

Il Problematico Potere dei Simboli Sulla Mente Umana

Come scriviamo i numeri?

Leonardo Tamiano

I simboli ci ingannano

Cosa pensate quando vedete i seguenti simboli?

10

La maggior parte delle persone avrà sicuramente fatto
la seguente associazione

10 \longrightarrow numero dieci

Alcuni informatici potrebbero invece aver fatto quest'altra associazione.

10 \longrightarrow numero due

Chi, dei due, ha ragione?

La persona comune, o l'informatico?

In realtà, nessuno dei due.

Qual è il problema?

Il fatto che **la stessa sequenza di simboli (10) ha una quantità infinità di potenziali interpretazioni.**



Ok, cerchiamo di capirci qualcosa.

La necessità dei simboli

Tra tutte le tecnologie scoperte dall'umanità, a partire dal fuoco e dagli strumenti costruiti con la pietra, il **simbolo** è forse stata la tecnologia più significativa di sempre.

Tramite il simbolo infatti l'essere umano è in grado di manipolare concetti tanto astratti quanto potenti.

Tra le tante cose, il simbolo ha permesso all'uomo di:

- **Creare modelli della realtà** ed utilizzare questi modelli per imporre (parzialmente) la propria volontà all'ambiente circostante.
- **Gestire le informazioni**, sempre in aumento, di società sempre più complesse.

Concentriamoci in particolare sul secondo punto:
la gestione delle informazioni.

Nelle società primitive le informazioni erano molto più semplici di quelle presenti nel modo moderno.

In ogni caso, la corretta gestione di tali informazioni era tanto critica quanto lo è tutt'ora.

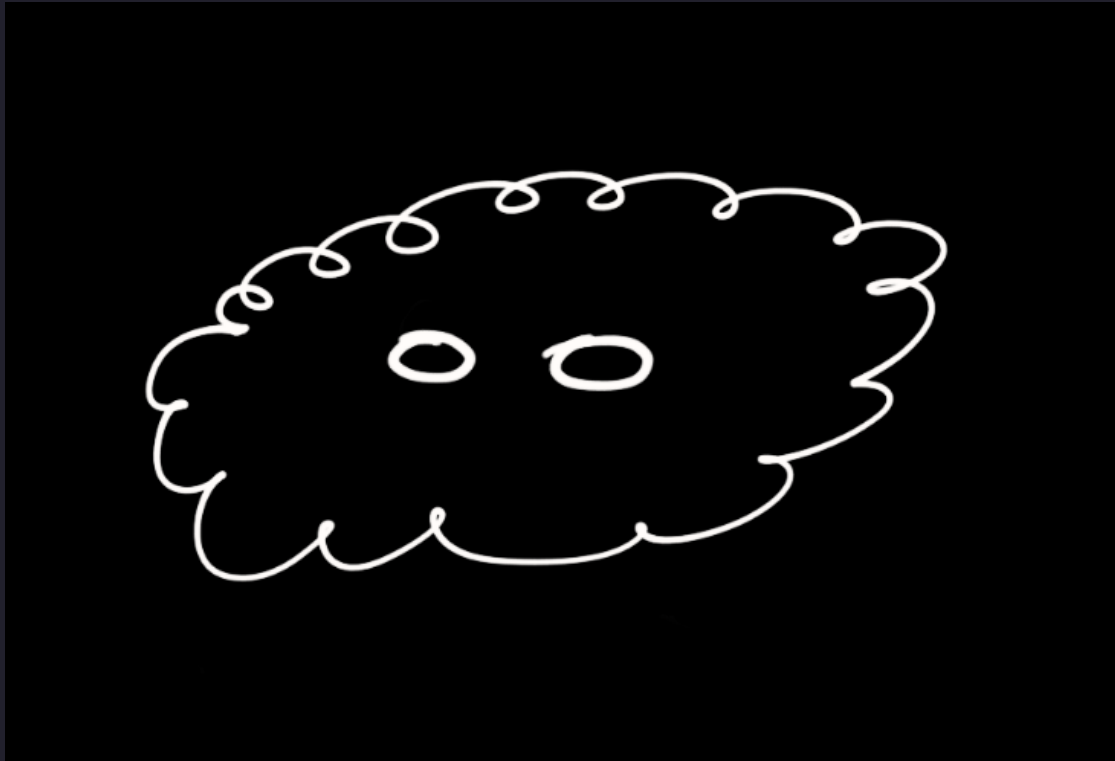
La scrittura ha permesso all'uomo di inventare forse la più triste ma necessaria realtà: la **burocrazia**.

