MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Números complexos

Multiplicação e divisão

Objetivo: Ampliar os conhecimentos das operações de multiplicação e divisão de números complexos.

Podemos representar um número complexo por meio de um par ordenado, representado no plano Argand-Gauss. Vamos, então, multiplicar e dividir números complexos e mostrar como podemos representar graficamente tais operações.

Multiplicação

Para multiplicar dois números complexos z_1 = (a + bi) e z_2 = (c + di), utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma e agrupamos os termos idênticos, não esquecendo que $i^2=-1$.

Assim:

(a + bi) . (c + di) = a.c + a.di + bi.c + bi.di = (ac + adi) + (bci + bdi²) = (ac + adi) + [bci + bd(-1)] = ac + (ad + bc)i - bd = ac – bd + (ad+bc)i

Exemplos:

1)Sejam os complexos $\begin{cases} \mathbf{z_1 = \ 2 + 3i} \\ \mathbf{z_2 = 3 - 2i} \end{cases}$, determine $\mathbf{z = z_1 . z_2}$.

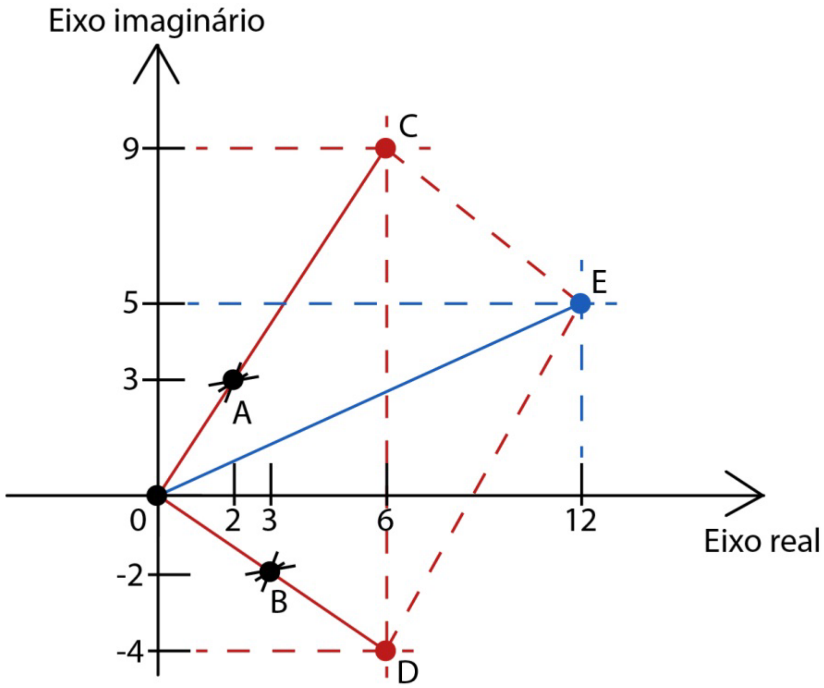
Resolução:

$\mathbf{z = z_1 . z_2} = (\ 2 + 3\mathrm{i}\ ).(\ 3 - 2\mathrm{i}\ ) = [\ 2.3 + 2.(-2\mathrm{i}\ ) + 3\mathrm{i}.3 + 3\mathrm{i}.(-2\mathrm{i}\ )] =$
$(6 - 4\mathrm{i})\ + (9\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2) = (6 - 4\mathrm{i}) + (9\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2) = (6 - 4\mathrm{i}) + [9\mathrm{i} - 6(-1)] =$
$\mathbf{(6 - 4i) + (6 + 9i) \Longrightarrow z = 12 + 5i}$.

Vamos, agora, representar esta operação por meio de vetores, no plano Argand-Gauss.

$\begin{cases} z_1 = 2 + 3i \Rightarrow A\ (\ 2,\ 3\ ) \\ z_2 = 3 - 2i \Rightarrow B\ (\ 3,\ -2\ ) \end{cases}$ $\begin{cases} z_3 = 6 - 4i \Rightarrow C\ (\ 6,\ -4\ ) \\ z_4 = 6 + 9i \Rightarrow D\ (\ 6,\ 9\ ) \end{cases}$

Portanto, $z = 12 + 5i \Rightarrow E\ (\ 12,\ 5\ )$



2) Sejam os complexos $\begin{cases} \mathbf{z_1 = 2 + 3i} \\ \mathbf{z_2 = 6 - 2i} \\ \mathbf{z_3 = -5 + 4i} \end{cases}$, determine $\mathbf{z = z_1.z_2.z_3}$

Resolução:

$z_5 = z_1.z_2.z_3 = (2 + 3i).(6 - 2i).(-5 + 4i) = [(2 + 3i).(6 - 2i)].(-5 + 4i) =$

$[2.6 + 2.(-2i) + 3i.6 + 3i.(-2i)].(-5 + 4i) = (12 - 4i + 18i - 6i^2).(-5 + 4i) =$

$[12 + 14i - 6.(-1)].(-5 + 4i) = (12 + 14i + 6).(-5 + 4i) =$

$(18 + 14i).(-5 + 4i) =$

$= -90 + 72i - 70i + 56i^2 = -90 - 56 + 2i \implies \mathbf{z_5 = -146 + 2i}$

Através destes exemplos, observamos que podemos operar com a forma algébrica dos números complexos da mesma forma que operamos expressões algébricas usuais, basta apenas lembrarmos que **$i^2 = -1$**.

