Grafi e simili amenità

Leonardo De Faveri

Indice

Capitolo Nr.1

Definizioni generali

1.1 Grafi e sottografi

Dato un insieme V, indichiamo con $\binom{V}{2}$, l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di V composti da 2 elementi, ovvero:

$$\binom{V}{2} := \{A \in 2^V \ : \ |A| = 2\}$$

Vale inoltre, la formula seguente:

$$\left|\binom{V}{2}\right| = \begin{cases} \binom{|V|}{2} = \frac{|V|}{2!(|V|-2)!} = \frac{|V|(|V|-1)}{2} & \text{se } |V| \geq 2 \\ 0 & \text{se } |V| < 2 \end{cases}$$

Definizione 1.1.1. (Concetto di grafo) Un *grafo* G è una coppia (V, E), dove V è un insieme non vuoto detto *insieme dei vertici*, mentre $E \subseteq \binom{V}{2}$ ed è detto *insieme dei lati* di G.

Se $G = (V, E)$ è un *grafo* ed $e = \{v_1, v_2\} \in E$, cioè è un lato di G, allora diciamo che v_1 e v_2 sono gli *estremi* di e e anche che e *congiunge* v_1 e v_2.

Se G è un *grafo*, allora $V(G)$ e $E(G)$ indicano rispettivamente l'*insieme dei vertici* e l'*insieme dei lati* di G.

Definizione 1.1.2. (Concetto di sottografo) Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due *grafi*. Diciamo che G' è un *sottografo* se $V' \subset V$ e $E' \subset E$.

Se G' è un *sottografo* di G e vale:

$$E' = \{e \in E \mid e = \{v_1, v_2\} \text{ con } \ v_1, v_2 \in V'\}$$

allora G' si dice *sottografo di G indotto da V'* e si indica con il simbolo $G[V']$.

Definizione 1.1.3 (Concetto di grafo finito)**.** Un *grafo* G è detto *grafo finito* se ha un numero finito di *vertici*.

Oss 1.1.1. Un *grafo finito* ha anche un numero finito di *lati*.

Oss 1.1.2. Un *grafo* con un numero finito di *lati* non è necessariamente *finito*.

1.1.1 Grado e score

Definizione 1.1.4. Sia $G = (V, E)$ un *grafo finito* e sia $v \in V$. Definiamo il *grado* di v in G come:

$$deg_G(v) \coloneqq |\{e \in E \ : \ v \in e\}|$$

Prop (Relazione fondamentale tra i gradi dei vertici e il numero di lati di un grafo finito)**.** Se $G = (V, E)$ è un *grafo finito*, vale la seguente:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|$$

Definizione 1.1.5 (Concetto di score)**.** Sia $G = (V, E)$ un *grado finito* con *n vertici.* Definiamo lo *score* di G come la n-upla composta dai *gradi* dei *vertici* di G vista a meno di riordinamento.

Lo *score* di G è detto essere in *forma canonica* se è ordinato in modo non decrescente.

Oss 1.1.3. La *forma canonica* dello *score* di un *grafo* è unica.

Oss 1.1.4. Siano G un *grafo finito* e $score(G) = (d_1, \dots, d_n)$ il suo *score.* La conoscenza di $score(G)$ implica quella del numero di *vertici* e di *lati.* Il numero di *vertici* è ricavabile dal numero di componenti dello *score* e il numero di *lati* si ricava grazie alla *Relazione fondamentale tra gradi dei vertici e numero dei lati di un grafo finito.*

1.2 Morfismi e isomorfismi

Definizione 1.2.1. (Concetto di morfismo) Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due *grafi.* Una funzione $f : V \to V'$ iniettiva si dice *morfismo* da G in G' se vale la seguente:

$$\forall v_1, v_2 \in V, \{v_1, v_2\} \in E \Rightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E' \tag{1.1}$$

Se $f : V \to V'$ è un *morfismo* da G in G', scriveremo $f : G \to G'$.

