

FONDAMENTI DI INFORMATICA

03 - Come calcolavano i Romani?

TABLE OF CONTENTS

- Ripasso
- E tu, come calcoli?
- Il Sistema di Numerazione Romano
 - Somma
 - Sottrazione
 - Moltiplicazione
 - Divisione
- L'importanza della codifica

RIPASSO

Nei video precedenti abbiamo affrontato le seguenti tematiche:

- Che cos'è un bit?
- Perché utilizziamo i bit?
- Come possiamo costruire fisicamente un bit?
- Che cos'è una codifica?

Nell'ultimo video in particolare abbiamo introdotto il concetto di **codifica**, e abbiamo spiegato che **una codifica è una assegnazione di significato a sequenze di bit**

Per spiegare meglio il concetto di codifica abbiamo portato tre codifiche utilizzate:

- La codifica ASCII
- La codifica dei numeri
- La codifica RGB

Tabella ASCII

ASCII characters 0 thru 127.

Hex	Dec	Char	Hex	Dec	Char	Hex	Dec	Char	Hex	Dec	Char
0	0	C-@	20	32	SPC	40	64	@	60	96	`
1	1	C-a	21	33	!	41	65	A	61	97	a
2	2	C-b	22	34	"	42	66	B	62	98	b
3	3	C-c	23	35	#	43	67	C	63	99	c
4	4	C-d	24	36	\$	44	68	D	64	100	d
5	5	C-e	25	37	%	45	69	E	65	101	e
6	6	C-f	26	38	&	46	70	F	66	102	f
7	7	C-g	27	39	'	47	71	G	67	103	g
8	8	C-h	28	40	(48	72	H	68	104	h
9	9	TAB	29	41)	49	73	I	69	105	i
a	10	C-j	2a	42	*	4a	74	J	6a	106	j
b	11	C-k	2b	43	+	4b	75	K	6b	107	k
c	12	C-l	2c	44	,	4c	76	L	6c	108	l
d	13	RET	2d	45	-	4d	77	M	6d	109	m
e	14	C-n	2e	46	.	4e	78	N	6e	110	n
f	15	C-o	2f	47	/	4f	79	O	6f	111	o
10	16	C-p	30	48	0	50	80	P	70	112	p
11	17	C-q	31	49	1	51	81	Q	71	113	q
12	18	C-r	32	50	2	52	82	R	72	114	r
13	19	C-s	33	51	3	53	83	S	73	115	s
14	20	C-t	34	52	4	54	84	T	74	116	t
15	21	C-u	35	53	5	55	85	U	75	117	u
16	22	C-v	36	54	6	56	86	V	76	118	v
17	23	C-w	37	55	7	57	87	W	77	119	w
18	24	C-x	38	56	8	58	88	X	78	120	x
19	25	C-y	39	57	9	59	89	Y	79	121	y
1a	26	C-z	3a	58	:	5a	90	Z	7a	122	z
1b	27	ESC	3b	59	;	5b	91	[7b	123	{
1c	28	C-\	3c	60	<	5c	92	\	7c	124	
1d	29	C-]	3d	61	=	5d	93]	7d	125	}
1e	30	C-^	3e	62	>	5e	94	^	7e	126	~
1f	31	C-_	3f	63	?	5f	95	_	7f	127	DEL

Avevamo poi visto il modo in cui scriviamo i numeri tramite i simboli 0 e 1 utilizzando le potenze di 2

$$\begin{aligned} 00 &\longrightarrow b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 \\ &= 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &\longrightarrow b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

In generale, con due bit possiamo esprimere quattro numeri diversi

$$\underbrace{b_1 b_0}_{\text{sequenze di bit}} \longrightarrow \overbrace{b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0}^{\text{quantità numerica}} = b_1 \cdot 2^1 + b_0$$

$$00 \longrightarrow 0$$

$$01 \longrightarrow 1$$

$$10 \longrightarrow 2$$

$$11 \longrightarrow 3$$

In questo video torniamo indietro al tempo dell'**Impero Romano**, per chiederci:

Ma i Romani, come facevano i calcoli?