Tra i tanti compiti della burocrazia, c'è sicuramente anche quello di **contare** (scorte di cibo, quantità di armi, e via dicendo).

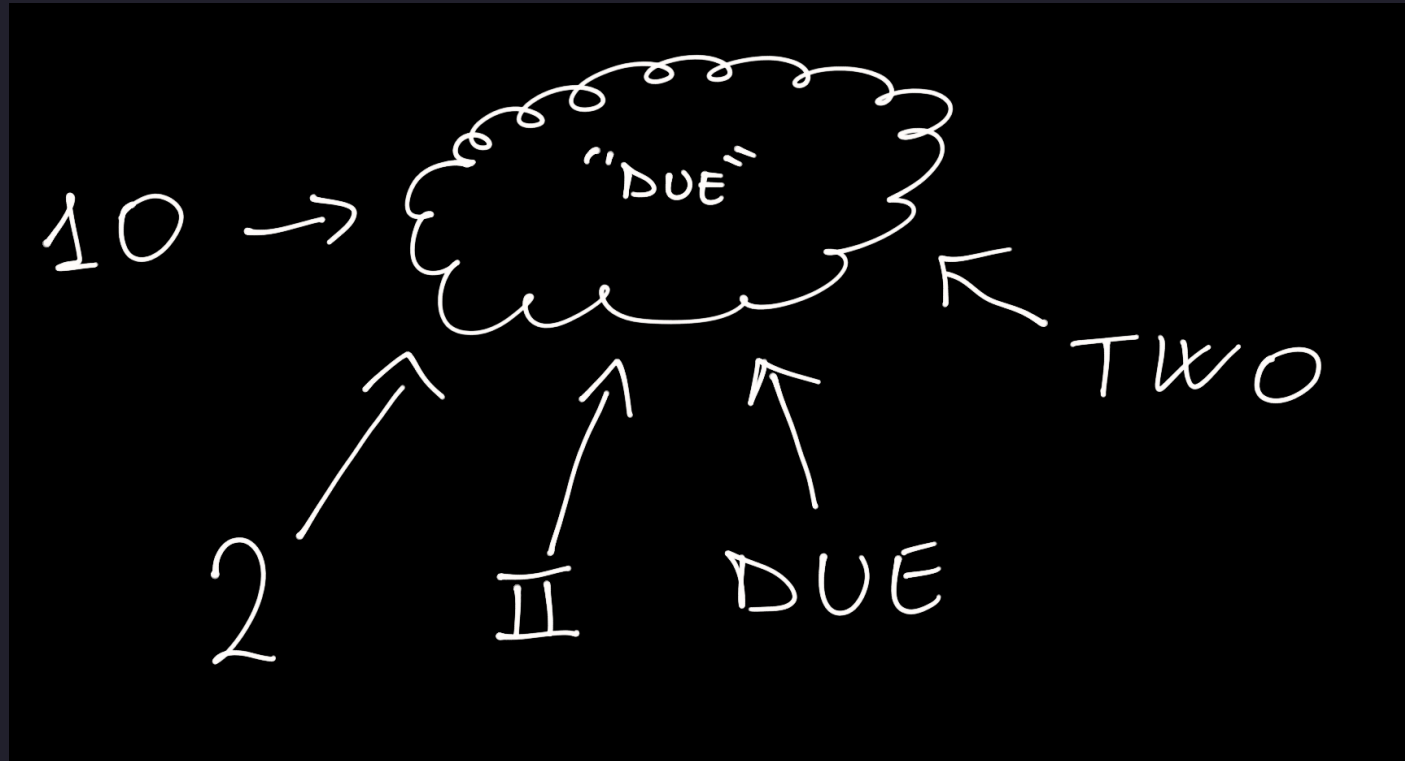
Per **contare**, è necessario inventare una **notazione numerica**, ovvero un modo per **rappresentare** delle **quantità numeriche**.

