

Quiz sui linguaggi CF

PROF. GIORGIO GAMBOSI

A.A. 2018-2019

Problema 1: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} , dove S, NP, VP, PP, A sono i simboli non terminali e $a, the, boy, girl, flower, touches, sees, likes, with$ sono i simboli terminali:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow NPVP \\ NP &\rightarrow AN \mid VPPP \\ VP &\rightarrow V \mid VNP \mid VPPP \\ PP &\rightarrow PNP \\ A &\rightarrow a \mid the \\ N &\rightarrow boy \mid girl \mid flower \\ V &\rightarrow touches \mid likes \mid sees \\ P &\rightarrow with \end{aligned}$$

Mostrare un albero sintattico della stringa *agirltouchesaboywithaflower*.

Problema 2: Si consideri la seguente grammatica context free G :

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid 1 \mid 2 \mid 3$$

Mostrare gli alberi sintattici della stringa $3 - 2 - 1$.

Problema 3: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0, n \neq m\}$ sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Problema 4: Dimostrare che la grammatica definita in risposta al problema precedente effettivamente genera il linguaggio dato.

Problema 5: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{1^n + 1^m = 1^{n+m} \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ sull'alfabeto $\Sigma = \{1, +, =\}$.

Problema 6: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contiene almeno 3 } b\}$.

Problema 7: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ha lunghezza dispari, il simbolo centrale è } b, \text{ e il primo e l'ultimo simbolo sono uguali}\}$.

Problema 8: Definire una grammatica CF che generi tutte le espressioni parentetiche corrette.

Problema 9: Definire una grammatica CF che generi tutte le espressioni regolari sull'alfabeto $\{0, 1\}$.

Problema 10: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{a^m b^n \mid n \leq m \leq 2n\}$.

Problema 11: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{w \mid w \in \{a, d\}^*, w \text{ ha un numero di } b \text{ doppio del numero di } a\}$. Mostrare gli alberi sintattici di *abaabaa* e di *babbaa* in tale linguaggio.

Problema 12: Definire una grammatica CF che generi il linguaggio di tutte le stringhe su $\{a, b\}$ che non sono palindromo.

Problema 13: Dimostrare che la grammatica definita in risposta al problema precedente effettivamente genera il linguaggio dato.

Problema 14: Descrivere il linguaggio generato dalla grammatica CF seguente:

$$S \rightarrow bS \mid Sa \mid aSb \mid \varepsilon$$

Problema 15: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n b a^{2n} b a^{3n} \mid n \geq 0\}$ su $\Sigma = \{a, b\}$ non è context free.

Problema 16: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}$ su $\Sigma = \{a, b, c\}$ non è context free.

Problema 17: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i < j < k\}$ su $\Sigma = \{a, b, c\}$ non è context free.

Problema 18: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{0^m 1^n \mid n = m^2\}$ su $\Sigma = \{0, 1\}$ non è context free.

Problema 19: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n \mid n \text{ è primo}\}$ su $\Sigma = \{a\}$ non è context free.

Problema 20: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^i b^j \mid j = i^2 \text{ su } \Sigma = \{a, b\}\}$ non è context free.

Problema 21: Utilizzare il *pumping lemma* per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^n b^n c^m \mid n \leq m \leq 2n\}$ su $\Sigma = \{a, b, c\}$ non è context free.

Problema 22: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \mid b$$

1. Mostrare (per induzione) che ogni stringa $w \in L(\mathcal{G})$ non contiene ba come sottostringa.
2. Descrivere il linguaggio $L(\mathcal{G})$.

Problema 23: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow ABC$$

$$A \rightarrow Sa \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow b \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow Cc$$

Derivare in \mathcal{G} le stringhe $aaccc$ e $aabccc$.

Problema 24: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow A \mid Ab$$

$$A \rightarrow a \mid ab \mid S$$

1. Mostrare che \mathcal{G} è ambigua individuando una stringa w e due diversi alberi sintattici di w .
2. Definire una grammatica \mathcal{G}' equivalente a \mathcal{G} e non ambigua.