E TU, COME CALCOLI?

L'abilità di effettuare **calcoli matematici** si costruisce a partire da un'abilità ancor più primitiva:

saper contare

Fin da piccoli ci insegnano uno specifico modo di contare, che fa utilizzo di una specifica notazione.

Iniziamo da un alfabeto di simboli, le famose **cifre arabe**

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

EXTRA: Le cifre arabe sono in realtà state scoperte ed utilizzate da alcune società indiane. Noi (europei) le chiamiamo arabe in quanto le abbiamo imparate dagli arabi.

e iniziamo a calcolare andando ad utilizzare tutti i simboli a nostra disposizione

0 \rightarrow zero	, 5 \rightarrow cinque
1 \rightarrow uno	, 6 \rightarrow sei
2 \rightarrow due	, 7 \rightarrow sette
3 \rightarrow tre	, 8 \rightarrow otto
4 \rightarrow quattro	, 9 \rightarrow nove

Una volta finiti i simboli a nostra disposizione, ci spostiamo di una **posizione** a sinistra, andiamo al prossimo simbolo in quella posizione, e azzeriamo il conto nella posizione a destra.

9	,	10
19	,	20
29	,	30
⋮		

Qualche esempio...

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8
10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18
20 , 21 , 22 , 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28
30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38

Questa modalità di scrivere i numeri è chiamato **notazione posizionale** in quanto il valore dei simboli dipende dalla posizione in cui essi si trovano.

111

A partire da questo modo di scrivere i numeri, impariamo poi delle procedure, o degli algoritmi, che ci permettono di effettuare le quattro operazioni base dell'aritmetica:

- somma
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione

Non tutte le società hanno utilizzato questa notazione.
Anzi, l'introduzione di questa **tecnica** ha rappresentato
un punto di sblocco per svariate scoperte matematiche,
scientifiche, e tecnologiche.

Per capire l'utilità di questa notazione, che molto spesso diamo per scontato, è utile tornare indietro, e studiare diversi modi per **scrivere numeri, contare e fare calcoli.**

IL SISTEMA DI NUMERAZIONE ROMANO

Il sistema utilizzato dai romani per scrivere i numeri è un sistema di notazione **additivo**, nel quale ad ogni simbolo è associato un unico e fisso valore, e il valore complessivo di una sequenza di simboli è la somma dei valori dei singoli simboli.

Si parte da sette simboli di base, ciascuno associato ad un particolare numero

I \longrightarrow 1

V \longrightarrow 5

X \longrightarrow 10

L \longrightarrow 50

C \longrightarrow 100

D \longrightarrow 500

M \longrightarrow 1000

E in sequenze di simboli si somma il valore dei singoli
simboli

$$\text{IIIVXXLDM} \longrightarrow 3 + 5 + 10 + 10 + 50 + 500 + 1000 \\ = 1578$$

Nel corso degli anni è stata poi introdotta una notazione, detta **notazione sottrattiva**, che permetteva di scrivere determinati numeri come sottrazione piuttosto che come somma

- **Notazione additiva**

$$IIII \longrightarrow 4$$

- **Notazione sottrattiva**

$$IV \longrightarrow 5 - 1 = 4$$

Noi assumero di lavorare solamente in **notazione additiva**, in quanto è più semplice da gestire in modo **algoritmico**, e la notazione sottrattiva non aggiunge niente di speciale al sistema notazionale.

Dopo aver definito il significato dei simboli base e come questi sono combinati tra loro, arriva il momento di chiederci

come calcolavano i romani?

In particolare, siamo interessati alle **procedure**, o **algoritmi**, che utilizzavano per effettuare i quattro calcoli di base dell'aritmetica:

- **somma**
- **sottrazione**
- **moltiplicazione**
- **divisione**

NOTA: Quella che abbiamo appena introdotto è un'altra **codifica** per scrivere i numeri, che differisce da quella che utilizziamo noi.

