MATEMÁTICA
UNINOVE

Módulo - V

Noções de estatística

Medidas de tendência central

Objetivo: Calcular e interpretar as medidas de tendência central: a média aritmética, a moda e a mediana de uma distribuição.

Vimos nas aulas anteriores que podemos reduzir os dados coletados sob a forma de tabelas e gráficos. Dessa forma, podemos localizar a maior concentração de valores de um dado experimento.

Contudo, muitas vezes, queremos resumir ainda mais esses dados, apresentando um ou alguns valores que sejam "representativos" da série toda. Usualmente, empregam-se as seguintes medidas de posição central: **média aritmética**, **moda** e **mediana**, em torno dos quais tendem a concentrarem-se os dados.

DICA:

As medidas de posição central são os valores, dentre os coletados, que dividem a série de dados ordenada ao meio.

Apesar de ser bastante utilizada, a média aritmética nem sempre é a medida mais adequada para se analisar um agrupamento de dados.

EXEMPLO

Numa certa empresa com 200 empregados, os salários são os seguintes.

Salário (x salário mínimo)	**Nº de empregados**
1	100
2	30
3	30
4	5
5	25
10	5
25	3
40	2

Calculando o salário médio desses empregados, obtemos três salários mínimos. Esse número está correto do ponto de vista aritmético, mas não é representativo da condição salarial da maioria dos empregados. Afinal, 130 (65% do total) deles ganham menos que esse valor. Por outro lado, de acordo com a tabela, cinco empregados (2.5%) ganham mais do que 20 salários mínimos, o que “puxa” a média para cima.

Nesse caso, é mais conveniente usarmos outro tipo de medida como valor representativo do salário dos empregados. É o que estudaremos!

Média aritmética $(\overline{x})$

1º Caso: Dados não agrupados

A média aritmética dos valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é o quociente entre a soma desses valores e o seu número total n.

$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ ou simplesmente $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ (em que n é o número de elementos do conjunto)

EXEMPLO

Determinar a média aritmética dos valores: 3, 7, 8, 10 e 11.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3+7+8+10+11}{5} = 7{,}8$$

2º Caso: Dados agrupados sem intervalos

Se os elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ apresentam, respectivamente, frequências $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$, então:

$\overline{x} = \frac{F_1x_1+F_2x_2+\ldots+F_nx_n}{n}$ ou simplesmente $\overline{x} = \frac{\sum x_iF_i}{n}$

EXEMPLO

Dada a amostra: 2, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8.

Construindo a tabela de distribuição de frequências, temos:

x_i	F_i	$x_i F_i$
2	1	2
5	4	20
6	3	18
8	2	16
Total	10	56

Então, a média será:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i F_i}{n} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

3º Caso: Dados agrupados com intervalos

Quando os dados estão agrupados, aceita-se, por convenção, que as frequências se distribuam uniformemente ao longo da classe e que, portanto, o seu ponto médio (x_i) seja o valor representativo do conjunto. Então:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i F_i}{n}$$

EXEMPLO

Classe	**F_i**	**x_i**	**x_i F_i**
2	30	2	30
3	30	3	30
4	5	4	5
5	25	5	25
2	30	2	30

Portanto: $\bar{x} = \frac{\sum x_i F_i}{n} = \frac{157}{20} = 7{,}85$

Interpretação: *O valor médio dessa série é 7,85, isto é, 7,85 é o valor em torno do qual os elementos dessa série se concentram.*

Moda (M_o)

Dada uma coleção de números, a **moda** é o valor que ocorre com maior frequência.

Assim, no caso do qual tratamos no início desta aula, o salário mais frequente é o salário mínimo que é recebido por 100 empregados, isto é, 1 salário mínimo.

Observações

__1.__ Existem casos em que a moda não existe – os valores não se repetem ou todos os valores têm a mesma frequência (distribuição amodal).

__2.__ Em alguns casos, pode haver mais de uma moda, ou seja, a distribuição dos valores pode ser bimodal, trimodal etc.

1º Caso: Dados não agrupados

É o valor de maior frequência em um conjunto de dados ou que aparece mais vezes.

