MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Função Polinomial

Divisão de polinômios

Objetivo: Ampliar as habilidades sobre divisão de polinômios

Situação-problema

O que fazer para simplificar a expressão $\frac{2x^3+5x^2+7x+6}{2x+3}$?

Solução: Para simplificar a expressão, precisamos dividir o numerador pelo denominador e substituir o numerador pelo produto do quociente pelo divisor da divisão dos polinômios. Veja a solução:

$$2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 = (x^2 + x + 6)(2x + 3)$$

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{2x + 3} = \frac{(x^2 + x + 6)(2x + 3)}{2x + 3} = x^2 + x + 6$$

Para entender melhor os procedimentos utilizados nesta resolução, precisamos recordar os procedimentos da divisão de polinômios. É justamente sobreeste tema que trataremos.

Dados dois polinômios, não nulos, P(x) e D(x), então ao dividir o polinômio P(x) pelo polinômio D(x), obtemos um par de polinômios Q(X) e R(x), chamados, respectivamente, quociente e resto da divisão de P(x) por D(x), de modo que:

Veja um esquema gráfico do procedimento da divisão:

$$\begin{array}{lr|ll} \text{(dividendo)} & P(x) & D(x) & \text{(divisor)} \\ \cline{3-4} & \vdots & Q(x) & \text{(quociente)} \\ \text{(resto)} & R(x) & & \end{array}$$

Exemplo: Vamos dividir o polinômio da situação-problema, ou seja, vamos dividir $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6$ por $D(x) = 2x + 3$.

Solução: Obtemos um monômio que multiplicado por $D(x)$, elimina o monômio de maior potência do dividendo, por meio de uma subtração:

$$\begin{array}{c|c} 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 3x^2 & x^2 \\ 2x^2 + 7x + 6 & \end{array}$$

Realizamos o procedimento, com o polinômio obtido da subtração do processo anterior:

$$
\begin{array}{c|l}
2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 & 2x + 3 \\
\cline{2-2}
-2x^3 - 3x^2 & x^2 + x \\
2x^2 + 7x + 6 & \\
-2x^2 - 3x & \\
4x + 6 &
\end{array}
$$

Como o grau do resto ainda não é menor que o divisor, repetimos oprocedimento com o polinômio obtido da subtração do processo anterior:

$$
\begin{array}{c|l}
2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 & 2x + 3 \\
\cline{2-2}
-2x^3 - 3x^2 & x^2 + x + 2 \\
2x^2 + 7x + 6 & \\
-2x^2 - 3x & \\
4x + 6 & \\
-4x - 6 &
\end{array}
$$

Como o resto é igual a 0, então a divisão é exata. Assim, $2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 = (x^2 + x + 6)(2x + 3)$

Divisão do polinômio $P(x)$ pelo binômio $D(x) = x - a$

Este tipo de divisão é um caso particular das divisões de polinômios, muito utilizados no dia a dia.

Observe que, como o grau do binômio $D(x) = x - a$ é igual a 1, então o resto da divisão é de grau zero, isto é, um polinômio constante, tipo $R(x) = r$. Além disso, se o grau de $P(x)$ é maior o igual a 1, então o grau do quociente é igual ao grau de $P(x) - 1$

Divisibilidade de $P(x)$ por $x - a$

O polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$, isto é, a divisão será exata, se, e somente se, o valor do polinômio P, quando $x = a$, for igual a zero.

Cálculo do quociente utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini

Além do método da chave, podemos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para dividir um polinômio $P(x)$ por um binomio $(x - a)$.

Vamos apresentar, a seguir, os passos para utilizar o dispositivo de Briot- Ruffini ao dividir um polinômio $P(x)$ por um binomio $(x - a)$.

