

**MATEMÁTICA**

**UNINOVE**

**Módulo – VI**

# Termo geral de uma

## **Progressão Aritmética (P.A.)**

**Objetivo:** Resolver problemas a partir da fórmula do termo geral de uma P.A.



Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

**Pense no meio ambiente:** imprima apenas se necessário.

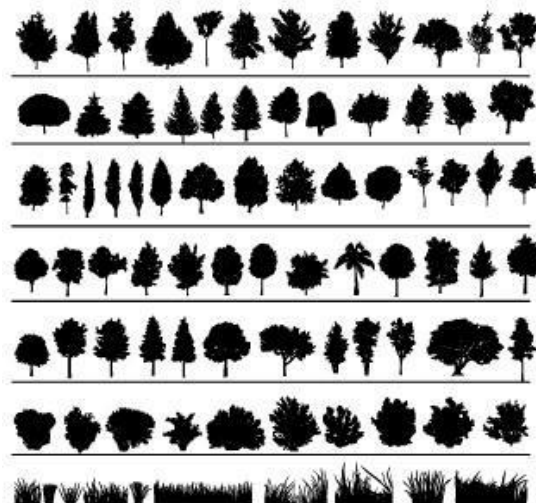
## Introdução

Uma Progressão Aritmética (P.A) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão.

### Consideramos as sequências

- Sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...)
- Sequência dos múltiplos de 6 (0, 6, 12, 18, 24, ...)

Observe que, nessas sequências, cada termo, depois do primeiro, é igual ao anterior adicionado a um número fixo: **2** na primeira sequência e **6** na segunda. Esse tipo de sequência é chamado de progressões aritméticas (P.A.) e o número fixo que adicionamos é chamado de razão ( $r$ ) da progressão.



## Situação problema

Um processo de reflorestamento previa a plantação de um número  $x$  de mudas de árvores. No primeiro dia, foram plantadas 120 árvores e planejou-se que, nos próximos, seriam plantadas, a cada dia, dez árvores a mais do que teria plantado no dia anterior. Dessa forma, teríamos:

1º dia: 120 árvores

2º dia: 120 árvores + 10 = 130 árvores

3º dia: 120 árvores + 20 = 140 árvores

Assim sucessivamente. Poderíamos representar o número de árvores plantadas em cada dia pela sequência:

(120, 130, 140, 150, 160, ...,  $a_n$ , ...)

A partir dessa sequência poder-se-ia perguntar quantas árvores seriam plantadas no 95º dia. Observe que seria muito trabalhoso construir a sequência até o 95º dia para determinar a quantidade solicitada. Para tanto, vamos analisar certas propriedades dessa sequência.

## MATEMÁTICA UNINOVE – TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

- O primeiro termo é 120 ( $a_1 = 120$ ).
- A cada termo foi adicionado uma constante (razão) igual a 10 ( $r = 10$ ).

A partir dessas constatações poderíamos estabelecer:

$$a_1 = 120$$

$$a_2 = a_1 + r = 120 + 10 = 130$$

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot r = 120 + 2 \cdot 10 = 140$$

$$a_4 = a_1 + 3 \cdot r = 120 + 3 \cdot 10 = 150$$

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot r = 120 + 4 \cdot 10 = 160$$

$$a_6 = a_1 + 5 \cdot r = 120 + 5 \cdot 10 = 170$$

.

.

.

$$a_{95} = a_1 + 94 \cdot r = 120 + 94 \cdot 10 = 120 + 940 = 1060 \text{ (no 95º dia seriam plantadas 1060 árvores).}$$

A partir dessa observação poderíamos estabelecer uma fórmula geral para  $n$  dias.



DICA:

Fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

### EXEMPLO 1

Um atleta nadou, hoje, 500 metros. Nos próximos dias ele pretende aumentar gradativamente essa marca nadando, a cada dia, uma mesma distância a mais do que nadou no dia anterior. No 15º dia ele quer nadar 3.300 metros. Determine a distância que ele deverá nadar a mais por dia.

### Resolução

Vamos, inicialmente, determinar os dados do problema. Note que a pergunta que devemos responder refere-se à razão da sequência.

$$a_1 = 500 \text{ metros}$$

$$a_{15} = 3.300$$

Assim:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{15} = a_1 + 14 \cdot r$$

$$3.300 = 500 + 14 \cdot r$$



DICA:

Resolver a equação do 1º grau.

$$14 \cdot r = 3.300 - 500$$

$$14 \cdot r = 2.800$$

$$r = 2.800 \div 14$$

$r = 200\text{m}$  (isso significa que a cada dia foram percorridos 200m a mais do que no dia anterior).

