$$\min \ 8x_1 - 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$2x_1 - 3x_2 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0$$

C.N.S.

$\bar{x}, \bar{y}$ ottimi (P,D)

$\Updownarrow$

- $\bar{x}, \bar{y}$ sono ammissibili per (P,D)
- $\begin{bmatrix} \langle \bar{x}, \bar{s}_d \rangle = 0 \\ \langle \bar{y}, \bar{s}_p \rangle = 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & \underline{8x_1 + 5x_2} \\ y_1) & x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ y_2) & 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 4 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \end{array}}$$

$s_p = 0$ $\qquad$ $\langle \bar{y}, s_p \rangle = 0$

$$\max \ 6y_1 + 4y_2$$
$$\begin{array}{rll} y_1 + 2y_2 & \leq 8 & (x_1) \\ -y_1 + 3y_2 & \leq 5 & (x_2) \\ y_1 & \leq 0 & (x_3) \\ -y_2 & \leq 0 & (x_4) \end{array}$$

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y_1 \in \mathbb{R}, \ y_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle x^{(0)}, s_d^{(0)} \rangle = 0$$

$$sd^{(0)} = \begin{bmatrix} sd_1^{(0)} \\ sd_2^{(0)} \\ sd_3^{(0)} \\ sd_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{bmatrix}$$

$$\min \ a_1 + a_2$$
$$a_1 + x_3 = 6$$
$$a_2 - x_4 = 4$$
$$a_1 \geq 0, \ a_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

	x_3	x_4	a_1	a_2
	0	0	1	1
$a_1 = 6$	1	0	1	0

P.R.

$$\min \ a_1$$
$$x_3 = 6$$
$$a_1 - x_4 = 4$$
$$x_3, x_4, a_1 \geq 0$$

	x_3	x_4	a_1	a_2
$a_2 = 4$	0	-1	0	1

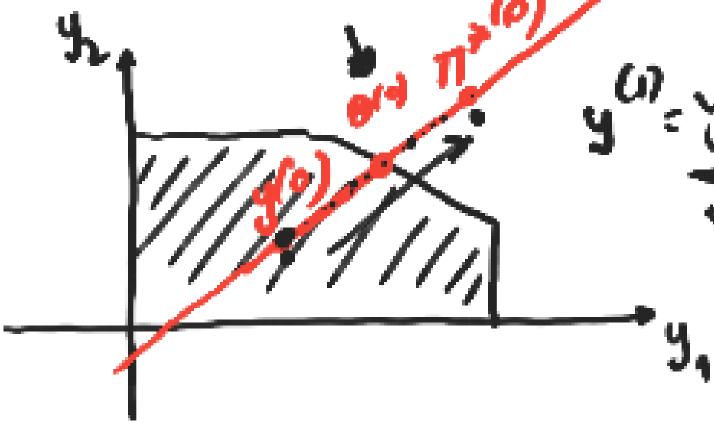
	x_3	x_4	a_1	a_2
-10	-1	1	0	0
$\rightarrow a_1 = 6$	1	0	1	0
$a_2 = 4$	0	-1	0	1

$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$a_1 = 6$
$a_2 = 4$?

	x_3	x_4	a_1	a_2
-4	0	1	1	0
$x_3 = 6$	1	0	1	0
$a_2 = 4$	0	-1	0	1

$x_3 = 6$
$x_4 = 0$
$a_1 = 0$
$a_2 = 4$?

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \underbrace{\theta^{(0)}} \cdot \underbrace{\pi^{*(0)}}$$



$$y^{(1)} = y^{(0)} + \theta^{(0)} + \pi^{*(0)}$$

min $a_1 + a_2$

$\pi_1)$ $a_1 + x_3 = 6$

max $6\pi_1 + 4\pi_2$

$\pi_2)\ a_2 - x_4 = 4$

$a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0\ x_3 \geq 0\ x_4 \geq 0$

