MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - III

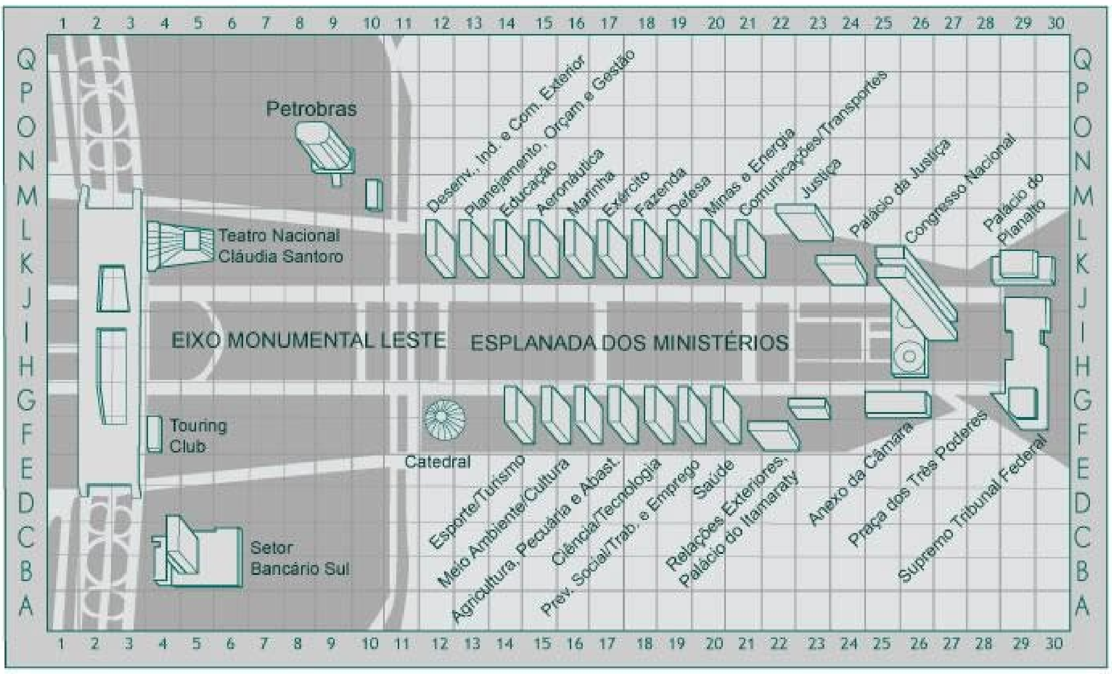
Introdução à Geometria Analítica

Objetivo: Estudar as coordenadas cartesianas no plano ,a distância entre dois pontos e a condição para alinhamento de três pontos.

René Descartes (1596 a 1650), filósofo e matemático francês, imaginou um sistema de eixos em que se pudessem localizar pontos do plano através de dois números: as coordenadas cartesianas. Este estudo se desenvolveu para Geometria por meio de conceitos algébricos (pares ordenados, equações, inequações, etc.), ou seja, a Geometria Analítica.

O sistema de coordenadas cartesianas é muito utilizado em nosso dia a dia, nos mapas ou em qualquer guia de orientação geográfica, pois podemos associar o plano cartesiano com latitude e longitude, aos estudos geográficos e à criação do atual sistema de posicionamento global, o GPS, que permite sabermos nossa localização exata na terra ao ter em mãos um receptor de sinais enviados por satélites.

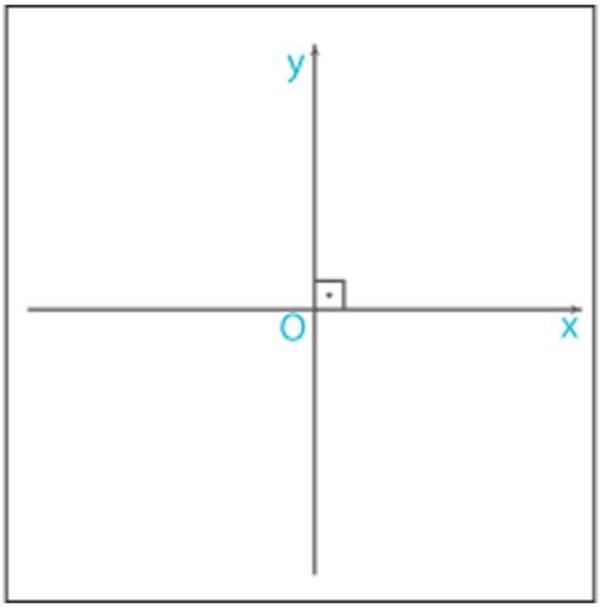
Observe o mapa a seguir em que está representada parte da cidade de Brasília.