I **numeri** sono concetti intuitivi ed astratti, che eludono di mostrarsi direttamente.

Esempio: Non esiste un modo per far vedere esattamente che cos'è, ad esempio, il numero due.



Possiamo solo **rappresentare** tale numero in modo indiretto tramite dei **simboli**.



Detto altrimenti,

I numeri non possono essere visti, ma solo descritti.

Come possiamo creare una notazione che ci permetta
di gestire e relazionare tra loro numeri sempre più
grandi?

La notazione non-posizionale

Il modo in cui siamo stati abituati a scrivere i numeri
non è per niente banale.

Consideriamo, ad esempio, il modo in cui i Romani scrivevano i numeri.

Notazione numerica dei Romani (1/5)

Avevano associato ad una serie di simboli delle quantità numeriche astratte.

I \longrightarrow numero uno

V \longrightarrow numero cinque

X \longrightarrow numero dieci

⋮

Notazione numerica dei Romani (2/5)

Per esprimere numeri non direttamente esprimibili con un solo simbolo, **concatenavano** vari simboli tra loro fino a quando la somma dei valori associati ai vari simboli rifletteva il numero che si voleva rappresentare.

Notazione numerica dei Romani (3/5)

III \longrightarrow tre volte I \longrightarrow numero tre

VV \longrightarrow due volte V \longrightarrow numero dieci

XXXX \longrightarrow quattro volte X \longrightarrow numero quarant

Notazione numerica dei Romani (4/5)

Nel corso del tempo sono state poi introdotte delle regole extra per semplificare la scrittura.

IV \longrightarrow numero quattro

IX \longrightarrow numero nove

Notazione numerica dei Romani (5/5)

In ogni caso, l'essenza del sistema di notazione utilizzato dai Romani per rappresentare i simboli è il fatto che

Il valore di ogni simbolo nell'interpretazione di un numero è sempre lo stesso, e non cambia rispetto alla posizione che il simbolo assume nella sequenza di simboli

Per questo motivo il sistema dei Romani è detto
non-posizionale.

E noi, invece?

Come scriviamo noi i numeri?

Che caratteristiche ha il nostro sistema di notazione numerica?

La notazione posizionale

Esattamente come hanno fatto i Romani, anche a noi ci è stato insegnato di associare a dei particolari simboli, delle particolari quantità numeriche astratte

0 \longrightarrow numero zero $()$

1 \longrightarrow numero uno (\circ)

2 \longrightarrow numero due $(\circ \ \circ)$

\vdots

9 \longrightarrow numero nove $(\circ \ \circ \ \dots \ \circ \ \circ \ \circ)$

Questi simboli sono dette **cifre**.

Sono due le caratteristiche che differenziano il nostro sistema di notazione da quello utilizzato dai romani:

- La presenza dello **zero**, indicato con 0.
- Il fatto che il **valore delle cifre**, ovvero il numero a cui la cifra fa riferimento, **dipende dalla posizione** che la cifra assume nella sequenza di simboli.

Nell'esempio che sta per seguire, dimentichiamoci di tutto e utilizziamo solamente ciò che ci viene insegnato nelle scuole elementari.

Esempio: Consideriamo i simboli 1337.

Se leggiamo tale sequenza da destra verso sinistra, abbiamo che la prima cifra è 7, mentre l'ultima è 1.

Notiamo che nel numero appare due volte la cifra 3.

Ma queste due occorrenze della stessa cifra, hanno lo stesso valore?

Esempio: Consideriamo i simboli 1337.

No, a scuola ci viene insegnato che le due occorrenze di 3 fanno riferimento a numeri diversi.

Abbiamo infatti la seguente associazione tra le cifre e i numeri associati a ciascuna cifra,

	7	→	numero sette
(primo)	3	→	numero trenta
(secondo)	3	→	numero trecento
	1	→	numero mille

Esempio: Consideriamo i simboli 1337.

Il numero associato all'intera sequenza di simboli è poi ottenuto **sommando** i numeri associati a ciascuna cifra.

mille + trecento + trenta + sette

Esempio: Consideriamo il numero 1337.

