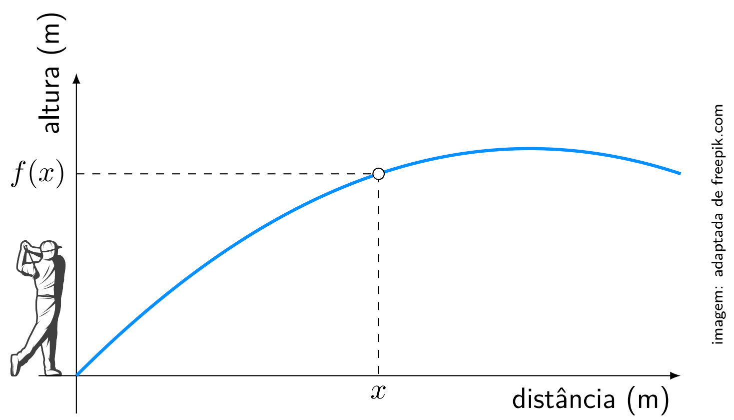


Figura 1.36

Após uma tacada durante uma partida, um software que analisa imagens concluiu que, colocando o ponto de lançamento na origem do sistema de coordenadas, a trajetória da bola pode ser descrita pelo gráfico da função

$$f(x) = -0{,}0016x^2 + 0{,}25x$$

em que x representa a distância horizontal percorrida e $f(x)$ é a altura (em metros) da bola quando ela está a x metros do ponto de lançamento.

a) Qual é a altura da bola quando está a 20 metros de distância horizontal do ponto de lançamento?

b) A parábola que descreve a trajetória passa pela origem, isso significa que $x = 0$ é um zero da função. Qual o outro zero de f? O que ele representa para a situação descrita?

c) É possível calcular a altura máxima atingida pela bola? Que característica do gráfico te permitiu fazer esse cálculo? Por que?

Organizando — Problemas de otimização

Já vimos anteriormente que, diferentemente da função afim, o conjunto imagem de uma função quadrática não é todo o conjunto dos números reais.

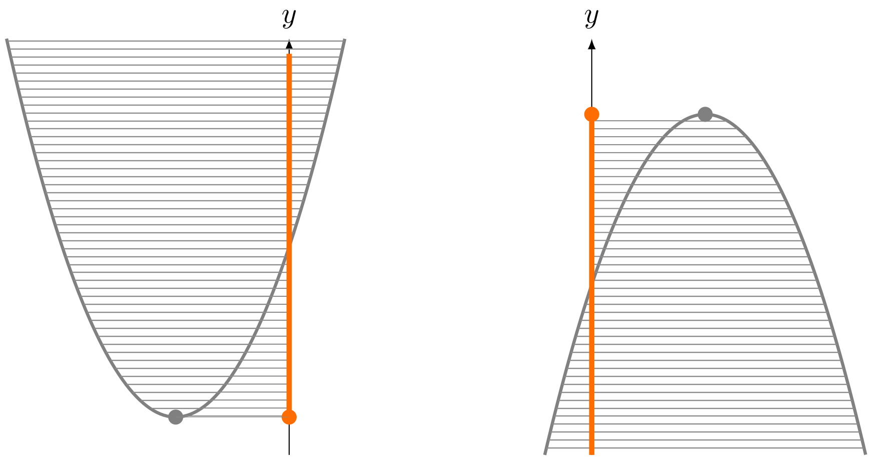


Figura 1.37

A depender da concavidade da parábola, o conjunto imagem vai ser do tipo $[y_0, +\infty[$ (se a concavidade é para cima) ou do tipo $]-\infty, y_0]$ (se a concavidade é para baixo). Vimos ainda que o valor extremo, que chamamos aqui de y_0, coincide com a ordenada do vértice da parábola.

Vejamos com um pouco mais de detalhes, primeiro, o caso em que a concavidade é para cima.

Neste caso, o conjunto imagem é $[y_0, +\infty[$, que também pode ser descrito como $\{y \mid y \geqslant y_0\}$. Ou seja, dentre todos os números reais que compõem o conjunto imagem da função f, y_0 é o menor valor possível.

> Sendo assim, o chamaremos de **valor mínimo** da função quadrática f e o par ordenado correspondente ao vértice da parábola de **ponto de mínimo** do gráfico da função f.

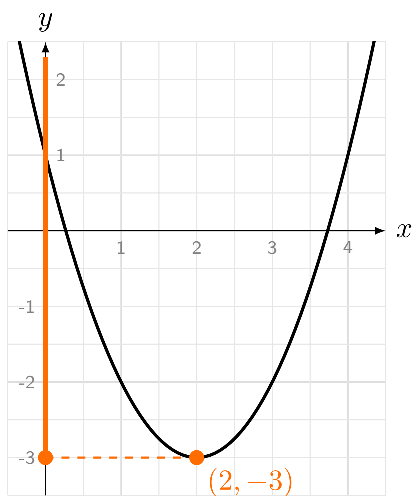


Figura 1.38

Por exemplo, para a função $f(x) = (x-2)^2 - 3$, o valor mínimo da função é -3 e o ponto de mínimo do gráfico é $(2, -3)$ (Figura 1.39).