Oss 1.2.1. Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due *grafi* e sia $f : V \to V'$ una funzione iniettiva. Per ogni $e = \{v_1, v_2\} \in E$, allora:

$$f(e) = \{f(v_1), f(v_2)\} \in \binom{V}{2}$$

Se definiamo $f(E) \coloneqq \{f(e) \in \binom{V}{2} \mid e \in E\}$, segue che la condizione 1.1 è equivalente alla seguente:

$$f(E) \subset E' \tag{1.2}$$

Dunque, f è un *morfismo* se e soltanto se $f(E) \subset E'$.

Definizione 1.2.2. (Concetto di isomorfismo) Siano G e G' due *grafi* e sia $f : V \to V'$ una funzione. Diciamo che f è un *isomorfismo* se valgono le seguenti:

(i) f è bigettiva

(ii) f è un *morfismo* da G in G'

(iii) $f^{-1} : V(G') \to V(G)$ è un *morfismo* da G' in G

Se esiste un *isomorfismo* da G in G', allora G si dice *isomorfo* a G' e si scrive $G \cong G'$.

Prop. Siano G e G' due *grafi* e sia $f : V \to V'$ una funzione. Diciamo che f è un *isomorfismo* tra G e G' se valgono le seguenti:

(i) f è *bigettiva*

(ii) $f(E) = E'$, ovvero $\forall e \in \binom{V}{2}, e \in E \Leftrightarrow f(e) \in E'$

Prop. Se G e G' sono due *grafi isomorfi*, allora hanno lo stesso *score*.

Oss 1.2.2. Non tutti i grafi con lo stesso *score* sono *isomorfi*.

1.3 Passeggiate, cammini e cicli

Definizione 1.3.1. Sia $G = (V, E)$. Una successione finita e ordinata $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ di *vertici* di G si dice:

- *Passeggiata* in G se $n = 0$ oppure $n \geq 1$ e $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- *Cammino* in G se è una *passeggiata* in G e $v_i \neq v_j$ $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ con $i \neq j$
- *Ciclo* in G se è una *passeggiata* in G e $n \geq 3$, $v_0 = v_n$ e $v_i \neq v_j$ $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ con $i \neq j$

Se $P = (v_0, v_1, \dots, n)$ è una *passeggiata* in G, allora n è detta *lunghezza della passeggiata* e scriveremo $n = l(P)$.

Definizione 1.3.2. (Congiungibilità) Sia $G = (V, E)$ e siano $v, w \in V$. Diciamo che v e w sono *congiungibili* in G con *passeggiata* (risp. con *cammino*) se esiste una *passeggiata* (risp. un *cammino*) $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ con $v_0 = v$ e $v_n = w$.

Prop. Sia $G = (V, E)$ e siano $v, w \in V$. Allora v e w sono *congiungibili* con *cammino* se e solo se lo sono con *passeggiata*.

Oss 1.3.1. Dati un *grafo* $G = (V, E)$ e due *vertici* $v, w \in V$, diciamo che v e w sono *congiungibili* in G se lo sono per *cammini* o equivalentemente per *passeggiata*.

1.4 Connessione

Definizione 1.4.1. (Concetto di componente connessa) Sia $G = (V, E)$ e sia $\sim$ la *relazione di congiungibilità* su V. Indichiamo con $\{V_i\}_{i \in I}$ l'insieme di tutte le $\sim$-classi di equivalenza (considerate come sottoinsiemi di V). I *sottografi* $\{G[V_i]\}_{i \in I}$ *indotti* da G su V_i si dicono *componenti connesse* di G.

Definizione 1.4.2. (Concetto di grafo connesso) Un *grafo* si dice *connesso* se possiede una sola *componente connessa*, altrimenti si dice *sconnesso*.

Oss 1.4.1.