Simbolicamente siamo abituati a scrivere

$$\begin{aligned} 1337 &= 1000 + 300 + 30 + 7 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Come è possibile vedere, **abbiamo espresso il nostro numero coma somma di potenze del numero dieci**, in cui ciascuna potenza è moltiplicata per una delle cifra da 0 a 9.

Ok, facciamo un passo indietro.

Il problema più importante da risolvere quando vogliamo definire un sistema di notazione numerico deriva dal seguente fatto:

I simboli che possiamo utilizzare sono finiti, eppure i numeri che vogliamo rappresentare sono infiniti.

Come è possibile, utilizzando una quantità finita di simboli, rappresentare una quantità infinita di numeri?

Come conquistare l'infinito (in modo efficiente)

Come abbiamo già detto, i Romani, al fine di risolvere questo problema, hanno scelto di **concatenare** i simboli a disposizione, mantenendo però il valore di ogni simbolo costante rispetto alla posizione che il simbolo ha nella sequenza.

$XVX \longrightarrow \text{dieci} + \text{cinque} + \text{dieci} = \text{venticinque}$

Questo tipo di notazione funziona bene fin tanto che si vuole **addizionare** o **sottrarre** dei numeri, ma diventa difficile quando si vuole **moltiplicare** o **dividere**.

Analizziamo invece come funziona il nostro sistema di notazione dei numeri, supponendo di lavorare con le solite cifre Arabe.

0, 1, 2, 3, ... 8, 9

Per i numeri da uno a nove, la traduzione è immediata, in quanto possiamo utilizzare proprio la cifra che rappresenta direttamente quel numero.

0 \longrightarrow numero zero

1 \longrightarrow numero uno

2 \longrightarrow numero due

⋮

9 \longrightarrow numero nove

Notiamo che **le cifre possono essere ordinate tra loro:**

- La 0 è il simbolo associato al numero più piccolo, che è proprio lo zero.
- Poi viene la cifra 1, associata al successivo numero, il numero uno.
- ...
- Alla fine abbiamo la cifra 9, associata al numero nove.

$$0 < 1 < \dots < 8 < 9$$

Come facciamo a rappresentare il numero dieci, che viene subito dopo il numero nove?

Per il nove possiamo utilizzare l'ultima cifra a nostra disposizione.

9

E per il dieci?

L'idea è quella di ripartire dalla prima cifra, lo 0.

Dato però che abbiamo fatto un "giro completo", dobbiamo segnarci questo fatto, e quindi aggiungiamo una cifra che ci segna esattamente questo: "quanti giri completi per la prima posizione abbiamo fatto".

In questo caso, dato che per effettuare un giro completo abbiamo utilizzato esattamente dieci cifre, abbiamo la seguente, valida interpretazione

$10 \longrightarrow$ numero dieci

In generale però, se avessimo utilizzato meno cifre (o più cifre), per effettuare un giro completo della prima posizione, allora la stessa sequenza di cifre (10), potrebbe non corrispondere al numero dieci.

Questa è l'idea di base su cui poi si costruiscono i sistemi posizionali non decimali, tra cui troviamo:

- **Il sistema binario.**
- **Il sistema ottale.**
- **Il sistema esadecimale.**

Ma ritorniamo all'esempio di prima.

Ok, in questo caso particolare abbiamo che

$10 \longrightarrow$ numero dieci

Come si continua a contare? Come rappresentiamo, ad esempio, il numero undici, o il numero dodici, e via dicendo?

L'idea è quella di utilizzare la prossima cifra disponibile rispetto alla posizione più a destra.

Troviamo dunque,

10 \longrightarrow numero dieci

11 \longrightarrow numero undici

12 \longrightarrow numero dodici

13 \longrightarrow numero tredici

14 \longrightarrow numero quattordici

15 \longrightarrow numero quindici

Continuando,

15 \longrightarrow numero quindici

16 \longrightarrow numero sedici

17 \longrightarrow numero diciassette

18 \longrightarrow numero diciotto

19 \longrightarrow numero diciannove

Notiamo che adesso abbiamo effettuato un altro giro completo. Nella posizione più a destra del numero siamo nuovamente arrivati alla cifra 9, l'ultima a nostra disposizione.

Come si continua?

