

## Quiz sui linguaggi CF

PROF. GIORGIO GAMBOSI

A.A. 2016-2017

**Problema 1:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ , dove  $S, NP, VP, PP, A$  sono i simboli non terminali e  $a, the, boy, girl, flower, touches, sees, likes, with$  sono i simboli terminali:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow NPVP \\ NP &\rightarrow AN \mid VPPP \\ VP &\rightarrow V \mid VNP \mid VPPP \\ PP &\rightarrow PNP \\ A &\rightarrow a \mid the \\ N &\rightarrow boy \mid girl \mid flower \\ V &\rightarrow touches \mid likes \mid sees \\ P &\rightarrow with \end{aligned}$$

Mostrare un albero sintattico della stringa *agirltouchesaboywithaflower*.

**Problema 2:** Si consideri la seguente grammatica context free  $G$ :

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid 1 \mid 2 \mid 3$$

Mostrare gli alberi sintattici della stringa  $3 - 2 - 1$ .

**Problema 3:** Definire una grammatica CF che generi il linguaggio  $L = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0, n \neq m\}$  sull'alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ .

**Problema 4:** Dimostrare che la grammatica definita in risposta al problema precedente effettivamente genera il linguaggio dato.

**Problema 5:** Definire una grammatica CF che generi il linguaggio  $L = \{1^n + 1^m = 1^{n+m} \mid n \geq 1, m \geq 1\}$  sull'alfabeto  $\Sigma = \{1, +, =\}$ .

**Problema 6:** Definire una grammatica CF che generi il linguaggio  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contiene almeno 3 b}\}$ .

**Problema 7:** Definire una grammatica CF che generi il linguaggio  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ha lunghezza dispari, il simbolo centrale è b, e il primo e l'ultimo simbolo sono uguali}\}$ .

**Problema 8:** Definire una grammatica CF che generi tutte le espressioni parentetiche corrette.

**Problema 9:** Definire una grammatica CF che generi tutte le espressioni regolari sull'alfabeto  $\{0, 1\}$ .

**Problema 10:** Definire una grammatica CF che generi il linguaggio  $L = \{a^m b^n \mid n \leq m \leq 2n\}$ .

**Problema 11:** Definire una grammatica CF che generi il linguaggio  $L = \{w \mid w \in \{a, d\}^*, w \text{ ha un numero di b doppio del numero di a}\}$ . Mostrare gli alberi sintattici di *abaabaa* e di *babbaa* in tale linguaggio.

**Problema 12:** Definire una grammatica CF che generi il linguaggio di tutte le stringhe su  $\{a, b\}$  che non sono palindromo.

**Problema 13:** Dimostrare che la grammatica definita in risposta al problema precedente effettivamente genera il linguaggio dato.

**Problema 14:** Descrivere il linguaggio generato dalla grammatica CF seguente:

$$S \rightarrow bS \mid Sa \mid aSb \mid \varepsilon$$

**Problema 15:** Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio  $L = \{a^n b a^{2n} b a^{3n} \mid n \geq 0\}$  su  $\Sigma = \{a, b\}$  non è context free.

**Problema 16:** Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio  $L = \{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}$  su  $\Sigma = \{a, b, c\}$  non è context free.

**Problema 17:** Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio  $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i < j < k\}$  su  $\Sigma = \{a, b, c\}$  non è context free.

**Problema 18:** Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio  $L = \{0^m 1^n \mid n = m^2\}$  su  $\Sigma = \{0, 1\}$  non è context free.

**Problema 19:** Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio  $L = \{a^n \mid n \text{ è primo}\}$  su  $\Sigma = \{a\}$  non è context free.

**Problema 20:** Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio  $L = \{a^i b^j \mid j = i^2 \text{ su } \Sigma = \{a, b\}\}$  non è context free.

**Problema 21:** Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio  $L = \{a^n b^n c^m \mid n \leq m \leq 2n\}$  su  $\Sigma = \{a, b, c\}$  non è context free.

**Problema 22:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \mid b$$

1. Mostrare (per induzione) che ogni stringa  $w \in L(\mathcal{G})$  non contiene  $ba$  come sottostringa.
2. Descrivere il linguaggio  $L(\mathcal{G})$ .

**Problema 23:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$S \rightarrow ABC$$

$$A \rightarrow Sa \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow b \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow Cc$$

Derivare in  $\mathcal{G}$  le stringhe  $aaccc$  e  $aabccc$ .