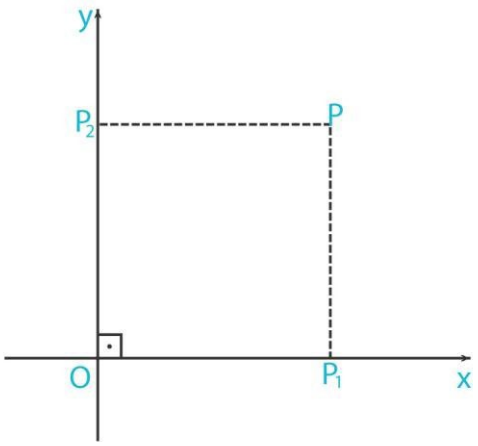
- Considerando a ordenação dos números de 1 a 30 e as letras de "A" a "Q", onde está localizada a origem do sistema de coordenadas usado no mapa?
- Qual é a localização do Palácio do Planalto, da Petrobrás e do Ministério da Educação?
- O que está localizado em K24 e em F21?

Coordenadas cartesianas no plano

Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O, que determinam umplano α:



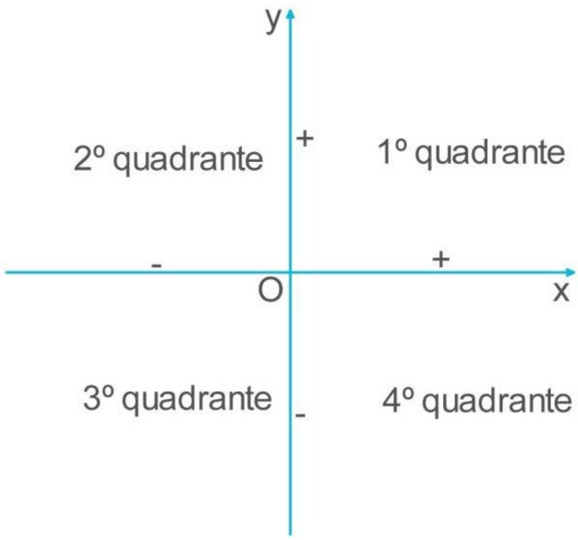
Dado um ponto P qualquer, pertencente a α, traçamos por P duas retasparalelas aos eixos x e y, que interceptam os eixos nos pontos P_1 e P_2:



Dessa forma, definimos:

- O número real $x_P = OP_1$ é a **abscissa** do ponto P.
- O número real $y_P = OP_2$ é a **ordenada** do ponto P.
- Os números reais x_P e y_P são as **coordenadas** de P, que são indicadas na forma de par ordenado (x_P , y_P)
- O eixo x (ou Ox) é o **eixo das abscissas**.
- O eixo y (ou Oy) é o **eixo das ordenadas**.
- O **sistema de eixos cartesiano ortogonal** é o sistema xOy.
- O ponto O é a **origem** do sistema.
- O plano α é o **plano cartesiano**.

Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões – os **quadrantes** –, que são numeradas no sentido anti-horário:



- Um ponto P pertence ao 1º quadrante se $x_P \geq 0$ e $y_P \geq 0$.
- Um ponto P pertence ao 2º quadrante se $x_P \leq 0$ e $y_P \geq 0$.
- Um ponto P pertence ao 3º quadrante se $x_P \leq 0$ e $y_P \leq 0$.
- Um ponto P pertence ao 4º quadrante se $x_P \geq 0$ e $y_P \leq 0$.
- Um ponto P pertence ao eixo das abscissas se $y_P = 0$.
- Um ponto P pertence ao eixo das ordenadas se $x_P = 0$.
- A origem do sistema cartesiano tem coordenadas (0 , 0).

Exemplos:

Localizar os pontos no plano cartesiano:

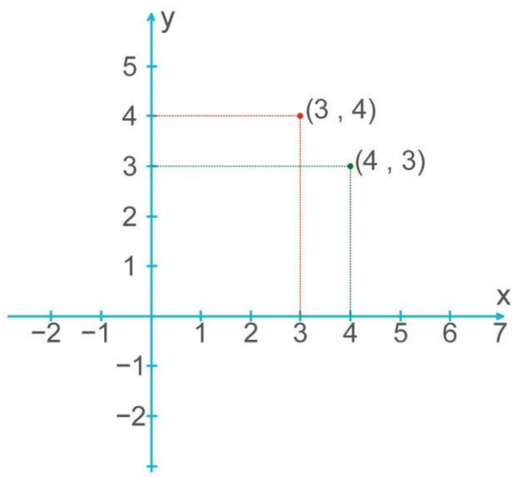
A(3 , 4); B(-4 , 2); C(- 2 , -3); D(5 , -1); E(6 , 0); F(-3 , 0); G(0 , 5/2); H(0 , -4)

