Matemática
UNINOVE

Inequações exponenciais

Objetivo: Discutir alguns casos das desigualdades exponenciais.

Módulo II

Situação-problema

Todo mundo sabe como é a gripe, basta uma mudança de tempo e “lá vem ela”. O aumento do número de pessoas infectadas por ela é dado pelo modelo matemático: $N(t) = 3000\ (2^{\frac{3}{2}t})$, em que N(t) é o número de pessoas infectadas em t dias após o início de um certo estudo.

No dia em que este estudo iniciou, o número de pessoas infectadas era de 3000. Quantos dias são necessários para que os infectados ultrapassem três milhões?

Dica: *Considere* $2^{10} \cong 10^{3}$.

Solução

O problema quer saber quantos dias, no mínimo, demoram para que se ultrapasse 3 milhões de infectados. Então, substituímos N(t) por 3000000, e aí comparamos a desigualdade:

$$3000000 < 3000\left(2^{\frac{3}{2}t}\right)$$

$$\frac{3000000}{3000} < \left(2^{\frac{3}{2}t}\right)$$

$$1000 < \left(2^{\frac{3}{2}t}\right)$$

$$10^3 < \left(2^{\frac{3}{2}t}\right)$$

$$2^{10} < \left(2^{\frac{3}{2}t}\right) \rightarrow 10 < \frac{3}{2}t$$

$$10 < \frac{3}{2}t \rightarrow \frac{20}{3} \cong 6{,}66$$

Assim, precisamos de, no mínimo, 7 dias para ultrapassar 3000000 de infectados.

DICA:

Quando você precisar calcular o valor do expoente em inequações exponenciais, converta os dois lados da desigualdade para a mesma base e depois compare as potências.

Problemas que envolvem contagens de máximo ou mínimo valor em uma função pode ser associados às inequações. Nesta aula vamos analisar alguns casos que envolvem inequações exponenciais. Para isso, associamos a inequação a sua forma $f(x) = a^x$ e avaliamos o seu crescimento ou decrescimento e decidimos conforme segue:

1. Se $f(x) = a^x$ é crescente, conservamos o sentido da desigualdade, isto é: $a^m > a^n \leftrightarrow m > n$ ou $a^m < a^n \leftrightarrow m < n$.

IMPORTANTE:

Para resolver problemas com inequações exponenciais, é importante se lembrar do estudo do crescimento e decrescimento da função exponencial.
Assim, uma função $f(x)=a^x$ é crescente se a base (a) é maior que 1 e decrescente se for um número entre 0 e 1.

2. Se $f\,f(x) = a^x$ é decrescente, trocamos o sentido da desigualdade, isto é: $a^m > a^n \leftrightarrow m < n$ ou $a^m < a^n \leftrightarrow m > n$.

Exemplos resolvidos

1) Resolva a inequação $10^{2x-5} > 1$

Resolução

$10^{2x-5} > 1 \rightarrow 10^{2x-5} > 10^0$ (transformamos em potências da mesma base)

$2x - 5 > 0$ (mantemos o sentido da desigualdade, pois a base é maior que 1)

$2x > 5 \rightarrow x > \frac{5}{2}$

Solução

$\left\{x \in R \; ; x > \frac{5}{2}\right\}$ (verifique utilizando visualização gráfica)

2) Resolva a inequação $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^{2-3}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^{2-3}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1}$ (neste caso, as bases já são iguais, mas atenção entre 0 e 1)

$2x^2 - 3 < 1$ (trocamos o sentido da desigualdade. Base entre 0 e 1)

$2x^2 - 4 \rightarrow x^2 < 2$ Assim, temos $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$

Solução

$\left\{x \in R \; ; \; -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$ (verifique utilizando visualização gráfica)

3) Resolva a inequação $3^{-2} < 9^{3x-2} \leq 3^{2x}$

Resolução

Para este caso, precisamos resolver duas inequações simultâneas:

I) $3^{-2} < 9^{3x-2}$ e **II)** $9^{3x-2} \leq 3^{2x}$

I) $3^{-2} < 9^{3x-2} \rightarrow 9^{3x-2} > 3^{-2}$

$(3^2)^{3x-2} > 3^{-2} \rightarrow 3^{6x-4} > 3^{-2}$ (como a base é maior que 1, mantém o sentido)

$6x - 4 > -2 \rightarrow x > \frac{1}{3}$ (verifique)

II) $9^{3x-2} \leq 3^{2x} \rightarrow (3^2)^{3x-2} \leq 3^{2x}$

$(3^2)^{3x-2} \leq 3^{2x} \rightarrow 3^{6x-4} \leq 3^{2x}$ (como a base é maior que 1, mantém o sentido)

$6x - 4 \leq 2x \rightarrow 4x \leq 4 \rightarrow x \leq 1$ (verifique)

A solução do problema é a intersecção das duas soluções:

$$\left\{x \in R\ ;\ \frac{1}{3} < x \leq 1\right\}$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática* – Contexto e Aplicações. Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

IEZZI, Gelson *et al. Matemática – Ciência e Aplicações.* Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo *et al. Os Elos da Matemática.* Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: Editora Saraiva, 2010