MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Equações Polinomiais

Teorema Fundamental da Álgebra e Teorema da decomposição

Objetivo: Ampliar os conhecimentos sobre Teorema Fundamental da Álgebra e da decomposição para a obtenção do conjunto solução de equações polinomiais.

Antes de falarmos do Teorema Fundamental da Álgebra, vamos analisar um problema que pode ser solucionado com uma equação de grau 3. Além disso, vamos concluir que sua solução é um conjunto com três raízes.

Situação-problema

Uma caixa de bombons tem a forma de paralelepípedo retangular. A caixa que mede x unidades de altura, tem como base (x+4) unidades de comprimento e (x- 2) unidades de largura. Para qual valor de x, temos uma caixa com 16 unidades de volume?

Resolução: Sabemos que volume = comprimento x largura x altura, assim:

$$16x(x+4)(x-2) \rightarrow 16 = x^3 + 2x^2 - 8x \rightarrow x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0 \rightarrow (x + 2)(x^2 - 8) = 0$$

Pelo teorema da decomposição, uma das raízes é -2. As outras são as raízes de x^2 - 8.

$x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

Assim, o conjunto solução é : $\{-2;\ 2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2}\}$.

Mas como é a forma geral de uma equação polinomial?

Uma equação polinomial é uma equação do tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Cujos coeficientes $a_n;\ a_{n-1};\ \ldots;\ a_1;\ a_0$ são números complexos e a variável x assume valores do conjunto dos números complexos.

Veja alguns exemplos de equações polinomiais:

I. $x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$
II. $2ix^3 + 2x^2 - 8x - 2i = 0$
III. $x^5 + 7x - 6 = 0$

O que é a raiz de uma equação polinomial?

Seja α um número complexo, então α é uma raiz da equação $P(x) = 0$, se, e somente se, $P(\alpha) = 0$, isto é, quando substituímos a variável x da equação por α, o resultado será zero.

DICA:

α é raiz de uma equação P(x) = 0 se for raiz do polinômio P(x).

Exemplo: Dada a equação $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$, então $\alpha = 3$ é uma das raízes da equação, pois: $3^3 - 3(3^2) + 2(3) - 6 = 27 - 27 + 6 - 6 = 0$.

IMPORTANTE:

O conjunto solução de uma equação polinomial é o conjunto de todas as raízes da equação que se está trabalhando.

Equações Equivalentes

Duas **equações** são consideradas **equivalentes** no conjunto dos númeroscomplexos quando os conjuntos solução das equações são iguais.

Teorema Fundamental da Álgebra

Toda equação polinomial de grau n, para $n \geq 1$, admite, pelo menos, uma raiz complexa, isto é, uma raiz dos números complexos.

Como consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, obtivemos o **Teorema da Decomposição,** que apresentamos a seguir:

"Todo polinômio P(x) de grau n, pode ser escrito na forma fatorada, como sendo: P(x) = $a_n(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, em que a_n é o coeficiente dominante, isto é, o coeficiente da varável de maior potência, e a_1; a_2; ⋯ ; an são as raízes do polinômio P(x)"

Devido ao Teorema da Decomposição, obtemos o seguinte resultado:

IMPORTANTE:

Toda equação polinomial de grau n, admite exatamente n raízes, reais ou complexas.

Exercícios Resolvidos

1) Mostre que os números $-2i$, $2i$ e 3 são as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 24 = 0$.

Resolução: pelo Teorema da Decomposição, podemos escrever o polinômio:

$$P(x) = 2\big(x - (-2i)\big)(x - 2i)(x - 3)$$
$$P(x) = 2(x^2 - (2i)^2)(x - 3) = 2(x^2 + 4)(x - 3)$$
$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 24 = 0$$

2) Sabendo que 1, 3 e 4 são as raízes de um polinômio P(x) de grau 3, determine esse polinômio.

Resolução: pelo Teorema da Decomposição, e escolhendo $a_n = 1$, podemos escrever o polinômio:

$$P(x) = 1(x - 1)(x - 4)(x - 3) = (x^2 - 5x + 4)(x - 3)$$

Assim: $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$

IMPORTANTE:

A escolha do coeficiente an não altera o conjunto solução da equação: $0=x^3-8x^2+19x-12$

3) Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$, encontre as raízes do polinômioP(x), sabendo que uma das raízes é 2.

4) Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$, encontre as raízes do polinômioP(x), sabendo que uma das raízes é 2.

2	1	-4	6	-4
	1	-2	2	0

As outras raízes vem de $Q(x) = x^2 - 2x + 2$:

$\Delta = 4 - 8 = -4$

$$\frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = x_1 = 1 + i\ ;\ x_2 = 1 - i$$

Assim, o conjunto solução é: $\{2\ ;\ 1+i\ ;\ 1\text{-}i\}$

5) Sabendo que duas raízes da equação $4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6 = 0$ são – 2 e 3, determine as outras duas raízes.

Resolução: pelo Teorema da Decomposição, temos que:

$$P(x) = 4(x + 2)(x - 3)Q(x)$$

Em que Q(x) é o resultado da divisão entre:

$P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$ e $D(x) = (x+2)(x-3)$:

Fazendo as divisões sucessivas de P(x), a seguir, temos:

-2	4	-4	-23	-1	-6
	4	-12	1	-3	0

3	4	-12	1	-3
	4	0	1	0

Assim, $Q(x) = 4x^2 + 1$ e as suas raízes também são as raízes de P(x):

$$x^2 = \pm\frac{1}{4} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}i\ ;\ x_2 = -\frac{1}{2}i$$

Assim, o conjunto solução é $\left\{-2;\ 3;\ \frac{1}{2}i\ ;-\frac{1}{2}i\right\}$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Matemática – Ciência e aplicações* – Ensino Médio – 3º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática Ensino Médio* – 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau* – 3º ano. São Paulo: Atual, 2001.