**Matemática**

*UNINOVE*

# Números Racionais

**Objetivo:** Entender o significado das frações e como operar com elas, lembrando que números racionais são representados por uma divisão de dois inteiros.

## Módulo II

**DICA:**

Não existe divisão por zero.

## Situação-problema:

Quanto custa um pedaço de pizza, sendo que a pizzacusta 20 reais e está dividida em 8 pedaços do mesmo tamanho?

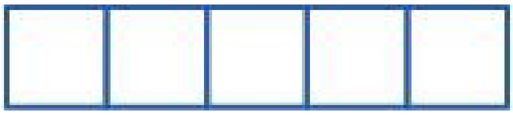
$$\frac{numerador}{denominador} \text{ ou } \frac{dividendo}{divisor}$$

Como um número racional é uma divisão de dois números, podemos efetuaros cálculos para ter uma representação decimal do número, por exemplo:

$$\frac{3}{7} = 3:7 \text{ e } \frac{3}{7} = 0{,}428561428561428561428561\ldots = 0,\overline{428561}$$

A barra sobre o 428561 significa que a parte do número 428561 se repete sempre de dízima periódica. Observe que, nesse caso, qualquer número inteiro pode ser um número racional, basta dividi-lo por 1. Todo número, que é uma dízima periódica, é racional e todo número racional escrito na forma decimal ou tem um fim ou é uma dízima periódica.

Por exemplo: 5,7 = 5,70 = 5,700 = 5,7000 (os zeros à direita, do lado direito da vírgula, não mudam o valor do número) e 05,7 = 005,7 = 0005,7 (os zeros à esquerda, do lado esquerdo da vírgula, também não mudam o valor do número). Esses números costumam representar, em grande parte das vezes, frações.



Observe que:

$\frac{1}{5}$ (preenche 1 quadrado).

$\frac{2}{5}$ (preenche 2 quadrados).

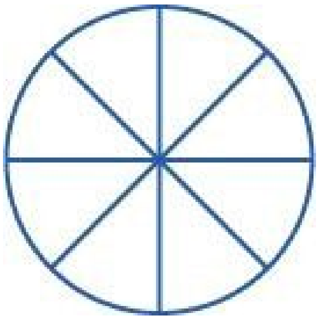
$\frac{3}{5}$ (preenche 3 quadrados).

$\frac{4}{5}$ (preenche 4 quadrados).

$\frac{5}{5}$ (preenche 5 quadrados).

Repare também que $\frac{5}{5}$ preencheu todos os quadrados.

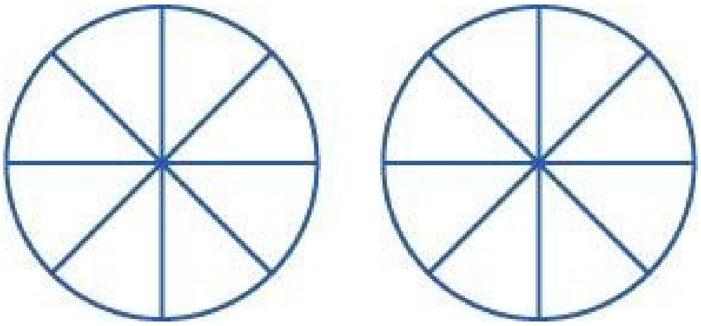
Observe essa pizza:



O que representa uma deliciosa fatia de pizza? Além de matar a vontade de comê-la, uma fatia representa, nesse caso, um oitavo de um todo; ou seja, é preciso ter 8 fatias para ter uma pizza inteira (pintando e enumerando as fatias de 1 a 8).

O que significa, então, uma fração como $\frac{11}{8}$ ?

Voltemos à pizza, podemos pegar 11 pedaços dela? Claro, basta pegar de duas pizzas.



Entendamos o que ocorreu:

$\frac{4}{8}$ de pizza corresponde a $\frac{1}{2}$ pizza.

O que significa, então, uma fração como $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{2}$ são iguais?

Uma forma de resolver isso é calcular o máximo divisor comum de 4 e de 8, que dá 4.

Pode-se dividir o numerador e o denominador por 4, assim, obtém-se:

$$\frac{4}{8} = {}^{(4/4)}\!\Big/_{(8/4)} = \frac{1}{2}$$

Existem várias outras frações que são iguais a $\frac{1}{2}$ não só o $\frac{4}{8}$ mas também os números $\frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{-6}{-12}, \frac{-7}{-14}$, etc... Basta multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo valor. Todas essas frações são chamadas frações equivalentes à $\frac{1}{2}$.

