Il modello di Lotka – Volterra

Il modello

Le equazioni di Lodka-Volterra forniscono un modello matematico bidimensionale che descrivere la dinamica di un ecosistema in cui interagiscono due specie di animali: prede e predatori.

Il sistema in considerazione è un sistema dinamico, in quanto la conformazione delle popolazioni varia al variare del tempo.

Paternità

Il modello fu proposto dal matematico italiano Volterra nel 1926 è la risposta ad un problema sollevato da Umberto D'Ancona , suo genero, che si occupava di studiare le popolazioni dei pesci nel mare Adriatico.

Il d'Ancona aveva infatti notato un consistente aumento di pesci *selaci* (pesci predatori) e aveva ipotizzato che ciò fosse legato alla diminuzione dell'attività di pesca a causa della guerra navale durante la prima guerra mondiale. La cosa gli era parsa strana e ne parlò con Vito Volterra, il quale riuscì a sviluppare un modello matematico in grado di spiegare il fenomeno.

Un anno prima il biofisico Alfred Lotka propose lo stesso modello.

Le scoperte di questi due studiosi furono riconosciute indipendenti e da questo il nome Lotka – Volterra, o più brevemente modello LV.

Il problema

Il problema viene affrontato supponendo che nell'habitat non vi siano interventi esterni, come ipotizzato dallo stesso Volterra.

Assumiamo che in assenza del predatore la preda possa svilupparsi indefinitamente.

Chiamiamo a il suo tasso di crescita rispetto a t, che è pari al tasso di nascita meno il tasso di mortalità per cause naturali, possiamo scrivere la legge di accrescimento della preda:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Questa è un' equazione differenziale risolvibile per separazione di variabili:

$$\frac{dx}{x} = adt$$

Integriamo ora i due membri con le condizioni iniziali t=0 e x=x0 e otteniamo:

$$x = x_0 e^{at}$$

Il problema – Le prede

Osserviamo che le prede crescono in modo esponenziale in assenza dei predatori.

Il problema

Introduciamo ora nell'habitat il predatore:

Il problema – I predatori

Si assume che i predatori possano nutrirsi solo di prede.

Da cui ne deriva che in assenza di prede il predatore non può far altro che estinguersi secondo il meccanismo:

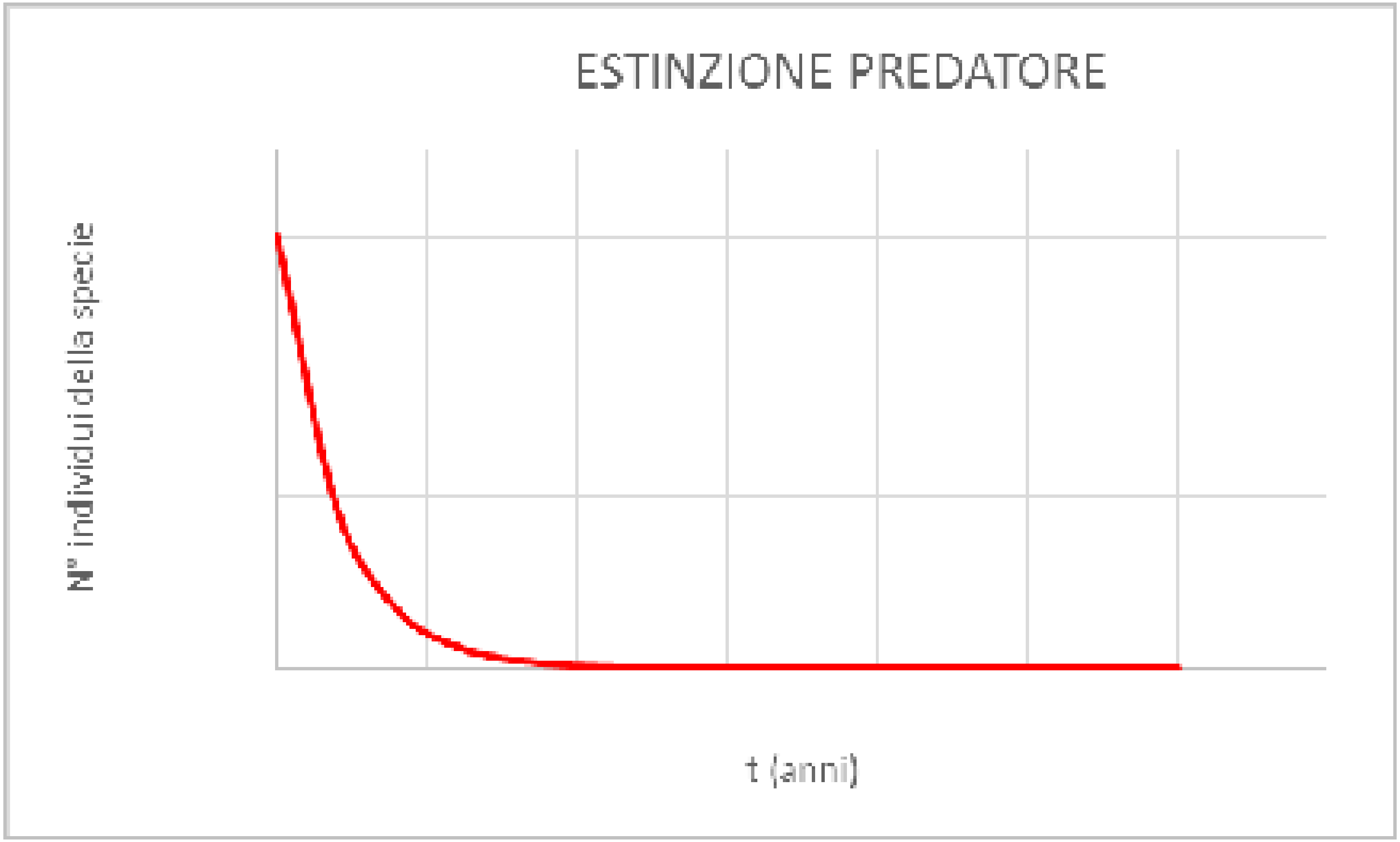
$$\frac{dy}{dt} = -dx$$

con d che rappresenta il tasso di mortalità del predatore per cause naturali.

Dualmente integrando otteniamo:

$$y = y_0 e^{-at}$$

Il problema – I predatori



Il problema

Immaginiamo ora un habitat dove convivono prede e predatori.

Se proviamo a introdurre prede e predatori nello stesso ambiente possiamo immaginare che i predatori toglieranno dall'ambiente un certo numero di prede per unità di tempo.

Una ipotesi ragionevole è che questo numero sia proporzionale al numero di prede e di predatori.

Ne risulta che il numero di prede si riduce secondo la formula:

$$-bxy$$

mentre il numero dei predatori cresce con un diverso coefficiente di proporzionalità:

$$+cxy$$

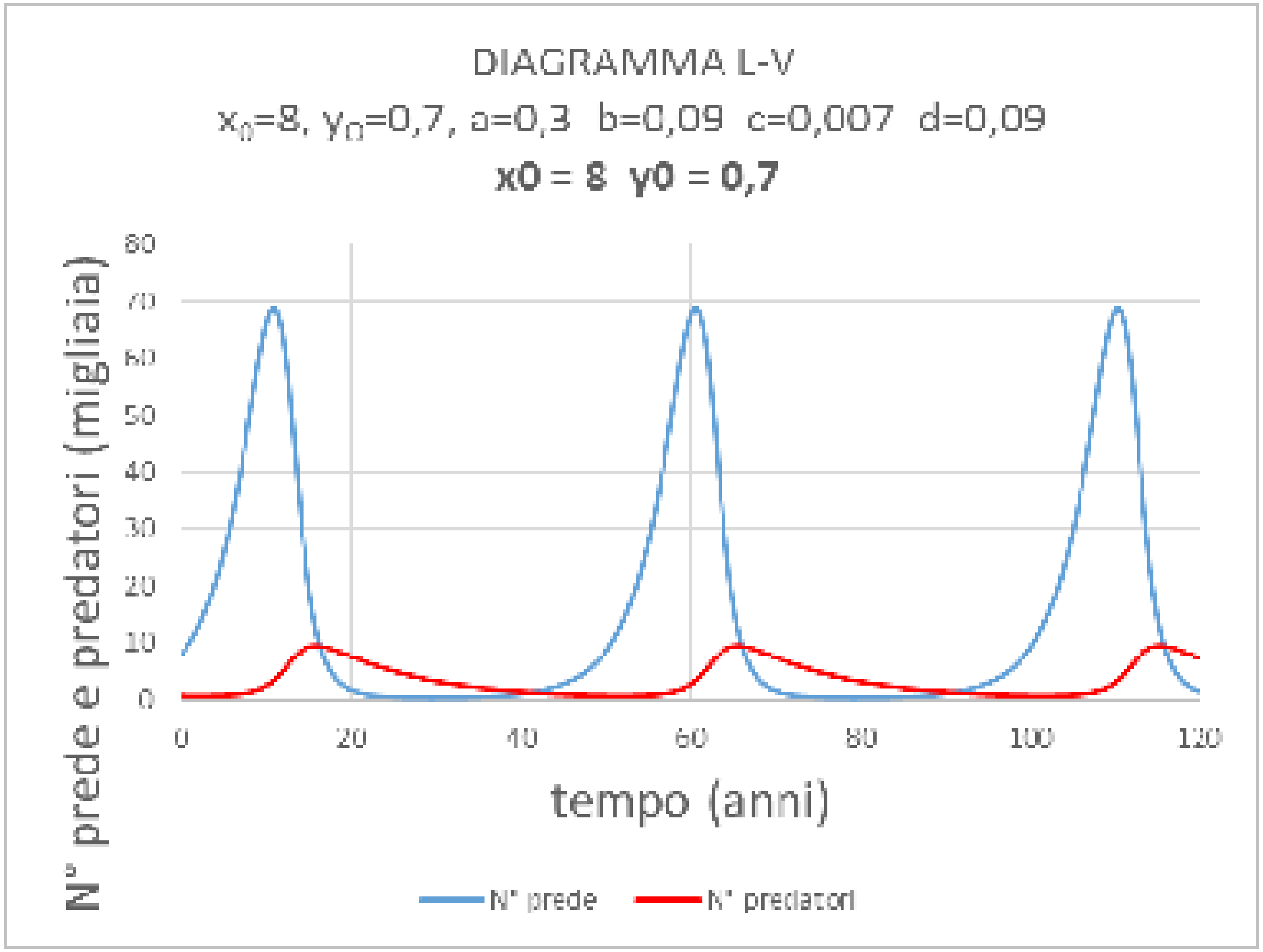
Il problema

Mettendo insieme questi dati con le condizioni iniziali $t=0\,,\; x=x_0\,,\; y=y_0$ otteniamo il sistema di Volterra:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax-bxy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=cxy-dx \end{cases}$$

Questo è un sistema differenziale in forma normale che viene risolto con i metodi di Runge-Kutta e da qui un esempio di soluzione:

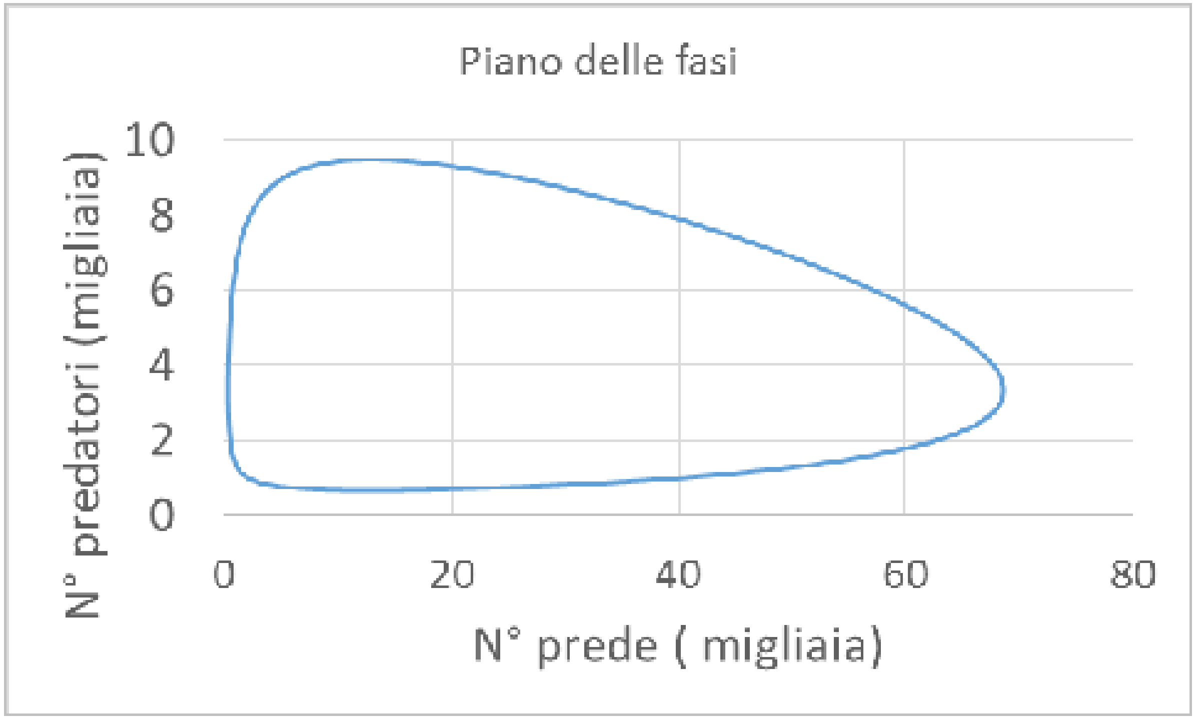
Il problema – Grafico rispetto a t



Notiamo l'andamento periodico di prede e predatori.

Il problema - Diagramma

Riportando il grafico in forma diagrammatica e omettendo la variabile tempo quello che otteniamo se mettiamo in relazione il numero delle prede x e quello dei predatori y è questo:



Si noti che le oscillazioni periodiche in funzione del tempo sono qui rappresentate sotto forma di un ciclo chiuso.

Il problema – Punti di equilibrio

Abbiamo un punto di equilibrio nelle popolazioni quando il loro livello rimane costante, dunque le rispettive derivate sono nulle in t_0.

Per trovare i punti di equilibrio dobbiamo risolvere un sistema differenziale, poniamo:

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ cxy - dx = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema di equazioni otteniamo due soluzioni corrispondenti a due punti di equilibrio:

