MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - VI

Interpolação geométrica

E representação genérica de uma PG

Objetivo: Resolver problemas envolvendo a ideia de interpolação geométrica e a representação genérica de uma PG.

Situação-problema

Uma indústria produziu 100 unidades de um produto no mês de janeiro. Em julho do mesmo ano, ela produziu 6.400 unidades desse produto. Determine quantasunidades foram produzidas nos meses de fevereiro a junho, sabendo que as quantidades produzidas de janeiro a julho determinam uma PG.

Como você desenvolveria o que foi pedido no problema? Ao final deste conteúdo, você estará pronto para resolvê-lo.

Se você já viu a matéria de "Interpolação..." para as progressões aritméticas, não terá nenhumas dificuldades. Novamente, a única teoria que devemos saber é a interpretação de "interpolação de meios geométricos".

DICA:

Mas o que é interpolação? Em matemática, interpolação é o método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos, **ou seja**, é colocar entre; colocar no meio de meios geométricos. Pois os termos inseridos no meio formam uma PG. Da mesma forma que em PA, inserir **k** meios geométricos entre dois termos extremos **a** e **b** de uma PG significa obter uma PG com k + 2 termos.

Introdução

Uma progressão geométrica é toda sequência numérica que obedece a uma **lei de formação**. Em uma PG, todo termo, a partir do segundo, é obtido fazendo o produto entre o termo anterior e uma constante q. Essa constante **q** chamou-se de razão.

Interpolar meios geométricos entre dois números quaisquer a_1 e a_n significa determinar quais os números reais existentes entre a_1 e a_n para que a sequência numérica seja uma PG.

Vejamos alguns exemplos para que possamos desenvolver o problema proposto.

Antes de mostrar alguns exemplos, deveremos saber que para realização da interpolação de meios geométricos, precisamos utilizar a fórmula do termo geral da PG:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Para interpolar meios geométricos, também é necessário conhecer o valor da razão **q** da PG.

Exemplo 1: uma PG é formada por seis termos, onde $a_1 = 4$ e $a_6 = 972$.

Determine os meios geométricos existentes entre a_1 e a_6.

Solução:

Para interpolar os meios geométricos entre 4 e 972, precisamos determinar ovalor da razão da PG. Para isso, vamos utilizar a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$$a_6 = a_1.q^{6-1}$$

$$972 = 6.q^5$$

$$q^5 = 243$$

$$q = 3$$

Agora sabemos que a razão da PG é 3 e que cada termo, a partir do segundo, é obtido fazendo o produto entre o termo anterior e a razão. Assim, teremos:

$a_2 = a_1 \, . \, q^{2-1} \Rightarrow a_2 = 4 \, . \, 3 \Rightarrow a_2 = 12$

$a_3 = a_1 \, . \, q^{3-1} \Rightarrow a_3 = 12 \, . \, 3 \Rightarrow a_3 = 36$

$a_4 = a_1 \, . \, q^{4-1} \Rightarrow a_4 = 36 \, . \, 3 \Rightarrow a_4 = 108$

$a_5 = a_1 \, . \, q^{4-1} \Rightarrow a_5 = 108 \, . \, 3 \Rightarrow a_2 = 324$

Portanto, a PG será (4, 12, 36, 108, 324, 972).

Exemplo 2: Determine os termos que faltam na sequência numérica:

(3, _, _, _, _, _, _, _, _, 1.536) para que tenhamos uma progressão geométrica.

Solução:

Observemos que para descobrirmos os termos que faltam na sequência com extremos 3 e 1536, significa interpolar meios geométricos. Dessa forma, precisamos mais uma vez determinar o valor da razão dessa PG.

Pela sequência numérica dada, sabemos que $a_1 = 3$ e $a_{10} = 1.536$ (pois 1.536 ocupa a décima posição na sequência). Utilizando a fórmula do termo geral, teremos:

$a_{10} = a_1 . q^{10-1}$

$a_{10} = a1 . q^9$

$1536 = 3.q^9$

$q^9 = 512$

$q = 2$

Agora conhecendo a razão, poderemos determinar os termos que faltam na sequência.