Come al solito, si riparte da 0, ma prima si segna che si è fatto un altro giro completo andando a scegliere la prossima cifra disponibile per la posizione più a sinistra.

19 \longrightarrow numero diciannove

20 \longrightarrow numero venti

E di nuovo, tutto ciò si ripete...

20 \longrightarrow numero venti

21 \longrightarrow numero ventuno

22 \longrightarrow numero ventidue

⋮

29 \longrightarrow numero ventinove

29 → numero ventinove

30 → numero trenta

Cosa succede quando facciamo un "giro completo"
anche della posizione più a sinistra?

99 → numero novantanove

? → numero cento

L'idea è sempre la stessa:

Si pone a 0 la posizione più a destra, e, nella posizione situata alla sinistra di tale posizione, si va alla prossima cifra.

Dato però che in questo caso anche la posizione a sinistra è terminata, si pone a 0 anche questa, e si segna che si è fatto "un giro completo della seconda posizione" andando alla prossima cifra anche nella posizione alla sinistra di quella considerata.

99 \longrightarrow numero novantanove

100 \longrightarrow numero cento

(Alcuni) sistemi posizionali non decimali

Il sistema appena descritto è detto **sistema di notazione posizionale a base dieci** in quanto utilizza le tipiche dieci cifre Arabe.

0, 1, 2, 3, ... 8, 9

La base, in un sistema di notazione posizionale, è uguale al numero di simboli che abbiamo a disposizione per rappresentare una singola cifra

Il funzionamento di un sistema posizionale non necessita di utilizzare sempre la base dieci.

Possiamo utilizzare **altre basi**, ma il meccanismo sottostante sarà sempre lo stesso.

Lavorando in base dieci:

— — —		— 1 1		— 2 2		1 0 2
— — 0		— 1 2		— 2 3		1 0 3
— — 1		— 1 3		— 2 4		1 0 4
⋮		⋮		⋮		⋮
— — 8		— 1 9		— 9 9		1 0 9
— — 9		— 2 0		1 0 0		1 1 0
— 1 0		— 2 1		1 0 1		1 1 1

Il sistema binario (base due)

Nel **sistema binario** abbiamo solamente due simboli per rappresentare i nostri numeri.

0 , 1

Questo significa che il sistema binario è un sistema a base due.

Troviamo quindi le seguenti associazioni:

0 \longrightarrow numero zero

1 \longrightarrow numero uno

10 \longrightarrow numero due

11 \longrightarrow numero tre

100 \longrightarrow numero quattro

101 \longrightarrow numero cinque

110 \longrightarrow numero sei

111 \longrightarrow numero sette

1000 \longrightarrow numero otto

Lavorando in base due:

—	—	—	—		—	1	0	1		1	0	1	1	
—	—	—	0		—	1	1	0		1	1	0	0	
—	—	—	1		—	1	1	1		1	1	0	1	
—	—	1	0		1	0	0	0		1	1	1	0	
—	—	1	1		1	0	0	1		1	1	1	1	
—	1	0	0		1	0	1	0		1	0	0	0	0

Il sistema binario viene utilizzato nell'informatica per
svariate ragioni.

Tra le tante, troviamo anche la seguente:

La diretta connessione tra le due cifre del sistema binario e i due possibili stati in cui si può trovare un circuito elettrico

0 \longrightarrow la corrente NON passa

1 \longrightarrow la corrente passa

Il sistema ottale (base otto)

Un altro sistema di notazione che viene molto spesso utilizzato nel mondo dell'informatica è quello **ottale**.

Il sistema di notazione ottale è caratterizzato dall'utilizzare otto simboli.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Lavorando in base otto:

— — —		— 1 0		— 2 1		1 0 2
— — 0		— 1 2		— 2 2		1 0 3
— — 1		— 1 3		— 2 3		1 0 4
⋮		⋮		⋮		⋮
— — 6		— 1 6		— 7 7		1 0 7
— — 7		— 1 7		1 0 0		1 1 0
— 1 0		— 2 0		1 0 1		1 1 1

