MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Determinantes

Menor complementar e cofator

Teorema de Laplace

Objetivo: Definir os conceitos de menor complementar e cofator. Calcular o determinante de uma matriz de ordem n qualquer pelo Teorema de Laplace.

Veremos, neste conteúdo, uma definição que é válida para matrizes de ordem n qualquer.

Determinantes: menor complementar e cofator

Chama-se **menor complementar** ($\mathbf{D_{ij}}$) de um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada A, ao determinante da matriz que se obtém, eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A.

Assim, por exemplo, dada a matriz quadrada A de terceira ordem a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos escrever.

D_{23} = menor complementar do elemento $a_{23} = 9$ da matriz A.

Pela definição, D_{23} será igual ao determinante que se obtém de A, eliminando-se a linha 2 e a coluna 3, ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{3} \\ \boxed{5 \quad 7 \quad 9} \\ 3 & 5 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 0 \cdot 3 = 10$$

D_{12} = menor complementar do elemento $a_{12} = 0$ da matriz A.

Pela definição, D_{12} será igual ao determinante que se obtém de A, eliminando-se a linha 1 e a coluna 2, assim:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 3} \\ 5 & \boxed{7} & 9 \\ 3 & \boxed{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 9 \cdot 3 = -22$$

D_{31} = menor complementar do elemento $a_{31} = 3$ da matriz A.

Pela definição, D_{31} será igual ao determinante que se obtém de A, eliminando-se a linha 3 e a coluna 1, ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 - 3 \cdot 7 = -21$$

Da mesma forma podemos determinar D_{11}, D_{13}, D_{21}, D_{22}, D_{32} e D_{33}.

Cofator

O **cofator (A_{ij})** de um elemento a_{ij} de uma matriz é o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar de a_{ij}.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, D_{ij}$

Assim, por exemplo, o cofator do elemento $a_{23} = 9$ da matriz A do exemplo anterior, é igual a:

$A_{23} = (-1)^{2+3} \,.\, D_{23} = (-1)^5 \,.\, 10 = -1 \,.\, 10 = -10$

O cofator do elemento $a_{12} = 0$ da matriz A é igual a:

$A_{12} = (-1)^{1+2} \,.\, D_{12} = (-1)^3 \,.\, (-22) = -1 \,.\, (-22) = 22$

E o cofator do elemento $a_{31} = 3$ da matriz A é igual a:

$A_{31} = (-1)^{3+1} \,.\, D_{31} = (-1)^4 \,.\, (-21) = 1 \,.\, (-21) = -21$

Teorema de Laplace

Vamos ver agora uma maneira de calcular o determinante de matrizes de ordem n qualquer.

I. Escolhe-se uma linha ou coluna qualquer **(sugestão: escolha a linha ou coluna que tiver o maior número de zeros)**.

II. Multiplica-se cada elemento a_{ij} da linha ou coluna escolhida pelo cofator correspondente (ou seja, por $(-1)^{i+j}$ e pelo determinante de ordem n – 1 que se obtém suprimindo a linha e a coluna à qual pertence o elemento a_{ij} tomado).

III. Somam-se os n produtos obtidos.

Assim, se escolhermos a coluna j da matriz A:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então, seu determinante será dado por: $\det A = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \ldots + a_{nj}.A_{nj}$

Por exemplo:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \dashrightarrow \text{Se escolhermos a 1ª linha}$$

detA= $a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$

$a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \dashrightarrow \text{Se escolhermos a 3ª linha}$$

Se escolhermos a 3ª linha para calcular o determinante dessa matriz, só teremos que calcular dois cofatores, já que essa linha possui dois zeros.

Assim, $\det A = 3 \cdot A_{31} + \underbrace{0 \cdot A_{32}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{33}}_{0} + 2 \cdot A_{34}$

$$\text{Det } A = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 22 + 2 \cdot (-1) \cdot 16 = 34$$

Como as matrizes resultantes são de ordem 3, calculamos seus determinantes pela Regra de Sarrus!

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J. L. P. *Matemática: construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.