Ho sviluppato una piccola calcoltrice romana che potete utilizzare per testare i successivi calcoli. La calcolatrice è disponibile al seguente URL

<https://project.leonardotamiano.xyz/roman-calculator>

SOMMA

Somma Romana (1/6)

Supponiamo di voler sommare i seguenti due numeri

$$\text{IIVXL} + \text{VXLC} = ?$$

Somma Romana (2/6)

Iniziamo concatenando tutti i simboli assieme

$$\text{IIVXL} + \text{VXLC} = \text{IIVXLVXLC}$$

Somma Romana (3/6)

Ordiniamo poi i vari simboli rispetto al loro valore

$$\begin{aligned} \text{IIVXL} + \text{VXLC} &= \text{IIVXLVXLC} \\ &= \text{IIVVXXLLC} \end{aligned}$$

Somma Romana (4/6)

Infine, semplifichiamo tramite le seguenti regole

$$\text{IIIII} \rightarrow \text{V}$$

$$\text{VV} \rightarrow \text{X}$$

$$\text{XXXXX} \rightarrow \text{L}$$

$$\text{LL} \rightarrow \text{C}$$

$$\text{CCCCC} \rightarrow \text{D}$$

$$\text{DD} \rightarrow \text{M}$$

Somma Romana (5/6)

Semplificando otteniamo

$$\begin{aligned} \text{IIVXL} + \text{VXLC} &= \text{IIVXLVXLC} \\ &= \text{IIVVXXLLC} \\ &= \text{IIXXXCC} \end{aligned}$$

Somma Romana (6/6)

E quindi abbiamo la nostra somma

$$\text{IIVXL} + \text{VXLC} = \text{IIXXXCC}$$

$$67 + 165 = 232$$

L'algoritmo per la **somma romana** è dunque il seguente

1. concatena i simboli dei due numeri
2. ordinali rispetto al loro valore
3. semplifica

SOTTRAZIONE

Anche per la **sottrazione** i romani avevo un algoritmo
alquanto **semplice**.

Sottrazione Romana (1/7)

Supponiamo di voler effettuare la seguente sottrazione

$$\text{CLXXXII} - \text{LXVIII} = ?$$

Sottrazione Romana (2/7)

Iniziamo andando ad eliminare simboli in comune tra le due espressioni

$$\text{CLXXXII} - \text{LXVIII} = \text{CXXX} - \text{VII}$$

Sottrazione Romana (3/7)

Continuando, espandiamo il simbolo **X** e riscriviamolo
come **VV**

$$\begin{aligned}\text{CLXXXII} - \text{LXVIII} &= \text{CXXX} - \text{VII} \\ &= \text{CXXVV} - \text{VII}\end{aligned}$$

Sottrazione Romana (4/7)

Eliminiamo altri simboli comuni

$$\begin{aligned}\text{CLXXXII} - \text{LXVIII} &= \text{CXXX} - \text{VII} \\ &= \text{CXXVV} - \text{VII} \\ &= \text{CXXV} - \text{II}\end{aligned}$$

Sottrazione Romana (5/7)

Questa volta espandiamo il simbolo V e lo scriviamo
come IIIII

$$\begin{aligned}\text{CLXXXII} - \text{LXVIII} &= \text{CXXX} - \text{VII} \\ &= \text{CXXVV} - \text{VII} \\ &= \text{CXXV} - \text{II} \\ &= \text{CXXIIIIII} - \text{II}\end{aligned}$$

Sottrazione Romana (6/7)

Eliminiamo i restanti simboli in comune

$$\begin{aligned}\text{CLXXXXII} - \text{LXVIII} &= \text{CXXX} - \text{VII} \\ &= \text{CXXVV} - \text{VII} \\ &= \text{CXXV} - \text{II} \\ &= \text{CXXIIIIII} - \text{II} \\ &= \text{CXXIII}\end{aligned}$$

Sottrazione Romana (7/7)

