MATEMÁTICA

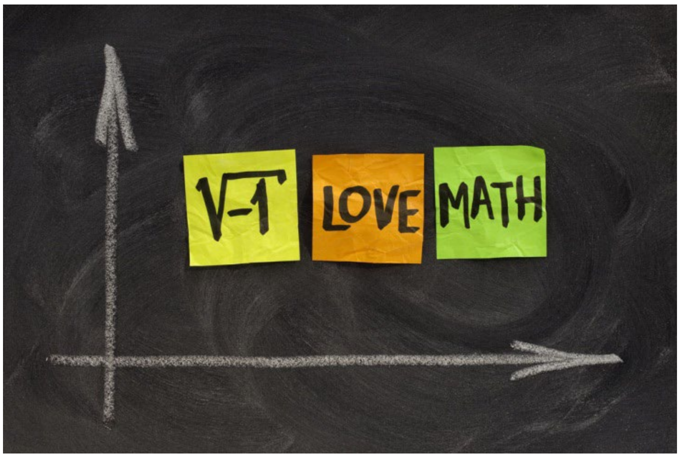
UNINOVE

Módulo - IV

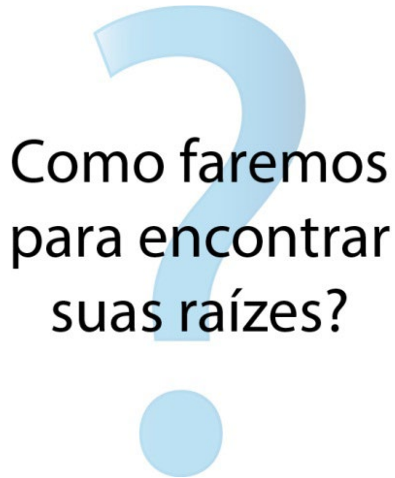
Números Complexos

Definição e operações

Objetivo: Será inserido quando tiver. Estudar a definição de número complexo e as operações de adição e subtração de números complexos.



Situação-problema: Como determinar a raiz quadrada de um número negativo? Na verdade, os números complexos foram criados por conta da necessidade de se resolverem equações do **terceiro grau**, do tipo **$x^3+px+q=0$**. Porém é notória a sua aplicação em equações do **segundo grau** quando temos, utilizando a fórmula de **Bháskara:** $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} < 0$. Portanto, dizemos que **não existem raízes pertencentes ao conjunto dos números reais**, pois, $\sqrt{\boldsymbol{\Delta}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta} \geq \mathbf{0}$.



Tomemos **$ax^2 + bx + c = 0$** em que temos, por exemplo, $\boldsymbol{\Delta} = -4 < 0$, então, $\sqrt{\boldsymbol{\Delta}} = \sqrt{-4}$**,** daí podemos desenvolver o problema da seguinte forma:

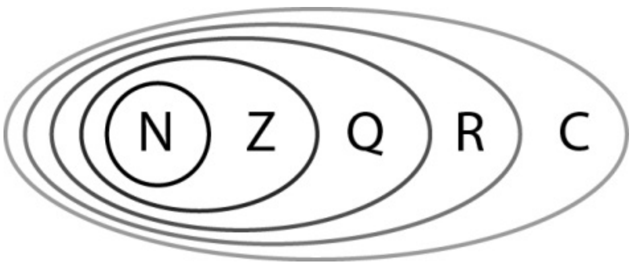
- $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4.\mathbf{i}^2} = \sqrt{4}.\sqrt{\mathbf{i}^2} = 2\mathbf{i}$**,** escrevendo na forma algébrica dos números complexos, temos $\sqrt{-4}$ **= 0 + 2i = 2i**.