Problema 25: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$S \rightarrow A \mid XY$$

$$X \rightarrow Ya \mid b$$

$$Y \rightarrow aX \mid b$$

1. Dare una definizione concisa del linguaggio $L(\mathcal{G})$ generato da \mathcal{G} .
2. Mostrare che \mathcal{G} è ambigua individuando una stringa w e due diversi alberi sintattici di w .
3. Definire una grammatica \mathcal{G}' equivalente a \mathcal{G} e non ambigua.

Problema 26: Sia \mathcal{G} una grammatica CF in Forma Normale di Chomsky. Sia $w \in L(\mathcal{G})$ una stringa di lunghezza n . Qual è la lunghezza di una derivazione di w ?

Problema 27: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow a \mid C \\ B &\rightarrow b \mid C \\ C &\rightarrow CDE \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow ab \mid A \mid B \end{aligned}$$

Semplificare \mathcal{G} fino ad ottenere una grammatica \mathcal{G}' equivalente in CNF.

Problema 28: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AAS \mid A \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow 0A1 \mid 0B1 \\ B &\rightarrow B1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Semplificare \mathcal{G} fino ad ottenere una grammatica \mathcal{G}' equivalente in CNF, eccetto che per la generazione della stringa ε .

Problema 29: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbb \mid T \\ T &\rightarrow bTaa \mid S \mid \varepsilon \end{aligned}$$

1. Derivare una grammatica CF \mathcal{G}' priva di ε -produzioni e di produzioni unitarie e tale che $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$
2. Derivare da \mathcal{G}' una grammatica \mathcal{G}'' in Forma Normale di Chomsky tale che $L(\mathcal{G}'') = L(\mathcal{G}')$
3. Derivare da \mathcal{G}'' una grammatica \mathcal{G}''' in Forma Normale di Greibach tale che $L(\mathcal{G}''') = L(\mathcal{G}'')$
4. Mostrare una derivazione di $abaabb$ per ognuna delle grammatiche derivate.

Problema 30: Si consideri la seguente grammatica context free \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aEb \mid aaC \mid AA \\ A &\rightarrow BC \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow aB \mid a \\ C &\rightarrow Ca \mid Cb \\ D &\rightarrow a \mid c \end{aligned}$$

Derivare una grammatica equivalente a \mathcal{G} e priva di simboli inutili.

Problema 31: Dimostrare che se L è un linguaggio CF allora il linguaggio $\text{prefix}(L) = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è un prefisso di } x\}$ è CF.

Problema 32: Dimostrare che se L è un linguaggio CF allora il linguaggio $L^R = \{w \mid \exists x \in L, w \text{ è pari a } x \text{ rovesciata}\}$ è CF.

Problema 33:(Prova d'esame del 30-1-2006). Mostrare che il linguaggio $L = \{a^n b^m \mid n = 2m + 1\}$ è context free.

Problema 34:(Prova d'esame del 30-1-2006). Ridurre la seguente grammatica in Forma Normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABS \mid AA \mid A \mid a \\ A &\rightarrow aAb \mid aBb \mid B \\ B &\rightarrow Bb \mid b \end{aligned}$$

Problema 35:(Prova d'esame del 24-2-2006). Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ tale che per ogni stringa $\sigma \in L$ si ha $\#_a(\sigma) = \#_b(\sigma) + \#_c(\sigma)$ (dove $\#_a(\sigma)$, $\#_b(\sigma)$, $\#_c(\sigma)$ sono il numero di caratteri a, b, c in σ).

Il linguaggio è regolare? Motivare la risposta.

Il linguaggio è context-free? Motivare la risposta.

Problema 36:(Prova d'esame del 24-2-2006). Mostrare che la grammatica seguente è ambigua.