Situações como essa sempre ocorrerão quando o coeficiente de x^2 for positivo. Podemos verificar este fato também algebricamente:

Dada uma função quadrática cujo gráfico tem concavidade voltada para cima, podemos reescrevê-lo na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, com $a > 0$.

Para obter a equação fornecida basta isolar o t na primeira e substituir na segunda.

Solução

Bela tacada

a)

Objetivos Específicos

Faturamento do restaurante

- Deduzir um modelo quadrático para uma situação envolvendo finanças.
- Resolver um problema de otimização a partir da interpretação de aspectos algébricos e geométricos relacionados ao modelo quadrático.

Sugestões e discussões

Faturamento do restaurante

- Confusão sobre o significado do $x =$ aumento do preço e não preço.
- A resposta deste problema é contra-intuitiva uma vez que uma redução de 5 reais no preço gerará lucro máximo: ponto de máximo $(-5, 6250)$.
- A ideia é incluir valores negativos no domínio: acréscimos negativos $=$ desconto.
- Seria interessante propor o problema aos poucos, deixando que as ideias surjam a partir das sugestões dos estudantes.
- Uma curiosidade aqui é que mesmo que você considere, no problema, o lucro em vez do faturamento, a resposta será a mesma, desde que se considere que as despesas são fixas. O gráfico para a função lucro, então, será apenas uma translação vertical do gráfico do faturamento, e isso não altera a abscissa do vértice.

Solução

Faturamento do restaurante

a)

Objetivos Específicos

Turismo

- Construir um modelo quadrático para um problema envolvendo finanças.
- Determinar o valor máximo da função quadrática.

Sugestões e discussões

Turismo

- Esta atividade explora uma situação de modelagem em que é natural a função quadrática ser expressa na forma $y = a(x-p)(x-q)$, a saber, $y = -1\cdot(x-40)(x+28)$. Ressalte que neste caso, há vantagens em não efetuar as multiplicações imediatamente. Por exemplo, é mais fácil para encontrar os zeros e as coordenadas do máximo diretamente da expressão fatorada.
- Contudo para fazer o item (e), o melhor vai ser gerar o trinômio equivalente, para cancelar o termo independente.

Solução

Turismo

a)

Como $a > 0$, a parcela $a(x-h)^2$ sempre será maior ou igual a zero, e somente será igual a zero quando $x = h$.

$$a(x-h)^2 \geqslant 0.$$

Somando k em ambos os lados dessa desigualdade, teremos

$$a(x-h)^2 + k \geqslant k,$$

com a igualdade valendo somente quando $x = h$. Assim, concluímos que $f(x) \geqslant k$ para todo x real e que $f(h) = k$.

O caso da concavidade para baixo é análogo. O conjunto imagem $]-\infty, y_0[$ pode ser descrito como $\{y \mid y \leqslant y_0\}$. Ou seja, dentre todos os números reais que compõem o conjunto imagem da função f, y_0 é o maior valor possível.

> Sendo assim, o chamaremos de **valor máximo** da função quadrática f e o par ordenado correspondente ao vértice da parábola de **ponto de máximo** do gráfico da função f.

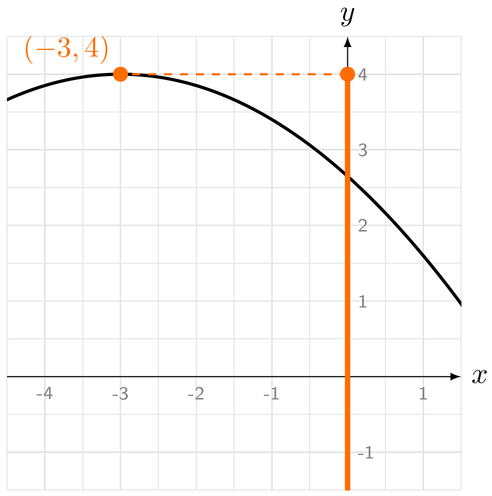


Figura 1.39

Por exemplo, para a função $f(x) = -0{,}15(x+3)^2 + 4$, o valor máximo da função é 4 e o ponto de máximo do gráfico é $(-3, 4)$.

