Matemática

UNINOVE

Inequações Logarítmicas

Objetivo: Discutir as possíveis soluções das diferentes inequações logarítmicas.

Módulo II

Situação Problema

Certa substância radioativa, que se desintegra à taxa de 2% ao ano, se reduz a uma taxa de desintegração que obedece a seguinte expressão: $Q = 3^{2t+5}$, sendo Q a massa da substância e t o tempo em anos. Para quais valores de t a massa será **menor que** 972 g?

Resolução:

$3^{2t+5} < 243$ (como a base é maior que 1)

$\log_3 3^{2t+5} < \log_3 972$

$2t + 5 < \log_3 972 \rightarrow 2t = -5 + \log_3 972$

$t < \frac{\log_3(3^{-5}x972)}{2}$ (propriedade dos logaritmos)

$$t < \frac{1}{2} \text{x} \log_3 \left(\frac{972}{243}\right) = \log_3 \left(\frac{972}{243}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$t < \log_3 4^{\frac{1}{2}} = \log_3 2$$

$$t < 0{,}6$$

Resposta: A massa será menor que 972 para t menor que 1 ano.

As inequações podem ser associadas a problemas que envolvem cálculos de valores **maiores que ou menores que** em uma função. Vamos analisar alguns casos que envolvem inequações logarítmicas.

No entanto, existem inequações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base por meio da aplicação das propriedades das potências.

Para resolver inequações exponenciais deste tipo, que se baseiam no crescimento ou decrescimento da função exponencial, precisamos entender a seguinte observação:

IMPORTANTE:

$a^x > b \leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \leftrightarrow x > \log_a b$ (para a > 1)

$a^x > b \leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \leftrightarrow x < \log_a b$ (para 0 < a < 1)

$a^x < b \leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \leftrightarrow x < \log_a b$ (para a < 1)

$a^x < b \leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \leftrightarrow x > \log_a b$ (para 0 < a < 1)

Exercícios resolvidos

1) Resolva a inequação $\log_2(x+2) > \log_2 7$.

Condição de existência: $(x+2) > 0 \rightarrow x > -2$.

Mantém-se o sentido da desigualdade: base maior que 1.

$\log_2(x+2) > \log_2 7 \rightarrow x+2 > 7$
$x > 5$

Como $x > -2$ e $x > 5$, então a intersecção das afirmações é:

$S = \{x \in R/x > 5\}$

2) Dada a função $f(x) = \log_3 x = \log_3(x-8)$, para qual valor de x a função é menor que 2?

Queremos: $\log_3 x = \log_3(x-8) < 2$.

Condição de existência: $(x-8) > 0 \rightarrow x > 8$ e $x > 0$

Mantém-se o sentido da desigualdade: base maior que 1

Como $\log_3 3 = 2$, então $\log_3 x + \log_3(x-8) < \log_3 3^2$

$\log_3 x + \log_3(x-8) < \log_3 3^2 \rightarrow \log_3[x(x-8)] < \log_3 3^2$
$x(x-8) < 3^2 \rightarrow x^2 - 8x - 9 < 0$
$\Delta = 64 + 36 = 100$

$x = \frac{8 \pm 10}{2} \rightarrow x_1 = 9$ e $x_2 = -1$

Como uma condição é $x > 8$ e a outra $-1 < x < 9$, então a intersecção é:

$$S = \{x \in R/8 < x < 9\}$$

3) Para qual valor de x a inequação

$\log_{49} 2x - \log_{49}(3) > \log_7 x + \log_{49} 2$ é verdadeira.

DICA:

Faça: $\log_7 x = \log_{49} x^2$

Resolução

Condição de existência: $(2x) > 0 \rightarrow x > 0$, portanto $x > 0$.

Mantém-se o sentido da desigualdade: base maior que 1.

$$\log_{49} 2x - \log_{49}(3) > \log_{49} x^2 + \log_{49} 2 \quad \rightarrow \log_{49} \frac{2x}{3} > \log_{49} 2(x)^2$$

$$\frac{2x}{3} > 2x^2 \rightarrow 6x^2 - 2x < 0$$

$$3(3x - 1) < 0 \rightarrow 0 < x < \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{x \in \frac{R}{0} < x < \frac{1}{3}\right\}$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Contexto e Aplicações. Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

IEZZI, Gelson et al. Matemática – Ciência e Aplicações. Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo et al. Os Elos da Matemática. Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.