EXEMPLO

7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 12, 15.

O elemento de maior frequência é o 10, que aparece três vezes.

Portanto, Mo = 10 (distribuição unimodal)

EXEMPLO

3, 5, 8, 10, 12 e 13

Todos os elementos da série apresentam a mesma frequência, logo a série é amodal.

EXEMPLO

2, 2, 5, 5, 8, 9

Os elementos 2 e 5 têm frequência 2.

Logo, temos Mo = 2 e Mo = 5 (distribuição bimodal)

2º Caso: Dados agrupados sem intervalos

Basta identificar o elemento de maior frequência.

EXEMPLO

X_i	**F_i**
0	2
2	4
3	5
4	3
6	1

Portanto, Mo = 3

3º Caso: Dados agrupados com intervalos

Nesse caso, consideramos como moda o valor compreendido entre os limites da classe modal, ou seja, aquela que apresenta a maior frequência. Tal valor é dado por:

Mo = $l_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h$

Em que:

l_i= limite inferior da classe modal.

Δ_1= diferença entre a frequência (F_i) da classe modal e a imediatamente anterior.

Δ_2= diferença entre a frequência (F_i) da classe modal e a imediatamente posterior.

h = amplitude da classe.

EXEMPLO

Dada a tabela:

Classe	**F_i**
0 |---- 10	1
10 |---- 20	3
20 |---- 30	**6**
30 |---- 40	2

1º Passo: identifica-se a classe modal (aquela que possui maior frequência). No caso, trata-se da 3ª classe 20|---- 30 (maior F_i = 6)

2º Passo: aplica-se a fórmula. No caso, temos:

$l_i = 20$

$\Delta_1 = 6 - 3 = 3$

$\Delta_2 = 6 - 2 = 4$

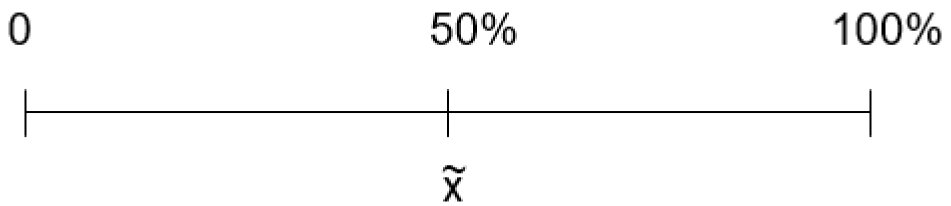
$h = 30 - 20 = 10$

Portanto:

$$Mo = 20 + \frac{3}{3+4} \cdot 10 = 20 + \frac{30}{7} = \frac{140+30}{7} = \frac{170}{7} = 24{,}29$$

Mediana $(\tilde{x})$

Dada uma coleção de números colocados em **ordem crescente**, a **mediana** $(\tilde{x})$ é o valor que divide a amostra em duas partes iguais.



1º Caso: Dados não agrupados

Quando temos um número ímpar de elementos, dispostos em ordem crescente, a **mediana** é definida como sendo o elemento central, de ordem $\frac{n+1}{2}$.

Se a coleção tiver um número par de elementos, também dispostos em ordem crescente, a **mediana** é definida como a média aritmética dos dois valores centrais, de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

EXEMPLO

1. Dada a amostra: 5, 13, 10, 2, 18, 15, 6, 16 e 9

Colocando os valores em ordem crescente, temos: 2, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 16, 18.

Como n = 9, n é ímpar, logo $\tilde{x}$ será o elemento de ordem $\frac{n+1}{2}=\frac{9+1}{2}=\frac{10}{2}=$ 5º elemento, logo $\tilde{x}=10$.

2. Dada a amostra: 2, 6, 7, 10, 12, 13, 18 e 21

Primeiro observamos que ela já está em ordem crescente.

