MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Determinantes de matrizes quadradas

De 1ª, 2ª e 3ª ordens

Objetivo: Calcular os determinantes das matrizes de ordens 1,2 e 3.

Os determinantes são ferramentas úteis no cálculo de várias operações matemáticas, um exemplo é o estudo dos sistemas lineares.

Também podemos usar determinantes para calcular a área de um triângulo, conhecendo-se as coordenadas cartesianas dos seus três vértices.

Dado um triângulo ABC, de vértices A (x_A , y_A); B (x_B , y_B) e C (x_C , y_C), podemos calcular a sua área por meio da fórmula.

$A_\Delta = \frac{1}{2}|D|$, em que $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_c & 1 \end{vmatrix}$

Dessa forma, resolva o seguinte problema:

Determinar a área do triângulo ABC de vértices A (1, 1); B (5, 1) e C (2, 4) usando a fórmula estudada em Geometria Plana e usando a fórmula mencionada.

Determinantes de matrizes quadradas de 1ª, 2ª e 3ª ordens

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos determinante da matriz A (e indicamos por detA), o número que podemos obter operando com os elementos de A da seguinte forma:

1. Se A é de ordem n = 1, então det A é o único elemento da matriz.

$$A = [a11] \Rightarrow \det A = a11$$

EXEMPLO

A = [6]

Logo, det A = 6

2. Se A é de ordem n = 2, então det A é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$-$ $+$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \,.\, 2 - 4 \,.\, (-1) = 6 + 4 = 10$$

Obs: *podemos também indicar o determinante de uma matriz pelo símbolo "| |", isto é, colocando uma barra vertical de cada lado da matriz.*

EXEMPLO

A = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 4 \,.\, (-1) - 6 \,.\, (-3) = -4 + 18 = 14$$

EXEMPLO

Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2x & 3x + 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Queremos o(s) valor(es) de x para que o determinante da matriz seja nulo.

$$2x \,.\, x - 1 \,.\, (3x + 2) = 0$$

$$2x2 - 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{4} \left\langle \begin{array}{l} x' = \dfrac{8}{4} = 2 \\ \\ x'' = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Portanto, para que o determinante da matriz seja igual a 0, x deve ser 2 ou $-\frac{1}{2}$.

3. Se A é de ordem **n = 3**, podemos obter det A utilizando uma regra prática denominada **Regra de Sarrus:**

a) repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.

b) multiplicamos os termos entre si, seguindo as flechas em diagonal e associando aos produtos o sinal indicado.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

– – – + + +

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

EXEMPLO

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix} =$$

- - - + + +

$$= 1.2.2 + 3.(-3).1 + 4.5.4 - 4.2.1 - 1.(-3).4 - 3.5.2 =$$

$$= 4 + (-9) + 80 - 8 - (-12) - 30 = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$$

EXEMPLO

Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 2x & 1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Queremos o(s) valor(es) de x para que o determinante da matriz seja nulo.

$$1.2x.1 + x.1.3 + x.2.(x+1) - x.2x.3 - 1.1.(x+1) - x.2.1 = 0$$

$$2x + 3x + 2x^2 + 2x - 6x^2 - x - 1 - 2x = 0$$

$$-4x2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-4)}$$

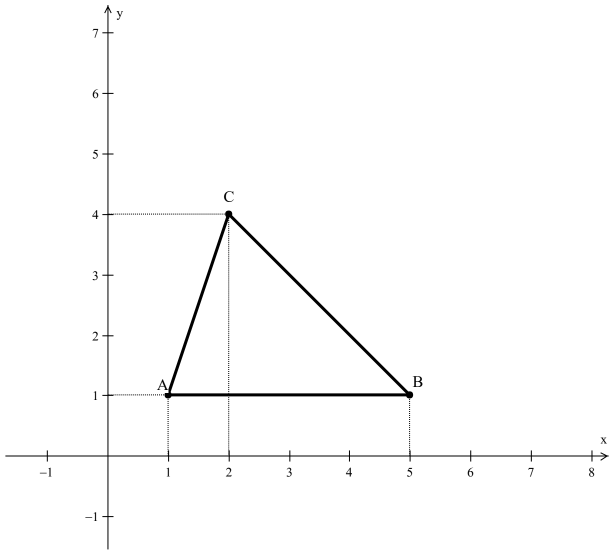
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-8}$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Portanto, para que o determinante da matriz seja igual a 0, x deve ser $\frac{1}{2}$.

Vamos agora voltar ao problema apresentado no início e responder às perguntas propostas!

Primeiro vamos construir o gráfico do triângulo para uma melhor visualização:



Usando a fórmula estudada em Geometria Plana, temos.

$$A_{\Delta} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Usando a fórmula que envolve o cálculo do determinante, temos:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}|D|$$

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix} = 1 + 2 + 20 - 2 - 4 - 5 = 12$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}|12| = 6$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar*: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.