(i) Se G un *grafo*, allora G è *connesso* se e solo se ogni coppia di *vertici* di G è *congiungibile* in G

(ii) Ogni *componente connessa* G' di G è un *grafo connesso*

Prop. Siano G e G' due *grafi* e sia $f : G \to G'$ un *morfismo*. Valgono le seguenti:

(i) Se $v, w \in V(G)$ sono *congiungibili* in G, allora anche $f(v)$ e $f(w)$ lo sono in G'

(ii) Se f è un *isomorfismo*, allora $v \sim w$ in G se e solo se $f(v) \sim f(w)$ in G'

Corollario 1.4.1. Siano G e G' due *grafi isomorfi*, $\{G_i\}_{i\in I}$ le *componenti connesse* di G e $\{G'_j\}_{j\in J}$ le *componenti connesse* di G'. Allora, G e G' hanno lo stesso numeri di *componenti connesse* e tali componenti sono a 2 a 2 *isomorfe*. Più precisamente:

$$\exists \varphi : I \to J \text{ biettiva } t.c.\ G_i \cong G'_{\varphi(i)}\ \forall i \in I$$

Corollario 1.4.2. Due *grafi isomorfi* sono entrambi *connessi* o entrambi *sconnessi.*

1.4.1 Grafi 2-connessi e Hamiltoniani

Definizione 1.4.3. Sia $G = (V, E)$ un *grafo* con almeno due *vertici* e sia $v \in V$. Definiamo il *grafo* $G - v$, detto *grafo ottenuto da G cancellando il vertice* v, ponendo:

$$V(G - v) \coloneqq V \backslash \{v\}\ E(G - v) \coloneqq \{e \in E\ :\ v \notin e\}$$

Definizione 1.4.4. Un *grafo* G si dice *2-connesso* se $\forall v \in V(G)$, $G - v$ è *connesso.*

Lemma 1.4.1. Ogni *grafo 2-connesso* è anche *connesso.*

Definizione 1.4.5. Sia G un *grafo.* Un *ciclo* in G che attraversa tutti i vertici è detto essere un *ciclo Hamiltoniano* in G. Se G ammette almeno un *ciclo Hamiltoniano*, allora G è detto *grafo Hamiltoniano.*

Oss 1.4.2. Un *grafo Hamiltoniano* è finito e possiede almeno 3 *vertici.*

Lemma 1.4.2. Un *grafo Hamiltoniano* è anche *2-connesso.*

Lemma 1.4.3. Siano G e G' due *grafi isomorfi.* Valgono le seguenti:

(i) G è *2-connesso* se e solo se lo è anche G'

(ii) G è *Hamiltoniano* se e solo se lo è anche G'

1.5 Alberi

Definizione 1.5.1. Sia $G = (V, E)$ un *grafo* e sia $v \in V$. Diciamo che v è una *foglia* di G se $deg_G(v) = 1$.

Lemma 1.5.1. I *grafi 2-connessi* e i *grafi Hamiltoniani* non hanno *foglie.*

Definizione 1.5.2 (Concetto di albero e foresta)**.** Un *grafo* si dice *albero* se è *connesso* e senza *cicli.* Una *foresta* è un *grafo* senza *cicli.*

Teorema 1.5.1. Sia $T = (V, E)$ un *albero.* Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) T è un *albero*

(ii) $\forall v, v' \in V$, esiste un unico cammino in T che congiunge v e v'

(iii) T è *connesso* e per ogn $e \in E$, il grafo $T - e \coloneqq (V, E\backslash\{e\})$ è *sconnesso*

(iv) T non ha *cicli* e per ogni $e \in \binom{V}{2}\backslash E$, il *grafo* $T + e \coloneqq (V, E \cup \{e\})$ ha almeno un ciclo

Lemma 1.5.2. Sia T un *albero finito* avente almeno 2 *vertici*. Allora, T possiede almeno 2 *foglie*.

Oss 1.5.1. Il precedente Lemma è falso se non si assume che T sia *finito*.

Teorema 1.5.2 (Teorema di caratterizzazione degli alberi finiti)**.** Sia $T = (V, E)$ un *grafo finito*. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) T è un *albero*

(ii) T è *connesso* e soddisfa la seguente *formula di Eulero*:

$$|V| - 1 = |E|$$

Corollario 1.5.1. Sia $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e sia $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$. Esiste un *albero* con *score* d se e soltanto se vale:

$$n - 1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i$$

1.5.1 Alberi di copertura

Definizione 1.5.3. Sia G un *grafo*. Un *sottografo* T di G si dice *albero di copertura* di G se T è un *albero* e $V(T) = V(G)$.

