
Testi di esame precedenti a.a. e soluzioni

1 Problemi

Problema 4.1: Sia $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ l'insieme delle cifre decimali, e sia $\mathcal{P}(D)$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in D . Dimostrare che l'insieme $\mathcal{P}(D)$ è numerabile.

Problema 4.2: Sia \mathcal{M} l'insieme delle matrici quadrate ad elementi nell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dimostrare che \mathcal{M} è numerabile.

Problema 4.3: Sia $\mathcal{P}(x)$ l'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti interi. Ad esempio, il polinomio $-3x^4 + x^2 - 1$ è un elemento di $\mathcal{P}(x)$. Dimostrare che $\mathcal{P}(x)$ è numerabile e rispondere alla domanda seguente: perché, invece, l'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali non è numerabile?

Suggerimento: come è possibile rappresentare un polinomo in forma di stringa?

Problema 4.4: Dimostrare che l'insieme dei polinomi a due variabili con coefficienti interi è numerabile.

Problema 4.5: Dimostrare che l'insieme dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite con coefficienti interi è numerabile.

2 Soluzioni

Soluzione del problema 4.1

Sia $p(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n$ un qualunque elemento in $\mathcal{P}(D)$ e consideriamo la seguente funzione che associa un numero naturale a ciascun polinomio in $\mathcal{P}(D)$:

$$f(p(x)) = f(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n) = d_0 + 10d_1 + 10^2d_2 + \dots + 10^n d_n.$$

Mostriamo ora che $f : \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathbb{N}$ è una biezione.

- Per ogni numero naturale n esiste un elemento $p_n(x) \in \mathcal{P}(D)$ tale che $f(p_n(x)) = n$: infatti, è sempre possibile esprimere n nella forma $a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^ka_k$, per un opportuno $k \geq 0$, dove a_0, a_1, \dots, a_k sono cifre comprese fra 0 e 9; quindi, il polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ è tale che $f(p_n(x)) = n$. Questo prova che f è suriettiva.
- Siano $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$ due elementi di $\mathcal{P}(D)$ tali che $p(x) \neq q(x)$.
Se $n < k$ allora $f(p(x)) < f(q(x))$, mentre se $n > k$ allora $f(p(x)) > f(q(x))$: in entrambi i casi $f(p(x)) \neq f(q(x))$.
Resta da analizzare il caso $n = k$: in questo caso, poiché $p(x) \neq q(x)$, deve esistere almeno un indice $1 \leq i \leq n$ tale che $a_i \neq b_i$. Sia i_{\max} il massimo indice tale che $a_{i_{\max}} \neq b_{i_{\max}}$ (ossia, per ogni $j > i_{\max}$ accade che $a_j = b_j$). Di nuovo, se $a_{i_{\max}} < b_{i_{\max}}$ allora $f(p(x)) < f(q(x))$, altrimenti $f(p(x)) > f(q(x))$: in entrambi i casi $f(p(x)) \neq f(q(x))$. Questo prova che f è iniettiva.

Soluzione del problema 4.2

Sia \oplus l'operatore di concatenazione fra stringhe. Definiamo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ nella maniera seguente: per ogni $M \in \mathcal{M}$, con n righe ed n colonne, sia

$$f(M) = M_{11} \oplus M_{12} \oplus \dots \oplus M_{1n} \oplus M_{21} \oplus M_{22} \oplus \dots \oplus M_{2n} \oplus \dots \oplus M_{n1} \oplus M_{n2} \oplus \dots \oplus M_{nn},$$

dove M_{ij} denota l'elemento che si trova nella riga i e nella colonna j . Osserviamo che, pur avendo definito f mediante operazioni fra stringhe, $f(M)$ può essere facilmente interpretato come un valore intero in quanto ottenuto concatenando cifre in $\{1, \dots, 9\}$. In effetti, una definizione equivalente per f è la seguente:

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 10^{n^2 - \left[\frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + i \right]} \cdot M_{ij}.$$