Dato che non ci sono più simboli da eliminare, abbiamo
il nostro risultato

$$\text{CLXXXII} - \text{LXVIII} = \text{CXXIII}$$

$$192 - 69 = 123$$

MOLTIPLICAZIONE

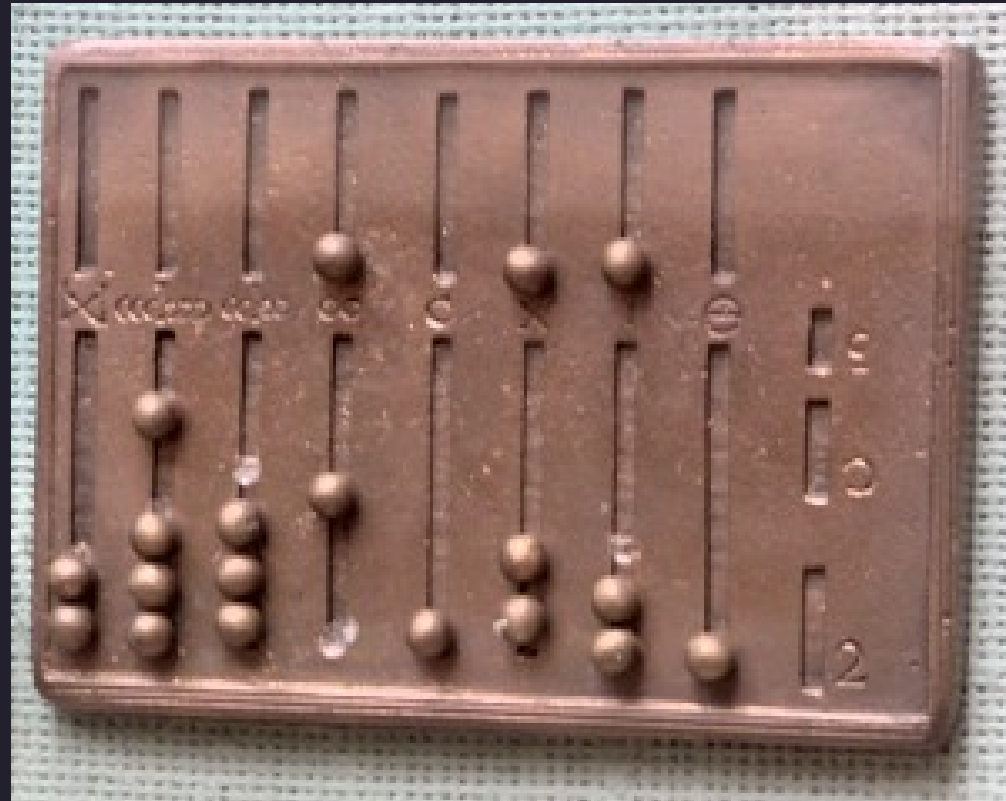
Per quanto riguarda la **moltiplicazione**, i romani utilizzavano un algoritmo non intuitivo seppur veloce per effettuare questo calcolo.

L'algoritmo, sorprendentemente, è molto simile alla **moltiplicazione** binaria, e sarà trattato in futuro video.

DIVISIONE

Per quanto riguarda la divisione invece, non esiste un algoritmo che lavorava direttamente sui numeri romani.

Per calcolare la divisione i romani utilizzavano un **abaco**, che implicitamente utilizzava una **notazione posizionale**.



L'IMPORTANZA DELLA CODIFICA

Come abbiamo visto, I romani riuscivano a calcolare somma, sottrazione e prodotto lavorando direttamente sui numeri romani, ma per gestire la divisione dovevano utilizzare un **abaco**.

Questo ci insegna un fatto fondamentale
dell'informatica:

**La codifica scelta va anche a determinare l'esistenza, o
meno, di algoritmi per effettuare calcoli in modo
efficace.**

La codifica romana dunque è limitante, in quanto non ci permette di effettuare la divisione in modo algoritmico. Questo significa che se utilizzassimo solo e soltanto la codifica romana, non potremmo automatizzare la divisione.

Per fortuna, abbiamo abbandonato la codifica romana e adesso utilizziamo una **codifica posizionale**, un nuovo modo di scrivere i numeri.