A fração $\frac{1}{2}$ possui o menor denominador positivo equivalente a $\frac{4}{8}$, então $\frac{1}{2}$ é chamado de fração irredutível ($\frac{4}{8}$ é chamada de fração redutível, porque os números 4 e 8 podem ser reduzidos para 1 e 2, respectivamente).

Operações com racionais:

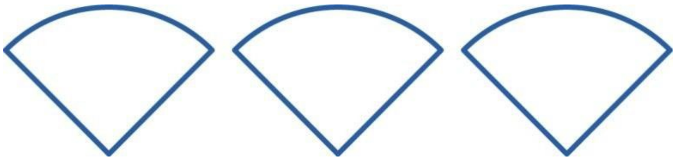
Quando tivermos que fazer $\frac{a}{b} + \frac{4}{8}$, podemos fazer $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a.d}{b.d} + \frac{b.c}{b.d} = \frac{a.d+b.c}{b.d}$

EXEMPLO

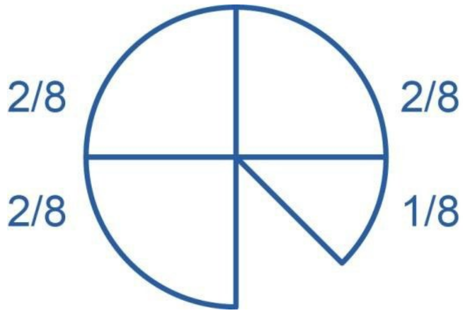
$$\frac{3}{5} + \frac{4}{3} = \frac{3.3}{5.3} + \frac{4.5}{5.3} = \frac{3.3+4.5}{5.3} = \frac{9+20}{15} = \frac{29}{15}$$

Por que a soma de frações é feita de forma tão estranha?

Voltemos à pizza, podemos aprender bastante com elas.



Pegue 3 pedaços, some com meia. O resultado é, então, uma pizza sem uma fatia, isto é, $\frac{7}{8}$ de pizza. Utilizando a "fórmula" de soma de frações, temos:




$$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3.2}{8.2}+\frac{8.1}{8.2}=\frac{3.2+8.1}{8.2}=\frac{6+8}{16}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$$

Tem outra forma de entender esse resultado, lembrando que $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$, temos:

$$\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{3+4}{8}=\frac{7}{8}$$

Isso ocorre sempre que os denominadores são idênticos, por isso que usamos o produto dos denominadores, para tornar as frações idênticas.

EXEMPLO

**a)** $\frac{2}{9}+\frac{7}{3}=\frac{2}{9}=\frac{21}{9}=\frac{23}{9}$

**b)** $\frac{4}{5}+\frac{23}{25}=\frac{20}{25}+\frac{23}{25}=\frac{43}{25}$

**c)** $\frac{9}{2}+\frac{3}{4}=\frac{10}{4}+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$

**IMPORTANTE:**

As operações devem ser sempre com o mesmo denominador.

A subtração de frações é uma operação praticamente igual à soma, a única diferença é que em vez de fazer uma soma, faz-se uma subtração.

Por exemplo, $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Se os denominadores forem diferentes, então utilizamos frações equivalentes para efetuar as operações. Assim, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}-\frac{b.c}{b.d}=\frac{a.d-b.c}{b.d}$.

Observe que a diferença está no sinal entre a.d e b.c. Na soma, aparece +, e - na subtração.

Assim, se quisermos, por exemplo, saber qual a fração equivalente à $\frac{3}{4}$com denominador 20, podemos escrever: $\frac{3}{4}=\frac{x}{20}$.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{x}{20}$$

Pensando um pouco, chegamos à conclusão de que x deve ser 15.

Como podemos chegar aos 15 de uma forma mais "simples"?

Observe que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{x}{20}$. Assim, $\frac{3}{4} = \frac{x}{5.4}$. Claro que x deve ser 3.5, mas para obter o 5, fazemos uma simples multiplicação **em cruz**, obtendo 4.x=3.5.4. Cancelando o 4, em ambos os lados da igualdade, temos: x = 3.5 = 15.

Agora vamos resolver o problema inicial: Uma pizza custa 20 reais e está dividida em 8 pedaços. Assim, o valor de um pedaço de pizza é de $\frac{20}{8} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5 = 2{,}50$, ou 2 reais e 50 centavos.