Oss 1.5.2. Se un *grafo* G ammette almeno un *albero di copertura* T, allora G è *connesso*. Infatti, per ogni $v, v' \in V(G) = V(T)$ esiste un (unico) *cammino* C in T che congiunga v con v'. Poiché T è un *sottografo* di G, C è anche un *cammino* in G. Segue che G è *connesso*.

Teorema 1.5.3. Ogni *grafo finito e connesso* possiede almeno un *albero di copertura*.

Oss 1.5.3. Si può dimostrare che anche ogni *grafo infinito e connesso* possiede un *albero di copertura*, di conseguenza, un *grafo* è *connesso* se e soltanto se possiede un *albero di copertura*.

Capitolo Nr.2

Teorema dello score

Lemma 2.0.1. Sia $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e sia $d = (d1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ un vettore tale che $d_1 \leq \cdots \leq d_n \leq 2$. Le seguenti affermazioni sono verificate:

(i) Se $d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)-volte}, 2)$ oppure $d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-2)-volte}, 2, 2)$, allora d non è lo *score* di un *grafo*

(ii) Se $d = (0, \dots, 0)$, allora d è lo *score* di un *grafo* avente n *vertici* isolati. Inoltre, se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq m \geq 3$ e $d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-m)-volte}, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-volte})$, allora d è lo *score* di un *grafo* avente $n - m$ *vertici* isolati e un *m-ciclo*

(iii) Se d possiede un numero dispari di componenti pari a 1, allora d non è lo *score* di un *grafo*. Se invece ha un numero pari di componenti pari a 1, d è un vettore della seguente forma:

$$d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{h-volte}, \underbrace{1, \dots, 1}_{(2k+2)-volte}, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-volte}) \text{ per qualche } h, k, m \in \mathbb{N}$$

ed è lo *score* di un *grafo* avente n *vertici* isolati, k segmenti (coppie di *vertici* di *grado* 1) e una linea con $m + 2$ nodi.

In particolare:

- Se $h = 0$, i *vertici* isolati vengono eliminati
- Se $k = 0$, i segmenti vengono eliminati
- Se $m = 0$, la linea si restringe fino a diventare un segmento

Corollario 2.0.1. Sia $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e sia $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $d_1 \leq \cdots \leq d_n \leq 2$ e il numero di componenti pari a 1 è pari. Allora d non è lo *score* di un *grafo* se e soltanto se d non ha una delle seguenti forme:

$$d = (0, \dots, 0, 2) \text{ oppure } d = (0, \dots, 0, 2, 2)$$

Teorema 2.0.1 (Teorema dello score)**.** Siano, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $d_1 \leq \cdots \leq d_n \leq n - 1$. Definiamo il vettore $d' = (d'_1, \dots, d'_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ ponendo:

$$d'_i := \begin{cases} d_i & \text{se } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{se } i \geq n - d_n \end{cases} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Allora d è lo *score* di un *grafo* se e solo se lo è d'.

Capitolo Nr.3

Ostruzioni

3.1 Ostruzioni per grafi

Le *ostruzioni* sono condizioni che si applicano a delle n-uple di valori interi. Le n-uple che verificano un'*ostruzione* non possono essere lo *score* di un *grafo*. Se invece non si verificano, non si può affermare nulla sulla natura di quell'n-upla.

3.1.1 Ostruzione 1

Lemma 3.1.1. Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Se $G = (V, E)$ è un *grafo* con n *vertici*, allora vale:

$$deg_G(v) \leq n - 1 \; \forall v \in V$$

Corollario 3.1.1 (Ostruzione 1)**.** Siano $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$ e $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ con $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Se $d_n > n - 1$, allora non esiste alcun *grafo* G avente d come *score*.

Oss 3.1.1. Siano $n, m \in \mathbb{N}\{0\}$ e sia $d \in \mathbb{N}^{n+m}$ un vettore della seguente forma:

$$d = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-volte}, d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

dove $0 < d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Definiamo $d' \coloneqq (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Osserviamo che d è lo *score* di un *grafo* se e soltanto se lo è d'. Infatti, se d è lo *score* di un *grafo* G, questi avrà m *vertici* isolati e di conseguenza, togliendoli si ottiene un *grafo* G' con *score* d'. Viceversa, se G' è un *grafo* con *score* d', aggiungendo m *vertici* isolati si ottiene un *grafo* G con *score* d.