Il problema – Punti di equilibrio

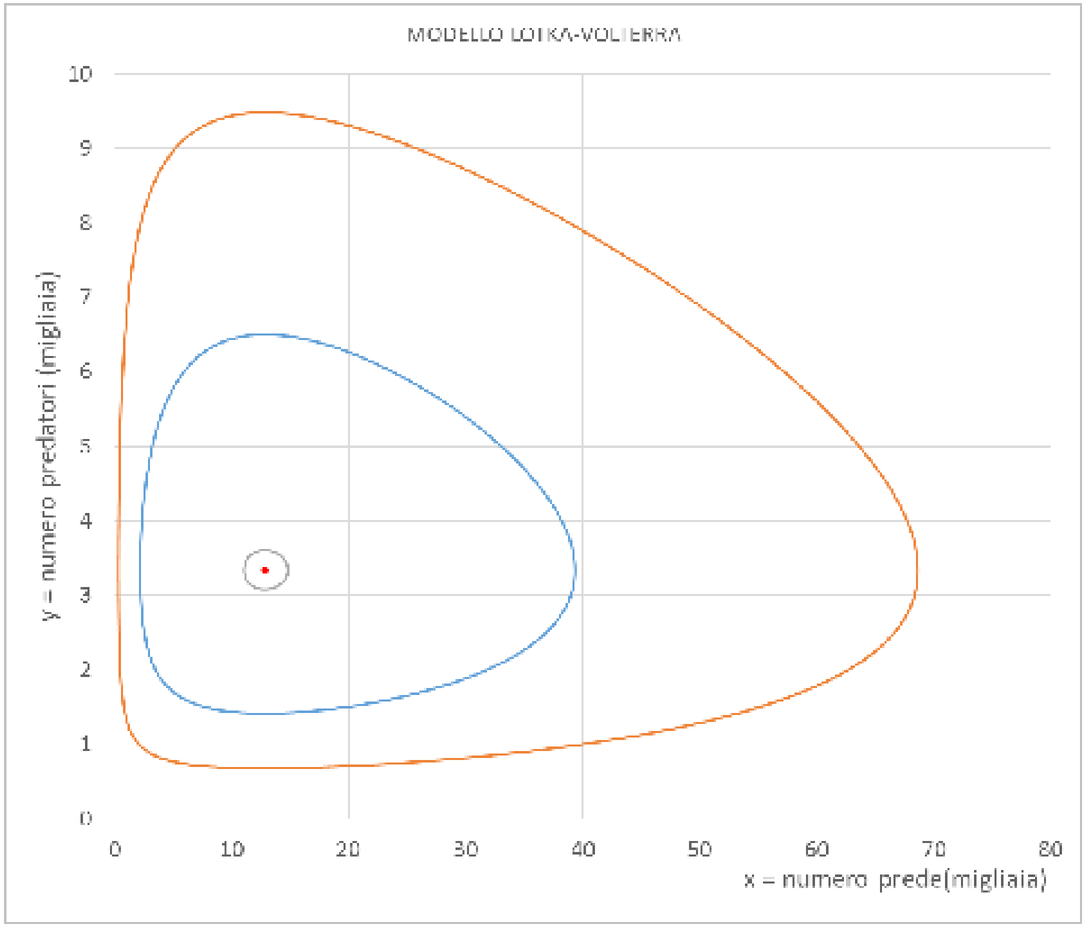
Soluzione 1: $x = y = 0$

La prima corrisponde all'estinzione di entrambe le specie e non risulta essere particolarmente interessante.

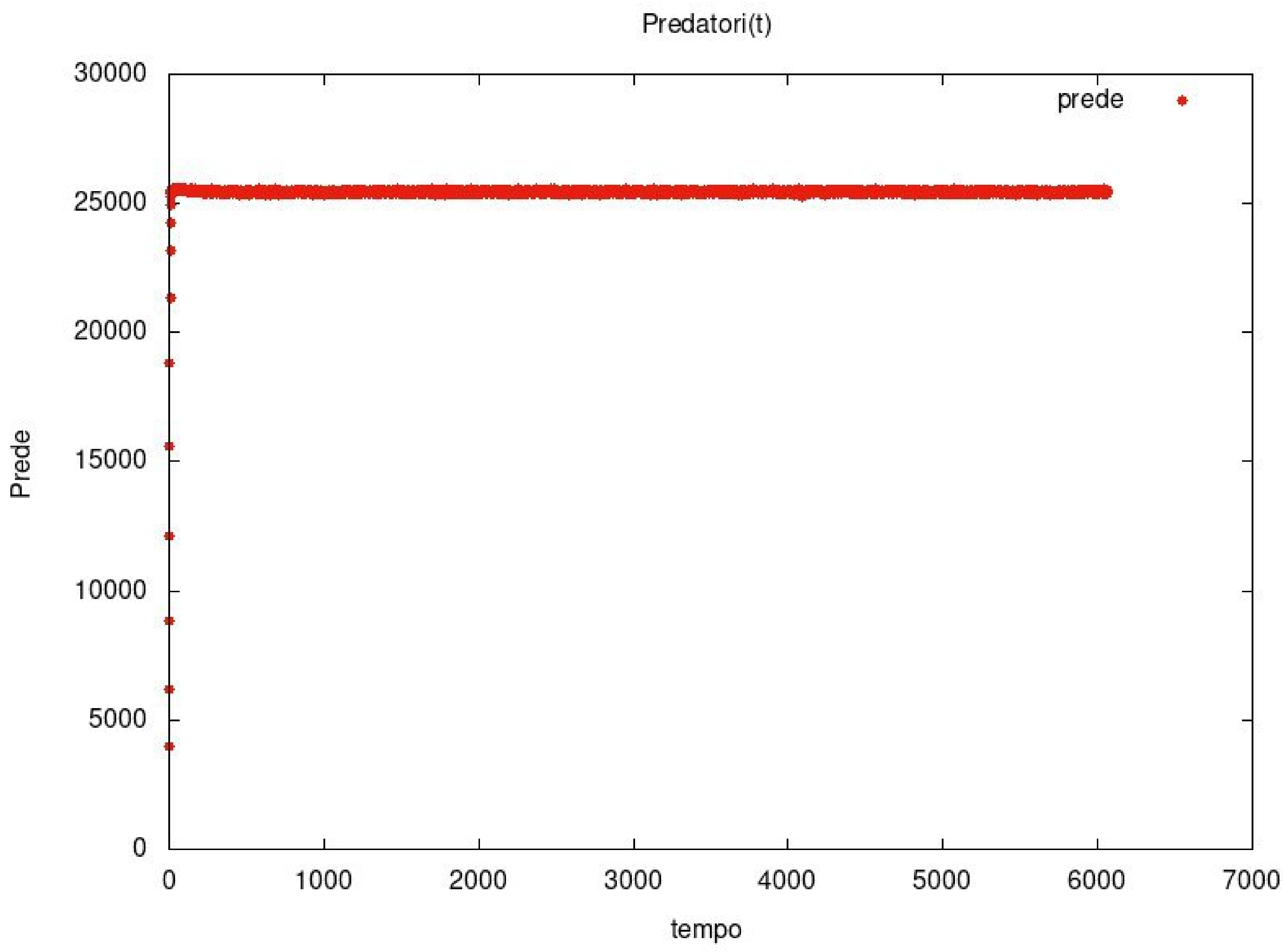
Soluzione 2: $x = \frac{d}{c} \wedge y = \frac{a}{b}$

