MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - VI

Somas dos infinitos termos

De uma PG

Objetivo: Identificar regularidades numéricas e/ou geométricas e determinar a lei de formação sequência.

Introdução

As progressões tratam de sequências que podem representar o crescimento de populações, cálculos de juros compostos, nascimento de novos galhos em uma árvore e tudo que aumente ou diminua segundo uma constante: a razão.

Situação-problema

Uma bola de borracha é largada de uma altura *a*. Após chocar-se com o solo,atinge uma altura igual a dois terços da anterior e este valor. Se mantém nos choques subsequentes. Quanto a bola percorrerá até que pare?

Como você resolveria esta situação?

Já sabemos que a soma dos termos de uma PG finita é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \, . \, (q^n - 1)}{q - 1}$$

Ao avaliarmos uma PG com a razão sendo um número entre -1 e 1, ou seja, – 1 < q < 1, a fórmula para a soma dos termos sofre pequena alteração em virtude de a razão estar compreendida neste intervalo. Acontece que para – 1 < q < 1, à medida que o número de elementos n tende ao infinito, a expressão qn tende a zero. Dessa forma, ao substituir qn por zero, a fórmula da soma fica:

$$S_n = \frac{a_1 \,.\, (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

E pode ser reescrita como $S_n = \frac{-a_1}{q-1}$, que é a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita com – 1 < q < 1.

Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Dada a PG $\left(1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$, obtenha a soma de todos os seus termos.

Solução

Temos que:

$a_1 = 1$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Segue que:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_n = 2$$

EXEMPLO

Resolva a equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \cdots = 16$

Solução

Observe que o lado esquerdo da igualdade é a soma dos infinitos termos de uma PG de razão:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \cdots \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{x}{4}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

Para resolver a equação, precisamos determinar qual é a soma dos termos do lado esquerdo da igualdade. Para isso, utilizaremos a fórmula da soma dos termos da PG infinita.

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_n = x$$

Assim, podemos reescrever o lado esquerdo da igualdade da seguinte forma:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \cdots = x$$

Dessa forma, teremos:

x = 16

Portanto, a solução da equação é x = 16.

Pensando nestas definições, agora poderemos resolver a situação-problema:

$$a = \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{4a}{3} + \frac{4a}{3} + \cdots =$$

Neste caso, temos que perceber que a bola sobe e desce.

Logo:

$$a + 2\left(\frac{2a}{3} + \frac{4a}{9} + \cdots\right)$$

$$\mathrm{PG}\left(\frac{2a}{3} + \frac{4a}{9} + \cdots\right)$$

$$a_1 = \frac{2a}{3}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

$$S_n = \frac{\frac{2a}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{2a}{3} \,.\, 3 \Rightarrow \mathbf{2a}$$

Portanto a + 2. 2a é igual a 5ª

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José. *Matemática Completa*: ensino médio - 1º ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática Ciência e Aplicação*: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor - Ensino Médio*. São Paulo: Secretaria da Educação, 2011.

XAVIER, Claudio da Silva; BARRETO, Benigno Filho. *Matemática Aula por Aula*: ensino médio - 1 º ano. São Paulo: FTD, 2005