Situações como essa sempre ocorrerão quando o coeficiente de x^2 for negativo. Assim como antes, é possível verificar este fato algebricamente:

Dada uma função quadrática cujo gráfico tem concavidade voltada para baixo, podemos reescrevê-lo na forma

$$f(x) = a(x-h)^2 + k, \text{ com } a < 0$$

Como $a < 0$, a parcela $a(x-h)^2$ sempre será menor ou igual a zero, e somente será igual a zero quando $x = h$.

$$a(x-h)^2 \leqslant 0.$$

Somando k em ambos os lados dessa desigualdade, teremos

$$a(x-h)^2 + k \leqslant k,$$

com a igualdade valendo somente quando $x = h$. Assim, concluímos que $f(x) \leqslant k$ para todo x real e que $f(h) = k$.

Nos dois exemplos que vimos acima a função estava dada na forma $a(x-h)^2 + k$, que dentre todas, é a que deixa mais explícitas as coordenadas do vértice da parábola. Contudo os valores extremos (mínimo ou máximo) podem ser calculados diretamente a partir dos parâmetros das outras formas.

$f(x)$	Valor extremo de f $a > 0:$ mínimo $a < 0:$ máximo	Ponto extremo do gráfico de f vértice da parábola
$a(x-h)^2+k$	k	(h,k)
$a(x-p)(x-q)$	$-\dfrac{a(p-q)^2}{4}$	$\left(\dfrac{p+q}{2}, -\dfrac{a(p-q)^2}{4}\right)$
ax^2+bx+c	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Tabela 1.6

Atividade 17

Faturamento do restaurante

O dono de um restaurante que vende comida a quilo deseja aumentar o seu faturamento diário que atualmente é de aproximadamente $R\$\,6000$: ele vende 200 kg de comida por dia, cobrando $R\$\,30,00$ pelo quilograma.

A primeira ideia é aumentar o preço cobrado por quilograma de comida. Contudo, um aumento como este pode impactar no número de clientes que visitam sua loja. Uma pesquisa de opinião feita pelo restaurante mostrou que, a cada 1 real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o correspondente a 10 kg de comida em um dia, em média.

Considerando que as quantias aproximadas acima são exatas e, denotando por x o **aumento no preço atual do quilograma**, responda às seguintes questões:

a) Qual das expressões abaixo melhor representa o preço P do quilo de comida, em função de x? Por que?

i) $P(x) = 30 + x$; **ii)** $P(x) = 30x$; **iii)** $P(x) = x - 30$; **iv)** $P(x) = 30/x$;

b) Qual o domínio desta função P? Ele contém números negativos? O que isso poderia significar no contexto do problema?

c) Considere a função $Q(x)$ que representa a quantidade de comida, em quilogramas, vendida em um dia, em função do aumento no preço atual do quilograma, x. Complete a Tabela 1.7 abaixo e deduza uma expressão para $Q(x)$. Faz sentido, aqui, considerar $x < 0$?

x	$Q(x)$
0	200
1	

Tabela 1.7

d) Sabendo que o faturamento do restaurante é o produto do preço cobrado pela quantidade de comida vendida, escreva a função $F(x)$ que fornece o faturamento diário em em função de x.

e) Esboce o gráfico da função $F(x)$, indicando sua concavidade, vértice e interseção com o eixo y.

f) Que valores de x fornecem faturamento zero ou negativo? Como isso está representado no gráfico?

g) Existe algum outro preço que daria o mesmo faturamento atual de $R\$\,6000$ diário? Ele é maior ou menor que o preço atual?

h) Qual o preço por quilo que maximiza o faturamento diário deste restaurante? Essa resposta era, de alguma forma, esperada por você?

Atividade 18

Turismo

Uma empresa de turismo, para alugar um ônibus de 40 lugares cobra o preço da seguinte maneira: se todos os lugares estiverem ocupados, será cobrado 28 reais por passageiro. Caso a lotação não seja completa, será acrescida a cada passagem a quantia de 1 real por cada lugar vago.

a) Complete a Tabela 1.8, considerando alguns cenários possíveis.

Lugares vagos	Valor pago por passageiro (reais)	Total recebido (reais)
0	28	1.120
1	29	1.131
2	30	1.140
5		
10		
15		

Tabela 1.8

b) Expresse algebricamente o total recebido pela empresa em função do número de lugares vagos. Qual o domínio para esta função? Explique.

c) Encontre os zeros da função do item anterior. Qual o significado de cada um dos zeros no contexto do problema?

d) Determine o número de lugares vagos que gera o maior valor total recebido pela empresa.

e) Caso haja lotação completa o valor total recebido pela empresa é de $R\$\ 1120{,}00$. A empresa receberia essa mesma quantia com que número de lugares vagos? Quanto pagaria cada passageiro, neste caso?

No mundo real nem tudo é tão "bonitinho" como nos livros de matemática. As contas nem sempre são tão simples e quase nunca (quase nunca mesmo) resultam em números inteiros ou frações com denominadores pequenos. Nesses casos, precisamos trabalhar com aproximações que sejam boas o suficiente, ou seja, que consigam fazer previsões com um grau de confiança aceitável diante da realidade.