La seconda invece descrive un andamento in cui i predatori mangiano un numero di prede che è esattamente uguale al numero di prede che nascono , e questo numero di prede corrisponde proprio alla soglia di cibo critica che fa rimanere stabile la popolazione dei predatori.

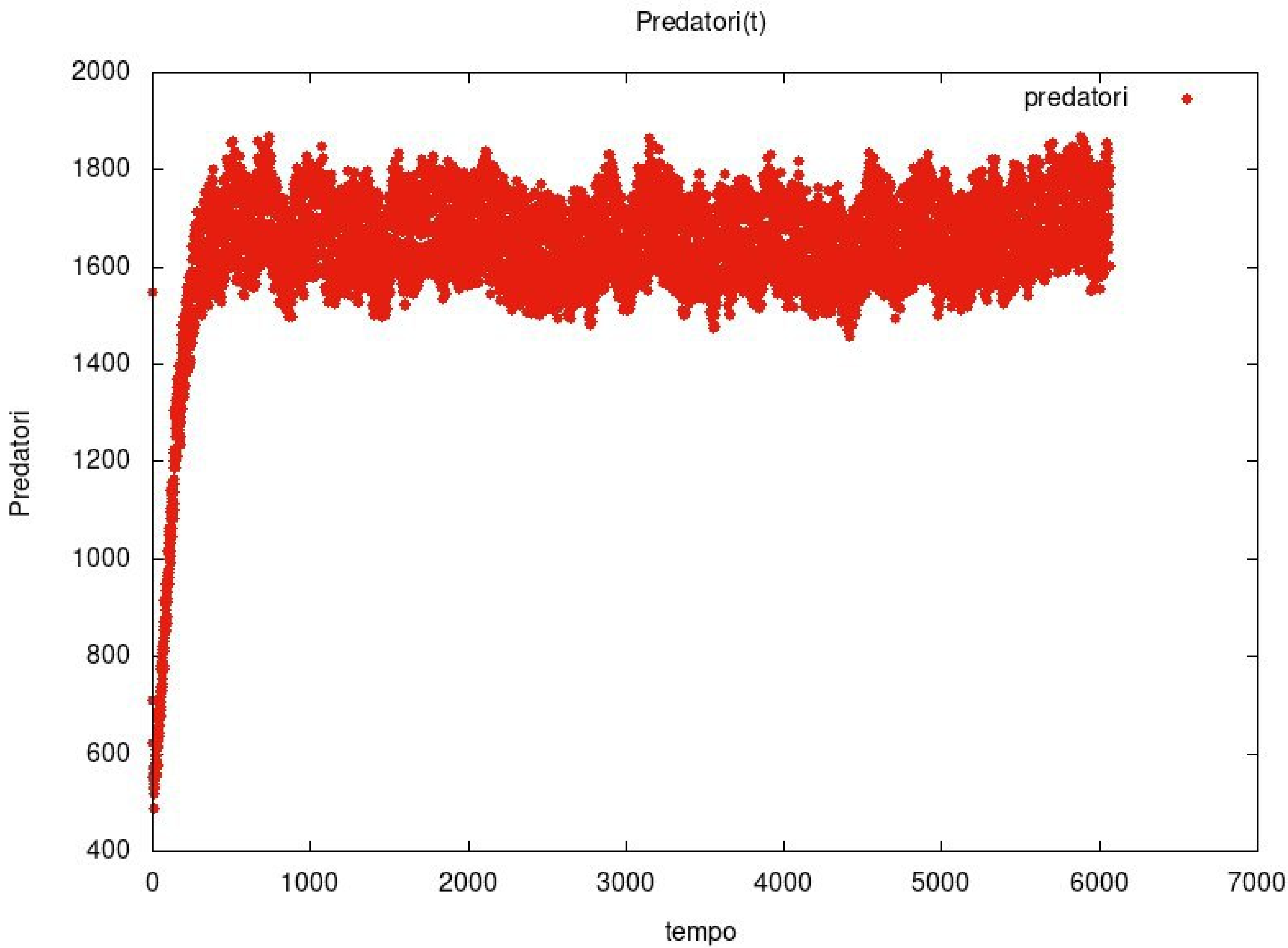
Il problema – Fine



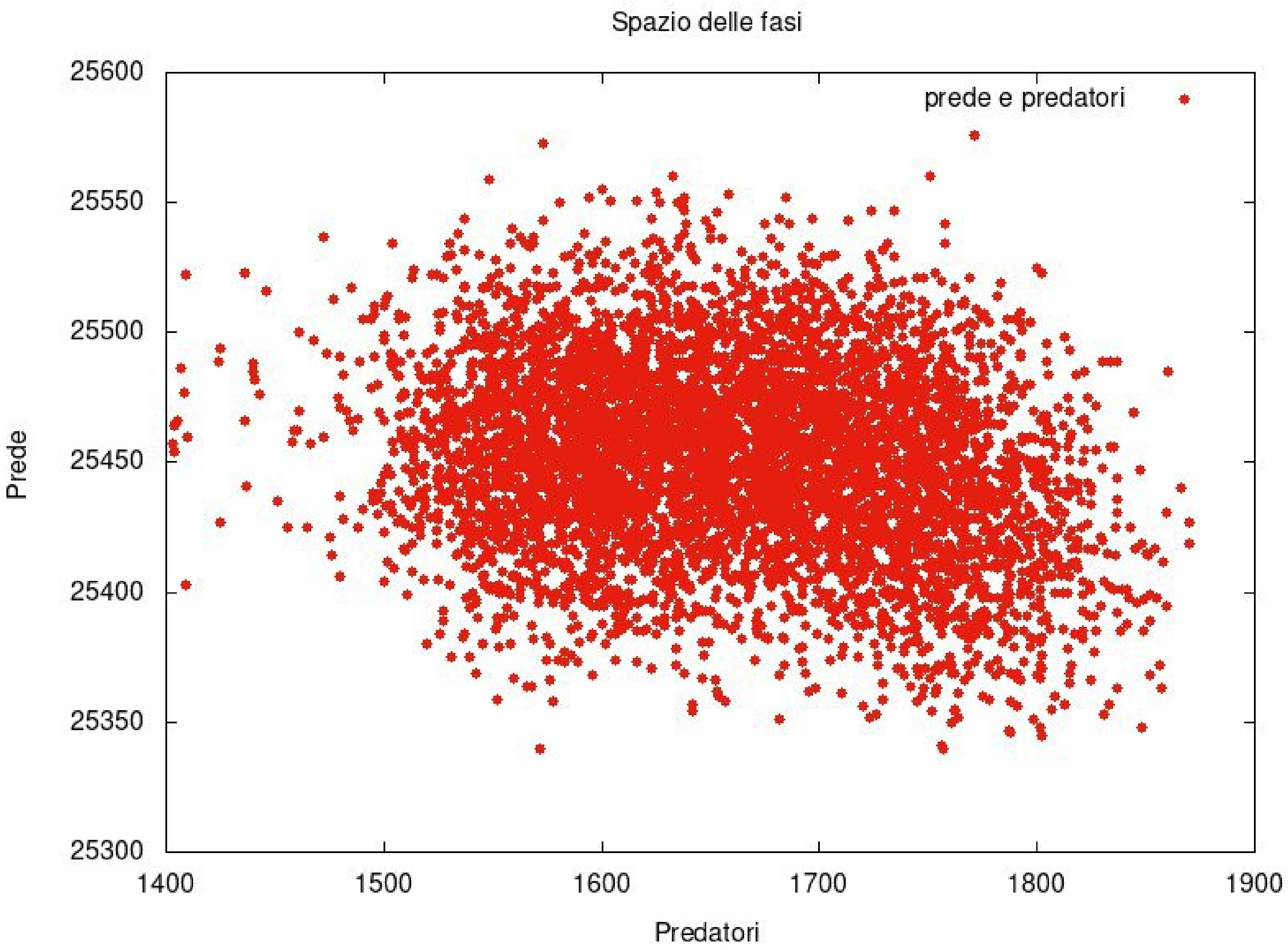
Questo diagramma riporta il ritratto di fase con diverse curve (diversi punti di partenza) per il problema in esame esaminando.