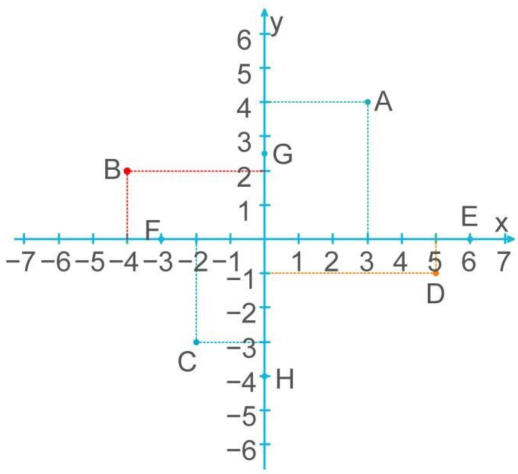
Solução:

- A é um ponto do 1º quadrante.
- B é um ponto do 2º quadrante.
- C é um ponto do 3º quadrante.
- D é um ponto do 4º quadrante.
- E e F são pontos do eixo x.
- G e H são pontos do eixo y.

IMPORTANTE:

No par ordenado, o primeiro número representa sempre a abscissa e o segundo a ordenada do ponto. Dessa forma, os pontos (3 , 4) e (4 , 3) são diferentes:





Distância entre dois pontos

Dados dois pontos A (x_A , y_A)e B (x_B , y_B) , para calcular a distância dentre eles, usamos a fórmula abaixo que decorre da aplicação do Teorema de Pitágoras.

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemplo:

Vamos calcular a distância entre os pontos A(-3, 1) e B(4, -2).

Solução:

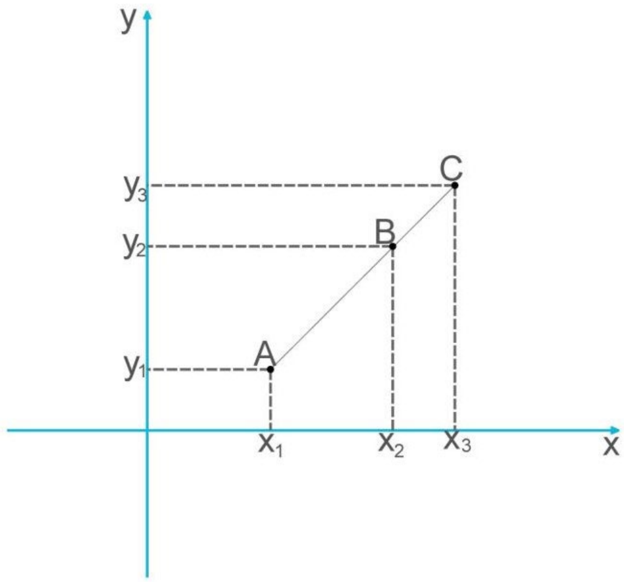
$$d = \sqrt{\left(4-(-3)\right)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

Observe que se você mudar a ordem das diferenças, a distância não se altera:

$$d = \sqrt{(-3-4)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 3^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

Condição para alinhamento de três pontos

Qual é a condição para que três pontos distintos estejam alinhados? Três pontos $A(x_1 , y_1)$, $B(x_2 , y_2)$ e $C(x_3 , y_3)$ são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade:



DICA:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante de uma matriz de ordem 3 que você verá mais a fundo no Módulo 5!

Observação: *Se A é uma matriz de ordem 3, podemos obter seu determinante utilizando uma regra prática denominada* ***Regra de Sarrus****:*

I. *Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.*

II. *Multiplicamos os termos entre si, seguindo as flechas em diagonal e associando, aos produtos, o sinal indicado.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo:

Verifique se os pontos A(-1, 1), B(1, 3) e C(7, 9) são colineares.

Solução:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 7 & 9 \end{array}\right. = +(-3)+7+9-21-(-9)-1=0 \Rightarrow \text{A, B e C são colineares}$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

Vamos agora voltar ao mapa de Brasília para responder às perguntas propostas!

- A origem do sistema de coordenadas usado no mapa se encontra em A1.
- O Palácio do Planalto encontra-se em K29, a Petrobrás em N9 e o Ministérioda Educação em K14.
- Em K24 encontra-se o Palácio da Justiça e em F21 o Ministério da Saúde.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar* – v. 7: Geometria Analítica. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática, volume único*: *construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.