**Problema 24:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$S \rightarrow A \mid Ab$$

$$A \rightarrow a \mid ab \mid S$$

1. Mostrare che  $\mathcal{G}$  è ambigua individuando una stringa  $w$  e due diversi alberi sintattici di  $w$ .
2. Definire una grammatica  $\mathcal{G}'$  equivalente a  $\mathcal{G}$  e non ambigua.

**Problema 25:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$S \rightarrow A \mid XY$$

$$X \rightarrow Ya \mid b$$

$$Y \rightarrow aX \mid b$$

1. Dare una definizione concisa del linguaggio  $L(\mathcal{G})$  generato da  $\mathcal{G}$ .
2. Mostrare che  $\mathcal{G}$  è ambigua individuando una stringa  $w$  e due diversi alberi sintattici di  $w$ .
3. Definire una grammatica  $\mathcal{G}'$  equivalente a  $\mathcal{G}$  e non ambigua.

**Problema 26:** Sia  $\mathcal{G}$  una grammatica CF in Forma Normale di Chomsky. Sia  $w \in L(\mathcal{G})$  una stringa di lunghezza  $n$ . Qual è la lunghezza di una derivazione di  $w$ ?

**Problema 27:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow a \mid C \\ B &\rightarrow b \mid C \\ C &\rightarrow CDE \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow ab \mid A \mid B \end{aligned}$$

Semplificare  $\mathcal{G}$  fino ad ottenere una grammatica  $\mathcal{G}'$  equivalente in CNF.

**Problema 28:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AAS \mid A \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow 0A1 \mid 0B1 \\ B &\rightarrow B1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Semplificare  $\mathcal{G}$  fino ad ottenere una grammatica  $\mathcal{G}'$  equivalente in CNF, eccetto che per la generazione della stringa  $\varepsilon$ .

**Problema 29:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbb \mid T \\ T &\rightarrow bTaa \mid S \mid \varepsilon \end{aligned}$$

1. Derivare una grammatica CF  $\mathcal{G}'$  priva di  $\varepsilon$ -produzioni e di produzioni unitarie e tale che  $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$
2. Derivare da  $\mathcal{G}'$  una grammatica  $\mathcal{G}''$  in Forma Normale di Chomsky tale che  $L(\mathcal{G}'') = L(\mathcal{G}')$
3. Derivare da  $\mathcal{G}''$  una grammatica  $\mathcal{G}'''$  in Forma Normale di Greibach tale che  $L(\mathcal{G}''') = L(\mathcal{G}'')$
4. Mostrare una derivazione di  $abaabb$  per ognuna delle grammatiche derivate.

**Problema 30:** Si consideri la seguente grammatica context free  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aEb \mid aaC \mid AA \\ A &\rightarrow BC \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow aB \mid a \\ C &\rightarrow Ca \mid Cb \\ D &\rightarrow a \mid c \end{aligned}$$

Derivare una grammatica equivalente a  $\mathcal{G}$  e priva di simboli inutili.

**Problema 31:** Dimostrare che se  $L$  è un linguaggio CF allora il linguaggio  $\text{prefix}(L) = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è un prefisso di } x\}$  è CF.

**Problema 32:** Dimostrare che se  $L$  è un linguaggio CF allora il linguaggio  $L^R = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è pari a } x \text{ rovesciata}\}$  è CF.

**Problema 33:**(Prova d'esame del 30-1-2006). Mostrare che il linguaggio  $L = \{a^n b^m \mid n = 2m + 1\}$  è context free.

**Problema 34:**(Prova d'esame del 30-1-2006). Ridurre la seguente grammatica in Forma Normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABS \mid AA \mid A \mid a \\ A &\rightarrow aAb \mid aBb \mid B \\ B &\rightarrow Bb \mid b \end{aligned}$$

**Problema 35:**(Prova d'esame del 24-2-2006). Si consideri il linguaggio  $L \subseteq \{a, b, c\}^*$  tale che per ogni stringa  $\sigma \in L$  si ha  $\#_a(\sigma) = \#_b(\sigma) + \#_c(\sigma)$  (dove  $\#_a(\sigma)$ ,  $\#_b(\sigma)$ ,  $\#_c(\sigma)$  sono il numero di caratteri  $a, b, c$  in  $\sigma$ ).

Il linguaggio è regolare? Motivare la risposta.

Il linguaggio è context-free? Motivare la risposta.