Predatori(t)
prede
Prede
tempo
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

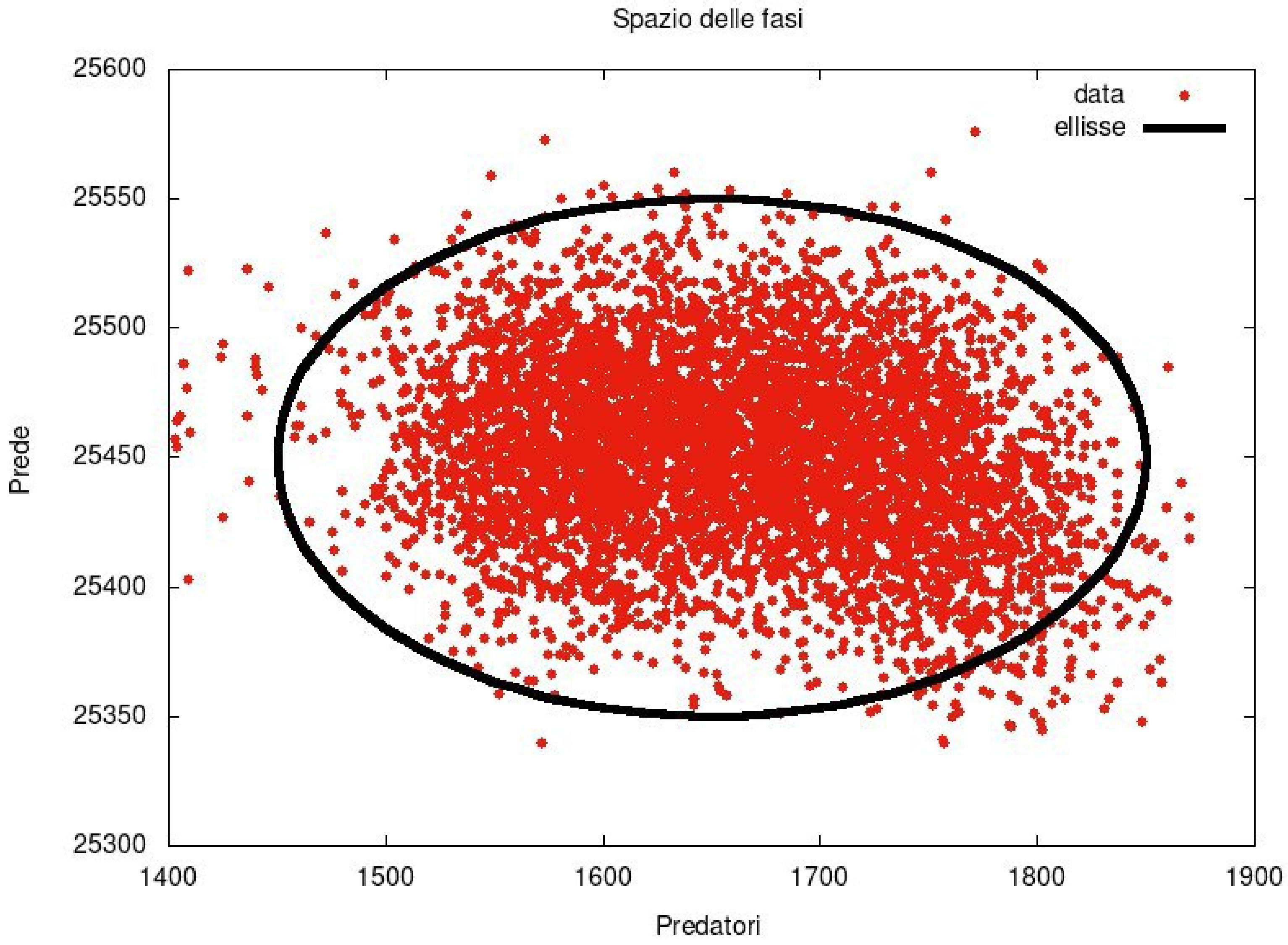
Dal picco delle prede alla stabilizzazione del sistema.



Stabilità del sistema.



Fit della stabilizzazione.



Crediti

it.wikipedia.org

www00.unibg.it

www.matematicamente.it

mathone.it

www.federica.unina.it

- Andrea Sterbini