A distância que ele deverá nadar no 10º dia:

$$a_1 = 500$$

$$r = 200$$

$$a_{10} = ?$$

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot r$$

$$a_{10} = 500 + 9 \cdot 200$$

$$a_{10} = 500 + 1800$$

$$a_{10} = 2.300 \text{ m}$$

**EXEMPLO 2**

Quantos múltiplos de 5 há entre 21 e 623?

**Resolução**

Observe que, no intervalo considerado, os números 21 e 623 não são múltiplos de 5, isto é, não são divisíveis por 5. Então, devemos encontrar no intervalo o primeiro (25) e o último (620) múltiplo de 5. Esses múltiplos representam uma progressão aritmética (25, 30, 35, ..., 620), cuja razão é 5.

Para obter o número de termos dessa P.A, devemos ter:

$$a_1 = 25$$

$$a_n = 620$$

$$r = 5$$

$$n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$620 = 25 + (n - 1) \cdot 5$$

$$620 = 25 + 5n - 5$$

$$620 = 20 + 5n$$

$$5n = 620 - 20$$

## MATEMÁTICA UNINOVE – TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

$$5n = 600$$

$$n = 600 \div 5$$

$$n = 120 \text{ (no intervalo considerado há 120 múltiplos de 5).}$$

### EXEMPLO 3

O financiamento de um imóvel em dez anos prevê, para cada ano, doze prestações iguais. O valor da prestação mensal em um determinado ano é R\$ 20,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. Sabendo que, no primeiro ano, a prestação mensal era de R\$ 200,00, determine o valor da prestação a ser paga durante o 5º ano.

### Dados

Prestações do 1º ano  $\rightarrow a_1 = 200$

Razão  $\rightarrow r = 20$

Valores da prestação no 5º ano  $\rightarrow a_5?$

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot r$$

$$a_5 = 200 + 4 \cdot 20$$

$$a_5 = 200 + 80$$

$$a_5 = 280 \text{ (valores das prestações no 5º ano)}$$



## MATEMÁTICA UNINOVE – TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Determine o total a ser pago no 10º ano.

Inicialmente, devemos determinar o valor de cada prestação no 10º ano.

### Dados

Prestações do 1º ano  $\rightarrow a_1 = 200$

Razão  $\rightarrow r = 20$

Valores da prestação no 10º ano  $\rightarrow a_{10}?$

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot r$$

$$a_5 = 200 + 9 \cdot 20$$

$$a_5 = 200 + 180$$

$$a_5 = 380 \text{ (valores das prestações no 10º ano)}$$

Como em cada ano serão pagas 12 prestações, temos  $12 \times 380 = 4.560$  reais.

## MATEMÁTICA UNINOVE – TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

### EXEMPLO 4

Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física corre sempre 3 minutos a mais do que correu no dia anterior. Se no 5º dia o estudante correu 17 minutos, quanto tempo correrá no 12º dia?

$$a_5 = 17$$

$$r = 3$$

Com esses dados podemos determinar o primeiro termo da P.A. ( $a_1$ ).

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot r$$

$$17 = a_1 + 4 \cdot 3$$

$$17 = a_1 + 12$$

$$a_1 = 17 - 12$$

$a_1 = 5$  (no primeiro dia de treinamento, o estudante correu por 5 minutos)

Respondendo a questão do problema:

$$a_{17} = a_1 + 16 \cdot r$$

$$a_{17} = 5 + 16 \cdot 3$$

## MATEMÁTICA UNINOVE – TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

$$a_{17} = 5 + 48$$

$a_{17} = 53$  (no 17º dia o estudante correu por 53 minutos)

*Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.*

### REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNIO, José. *Matemática Completa: ensino médio – 1º ano*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática Ciência e Aplicação: ensino médio*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor – Ensino Médio*. São Paulo: Secretaria da Educação, 2011.

XAVIER, Claudio da Silva; BARRETO, Benigno Filho. *Matemática Aula por Aula: ensino médio – 1º ano*. São Paulo: FTD, 2005