$a_2 = a_1 \,.\, q^{2-1} \Rightarrow a_2 = 3 \,.\, 2 \Rightarrow a_2 = 6$

$a_3 = a_1 \,.\, q^{3-1} \Rightarrow a_3 = 6 \,.\, 2 \Rightarrow a_3 = 12$

$a_4 = a_1 \,.\, q^{4-1} \Rightarrow a_4 = 12 \,.\, 2 \Rightarrow a_4 = 24$

$a_5 = a_1 \,.\, q^{5-1} \Rightarrow a_5 = 24 \,.\, 2 \Rightarrow a_5 = 48$

$a_6 = a_1 \,.\, q^{6-1} \Rightarrow a_6 = 48 \,.\, 2 \Rightarrow a_6 = 96$

$a_7 = a_1 \,.\, q^{7-1} \Rightarrow a_7 = 96 \,.\, 2 \Rightarrow a_7 = 192$

$a_8 = a_1 \,.\, q^{8-1} \Rightarrow a_8 = 192 \,.\, 2 \Rightarrow a_8 = 384$

$a_9 = a_1 \,.\, q^{9-1} \Rightarrow a_9 = 384 \,.\, 2 \Rightarrow a_9 = 768$

Logo: a PG será (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536).

Exemplo 3: Para interpolar três meios geométricos entre 6 e 4.374, a razão deve ser:

a) 27
b) $9\sqrt{3}$
c) 9
d) $3\sqrt{3}$

Solução:

Se iremos colocar três meios entre os dois valores dados, 6 e 4.374, então:6,____,______,___,___, 4374.

Informações do problema:

a_1 = 6

a_5 = 4.374

Vamos aplicar a fórmula geral:

$a_n = a_1.q_{n-1}$

$a5 = a_1.q^{5-1}$

$4374 = 6.q^4$

$q^4 = 729$

$\boldsymbol{q} = 3\sqrt{3}$

Exemplo 4: Quantos meios geométricos devemos interpolar entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{32}{243}$ para obtermos uma PG de razão $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

Solução:

Informações do problema:

$\mathrm{a}_1 = \frac{2}{3}$

$\mathrm{a}_\mathrm{n} = \frac{32}{243}$

q= $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Aplicando a fórmula do termo geral temos:

$\mathbf{a_n = a_1.q^{n-1}}$

$$\frac{32}{243} = \frac{2}{3}.\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{32}{243} = \frac{3}{32} . \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{3} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$

$$\frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = 4$$

$\boldsymbol{n} = 9$

Agora, sabemos que a PG terá nove termos, portanto, devemos interpolar sete termos entre os dois já dados. Logo, resposta 7.

Após essas informações, já podemos determinar a situação problema citado:

Situação-problema: Uma indústria produziu 100 unidades de um produto no mês de janeiro. Em julho do mesmo ano, ela produziu 6.400 unidades desse produto. Determine quantas unidades foram produzidas nos meses de fevereiro a junho, sabendo que as quantidades produzidas de janeiro a julho determinam uma PG.

Solução:

De acordo com o enunciado do problema, a sequência (100, _, _, _, _, _, 6.400) é uma PG. Para resolver o problema, precisamos determinar os termos que faltam nessa PG ou interpolar meios geométricos entre 100 e 6400. Assim, precisamos determinar a razão dessa PG, em que $a_1 = 100$ e $a_7 = 6.400$.

$$a_7 = a1 \,.\, q^{7-1}$$

$$6400 = 100 \,.\, q^6$$
$$q^6 = 64$$
$$q = 2$$

Após termos achado o valor da razão, temos:

$$a_2 = 100 \,.\, 2 \Rightarrow a_2 = 200$$

$$a_3 = 200 \,.\, 2 \Rightarrow a_3 = 400$$

$$a_4 = 400 \,.\, 2 \Rightarrow a_4 = 800$$

$$a_5 = 800 \,.\, 2 \Rightarrow a_5 = 1.600$$

$$a_6 = 1600 \,.\, 2 \Rightarrow a_6 = 3.200$$

Portanto, a produção no mês de fevereiro foi de 200 unidades; março foi de 400 unidades; abril foi de 800 unidades; maio foi de 1.600 unidades e junho foi de 3.200 unidades.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José. *Matemática Completa* – Ensino Médio - 1º ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática Ciência e Aplicação* – Ensino Médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor* – Ensino Médio, 2011.

XAVIER, Claudio da Silva; BARRETO, Benigno Filho. *Matemática Aula por Aula* – Ensino Médio – 1º ano. São Paulo: FTD, 2005.