Como n = 8, n é par, logo $\tilde{x}$ será a média entre os elementos de ordem $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$. Ou seja,

$$\frac{n}{2}=\frac{8}{2}=4^{\text{º}}\text{ elemento e }\frac{n}{2}+1=\frac{8}{2}+1=5^{\text{º}}\text{ elemento.}$$

Assim, $\tilde{x}=\frac{10+12}{2}=\frac{22}{2}=11$

2º Caso: Dados agrupados sem intervalos

Basta considerar a frequência acumulada e localizar a mediana procedendo da mesma forma que no caso anterior.

EXEMPLO

1. Dada a distribuição

x_i	F_i
12	1
14	2
15	1
16	2
17	1
20	2
Total	9

Como n = 9, n é ímpar, logo $(\tilde{x})$ será o elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$, ou seja:

$$\tilde{x} = \frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5^{o}\text{ elemento}$$

Construindo a coluna da frequência acumulada, podemos localizar com facilidade o valor mediano.

x_i	F_i	F_{ac}
12	1	1
14	2	3
15	1	4
16	**2**	**6**
17	1	7
20	2	9
Total	9	-

→ Contém o 5º elemento

Portanto, a mediana será o 16.

2. Dada a distribuição

x_i	F_i	F_{ac}	
7	6	6	
10	12	18	
15	**15**	**33**	→ Contém o 33º Elemento
20	**24**	**57**	→ Contém o 34º Elemento
23	9	66	
Total	66	–	

Como n = 66, n é par, logo $\tilde{x}$ será a média entre os elementos de ordem $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$. Ou seja:

$$\frac{66}{2} = 33^{\underline{o}} \text{ elemento e } \frac{66}{2} + 1 = 34^{\underline{o}} \text{ elemento}$$

Identificando os elementos de ordem 33 e 34 pela F_{ac}, temos:

$$\tilde{x} = \frac{15 + 20}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

3º Caso: Dados agrupados com intervalos

Nesse caso, devemos inicialmente localizar a classe mediana. Para isso seguimos os seguintes passos:

1º Passo: calculamos a ordem $\frac{n}{2}$. Independente se n é par ou ímpar.

2º Passo: pela F_{ac} identificamos a classe que contém a mediana (classe Md).

3º Passo: utilizamos a fórmula.

$$\tilde{x} = l_i + \frac{\left(\frac{n}{2} - \sum f\right)}{F_{Md}} . h$$

Em que: l_i= limite inferior da classe mediana

n = tamanho da amostra ou número de elementos

$\Sigma f =$ soma das frequências anteriores à classe mediana

h = amplitude da classe mediana

F_{Md} = frequência da classe mediana

EXEMPLO

Dada a tabela:

Classe	**F_i**	**F_{ac}**
3 |---- 6	2	2
6 |---- 9	5	7
9 |---- 12	**8**	**15**
12 |---- 15	3	18
15 |---- 18	1	19
Total	19	-

1º Passo: calcula-se $\frac{n}{2}$. Como n = 19, temos $\frac{19}{2}$= 9,5º elemento

2º Passo: identifica-se a classe mediana pela Fac. Nesse caso, a classe mediana é a 3ª: 9 |---- 12

3º Passo: aplica-se a fórmula. Em que:

l_i= 9

Σf = 7

h = 19 – 9 = 3

F_{Md} = 8

Portanto:

$$\tilde{x} = l_i + \frac{\left(\frac{n}{2} - \sum f\right)}{F_{Md}} . h$$

$$\tilde{x} = 9 + \frac{9,5 - 7}{8} \cdot 3 = 9 + \frac{2,5}{8} \cdot 3 = 9 + \frac{7,5}{8} = \frac{72 + 7,5}{8} = 9,94$$

Interpretação: *50% dos valores da série são valores menores ou iguais a 9,94 e 50% dos valores da série são valores maiores ou iguais a 9,94.*

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

AKANIME, C. T.; YAMAMOTO, R. K. *Estudo dirigido de estatística descritiva*. São Paulo: Érica Ltda, 1998.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. São Paulo: Atual, 1987.

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. *Curso de Estatística*. São Paulo: Atlas, 1996.

MELLO, J. L. P. *Matemática*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.