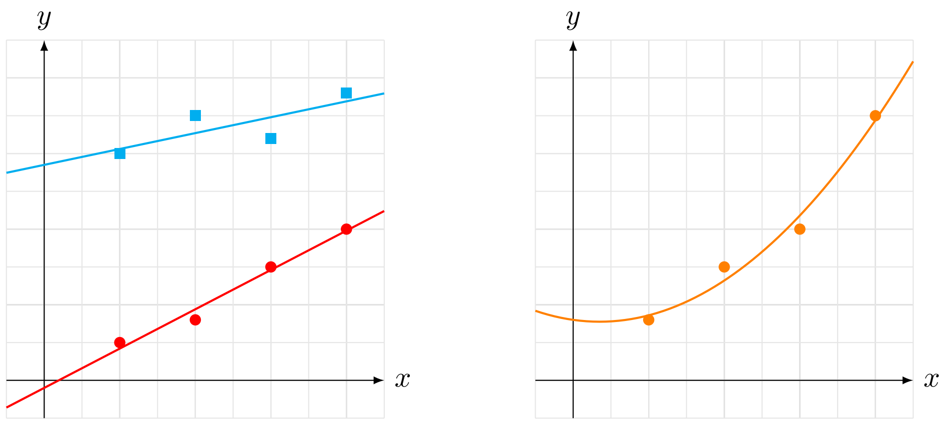


Figura 1.40

Existem vários métodos que são utilizados para fazer essas comparações e aproximações, sendo o mais famoso entre eles o chamado **método dos mínimos quadrados para regressão linear**. Dado um conjunto de pontos do plano, este método, basicamente, vai buscar a reta que está "mais próxima" de todos os pontos. Em linhas gerais, precisa-se calcular todas as distâncias dos pontos a uma reta genérica de equação $y = mx + n$, e depois encontrar os valores de m e n que dão o valor mínimo para a soma dos quadrados das distâncias (daí o nome do método) (Figura 1.40, à esquerda).

É possível também fazer um processo análogo para outras funções, como a quadrática. Quando já sabemos que o modelo adequado para o problema é o quadrático (como é o caso dos problemas de movimentos uniformemente acelerados: queda livre, plano inclinado, lançamento vertical ou oblíquos, etc) ou quando os dados do problema sugerem assim, podemos tentar encontrar os parâmetros para a função quadrática que fornecem a melhor aproximação para os dados (Figura 1.40, à direita).

Apesar da teoria matemática por trás do método não ser tão complicada, quando trabalhamos com dados reais as contas tendem a se complicar um pouco. Felizmente os computadores de hoje, mesmo os que têm pouca capacidade de processamento, já são capazes de fazer contas como essas de maneira praticamente instantânea. Vamos voltar à situação da atividade "Bela tacada" (Atividade 16).

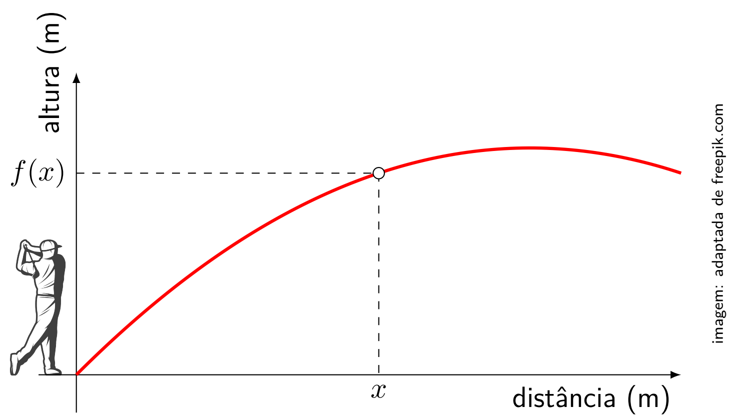


Figura 1.41

Considere, hipoteticamente, que o software que está analisando as imagens, captura as alturas correspondentes aos deslocamentos horizontais de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 m para poder fazer a análise. E no caso específico da tacada descrita o programa tenha registrado os seguintes valores, todos em metros:

x (m)	1	2	3	4	5	6
$f(x)$ (m)	0.219	0.532	0.731	0.958	1.219	1.464

Tabela 1.9

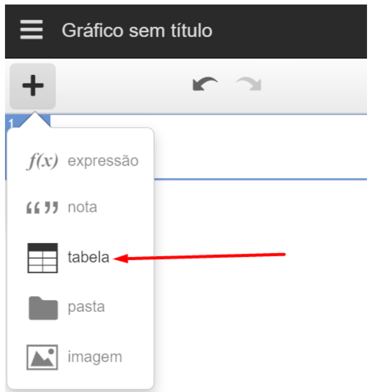


Figura 1.42

Para encontrarmos a função quadrática que melhor aproxima esses dados vamos fazer uso da calculadora gráfica da Desmos disponível online em https://www.desmos.com/calculator.