$a_2)\ \pi_2 \leq 1.\quad s_2 \qquad \pi^{*(0)}$

$x_3)\ \pi_1 \leq 0 \quad s_3$

$x_4)\ -\pi_2 \leq 0 \quad s_4$

$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{matrix} x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1^* = 0 \\ \pi_2^* = 1 \end{cases}} \leftarrow \begin{cases} \pi_2 + s_2 = 1 \\ \pi_1 + s_3 = 0 \end{cases}$$

$\langle x^*, s^* \rangle = 0$

$$\pi^{*(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \theta^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \theta^{(0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta^{(0)} \end{bmatrix}$$

$y_1 + 2y_2 \leq 8$	$2\theta^{(0)} \leq 8$	$\theta^{(0)} \leq 4$
$y_1 + 3y_2 \leq 5$	$3\theta^{(0)} \leq 5$	$\theta^{(0)} \leq \frac{5}{3}$
$y_1 \leq 0$	$0 \leq 0$	✓
$-y_2 \leq 0$	$-\theta^{(0)} \leq 0$	$\theta^{(0)} \geq 0$
$y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \in \mathbb{R}$		

$$0 \leq \theta^{(0)} \leq \frac{5}{3}$$

$$\max_{0 \leq \theta^{(0)} \leq \frac{5}{3}} \theta^{(0)} = \frac{5}{3}.$$

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/3 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6y_1 + 4y_2 \to 0$$

$$6y_1 + 4y_2 \Big|_{y^{(1)}} = \frac{20}{3} > 0$$

$$\max\ 6y_1+4y_2$$
$$y_1+2y_2\le 8$$
$$-y_1+3y_2\le 5$$
$$y_1\le 0$$
$$-y_2\le 0$$
$$y_1,y_2\in\mathbb{R}$$

$$y^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\5/3\end{pmatrix}$$

$$S_d^{(1)}=\begin{bmatrix}Sd_1^{(1)}\\Sd_2^{(1)}\\Sd_3^{(1)}\\Sd_4^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-\frac{10}{3}\\5-5\\0\\5/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14/3\\0\\0\\5/3\end{bmatrix}\begin{matrix}-x_1^{(1)}=0\\ \\ \\ x_4^{(1)}=0\end{matrix}$$

$$\langle x^{(1)}, Sd^{(1)}\rangle=0$$

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\\ge 0\\\ge 0\\0\end{bmatrix}$$

$$\min\ a_1$$
$$-x_2+x_3=6$$
$$a_1+3x_2=4$$
$$a_1\ge 0,\ x_2\ge 0\ \ x_3\ge 0$$

	x_2	x_3	a_1
	0	0	1
$x_3=6$	-1	1	0
$a_1=4$	3	0	1

	x_2	x_3	a_1
-4	-3	0	0
$x_3=6$	-1	1	0
$a_1=4$	3	0	1

		x_2	x_3	a_1
	0	0	0	1
x_3	$\frac{22}{3}$	0	1	1/3
x_2	4/3	1	0	1/3

$x_2=4/3$

$x_3=\frac{22}{3}$

$a_1=0$

$$y^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\5/3\end{pmatrix}$$ è ottima

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\4/3\\22/\ldots\end{pmatrix}$$ è ottima

$$\begin{pmatrix} \cdot & 7/3 \\ \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

$$8x_1 + 5x_2 \Big|_{x^{(1)}} = 6y_1 + 4y_2 \Big|_{y^{(1)}}$$

$$\frac{20}{3} = \frac{20}{3}$$

---

① Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 2x_1 - 3x_2 \ge 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0 \end{aligned}$$

risolverlo con l'algoritmo simplesso-duale

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 5\bar{x}_2 \\ & x_1 - \bar{x}_2 + s_1 = 6 \\ & 2x_1 + 3\bar{x}_2 - s_2 = 4 \\ & x_1 \ge 0,\ \bar{x}_2 \ge 0,\ s_1 \ge 0,\ s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 - 5x_2 & \qquad & \min \ \boxed{8}x_1 + \boxed{5}\bar{x}_2 \\ & x_1 + x_2 \le 6 & y_1) \quad & x_1 - \bar{x}_2 \ \boxed{\le} \ 6 \\ & 2x_1 - 3x_2 \ge 4 & y_2) \quad & 2x_1 + 3\bar{x}_2 \ \boxed{\ge} \ 4 \\ & x_1 \ge 0,\ \boxed{x_2 \le 0} & \rightarrow \quad & x_1 \ge 0,\ \bar{x}_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$\max\ -6\bar{y}_1 + 4y_2$

