

MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo – VI

Progressões

Aritméticas

Soma dos “n” primeiros termos de uma P.A.

Objetivo: Resolver situações problemas envolvendo a soma dos termos de uma P.A.



Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

Pense no meio ambiente: imprima apenas se necessário.



Problema proposto

Um relógio que toca um sino de hora em hora, o número de vezes correspondentes àquela hora, baterá de zero às 12 horas, x vezes. Calcule o dobro da terça parte de x .

Como você resolveria essa situação?

Ao final da aula você saberá resolver esse problema.

Introdução

Já vimos nas aulas anteriormente que uma P.A. (progressão aritmética) é toda sucessão de números que, a partir do segundo, a diferença entre cada termo e o seu antecessor é constante.

Então, se pedirmos para que você calculasse a soma dos 30 primeiros termos, ou dos 300 primeiros, como você faria?

Essas somas poderão ser simbolizadas por S_{30} (soma dos 30 primeiros termos), por S_{300} (soma dos 300 primeiros termos) ou por S_n (soma dos "n" primeiros termos). Vamos ver um exemplo:

(0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)

Essa sequência possui 10 termos, como podemos ver, em que $a_1 = 0, a_{10} = 18$ e $r = 2$. Para sabermos a soma desse exemplo, podemos calcular manualmente, ou seja, $0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 90$, mas se fosse pedido para somarmos os 145 primeiros termos, manualmente iria demorar muito, não é?

Será que só existe esse modo ou há um mais prático?

Observe que a soma do primeiro com o último termo dessa sequência é 18.



Agora veja a soma do segundo com o penúltimo $2 + 16 = 18$ e a soma do terceiro com o antepenúltimo também, e assim por diante.

Note que a soma 18 apareceu exatamente 5 vezes. Ao invés de somarmos termo a termo, poderíamos somar 5 vezes o 18, ou seja, $5 \times 18 = 90$ (mesmo resultado).

Agora, pense! Por que apareceu cinco vezes a soma 18?

Como tínhamos 10 termos, é óbvio que a soma iria aparecer um número de vezes igual à metade do número de termos.

E agora, se fosse uma sequência com 200 elementos?

Deveríamos proceder da mesma maneira.

A soma do primeiro com o último iria se repetir por 100 vezes (metade de 200), portanto, matematicamente falando, teríamos:

$$S_{100} = (a_1 + a_{100}). 50$$

Para concluir, se tivéssemos que calcular a soma dos elementos de uma P.A. com "n" termos, a soma do primeiro com o último iria se repetir por $\frac{n}{2}$ vezes. Então, poderemos escrever que a soma dos "n" primeiros termos dessa P.A. será dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n). n}{2}$$

$a_1 \rightarrow$ é o primeiro termo da P.A.

$a_n \rightarrow$ é o último termo a ser somado na P.A.

$n \rightarrow$ é o número de termos a serem somados na P.A.

Exemplo 1

Calcule a soma dos 20 primeiros termos da P.A. seguinte:

(5, 8, 11, 14, 17...)

Solução

Note que para a utilização da fórmula da soma dos termos é necessário conhecer o valor de a_1 e a_{20} .

$$a_1 = 5; \quad r = 8 - 5 = 3; \quad n = 20$$

Precisamos determinar qual é o 20º termo dessa P.A. ou a_{20} . Para isso, iremos utilizar a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{20} = 5 + (20 - 1) \cdot 3$$

$$a_{20} = 5 + 19 \cdot 3$$

$$a_{20} = 62$$

Agora, poderemos utilizar a fórmula da soma dos “n” primeiros termos da P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_n = \frac{(5 + 62) \cdot 20}{2} \rightarrow S_n = \frac{67 \cdot 20}{2} \rightarrow \mathbf{S_{20} = 670}$$

Agora, com as informações acima, poderemos solucionar o problema proposto. Dessa forma, teremos que 0 hora o relógio baterá 12 vezes (você não achou que bateria 0 vezes, não é?).

1 hora o relógio baterá uma vez.

2 horas o relógio baterá duas vezes.

3 horas o relógio baterá três vezes.

12 horas o relógio baterá 12 vezes.

Logo, teremos a seguinte sequência (**12, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 12**).

A partir do segundo termo da sequência acima, temos uma P.A. de 12 termos, cujo primeiro é igual a 1, a razão é 1 e o último termo é 12.

Portanto, a soma dos termos dessa P.A. será:

$$S = (1 + 12) \cdot \frac{12}{2} = 13 \cdot 6 = 78$$

A soma procurada será igual ao resultado anterior mais as 12 batidas da zero hora. Logo, o número **x** será igual a $x = 78 + 12 = 90$.

O dobro da terça parte de **x** será: $2 \cdot \left(\frac{90}{3}\right) = 2 \cdot 30 = 60$, que é a resposta do problema proposto.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNIO, José. *Matemática Completa: ensino médio – 1º ano*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática Ciência e Aplicação: ensino médio*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor – Ensino Médio*. São Paulo: Secretaria da Educação, 2011.

XAVIER, Claudio da Silva; BARRETO, Benigno Filho. *Matemática Aula por Aula: ensino médio – 1º ano*. São Paulo: FTD, 2005.