Resta da mostrare che f è una biezione fra \mathcal{M} ed un sottoinsieme di \mathbb{N} , ossia che, per ogni coppia $M, M' \in \mathcal{M}$ con $M \neq M'$, si ha $f(M) \neq f(M')$. Siano $M, M' \in \mathcal{M}$ con $M \neq M'$; allora, se n è il numero di righe e di colonne di M e n' è il numero di righe e di colonne di M' , sono possibili i casi seguenti:

- $n < n'$: allora $f(M)$ ha meno cifre di $f(M')$ e, quindi, $f(M) < f(M')$;
- $n > n'$: allora $f(M)$ ha più cifre di $f(M')$ e, quindi, $f(M) > f(M')$;
- $n = n'$: allora, poiché $M \neq M'$, esistono i e j compresi fra 1 ed n tali che $M_{ij} \neq M'_{ij}$. Allora, la cifra in posizione $(n-i) + (n-j)$ di $f(M)$ è diversa dalla cifra in posizione $(n-i) + (n-j)$ di $f(M')$ e, quindi $f(M) \neq f(M')$.

In conclusione, abbiamo mostrato che f associa interi distinti a matrici distinte, ossia, che \mathcal{M} è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di \mathbb{N} . Questo prova che \mathcal{M} è numerabile.

Soluzione del problema 4.3

Costruiamo una biezione f_S fra l'insieme $\mathcal{P}(x)$ e un sottoinsieme delle parole (ossia, stringhe di lunghezza finita) sull'alfabeto $\{0, 1, \dots, 9, +, x\}$: poiché l'insieme delle parole su un alfabeto finito è numerabile, l'esistenza di tale biezione dimostra la numerabilità di $\mathcal{P}(x)$.

Allo scopo, sia \oplus l'operatore di concatenazione fra stringhe, sia $s(n)$ la rappresentazione in forma di stringa del numero naturale n (ad esempio, $s(44) = 44$) e sia $\sigma(z)$ la rappresentazione in forma di stringa dell'intero $z \in (\mathbb{Z})$ comprendente il suo segno: ad esempio, $\sigma(-146) = -146$ e $\sigma(44) = +44$.

Consideriamo un elemento $p \in \mathcal{P}(x)$: $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, con $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{Z}$ per $i = 0, \dots, n$. Allora,

$$f_S(p) = \sigma(a_0) \oplus \sigma(a_1) \oplus x \oplus \sigma(a_2) \oplus x \oplus s(2) \oplus \dots \oplus \sigma(a_n) \oplus x \oplus s(n).$$

Ad esempio, $f_S(1 - 14x^2 + 16x^{110}) = +1 - 14x2 + 16x110$.

Banalmente, ad ogni polinomio $p \in \mathcal{P}(x)$ è possibile associare una stringa $f_S(p)$. Inoltre, per ogni coppia di elementi distinti p_1 e p_2 di $\mathcal{P}(x)$ si ha che $f_S(p_1) \neq f_S(p_2)$. Infine, che, poiché il grado di ciascun polinomio in $\mathcal{P}(x)$ è finito e poiché ciascun coefficiente di ciascun polinomio è un numero con un numero finito di cifre (essendo un intero), per ogni $p \in \mathcal{P}(x)$ la sua rappresentazione $f_S(p)$ è una stringa di lunghezza finita. Dunque, f_S è una biezione fra $\mathcal{P}(x)$ ed un sottoinsieme di un insieme numerabile e questo prova che $\mathcal{P}(x)$ è numerabile.

Se, invece, q è un polinomio nella variabile x a coefficienti *reali*, qualcuno dei suoi coefficienti potrebbe essere irrazionale e non ammettere una rappresentazione finita. La stringa rappresentante q non sarebbe, in questo caso, finita.

Soluzione del problema 4.4

Indichiamo con $\mathcal{P}(x, y)$ l'insieme dei polinomi a due variabili con coefficienti interi.

Sono possibili numerose soluzioni differenti a questo problema. In questa sede, ne presentiamo due.