$-\bar{y}_1 + 2y_2 \leq 8$

$\bar{y}_1 + 3y_2 \leq 5$

$\boxed{\bar{y}_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0}$

(D)

$+s_1 \leq$

$+s_2 \leq$

$\max\ 6y_1 + 4y_2$

$x_1)\quad y_1 + 2y_2 \leq 8$

$x_2)\quad -y_1 + 3y_2 \leq 5$

$y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0$

$\min\ 8x_1 + 5\bar{x}_2$

$y_1)\quad x_1 - \bar{x}_2 \leq 6$

$y_2)\quad 2x_1 + 3\bar{x}_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0,\ \bar{x}_2 \geq 0$

$\min\ 8x_1 + 5\bar{x}_2$

$x_1 - \bar{x}_2 + s_1 = 6;$

$2x_1 + 3\bar{x}_2 - s_2 = 4;$

$x_1 \geq 0,\ \bar{x}_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$

$\min\ 8x_1 + 5\bar{x}_2$

$x_1 - \bar{x}_2 + s_1 = 6$

$-2x_1 - 3\bar{x}_2 + s_2 = -4$

$x_1 \geq 0,\ \bar{x}_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$

6 - 4

8

5

		x_1	$\bar{x}_2$	s_1	s_2
		8	5	0	0
s_1:	6	1	-1	1	0
→ s_2:	-4	-2	-3	0	1

$\min\left\{\left|\frac{8}{-2}\right|, \left|\frac{5}{-3}\right|\right\} = \min\left\{4, \frac{5}{3}\right\} = \frac{5}{3}$

	$(-20/3)$	$14/3$	0	0	$5/3$
s_1:	$22/3$	$5/3$	0	1	$-1/3$
x_2:	$4/3$	$2/3$	1	0	$-\frac{1}{3}$

$\cdot(5)$

$\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/3 \\ s_1 = \frac{22}{3} \\ s_2 = 0 \end{pmatrix}$

$$\max\ 3x_1 - 8x_2$$
$$3x_1 - x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$\boxed{\min} - 3x_1 + 8x_2$$
$$3x_1 - x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$\boxed{x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0}$$

IL PROBLEMA NON È IN FORMA CANONICA DUALE.

NON SI PUÒ APPLICARE IL METODO SIMPLESSO DUALE

NUOVO PROBLEMA

$$\max\ -3x_1 - 8x_2$$
$$3x_1 - x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$\boxed{\min}\ 3x_1 + 8x_2$$
$$3x_1 - x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$\boxed{x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0}$$

✓

$$\min\ 3x_1 + 8x_2$$
$$3x_1 - x_2 - s_1 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + s_2 = 4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$$

FORMA STANDARD

$$\min\ 3x_1 + 8x_2$$
$$-3x_1 + x_2 + s_1 = -8$$

APPLICO IL

$2x_1 + x_2 + s_2 = 7$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$

SIMPLESSO DUALE

$j=1$

	x_1	x_2	s_1	s_2
	3	8	0	0
$s_1 = -8$	$\boxed{-3}$	1	1	0
$s_2 = 5$	2	1	0	1
	$i=1$	$i=2$		

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ è ammissibile?

Risposta: NO

RICERCO LA VARIABILE USCENTE DALLA BASE: VERIFICO, QUINDI, QUALE VARIABILE HA VALORE NEGATIVO. PRENDO LA PIÙ NEGATIVA IN CASO DI PRESENZA DI PIÙ VALORI NEGATIVI. SCELGO, QUINDI, $s_1 = -8$. SCELGO LA VARIABILE ENTRANTE IN BASE TRA QUELLE FUORI DALLA BASE TALE CHE IL RATIO TEST

$$\min_{i \text{ colonne delle var. fuori dalla base}} \left\{ \left| \frac{c_i}{a_{ji}} \right| \right\}$$

J = var. variabile uscente dalla base, $a_{ji} < 0$.