No canto superior esquerdo clique no ícone com o sinal de $+$ e em seguida, clique em **tabela**. Isso criará na célula 1 da calculadora uma tabela com colunas nomeadas como x_1 e y_1 (Figura 1.42).

Digite os dados da tabela anterior para esta e você deverá visualizar imediatamente os pontos sendo marcados no plano cartesiano (Figura 1.43).

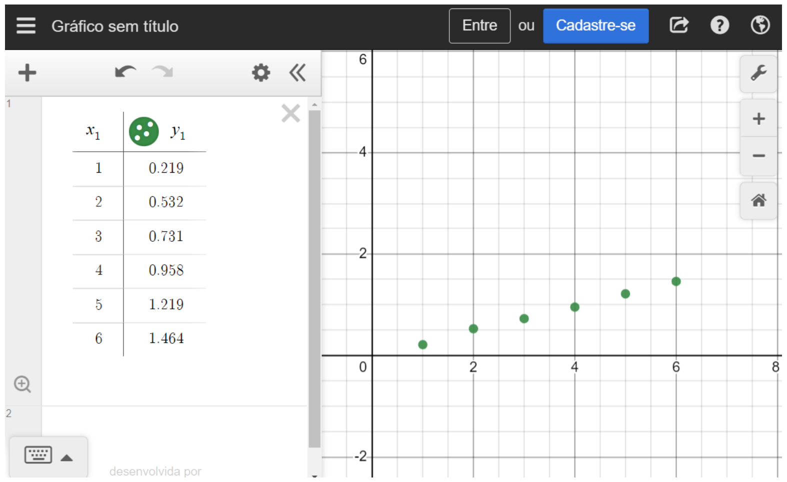


Figura 1.43

Clique na célula 2 (logo abaixo da tabela) e digite a seguinte expressão exatamente como está escrito a seguir: `y_1∼ax_1∧ 2+bx_1+c` (para aparecer o til ou o circunflexo, digite a tecla que tem o símbolo $\sim$ ou $\wedge$ e em seguida a barra de espaço)

Essa é a sintaxe da calculadora Desmos quando você deseja verificar se a variável y_1 pode ser expressa como função quadrática da variável x_1. A calculadora vai, imediatamente, exibir os valores dos coeficientes a, b e c que melhor aproximam os pontos marcados.

- Além desta forma, é possível escrever outras expressões, tipo, `y_1∼a(x_1-h)∧2+k` ou `y_1∼a(x_1-p)(x_1-q)`.
- Se quiséssemos tentar um modelo afim teríamos que escrever `y_1∼mx_1+n`.
- Outras funções são suportadas para esta sintaxe.

Após isso, deve aparecer algumas informações a respeito das estatísticas da aproximação, bem como o valor dos parâmetros calculados. O termo R^2 (conhecido como R-quadrado) é uma medida estatística do quão próximo estão os dados reais da curva ajustada, também conhecida como coeficiente de determinação. É um valor entre 0 e 1, e quanto mais próximo de 1 estiver, melhor o modelo se ajusta aos dados.

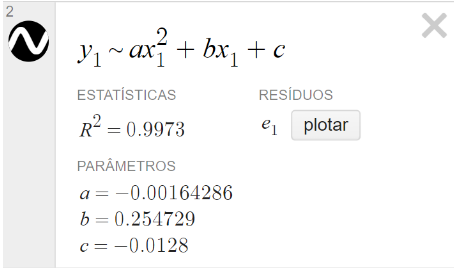


Figura 1.44

No caso do exemplo que estamos calculando, $R^2 = 0,9973$, o que indica uma confiabilidade grande (ou seja, erros muito pequenos). Sendo assim o software pode informar com segurança que os parâmetros que ele calculou modelam os dados e a função dada por

$$f(x) = -0{,}0016x^2 + 0{,}25x - 0{,}0128$$

descreve bem a trajetória da bola.

Diminua o zoom e veja a parábola desenhada no plano cartesiano. Se você clicar sobre a curva desenhada poderá ver alguns pontos marcados sobre ela (zeros da função e vértice da parábola). Clicando sobre tais pontos é possível saber suas coordenadas.

Extensão: Se você fizer um Shift+clique no ícone redondo da tabela que aparece ao lado de y_1 e ativar a opção Arrastar, você será capaz de mudar os pontos do plano de posição e observar a parábola se ajustando automaticamente aos dados em tempo real

Atividade 19

Contando moedas

Imagina que queiramos investigar qual o número máximo de moedas de 5 centavos que cabem, lado a lado e sem sobreposição, inteiramente em um círculo de 50 cm de diâmetro, sem ter que necessariamente encher um círculo desse tamanho de moedas e contá-las.