Seja $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$ e $D(x) = (x - a)$, então:

I) Colocamos o número a e os coeficientes de P(x) em uma tabela.

a	a_3	a_2	a_1	a_0

II) Na linha seguinte, colocamos q_2, que é igual a a_3.

a	a_3	a_2	a_1	a_0
	q_2			

III) Ao lado de q_2, calculamos q_1, que é $q_1 = q_2 \times a + a_2$.

a	a_3	a_2	a_1	a_0
	q_2	q_1		

IV) Ao lado de q_1, calculamos q_0, que é $q_0 = q_1 \times a + a_1$.

a	a_3	a_2	a_1	a_0
	q_2	q_1	q_0	

V) Ao lado de q0, calculamos R, que é $R = q_0 \times a + a_0$.

a	a_3	a_2	a_1	a_0
	q_2	q_1	q_0	R

Veja agora alguns exemplos, utilizando o dispositivo:

1) Dividir $P(x) = 4x^2 + 6x^2 + 8x + 10$ por $(x - 2)$

$a_3 = q_2 = 4$

2	4	6	8	10
	4	14		

$14 = (4 \times 2) + 6$

2	4	6	8	10
	4	14	36	

$36 = (14 \times 2) + 8$

2	4	6	8	10
	4	14	36	82

Resto = $82 = (36 \times 2) + 10$

Assim, o quociente é $Q(x) = 4x^2 + 14x + 36$, e o resto é $R(x) = 82$.

2) Dividir $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$ por $(x + 2)$

Resolução:

-2	2	- 3	1	-2	1
	2	-7	15	-32	65

Neste caso, o quociente é $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 15x - 32$, e o resto é $R(x) = 65$.

Divisões Sucessivas

Vamos recordar:

Um polinômio $P(x)$ é divisível por um polinômio $D(x)$ se o Resto $R(x) \equiv 0$.

Desta maneira, se $Q(x)$ é o quociente da divisão, então $P(x) = D(x)\ Q(x)$

Além disso, $P(x)$ é divisível por $(x - a)$, se, e somente se, a é a raiz de $P(x)$.

Assim, $P(a) = 0$.

Ampliando estas afirmações, considere um polinômio $P(x)$ de grau maior que1 e $a, b \in C$, com $a \neq b$. Quando $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ e o quociente da divisão é divisível por $(x - b)$, temos que $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$.

Generalizando, esta afirmação vale para mais de dois fatores distintos: $P(x)$ é divisível por $(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_n)$, em que $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números distintos, se, e somente se, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são raízes de $P(x)$.

Exercícios Resolvidos

1) Verifique se $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ é divisível por $(x^2 - 1)$, por $(x + 1)$ e por $(x - 1)$. Além disso, verifique se -1 e 1 são raízes de $P(x)$.

Solução:

Como $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$, então $P(x)$ é divisível por $(x^2 - 1)$ se -1 e 1 são raízes de $P(x)$. Desta forma:

$P(1) = 1^3 - 2(1^2) + 2(1) - 1 = 0$, então $P(x)$ é divisível por $(x - 1)$

$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -6$, então $P(x)$ não é divisível por $(x+1)$.

Portanto $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ não é divisível por $(x^2 - 1)$.

2) Mostre que $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ é divisível por $(x^2 - 5x + 4)$.

Resolução:

Sabemos que $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c$, então:

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$x = \dfrac{5 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = 4\,;\ x_2 = 1$

Assim: $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

Dividindo P(x), separadamente, por $(x - 1)$ e $(x - 4)$, temos:

1	1	-2	-11	12
	1	-1	-12	0

Como o resto da divisão é igual a zero, então P(x) é divisível por (x-1).

4	1	-2	-11	12
	1	2	-3	0

Como o resto da divisão é igual a zero, então P(x) é divisível por (x-4). Portanto, como P(x) é divisível por (x-1) e por (x-4), então P(x) é divisível por $(x^2 - 5x + 4)$.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Matemática – Ciência e aplicações* – Ensino Médio – 3º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática Ensino Médio* – 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau*. 3º ano. São Paulo: Atual, 2001