**Problema 36:**(Prova d'esame del 24-2-2006). Mostrare che la grammatica seguente è ambigua.

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + E \mid E * E \mid I \\ I &\rightarrow a \mid b \mid c \end{aligned}$$

**Problema 37:**(Prova d'esame del 4-7-2006). Sia  $\mathcal{G}$  una grammatica in CNF (Forma Normale di Chomsky). Mostrare che, per ogni stringa  $w \in L(\mathcal{G})$ , tutte le possibili derivazioni di  $w$  hanno la stessa lunghezza. Mostrare inoltre la relazione tra la lunghezza di una derivazione e la lunghezza  $n = |w|$  della stringa.

**Problema 38:**(Prova d'esame del 13-9-2006). Dimostrare che il linguaggio  $\{a^n b^n c^m \mid n \leq m \leq 2m\}$  non è context free.

**Problema 39:**(Prova d'esame del 13-9-2006). Ridurre la seguente grammatica in forma normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABa \\ A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow baB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

**Problema 40:**(Prova d'esame del 18-6-2007). Ridurre la seguente grammatica in forma normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aEb \mid aaC \mid AA \\ A &\rightarrow BC \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow aB \mid a \\ C &\rightarrow Ca \mid Cb \\ D &\rightarrow a \mid c \end{aligned}$$

**Problema 41:**(Prova d'esame dell'11-7-2007). Si consideri il linguaggio  $L \subseteq \{a, b\}^*$  tale che  $\sigma \in L$  se e solo se  $\sigma \in \{a, b\}^*$  e  $\sigma$  non è palindroma.  $L$  è context free? Motivare la risposta.

**Problema 42:**(Prova d'esame del 12-9-2007). Definire una grammatica context free che generi il linguaggio  $L = \{a^n b^m, n \geq 0, m \geq 0, n \neq m\}$ .

**Problema 43:**(Prova d'esame del 12-9-2007). Mostare che la grammatica seguente, con assioma  $S$ , è ambigua:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \\ X &\rightarrow Ya \mid b \\ Y &\rightarrow aX \mid b \end{aligned}$$

**Problema 44:**(Prova d'esame del 12-9-2007). Si consideri il linguaggio  $L = \{a^n b a^{2n} b a^{3n}, n \geq 0\}$ .  $L$  è context free? Motivare la risposta.

**Problema 45:**(Prova d'esame del 24-1-2008). Dato l'alfabeto  $\Sigma = \{(\,,\,),\,a,\,b\}$ , definire una grammatica context free che generi tutte le stringhe corrispondenti a espressioni parentetiche bilanciate su  $\Sigma$ .

**Problema 46:**(Prova d'esame del 24-1-2008). Sia data la grammatica seguente, con assioma  $S$ .

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABa \\ A &\rightarrow aAbb \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bB \mid A \mid b \end{aligned}$$

Derivare una grammatica in CNF equivalente a  $G$ .

**Problema 47:**(Prova d'esonero del 25-2-2015). Si definisca una grammatica context free che generi il linguaggio  $L = \{a^r b^s c^t \mid t = r - s\}$ .

**Problema 48:**(Prova d'esonero del 9-2-2016). Si definisca una grammatica in Forma Normale di Chomsky che generi il seguente linguaggio.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid |w| \text{ pari e } w \text{ inizia e termina con lo stesso carattere}\}$$

**Problema 49:**(Prova d'esonero del 9-2-2016). Mostrare che la seguente grammatica è ambigua, individuando una stringa con due diversi alberi sintattici (o derivazioni sinistre)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab|aaB \\ A &\rightarrow a|Aa \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Si descriva il linguaggio generato e si definisca una grammatica equivalente non ambigua.

**Problema 50:**(Prova d'esonero del 4-3-2016). Si definisca una grammatica in CNF equivalente alla seguente

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A0|1B1|BB \\ A &\rightarrow C \\ B &\rightarrow S|A \\ C &\rightarrow S|\varepsilon \end{aligned}$$

**Problema 51:**(Prova d'esonero del 18-7-2016). Sia dato il linguaggio

$$L = \{a^n b^m c^k \mid k = |n - m|\}$$

Definire una grammatica context free che generi il linguaggio. Discutere se la grammatica risultante è ambigua.

**Problema 52:**(Prova d'esame del 17-2-2016). Verificare se il linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i < j \wedge i < k\}$$

è context free o meno.