$\exists$ una sola $a_{ji} < 0$, la selezioniamo, e le assegno il ruolo di pivot. A questo punto procedo come se stessi nel simplesso primale tradizionale.

$j=1$

	x_1	x_2	s_1	s_2
	3	8	0	0
$s_1 = -8$	-3	1	1	0
$s_2 = 5$	2	1	0	1

PIVOT = -3

		$i=1$ x_1	$i=2$ x_2	s_1	s_2
	-8	0	9	1	0
x_1	$8/3$	1	$-1/3$	$-1/3$	0
s_2	$-4/3$	0	$5/3$	$2/3$	1

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 0 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

È ammissibile?

<u>NO</u>

Scelgo la variabile più negativa da fare uscire dalla base, i.e., $s_2 = -\frac{4}{3}$, e cerco la variabile non in base da far entrare in base. (x_2, s_1)

Non esistendo una tale variabile (le a_{rj}: r = riga della variabile in base uscente e j sono le colonne delle variabili non in base sono tutte non negative), concludiamo che il nostro problema è vuoto (la sua regione ammissibile è vuota)

$3x_1 - x_2 \geq 8$

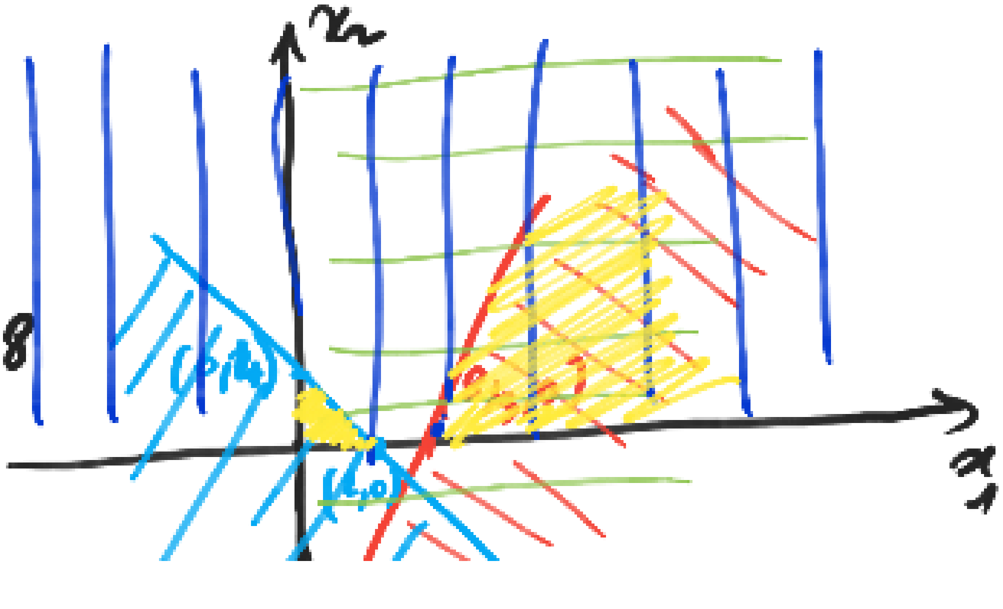
$2x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

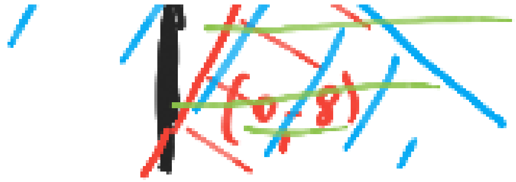
$x_2 \leq 3x_1 - 8$

$x_2 \leq 4 - 2x_1$

$x_1 \geq 0$



$x_2 \geq 0$



Il problema è vuoto ✓