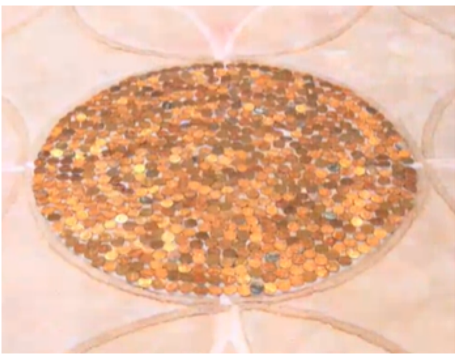


Figura 1.45

a) Para começar pode ser interessante fazer um chute de quantas moedas, no máximo, você acredita que vão caber dentro do círculo.

b) Desenhe em um papel círculos de tamanhos diferentes (e pequenos!), posicione o maior número de moedas de 5 centavos, sem sobrepor, e anote quantas moedas cabem dentro de cada um deles. Aqui, quanto mais dados você conseguir registrar melhor!

diâmetro	número máximo de moedas

c) Use a calculadora gráfica Desmos e aproxime uma função para esses dados. Qual o melhor modelo? Afim, quadrático, outro? (incluir no pp recomendações sobre este item)

Objetivos Específicos

Contando moedas

- Aplicar os procedimentos aprendidos no texto anterior para encontrar uma função quadrática que modele a situação descrita;
- Utilizar uma calculadora gráfica para realizar os cálculos.

Sugestões e discussões

Contando moedas

-

Solução

Contando moedas

a)

Objetivos Específicos

Sobe e desce

- Construir um modelo quadrático para um problema envolvendo movimento de aceleração constante.

Sugestões e discussões

Sobe e desce

- Preferimos não entrar nos pormenores da dedução da fórmula da equação horária da posição. Mas caso julgue pertinente pode discutir com seus alunos a partir da discussão sobre a distância percorrida ser a área entre o gráfico e o eixo x. Atenção para a diferença entre distância total percorrida (soma das áreas que o gráfico faz com o eixo x) e a posição (soma das áreas acima do eixo x subtraída das áreas abaixo do eixo x). Esse último caso é o que se chama de área com sinal e coincide com a definição de integral. No caso da posição, precisamos subtrair as áreas abaixo do eixo x, por que velocidades negativas indicam que o objeto "andou para trás", ou seja, se moveu na direção oposta da assumida como positiva;
- No item (e) há duas saídas possíveis: (1) uma vez que já se tem as coordenadas do ponto de máximo, a forma mais conveniente de deduzir a expressão é $h(t) = a(t-4)^2 + 80$, e usar, por exemplo, que $h(0) = 0$ para determinar o valor de a. (2) outra saída é considerar a expressão da forma $h(t) = at(t-8)$ (já que a altura é zero para $t = 0$ e $t = 8$) e o ponto $(4, 80)$ permite determinar o valor de a.

Solução

Sobe e desce

a)

d) Use a expressão da função encontrada para calcular a quantidade de moedas previstas para o círculo de diâmetro 50 cm. O número encontrado é próximo do valor que você previu anteriormente?

Saiba Mais — **Movimentos acelerados**

Já vimos, no estudo dos movimentos, que a velocidade média no intervalo de tempo $[a, b]$, pode ser obtida como a taxa de variação, neste intervalo, da função que exprime a posição do móvel em relação ao tempo.

Quando um objeto se move com velocidade constante entre dois instantes de tempo $t = a$ e $t = b$

Atividade 20

Sobe e desce

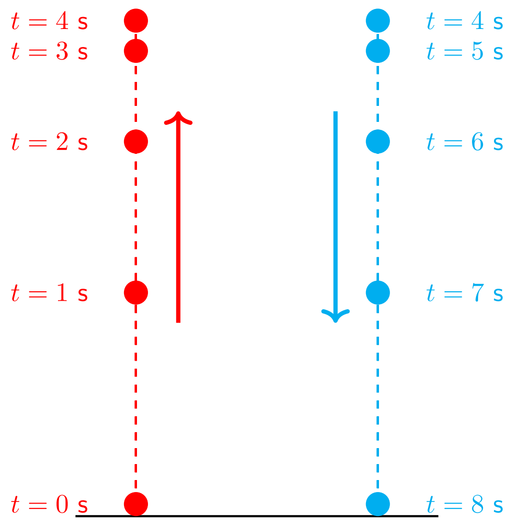


Figura 1.46

Um objeto é lançado para cima e descreve movimentos de subida e descida perfeitamente verticais. O tempo total de duração do movimento é de 8 segundos: 4 segundos para a subida e mais 4 segundos para a descida. Por causa da gravidade, a velocidade inicial (de lançamento) do objeto vai diminuindo, a uma taxa constante, 10 m/s a cada segundo.