Ad esempio, per impostare i permessi di un file è possibile specificare una maschera di bit in formato ottale tramite il comando **chmod**

```
[leo@archlinux slides]$ touch new_file  
[leo@archlinux slides]$ ls -lha new_file  
-rw-r--r-- 1 leo users      0 22 nov 23.32 new_file
```

```
[leo@archlinux slides]$ chmod 565 new_file  
[leo@archlinux slides]$ ls -lha new_file  
-r-xrw-r-x 1 leo users 0 22 nov 23.32 new_file
```

565 → 101 110 101
→ r-x rw- r-x

```
[leo@archlinux slides]$ chmod 777 new_file  
[leo@archlinux slides]$ ls -lha new_file  
-rwxrwxrwx 1 leo users 0 22 nov 23.32 new_file
```

777 \longrightarrow **111 111 111**
 \longrightarrow **rwx rwx rwx**

Il sistema esadecimale (base sedici)

Un'altra base molto spesso utilizzata nell'informatica è la **base sedici**, caratterizzata dall'avere sedici simboli per rappresentare una cifra.

Per ottenere questo numero di simboli alle cifre arabe aggiungiamo le lettere dalla A alla F, ordinate secondo il loro **ordinamento lessicografico**

$$\underbrace{0, 1, 2, 3, \dots, 9}_{\text{dieci simboli}}, \underbrace{A, B, \dots, F}_{\text{sei simboli}}$$

Lavorando in base sedici:

—	—		—	6		—	<i>D</i>		1	4		1	<i>B</i>
—	0		—	7		—	<i>E</i>		1	5		1	<i>C</i>
—	1		—	8		—	<i>F</i>		1	6		1	<i>D</i>
—	2		—	9		1	0		1	7		1	<i>E</i>
—	3		—	<i>A</i>		1	1		1	8		1	<i>F</i>
—	4		—	<i>B</i>		1	2		1	9		2	0
—	5		—	<i>C</i>		1	3		1	<i>A</i>		2	1

Tra i vari contesti in cui si utilizzano i numeri esadecimali, troviamo anche i seguenti:

1. Per specificare i colori (ad esempio nei formati **RGB/RGBA**).
2. Per specificare gli indirizzi di memoria.


```
// RGBA, Red Green Blue Alpha
#define BACKGROUND_COLOR 0x000000FF
#define GRID_COLOR        0xFFFFFFFF
#define SNAKE_COLOR       0xEE72F100
```

Source: Snake in C (ft. SDL2) – 8/10 (Gestione colori)

```
gdb -q ./hello
```

```
(gdb) b main
```

```
(gdb) run
```

```
(gdb) x/32wx $esp
```

0xfffffd780:	0xfffffd7a0	0x00000000	0x00000000	0xf7dc0
0xfffffd790:	0x00000001	0x56556060	0x00000000	0xf7dc0
0xfffffd7a0:	0x00000001	0xfffffd844	0xfffffd84c	0xffffd
0xfffffd7b0:	0xfffffd7e4	0xf7ffdb78	0xf7f9b340	0xf7f91
0xfffffd7c0:	0x00000001	0x00000000	0xfffffd828	0xfffff
0xfffffd7d0:	0xf7ffcfe0	0x00000000	0x00000001	0x56556
0xfffffd7e0:	0x00000000	0xb75a2888	0xf0e6ec98	0x00000
0xfffffd7f0:	0x00000000	0x00000000	0x00000001	0x56556

Come (e dove) si scrive la base?

Abbiamo quindi capito che, prima di interpretare una sequenza di cifre per capire il numero a cui quelle cifre stanno facendo riferimento, abbiamo bisogno di capire la base utilizzata.

Nella quotidianità la base utilizzata è quasi sempre la base dieci.

Questo, probabilmente, deriva dal fatto che abbiamo due mani, ciascuna delle quali possiede cinque dita.

$$\text{cinque} + \text{cinque} = \text{dieci}$$

Altre civiltà però nel corso della storia hanno utilizzato altre basi, o perché contavano utilizzando altre parti del corpo, oppure perché contavano le stesse parti del corpo ma in modo diverso.

Per togliere ogni ambiguità e favorire la corretta interpretazione di una sequenza di cifre, l'ideale sarebbe quello di specificare, assieme alla sequenza di cifre, anche la base utilizzata.

Ci sono vari modi per fare questo.