## Multiplicação de números racionais

Considere o seguinte problema: "Agora, uma pessoa pretende comer meio pedaço de pizza. Supondo que ela divida um pedaço com outra pessoa, quanto cada uma irá pagar?".

Lembrando que o valor de um pedaço de pizza é R$ 2,50, o que cada pessoa deverá pagar é R$ 1,25. Mas como obter esse valor de R$ 1,25?

Para isso, temos que calcular $\frac{2{,}50}{2} = 1{,}25$. Esse resultado pode ser obtido a partir do valor da pizza e da quantidade de pedaços.

Cada pessoa quer comer metade de um pedaço de pizza, ou seja, a pizza deve ser dividida em 16 pedaços. Assim, o seu valor também deve ser dividido em 16 partes. Logo $\frac{20}{16} = 1{,}25$.

Observe também que $\frac{1}{2} . \frac{20}{8} = \frac{20}{16} = 1{,}25$.

Este exemplo sempre ocorre. Para multiplicar dois números racionais, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, devemos multiplicar os numeradores e os denominadores,

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$.

EXEMPLO

**1)** $\frac{4}{7} . \frac{5}{9} = \frac{4.5}{7.9} = \frac{20}{63}$

**2)** $\frac{6}{13} . \frac{10}{7} = \frac{6.10}{13.7} = \frac{60}{91}$

**3)** $\frac{9}{4} + \frac{5}{3} = \frac{9.5}{4.3} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$

Continuando com a pizza, suponha que uma de 8 pedaços tenha sido dividida entre 8 pessoas. Porém, por um problema de falta de comandas e por sorte das pessoas, os 8 indivíduos compunham 4 casais, ficando, para cada casal, uma parte da conta. Sabendo que cada pessoa pagou R$ 2,50, quanto cada casal pagou?

A resposta, só pensando um pouco na situação, é facilmente obtida como R$ 5,00.

Essa situação é simples, porém existem algumas operações envolvidas que devem ser mostradas para poderem ser utilizadas em outras situações.

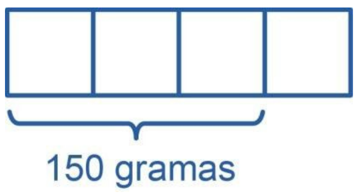
Uma forma de entender o processo é: cada pedaço de pizza custa R$ 2,50, valor que cada pessoa pagou.

Um casal é composto por 2 pessoas, assim, o valor de cada pedaço de pizza é:

$\frac{valor\ pago\ pelo\ casal}{2} = \frac{20}{8}$, como foi visto anteriormente, podemos encontrar o valor pago pelo casal, multiplicando **em cruz**, obtendo $\frac{2.20}{8} = \frac{40}{8} = 5.$

## Divisão de frações

Considere o problema: ¾ de um tablete de chocolate pesa 150 gramas, quanto pesa o tablete todo?




Observe que resta um pedaço do tablete, cujo peso deve corresponder a 1/3 dos 150 gramas. Assim, 1/3 de 150 gramas corresponde a dividir 150 gramas por 3 e devemos pegar 4 partes (pois 1 parte é que está faltando para obtermos a barra inteira). O peso da barra fica, então: $\frac{1}{3}.150.4 = 50.4 = 200$ gramas. Como a ordem dos fatores não altera o produto, a conta pode ser reescrita como:

$$150.\frac{4}{3} = 200$$

Outra forma de raciocínio pode ser obtida fazendo uma conta "simples" que é dividir os 150 gramas por $\frac{3}{4}$, para saber o peso de uma barra. Assim:

$$\frac{150}{\frac{3}{4}} = 150.\frac{4}{3} = 200$$

Nessa divisão por uma fração, o valor de 150 foi multiplicado pelo inverso de $\frac{3}{4}$.

Para efetuar a divisão de frações, $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} : \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$.

A divisão de frações é uma multiplicação de frações. Porém com a segunda fração **invertida.**

*Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.*

## REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI Jr., José Ruy. *Matemática, uma Nova Abordagem - Ensino Médio: 1º ano.* São Paulo: FTP, 2011. 1 v.

DOLCE, Osvaldo *et al. Tópicos de Matemática.* São Paulo: Atual Editora, 1999. 1 v.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar.* São Paulo: Atual Editora, 2005. 1 v.

IEZZI, Gelson; DOLCE Osvaldo. *Matemática: Ciência e Aplicações.* São Paulo: Atual Editora, 2004.

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. *Matemática – Curso Completo.* São Paulo: Editora Moderna, 2001.