Quanto à representação gráfica com mais de dois números complexos, deve ser feita tomando-se pares de complexos até chegarmos a somente dois.

Divisão

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$, o **inverso de z** é denotado por $z^{-1} = \frac{1}{z}$, tal que $z.\frac{1}{z} = 1$. Daí $z.\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow (a+bi).(c+di) = 1 \Rightarrow ac+adi+cbi+bdi^2 = 1+0i \Rightarrow ac - bd + (ad + cb)i = 1 + 0i \Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{a}{a^2+b^2} \\ d = \frac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$

resolvendo o sistema, temos $\frac{1}{z} = c + di = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$.

Podemos dizer que seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$ seu **conjugado** é da forma **$\bar{z} = a - bi$**, portanto $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}$.

Logo, para efetuarmos a divisão entre os complexos z_1 e z_2 , indicada por $\frac{z_1}{z_2}$ com $z_2 \neq 0$, resolveremos o produto $z_1.\frac{1}{z_2}$, como $\frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2}$ temos $z_1.\frac{1}{z_2} = z_1.\frac{\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2}$.

Exemplo:

Efetue $z = \frac{3+5i}{4-2i}$.

Resolução:

$$z=\frac{\mathbf{3+5i}}{\mathbf{4-2i}}\cdot\frac{4+2i}{4+2i}=\frac{3(4+2i)+5i(4+2i)}{4^2-(2i)^2}=$$

$$=\frac{(12+6i)+(20i+10i^2)}{16-(2)^2.i^2}=\frac{(12+6i)+[20i+10(-1\,)]}{16-4(-1\,)}=$$

$$=\frac{(12+6i)+(-10+20i)}{16+4}=\left(\frac{12+6i}{20}\right)+\left(\frac{-10+20i}{20}\right)=$$

$$=\left(\frac{12}{20}+\frac{6i}{20}\right)+\left(\frac{-10}{20}+\frac{20i}{20}\right)=$$

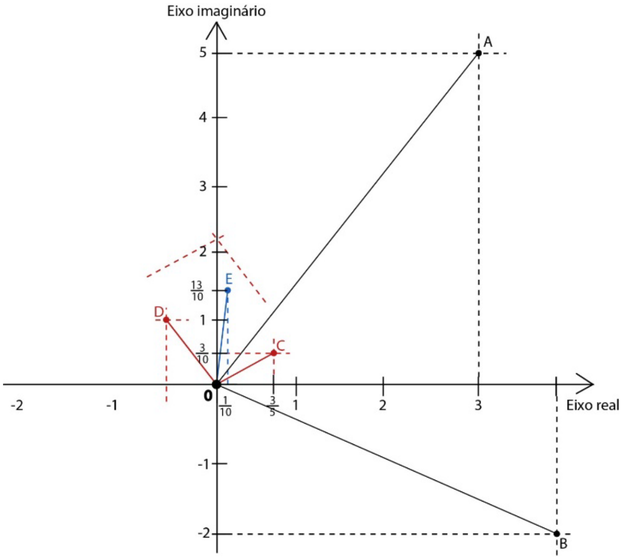
$$=\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}\mathbf{i}\right)+\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{i}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{10}+1\right)i\Longrightarrow \mathbf{z}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}+\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{10}}\mathbf{i}\,.$$

Vamos agora representar esta operação por meio de vetores, no plano Argand-Gauss.

$$\begin{cases} \mathbf{z_1}=\mathbf{3+5i}\Rightarrow \textbf{A (3, 5)} \\ \mathbf{z_2}=\mathbf{4-2i}\Rightarrow \textbf{B (4, -2)}\end{cases}\begin{cases} \mathbf{z_3}=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}i\Rightarrow \textbf{C}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}\right) \\ \mathbf{z_4}=-\frac{1}{2}+i\Rightarrow \textbf{D}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{1}\right)\end{cases}$$

Portanto $\mathbf{z}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}+\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{10}}\mathbf{i}\;\Rightarrow \textbf{E}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}},\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{10}}\right)$



Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Matemática – Ciência e aplicações - Ensino Médio - 3º ano*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática - Ensino Médio - 3º ano*. São Paulo: Saraiva, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau - 3º ano*. São Paulo: Atual, 2001.