MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Sistemas Lineares

Resolução por escalonamento

Objetivo: Resolver um sistema linear na forma escalonada.

Anteriormente vimos como resolver um sistema linear utilizando a Regra de Cramer e agora veremos outra forma de resolver um sistema.

Considere o seguinte problema:

Três alunos compraram lanches na cantina da escola. O primeiro gastou R$9,00 e comprou 2 sucos, 1 salgado e 2 chocolates. O segundo comprou 1 suco, 2 salgados e 2 chocolates e gastou R$10,00. O terceiro gastou R$11,00 e comprou 1 suco, 2 salgados e 3 chocolates. Qual é o preço de cada produto?

Após este conteúdo você será capaz de responder essa pergunta!

Sistemas escalonados

Um sistema linear é dito escalonado se está disposto nas seguintes formas:

1. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ \quad\;\; 2y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ \boxed{0x} + 2y = 2 \end{cases}$$

ixi

2. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ \quad 5y + z = 1 \\ \quad\quad -z = 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 0x + 5y + z = 1 \\ 0x + 0y - z = 7 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ 0x + 2y - z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Observe que na primeira equação aparecem todas as incógnitas, na segunda equação desaparece o x, na terceira equação desaparecem x e y e assim sucessivamente.

Resolução de um sistema na forma escalonada

Há dois tipos de sistemas escalonados a se considerar.

1º tipo: nº de equações igual ao nº de incógnitas (m = n):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Esse sistema tem solução única (SPD, como vimos anteriormente).

Para resolvê-lo, partimos da última equação, obtendo x_n. Em seguida, substituímos esse valor na equação anterior, obtendo x_{n-1}. Repetimos esse procedimento e vamos obtendo x_{n-2}, x_{n-3}, ... , x_3, x_2 e x_1.

Nos exemplos 1 e 2 acima temos:

1. $\begin{cases} x + 3y = 4 (i) \\ \quad\quad 2y = 2 (ii) \end{cases}$

(ii) 2y = 2

y = 1

(i) x + 3y = 4

x + 3 . 1 = 4

x = 1

S = $\{(1 , 1)\}$

2. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 (i) \\ \quad\quad 5y + z = 1 (ii) \\ \quad\quad\quad\quad -z = 7 (iii) \end{cases}$

(iii) −z = 7

z = -7

(ii) 5y + z = 1

5y + (-7) = 1

y = $\frac{8}{5}$

(i) x + 2y − z = 2

x + 2 . $\frac{8}{5}$ − (-7) = 2

x = $-\frac{41}{5}$

S = $\left\{\left(-\frac{41}{5}, \frac{8}{5}, -7\right)\right\}$

2º tipo: nº de equações menor do que o nº de incógnitas (m < n).

Tal sistema admite infinitas soluções (SPI, como vimos anteriormente).

Para resolvê-lo tomamos as incógnitas que <u>não</u> aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas <u>variáveis livres</u>) e passamos para o 2º membro. O novo sistema assim obtido pode ser visto como um sistema contendo apenas as incógnitas do 1º membro das equações.

No exemplo 3 acima temos:

$$\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ \quad 2y - z = 0 \end{cases}$$

variável livre: z

$$\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ \quad 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 5 - z \\ \quad 2y = z \end{cases} \overset{z=\alpha}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 4y = 5 - \alpha (i) \\ \quad 2y = \alpha (ii) \end{cases}$$

(ii) $2y = \alpha$

$y = \frac{\alpha}{2}$

(i) $x - 4y = 5 - \alpha$

$x - 4 \cdot \frac{\alpha}{2} = 5 - \alpha$

$x = 5 + \alpha$

S = $\left\{\left(5+\alpha,\frac{\alpha}{2},\alpha\right);\alpha\in \text{IR}\right\}$

Note que qualquer valor que atribuirmos a α nos dá uma solução para o sistema.