Si possono utilizzare determinati simboli per specificare determinate basi.

$0x \longrightarrow$ base sedici

Si può scrivere il numero della base accanto al numero.

$(10)_{\text{base due}} \longrightarrow \text{numero due}$

$(10)_{\text{base dieci}} \longrightarrow \text{numero dieci}$

$(100)_{\text{base due}} \longrightarrow \text{numero quattro}$

$(100)_{\text{base dieci}} \longrightarrow \text{numero cento}$

Molto spesso la base è scritta utilizzando, implicitamente, la base dieci nel seguente modo

$(10)_2 \longrightarrow$ numero due

$(100)_2 \longrightarrow$ numero quattro

$(100)_{16} \longrightarrow$ numero duecentocinquantasei

Come funziona in generale?

Adesso che abbiamo visto qualche esempio concreto,
proviamo ad **astrarre** e cerchiamo di descrivere
generalmente il funzionamento dei sistemi di notazione
numerica posizionali.

La trattazione matematica delle proprietà di tali sistema è rimandata a futuri video.

In generale per lavorare con un sistema di notazione posizionale abbiamo bisogno di specificare la base b con cui vogliamo lavorare.

Il valore della base deve essere positivo, intero e $b > 1$.

Una volta fissata la base b dobbiamo fissare i particolari simboli da associare ai numeri compresi tra 0 e $b - 1$.

$s_0 \longrightarrow$ numero zero

$s_1 \longrightarrow$ numero uno

$s_2 \longrightarrow$ numero due

\vdots

$s_{b-2} \longrightarrow$ numero $b - 2$

$s_{b-1} \longrightarrow$ numero $b - 1$

A questo punto tramite l'**algoritmo di divisione euclidea** siamo in grado di scrivere qualsiasi numero in questa base.

L'algoritmo verrà trattato in un video successivo.

Sia n il numero che vogliamo rappresentare.

Per una proprietà dimostrabile dei numeri interi, abbiamo che **esistono sempre dei coefficienti** tali che

$$n = c_l \cdot b^l + c_{l-1} \cdot b^{l-1} + \dots + c_1 \cdot b^1 + c_0 + b^0$$

con

$$c_0, c_1, \dots, c_{l-1}, c_l \in \{0, \dots, b - 1\}$$

Detto altrimenti,

**possiamo rappresentare qualsiasi numero come una
somma di potenze della base scelta b .**

Esempio: Possiamo rappresentare il numero milletrecentotrentasette in base dieci come la seguente somma di potenze della base

$$1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

A questo punto, associamo a tale numero la seguente sequenza di simboli

1337 \longrightarrow numero milletrecentotrentasette

Le cifre arabe non sono speciali (e neanche arabe)

Notiamo che nella trattazione generale del sistema posizionale abbiamo assunto di lavorare con dei simboli generali s_0, \dots, s_{b-1} .

Questo significa che, per funzionare, il sistema posizionale non ha assolutamente bisogno di utilizzare le particolari cifre Arabe a cui siamo abituati.

In altre parole, non c'è nulla di speciale nei simboli

0, 1, 2, 3, ... 8, 9

ed è per convenzione e per motivi storici che oramai
sono diventati così comuni e così utilizzati per
rappresentare i numeri.

L'importante è avere un insieme finito di simboli **distinguibili**, e assegnare inizialmente a ciascuno di questi simboli un diverso intero compreso tra 0 e $b - 1$, dove b è la base scelta.

Conclusione

Dobbiamo stare attenti quando il nostro cervello in modo quasi automatico associa le cifre arabe ai numeri.

Durante questa associazione infatti il nostro cervello sta implicitamente utilizzando la base dieci, perché questo è il modo in cui siamo sempre stati abituati a scrivere i numeri.

Questo può essere problematico, in quanto esistono vari contesti in cui la base utilizzata non è la base dieci.

Cosa fare quindi?

Bisogna avere pazienza e riflettere su ciò che si sta leggendo, in modo da poterlo interpretare correttamente.

Dunque, che cosa significa?

10

Dipende.

L'unica cosa che possiamo dire è che vediamo due simboli: il simbolo 1, e poi il simbolo 0.

Cosa significano questi simboli poi è tutta un'altra questione.