Aplicando **Bháskara** $\mathbf{x_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$ encontramos as raízes

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 = \frac{-b-(2i)}{2a}} \\ \mathbf{x_2 = \frac{-b+(2i)}{2a}} \end{cases}$$

Definição: *De uma maneira geral, podemos definir um **número complexo (ou imaginário)** (**z** ∈ $\mathbb{C}$), como todo elemento escrito na **forma algébrica a+bi**, em que **a** e **b** são **números reais** e **i** é a chamada **unidade imaginária** que é solução de **i^2=-1**. Representamos o complexo por **z** = **a** + **bi**.*

Veja a representação gráfica do conjunto dos **números complexos ($\mathbb{C}$).**



Notemos, então, que o conjunto dos números complexos engloba todos outros conjuntos. Sendo assim, podemos representar os elementos dos subconjuntos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$) na forma complexa, basta tomarmos ***b* = 0**.

Por exemplo:

- 3 = 3 + 0i
- −5 = −5 + 0i
- $\frac{6}{7} = \frac{6}{7} + 0i$
- $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$

Potências de i

Já vimos que, no complexo por **z = a + bi** que a **unidade imaginária** i é solução de $\mathbf{i^2 = -1}$. Por decorrência, podemos determinar o valor das **potências de i**:

$I^0 = 1$	$i^4 = i^2 . i^2 = (-1) . (-1) = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 . i = 1.i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^5 . i = i . i = i^2 = -1$
$i^3 = i^2 . i = (-1).i = -i$	$i^7 = i^6 . i = (-1) . i = - = -i$

Podemos concluir que para obtermos o resultado de qualquer potência **“n”** de **i**, basta efetuarmos a divisão de **“n”** por **“4”** e adotarmos o resto da divisão como a **nova potência** com base na **primeira coluna** da sequência anterior.

Exemplos:

- $i^{31} \rightarrow \frac{31}{4} \therefore \begin{cases} \text{Quociente} = 7 \\ \text{Resto} = 3 \end{cases}$, daí concluímos que $\mathbf{i^{31} = i^3 = -i}$.
- $i^{4312} \rightarrow \frac{4312}{4} \therefore \begin{cases} \text{Quociente} = 1078 \\ \text{Resto} = 0 \end{cases}$, daí concluímos que $\mathbf{i^{4312} = i^0 = 1}$.
- $i^{754\ c} \rightarrow \frac{754}{4} \therefore \begin{cases} \text{Quociente} = 188 \\ \text{Resto} = 2 \end{cases}$, daí concluímos que que $\mathbf{i^{754} = i^2 = -1}$.

Operações usuais com números complexos

Como nos outros conjuntos numéricos, podemos efetuar uma série de operações.

- **Igualdade:** a + bi = c + di ⇔ a = c e b = d, ou seja, dois números complexos são iguais, e suas partes reais imaginárias são iguais.
- **Adição:** (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, ou seja, a soma de dois números complexos resulta em um número complexo em que sua parte real é a soma das partes reais dos anteriores e sua parte imaginária é a soma das partes imaginárias dos anteriores.
- **Subtração:** (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i, ou seja, a diferença de dois números complexos resulta em um número complexo em que sua parte real é a diferença das partes reais dos anteriores e sua parte imaginária é a diferença das partes imaginárias dos anteriores.

Exemplo:

Sejam os complexos $\begin{cases} \mathbf{z_1 = 2 + 3i} \\ \mathbf{z_2 = 6 - 2i} \\ \mathbf{z_3 = -5 + 4i} \end{cases}$, determine $\mathbf{z_4 = z_1 + z_2 - z_3}$.

Resolução:

- $z_4 = z_1 + z_2 - z_3 = (2 + 3i) + (6 - 2i) - (-5 + 4i) = [2 + 6 - (-5)] + [3 + (-2) - 4]i =$
- $= (2 + 6 + 5) + (3 - 2 - 4)i \Longrightarrow \mathbf{z_4 = 13 - 3i}$.

Por este exemplo, observamos que podemos operar com a forma algébrica dos números complexos, da mesma forma que operamos expressões algébricas.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Matemática – Ciência e aplicações – Ensino Médio – 1º ano, 3 ed*. São Paulo: Ática, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau*. São Paulo: Atual, 2001.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática – Ensino Médio – 3º ano*. São Paulo: Saraiva, 2010.