a) Considerando que no ponto mais alto do movimento ($t = 4$ segundos) a velocidade seja nula, qual o valor da velocidade inicial?

b) Complete a tabela abaixo com as velocidades em cada instante. (no movimento de subida as velocidades são positivas e no de descida, negativas)

tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Velocidade (m/s)					0				

Tabela 1.10

c) Encontre uma expressão algébrica para $v(t)$, velocidade em função do tempo e represente seu gráfico em um sistema de coordenadas cartesianas, para t entre 0 e 8 segundos.

d) Com base na informação acima, calcule a altura máxima atingida pelo objeto. No gráfico da altura em relação ao tempo, quais são as coordenadas desse ponto de máximo?

e) É possível demonstrar que, de maneira geral, nos casos em que a velocidade varia uniformemente, a altura (posição) do objeto em função do tempo pode ser expressa por uma função quadrática. Com os dados obtidos até agora, obtenha a expressão da altura em função do tempo e esboce seu gráfico no domínio correto.

Para o professor: Notas

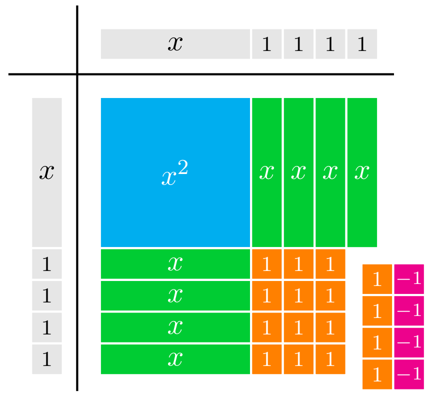
Nota 1. (Página 48)

Solução

Completando o quadrado

a) Fazendo o mesmo para os trinômios

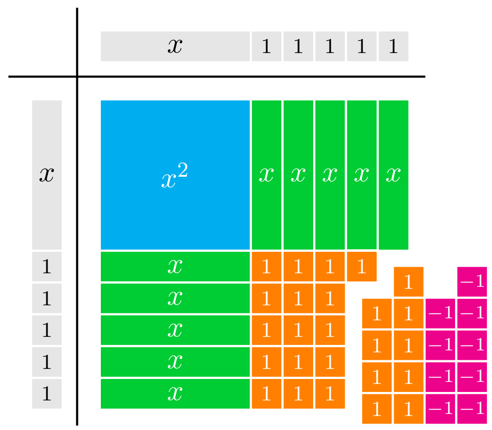
(i)



	x	$+4$	
x	x^2	$+4x$	
$+4$	$+4x$	$12+4$	-4

$$\boxed{x^2+8x+12=(x+4)^2-4}$$

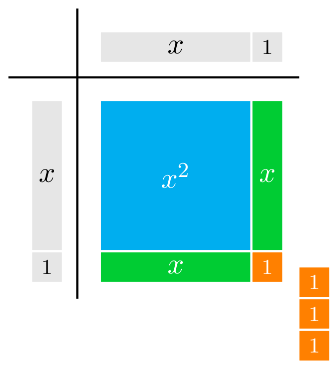
(ii)



	x	$+5$	
x	x^2	$+5x$	
$+5$	$+5x$	$+16+9$	-9

$$\boxed{x^2+10x+16=(x+5)^2-9}$$

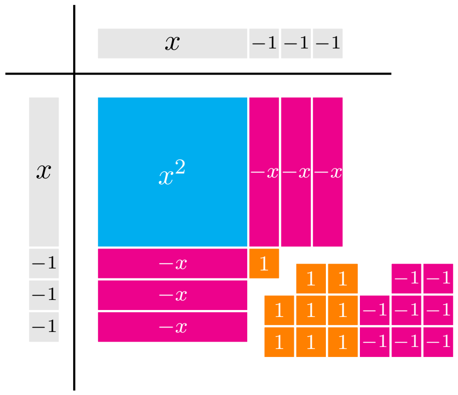
(iii)



	x	$+1$	
x	x^2	$+x$	
$+1$	$+x$	$+1$	$+3$

$$\boxed{x^2+2x+4=(x+1)^2+3}$$

b)



	x	-3	
x	x^2	$-3x$	
-3	$-3x$	$+1+8$	-8

$$\boxed{x^2-6x+1=(x-3)^2-8}$$

c)

	x	$+\frac{5}{2}$	
x	x^2	$+\frac{5x}{2}$	
$+\frac{5}{2}$	$+\frac{5x}{2}$	$3+\frac{13}{4}$	$-\frac{13}{4}$

$$\boxed{x^2+5x+3=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}}$$

d)

	x	$+\frac{b}{2}$	
x	x^2	$+\frac{bx}{2}$	
$+\frac{b}{2}$	$+\frac{bx}{2}$	$\frac{b^2}{4}$	$c-\frac{b^2}{4}$

$$\boxed{x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}}$$

e) $x^2+\sqrt{2}\,x+2=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2-\frac{2}{4}=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{2}.$

Referências

Barbosa, R. M. (1993). *Descobrindo Padrões em Mosaicos* (4ª ed.). Atual.