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + E \mid E * E \mid I \\ I &\rightarrow a \mid b \mid c \end{aligned}$$

Problema 37:(Prova d'esame del 4-7-2006). Sia \mathcal{G} una grammatica in CNF (Forma Normale di Chomsky). Mostrare che, per ogni stringa $w \in L(\mathcal{G})$, tutte le possibili derivazioni di w hanno la stessa lunghezza. Mostrare inoltre la relazione tra la lunghezza di una derivazione e la lunghezza $n = |w|$ della stringa.

Problema 38:(Prova d'esame del 13-9-2006). Dimostrare che il linguaggio $\{a^n b^n c^m \mid n \leq m \leq 2m\}$ non è context free.

Problema 39:(Prova d'esame del 13-9-2006). Ridurre la seguente grammatica in forma normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABa \\ A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow baB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Problema 40:(Prova d'esame del 18-6-2007). Ridurre la seguente grammatica in forma normale di Chomsky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aEb \mid aaC \mid AA \\ A &\rightarrow BC \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow aB \mid a \\ C &\rightarrow Ca \mid Cb \\ D &\rightarrow a \mid c \end{aligned}$$

Problema 41:(Prova d'esame dell'11-7-2007). Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b\}^*$ tale che $\sigma \in L$ se e solo se $\sigma \in \{a, b\}^*$ e σ non è palindroma. L è context free? Motivare la risposta.

Problema 42:(Prova d'esame del 12-9-2007). Definire una grammatica context free che generi il linguaggio $L = \{a^n b^m, n \geq 0, m \geq 0, n \neq m\}$.

Problema 43:(Prova d'esame del 12-9-2007). Mostare che la grammatica seguente, con assioma S , è ambigua:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \\ X &\rightarrow Ya \mid b \\ Y &\rightarrow aX \mid b \end{aligned}$$

Problema 44:(Prova d'esame del 12-9-2007). Si consideri il linguaggio $L = \{a^n b a^{2n} b a^{3n}, n \geq 0\}$. L è context free? Motivare la risposta.

Problema 45:(Prova d'esame del 24-1-2008). Dato l'alfabeto $\Sigma = \{(\,,\,),\,a,\,b\}$, definire una grammatica context free che generi tutte le stringhe corrispondenti a espressioni parentetiche bilanciate su Σ .

Problema 46:(Prova d'esame del 24-1-2008). Sia data la grammatica seguente, con assioma S .

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABa \\ A &\rightarrow aAbb \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bB \mid A \mid b \end{aligned}$$

Derivare una grammatica in CNF equivalente a G .

Problema 47:(Prova d'esonero del 25-2-2015). Si definisca una grammatica context free che generi il linguaggio $L = \{a^r b^s c^t \mid t = r - s\}$.

Problema 48:(Prova d'esonero del 9-2-2016). Si definisca una grammatica in Forma Normale di Chomsky che generi il seguente linguaggio.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid |w| \text{ pari e } w \text{ inizia e termina con lo stesso carattere}\}$$

Problema 49:(Prova d'esonero del 9-2-2016). Mostrare che la seguente grammatica è ambigua, individuando una stringa con due diversi alberi sintattici (o derivazioni sinistre)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab|aaB \\ A &\rightarrow a|Aa \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Si descriva il linguaggio generato e si definisca una grammatica equivalente non ambigua.

Problema 50:(Prova d'esonero del 4-3-2016). Si definisca una grammatica in CNF equivalente alla seguente

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A0|1B1|BB \\ A &\rightarrow C \\ B &\rightarrow S|A \\ C &\rightarrow S|\varepsilon \end{aligned}$$

Problema 51:(Prova d'esonero del 18-7-2016). Sia dato il linguaggio

$$L = \{a^n b^m c^k \mid k = |n - m|\}$$

Definire una grammatica context free che generi il linguaggio. Discutere se la grammatica risultante è ambigua.

Problema 52:(Prova d'esame del 17-2-2016). Verificare se il linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i < j \wedge i < k\}$$

è context free o meno.