- 1) Costruiamo una biezione f_S fra l'insieme $\mathcal{P}(x, y)$ e un sottoinsieme delle parole (ossia, stringhe di lunghezza finita) sull'alfabeto $\{0, 1, \dots, 9, +, x\}$, analogamente a quanto illustrato nella soluzione del problema 1 proposto all'appello del 15/09/2011: poiché l'insieme delle parole su un alfabeto finito è numerabile, l'esistenza di tale biezione dimostra la numerabilità di $\mathcal{P}(x, y)$.

Allo scopo, sia \oplus l'operatore di concatenazione fra stringhe, sia $s(n)$ la rappresentazione in forma di stringa del numero naturale n (ad esempio, $s(44) = 44$) e sia $\sigma(z)$ la rappresentazione in forma di stringa dell'intero $z \in (\mathbb{Z})$ comprendente il suo segno: ad esempio, $\sigma(-146) = -146$ e $\sigma(44) = +44$.

Consideriamo un elemento $p \in \mathcal{P}(x, y)$: $p = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j$, con $n, m \in \mathbb{N}$ e $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ per $i = 0, \dots, n$ e $j = 0, \dots, m$. Allora,

$$f_S(p) = \sigma(a_{00}) \oplus \sigma(a_{10}) \oplus x \oplus \dots \oplus \sigma(a_{n0}) \oplus x \oplus s(n) \oplus \sigma(a_{01}) \oplus y \oplus \dots \oplus \sigma(a_{0m}) \oplus y \oplus s(m) \oplus \sigma(a_{11}) \oplus x \oplus y \oplus \dots \oplus \sigma(a_{nm})$$

La dimostrazione che $f_S(p)$ è una biezione è analoga a quella presentata per la soluzione del problema citato ed è, pertanto, omessa.

- 2) Poiché ogni polinomio in $\mathcal{P}(x, y)$ è il prodotto di un polinomio in $\mathcal{P}(x)$ e di un polinomio in $\mathcal{P}(y)$, allora $\mathcal{P}(x, y)$ è il prodotto cartesiano di $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{P}(y)$, ossia, $\mathcal{P}(x, y) = \mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(y)$. Poiché $\mathcal{P}(x)$ è numerabile, come anche $\mathcal{P}(y)$, (problema 1 proposto all'appello del 15/09/2011) ed il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è numerabile, segue l'asserto.

Soluzione del problema 4.5

Indichiamo con $\mathcal{S}(x, y)$ l'insieme dei sistemi lineari a due variabili con coefficienti interi. Allora un elemento p di $\mathcal{S}(x, y)$ ha la forma

$$p = \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Sono possibili numerose soluzioni differenti a questo problema. In questa sede, ne presentiamo una.

Costruiamo una biezione f_S fra l'insieme $\mathcal{S}(x, y)$ e un sottoinsieme delle parole (ossia, stringhe di lunghezza finita) sull'alfabeto $\{0, 1, \dots, 9, +, -, =, x, y, *\}$. analogamente a quanto illustrato nella soluzione del problema 1 proposto all'appello del 15/09/2011: poiché l'insieme delle parole su un alfabeto finito è numerabile, l'esistenza di tale biezione dimostra la numerabilità di $\mathcal{S}(x, y)$.

Allo scopo, sia \oplus l'operatore di concatenazione fra stringhe, sia $\sigma(z)$ la rappresentazione in forma di stringa dell'intero $z \in (\mathbb{Z})$ comprendente il suo segno: ad esempio, $\sigma(-146) = -146$ e $\sigma(44) = +44$.

Allora, l'elemento $p \in \mathcal{S}(x, y)$ descritto in (4.1) corrisponde alla parola

$$\sigma(a_1) \oplus x \oplus \sigma(b_1) \oplus y \oplus = \oplus \sigma(b_1) \oplus * \oplus \sigma(a_2) \oplus x \oplus \sigma(b_2) \oplus y \oplus = \oplus \sigma(c_2).$$

La dimostrazione che la corrispondenza appena descritta fra sistemi e parole è una biezione è analoga a quella presentata per la soluzione del problema citato ed è, pertanto, omessa.