Billstein, R., Libeskind, S. & Lott, J. (2015). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teacher* (12ª ed.). Pearson.

Blanco, M. F. & Harris, A. L. N. (2011). Symmetry groups in the Alhambra. *VisMath*, *13*(1), 1–43.

Bool, F. H. (1982). *M.C. Escher: His Life and Complete Graphic Work (With a Fully Illustrated Catalogue)*. Harry N. Abrams, Inc.

Brasil. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ministério da Educação. Brasília, Brasil.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular* [Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br]. Ministério da Educação. Brasília, Brasil.

Callingham, R. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (M. J. Høines & A. B. Fuglestad, Ed.). Em: Em *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (M. J. Høines & A. B. Fuglestad, Ed.). Ed. por Høines, M. J. & Fuglestad, A. B. *2*. Bergen, Noruega, 2004, 183–190.

Chakraborty, D. & Caglayan, G. (2017). Harry N. Abrams, Inc. *Mathematics Teacher*, *111*(2), 90–94.

Coelho, A. (2014). *Estudo dos polígonos por intermédio da pavimentação do plano* (diss. de mestr.). Universidade Federal de Goiás - UFG. Catalão, GO.

da Costa Carvalho Chalub, F. A. (2011). *A Terra É Azulejo*. Sociedade Portuguesa de Matemática.

da Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre Investigações Matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, *2*, 93–169.

da Rocha Rossi, G. & Bisognin, E. (2009). Explorando a geometria dos pisos e dos frisos por meio do software geogebra. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, *7*(3), 411–420.

da Silva, E. A., Lourenço, M. L. & Jr., L. C. M. (1994). Uma introdução à pavimentação arquimediana do plano. *Boletim de Educação Matemática*, *9*(10), 53–66.

de Azevedo Gomes, T. (2017). *Ladrilhamento no plano com uso de software Geogebra* (diss. de mestr.). Unigranrio. Duque de Caxias, RJ.

Dias, C. C. & Dias, J. C. V. S. (2010). *Desafio geométrico: módulo I* ["(Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática)"]. Central de Texto.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. (M. T. Moretti, Trad.). *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 266–297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Eberle, R. S. (2014). The role of children's mathematical aesthetics: The case of tessellations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 129–143.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*, 1–196.

Garzón, S. M. U., Forero, Ó. L. C. & Martínez, J. F. B. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación matemática*, *26*(2), 135–160.

Goodman-Strauss, C. (2016). Tessellations. *arXiv:1606.04459*.

Grunbaum, B. & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman; Company.

Hatfield, M., Edwards, N., Bitter, G. & Morrow, J. (2000). *Mathematics methods for elementary and middle school teachers*. John Wiley & Sons.

Marchini, C. Different cultures of the youngest students about space (and infinity) (M. A. Mariotti, Ed.). Em: Em *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (M. A. Mariotti, Ed.). Ed. por Mariotti, M. A. Bellaria, Itália, 2003.

Matos, A. & Da Ponte, J. P. (2008). O estudo das relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano. *Relime*, *11*(2), 195–231. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext%5C&pid=S1665-24362008000200003%5C&lng=en%5C&nrm=iso

Mello, L. I. P. (2015). Ladrilhamentos no plano: uma atividade para o Ensino Médio. *Revista Eletrônica da Matemática*, *1*(2).

O'Daffer, P., Charles, R., Cooney, T., Dossey, J. & Schielack, J. (1998). *Mathematics for Elementary School Teachers*. Addison-Wesley.

Outhred, L. N. & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 144–167.

Owens, K. & Outhred, L. (1998). Covering shapes with tiles: Primary students' visualization and drawing. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(3), 28–41.

Sallum, E. M. (2015). Ladrilhamentos. *Instituto de Matemática e Estatística - USP*.

Serra, M. (1993). *Discovering Geometry: An Inductive Approach*. Key Curriculum Press.

Silva, R. N. (2014). *Sobre pavimentações do plano euclidiano* (diss. de mestr.). Universidade Estadual Paulista - Unesp. Rubião Junior, SP.

Ward, R. A. (2003). Teaching tessellations to preservice teachers using TesselMania! Deluxe: A Vygotskian approach. *Information Technology in Childhood Education Annual*, *2003*(1), 69–78.

Wheatley, G. H. & Reynolds, A. (1996). The construction of abstract units in geometric and numeric settings. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(1), 67–83.