3.1.2 Ostruzione 2

Lemma 3.1.2. Siano $n, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tali che $k < n$ e sia $h \coloneqq n - k$. Sia ancora $d \in \mathbb{N}^n$ un vettore di forma:

$$d = (d_1, \ldots, d_n, \underbrace{d_{n+1}, \ldots, d_m}_{\text{ultime k componenti}})$$

con $d_1 \leq \cdots \leq d_n < n - 1 = d_{n+1} = \cdots = d_m$. Allora, se d è lo *score* di un *grafo*, vale $d_1 \geq k$.

Corollario 3.1.2 (Ostruzione 2)**.** Siano $h, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Siano poi, $n \coloneqq h + k$ e $d \in \mathbb{N}^n$ un vettore nella forma:

$$d = (d_1, \ldots, d_h, \underbrace{n - 1, \ldots, n - 1}_{k-volte})$$

con $d_1 \leq \cdots \leq d_h < n - 1$. Se $d_1 < k$, allora d non è lo *score* di un *grafo*.

3.1.3 Ostruzione 3

Lemma 3.1.3. (Ostruzione 3) Siano $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ e $d = (d_1, \dots, d_{n-1}, d_n) \in \mathbb{N}^n$ con $d_1 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq d_n$. Sia poi $L \in \mathbb{N}$ definito come:

$$L := |\{i \in \{i, \dots, n-2\} \ : \ d_i \geq 2\}|$$

Se $L < d_{n-1} + d_n - n$ allora d non è lo *score* di un *grafo*.

3.1.4 Ostruzione 4

Lemma 3.1.4 (Ostruzione 4: Lemma delle strette di mano)**.** Sia $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ e sia poi $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$. Se d possiede un numero dispari di componenti dispari, allora d non può essere lo *score* di un *grafo*.

3.2 Ostruzioni per grafi isomorfi

Siano G e G' due *grafi finiti isomorfi*. Valgono le seguenti proprietà:

1. $score(G) = score(G')$
2. G e G' hanno lo stesso numero di *componenti connesse*. In particolare, sono entrambi *connessi* o entrambi *sconnessi*
3. G e G' sono entrambi *2-connessi* o non lo è nessuno
4. G e G' sono entrambi *Hamiltoniani* o non lo è nessuno
5. G e G' hanno lo stesso numero di *sottografi* che sono *3-cicli*, *4-cicli*, ...
6. Siano $f : V(G) \to V(G')$ un *isomorfismo* da G in G', $v \in V(G)$ un *vertice* di G con $deg_G(v) = k$, e $v_1, \dots, v_k \in V(G)$ suoi *vertici* adiacenti, allora $deg_G(v) = deg_G(f(v))$ e $deg_G(v_i) = deg_G(f(v_i))$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$

Tutti i *grafi* per i quali almeno una di queste proprietà non è verificata non possono essere *isomorfi*.

3.3 Altri risultati utili

3.3.1 Forzatura alla sconnessione

Lemma 3.3.1 (Forzatura alla sconnessione)**.** Sia $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ e sia $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$. Se vale:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i < n - 1 \tag{F-S}$$

allora tutti i *grafi* che hanno *score* uguale a d sono *sconnessi*.

3.3.2 Forzatura alla connessione

Lemma 3.3.2 (Forzatura alla connessione)**.** Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $d_1 \leq \cdots \leq d_n$. Se vale $d_1 + d_n \geq n - 1$, ovvero:

$$d_1 \geq n - d_n - 1 \tag{F-C}$$

allora tutti i *grafi* che hanno *score* uguale a d sono *connessi*.

Oss 3.3.1. La precedente condizione (F-C) si può riscrivere equivalentemente come:

$$d_1 + d_n \geq n - 1 \tag{F-C}$$

Dunque, se $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ con $n \geq 1$ e $d_1 \leq \cdots \leq d_n$, e vala le precedente disuguaglianza, allora ogni *grafo* con *score* d, se esiste, è *connesso*.