Esercitazione 1 - Linguaggi e Calcolabilità

29-03-2019

Antonio Cruciani
antonio.cruciani@alumni.uniroma2.eu

Esercizi a lezione

Esercizio 1:
Sia $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio accettabile ma non decidibile. Si considerino le seguenti due funzioni $f : \Sigma^* \to \{0,1\}$ e $g : \Sigma^* \to \{0,1\}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \texttt{se } x \in L \\ \texttt{Non definito} & \texttt{Altrimenti} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \texttt{se } x \in L \\ 0 & \texttt{Altrimenti} \end{cases}$$

Discutere la calcolabilità di f e g.

Esercizio 2:
Sia $L_1 \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio accettabile ma non decidibile e sia $L_2 \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio decidibile. Si consideri la seguente funzione $f : \Sigma^* \to \mathbb{N} : \forall x \in \Sigma^*$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textsc{se } x \in L_1 \\ |x| & \textsc{se } x \notin L_1 \wedge x \in L_2 \\ 0 & \textsc{altrimenti} \end{cases}$$

Si dimostri se f è una funzione calcolabile.

Soluzioni esercizi a lezione

Esercizio 1:
Osserviamo che f è calcolabile, ricordiamo che dati Σ e Σ_1 $\quad f : \Sigma^* \to \Sigma_1^*$ è una funzione (parziale) calcolabile se $\exists\ T$ ($trasduttore$) tale che $\forall x \in \Sigma^*$ termina con la stringa $f(x)$ scritta sul nastro di output se e solo se $f(x)$ è definita.
Il linguaggio L è accettabile ma non decidibile $\Rightarrow \exists\ T_1$ TM di tipo riconoscitore che accetta L . Sia ora T_2 il trasduttore che calcola $f(x)$ esso, senza perdita di generalità, sarà a due nastri dove sul primo simulerà la macchina di Turing T_1 con input x e nel secondo scriverà l'output $f(x)$ se e solo se la simulazione di $T_1(x)$ sarà accettante.
Formalmente: $[O_{T_1(x)} = q_a \Rightarrow O_{T_2} = f(x) = 1] \iff x \in L$
Poiché L è accettabile ma non è decidibile per $x \in L^c$ $\nexists T'$ tale che $T'(x)$ accetta se $x \in L^c$.
Quindi abbiamo che $\forall x \in L,\ f(x) = 1 \Rightarrow\ f$ è calcolabile.

Osserviamo ora che $g(x)$ non è una funzione calcolabile. Osserviamo che per come è definita essa è una funzione totale.
Ricordiamo il teorema:
Thm: L è un linguaggio decidibile $\iff$ χ_L è una funzione totale e calcolabile
Ora assumiamo per assurdo che g sia totale e calcolabile, allora L dev'essere decidibile, ma L per definizione è accettabile ma non decidibile, quindi abbiamo una contraddizione $\Rightarrow g$ non è calcolabile.

Esercizio 2:
Osserviamo esplicitamente che f non è calcolabile.
Ora, mostriamo che se f fosse calcolabile allora potremmo costruire una macchina di Turing in grado di decidere L_1 il quale è un linguaggio accettabile ma non decidibile (non co-Turing-recognizable).
Supponiamo, quindi, per assurdo che f sia una funzione calcolabile (allora esiste un trasduttore T_f che la calcola) e sia inoltre T_1 a tre nastri, definita come segue:

n_1) input x

n_2) nastro per la simulazione della computazione $T_f(x)$

n_3) output di $T_f(x)$

La macchina di Turing di tipo accettatore che simula T_f con input x. Essa lavorerà come segue:

- simula $T_f(x)$ sul secondo nastro, e se tale computazione scrive sul nastro 3:

  1 Allora T_1 **Accetta**

  $|x|$ Allora T_1 **Rigetta**

  0 Allora T_1 **Rigetta**

Osserviamo esplicitamente che T_1 decide L_1 in quanto:

$$O_{T_1}(x) = \begin{cases} q_a & \text{SE } x \in L_1 \\ q_r & \text{SE } x \in L_1^c \end{cases}$$

Ma tale T_1 non può esistere in quanto L_1 è accettabile ma non decidibile.
Quindi f non è calcolabile.
Spieghiamo meglio questo ragionamento e osserviamo che, sostanzialmente, basta rivolgere l'attenzione a questo passaggio logico:

- se $f(x) = |x| \Rightarrow x \in L_1^c \cap L_2$

Questo ci dice che se f fosse calcolabile allora potremmo stabilire che $x \in L_1^c \cap L_2$ ma per poter far questo dovrebbe esistere una macchina in grado di accettare L_1^c, ma essa non può esistere in quanto L_1^c per definizione non è accettabile, quindi abbiamo un assurdo che ci permette di dire che f non è calcolabile.