Por exemplo:

Se $\alpha = 0 \Rightarrow (5, 0, 0)$

Se $\alpha = 1 \Rightarrow \left(6,\frac{1}{2},1\right)$

Exemplo

$$\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ \qquad\quad 3z+2t=4 \end{cases}$$

variáveis livres: y e t

$$\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ 3z+2t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=t-y \\ 3z=4-2t \end{cases} \underset{t=\beta}{\overset{y=\alpha}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x-z=\beta-\alpha(i) \\ 3z=4-2\beta(ii) \end{cases}$$

(ii) $3z = 4 - 2\beta$

$z = \frac{4-2\beta}{3}$

(i) $x - z = \beta - \alpha$

$x - \left(\frac{4-2\beta}{3}\right) = \beta - \alpha$

$x = \frac{4-3\alpha+\beta}{3}$ (confira!!!)

S = $\left\{\left(\frac{4-3\alpha+\beta}{3},\alpha,\frac{4-2\beta}{3},\beta\right);\alpha,\beta\in \text{IR}\right\}$

Da mesma forma, qualquer valor que atribuirmos a α e a β nos dá uma solução para o sistema.

Método do escalonamento

É um método de resolução de sistemas lineares, que transforma um sistema linear qualquer em outro na forma escalonada, usando as seguintes propriedades:

- Trocar as posições de duas equações.
- Dividir uma equação por um número real diferente de zero.
- Multiplicar uma equação por um número real e adicionar à outra equação.

Dessa forma, para escalonarmos um sistema, precisamos fazer com que o coeficiente **a_{11} seja igual a 1** e usar as propriedades acima para anular os coeficientes até que o sistema fique escalonado.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplos

1. $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$

Em primeiro lugar, devemos colocar os coeficientes das incógnitas e os termos independentes em uma matriz.

Em seguida, usar as propriedades acima até que o sistema fique escalonado.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 10 \end{array}\right] (/\,2) \quad = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & -2 \end{array}\right] \times (-4) \; + \quad = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -22 \end{array}\right]$$

Após o escalonamento, o novo sistema é chamado sistema equivalente, que possui as mesmas soluções do sistema original. Dessa forma, reconstruímos o sistema e o resolvemos escalonado como vimos acima.

$$\begin{cases} x + 2y = 5(i) \\ -11y = -22(ii) \end{cases}$$

(ii) – 11y = – 22

y = 2

(i) x + 2y = 5

x + 2 . 2 = 5

x = 1

S = { (1 , 2) }

2. $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \times (-2) \quad \times (-3) \qquad = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{array}\right] /\,(-3)$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{array}\right] \times (7) \qquad = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 (i) \\ y + z = 5 (ii) \\ 2z = 4 (iii) \end{cases}$$

(iii) 2z = 4

z = 2

(ii) y + z = 5

y + 2 = 5

y = 3

(i) x + 2y + z = 9

x + 2 . 3 + 2 = 9

x = 1

S = { (1 , 3 , 2) }

3. $\begin{cases} a + b + c = 12 \\ 3a - b + 2c = 14 \\ 2a - 2b + c = -3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 2 & 14 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \times (-3) \quad \times (-2) \qquad = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -4 & -1 & -22 \\ 0 & -4 & -1 & -27 \end{array}\right] \times (-1)$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -4 & -1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a+b+c=12 \\ -4b-c=-22 \\ 0=-5(F) \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Impossível (SI)} \Rightarrow S = \{\ \ \}$$

Vamos agora voltar ao problema apresentado no início da matéria e responder à pergunta proposta.

Vamos representar por x o preço do suco, por y o preço do salgado e por z o preço do chocolate. Dessa forma, podemos montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x+y+2z=9 \\ x+2y+2z=10 \\ x+2y+3z=11 \end{cases}$$

Resolvendo por escalonamento temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{c} x(-2) \quad x(-1) \\ + \quad + \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+2y+2z=10(i) \\ -3y-2z=-11(ii) \\ z=1(iii) \end{cases}$$

(iii) z = 1

(ii) - 3y - 2z = - 11

- 3y – 2 . 1 = - 11

- 3y = - 9

y = 3

(i) $x + 2y + 2z = 10$

$x + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 10$

$x = 2$

Logo, a solução do sistema é **S = { (2 , 3 , 1) }**, ou seja, o preço do suco é R$2,00, do salgado é R$3,00 e do chocolate é R$1,00.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática: construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.