MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

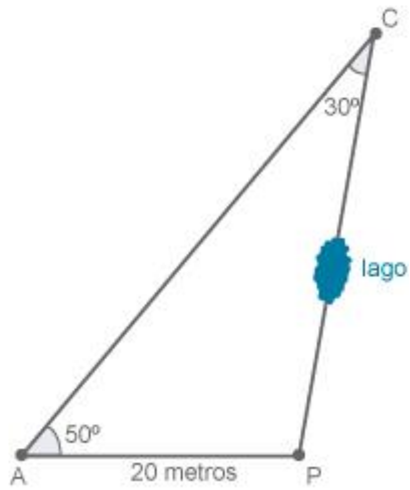
Trigonometria

Lei dos senos e dos cossenos

Objetivo: Definir as leis dos senos e dos cossenos válidas para triângulos quaisquer.

Situação-problema

Um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C separados por um lago. Sabe-se que a 20 metros do poste existe uma árvore A. Utilizando um teodolito, foram medidos os ângulos PÂC = 50 ° e PĈA = 30 °, conforme ilustrado na figura. Deseja-se saber a quantidade de fio que será necessária para fazer esta ligação.



Resposta

Como o triângulo APC não é retângulo, não é possível utilizar as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Para resolver este problema, devemos usar a lei dos senos.

Como $P\hat{A}C = 50º$ e $P\hat{C}A = 30º$, então $A\hat{P}C = 100º$.

Pela lei dos senos: $\frac{PC}{sen50º} = \frac{AP}{sen30º} = \frac{AC}{sen100º}$

$$\frac{PC}{sen50º} = \frac{AP}{sen30º} \Rightarrow \frac{PC}{sen50º} = \frac{20}{sen30º} \Rightarrow PC = \frac{20.sen50º}{sen30º} \cong 30{,}6$$

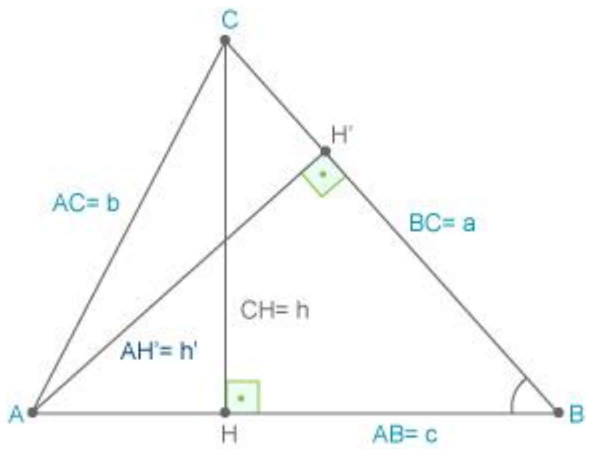
Logo, a quantidade de fio necessária é de, aproximadamente, 30,6 metros.

Para resolver este tipo de problema precisamos conhecer relações trigonométricas válidas em um triângulo qualquer: lei dos senos e dos cossenos.

Lei dos senos

Considere um triângulo qualquer (ABC), com altura de medida h, relativa ao lado $\overline{AB}$ e com altura h', relativa ao lado $\overline{BC}$.

Observe que os triângulos AHC e BHC são retângulos em H. Assim, podemos afirmar que $\text{sen}\hat{A} = \frac{h}{b}$ e $\text{sen}\ \hat{B} = \frac{h}{a}$. Isolando *h* em ambas as igualdades, temos: $h = b.\text{sen}\ \hat{A}$ e $h = a.\text{sen}\ \hat{B}$. Logo, podemos afirmar que $b.\text{sen}\hat{A} = a.\text{sen}\hat{B}$ e, portanto, $\boxed{\frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}}}$ (I).



Analogamente, os triângulos AH'B e AH'C são retângulos em H' e concluímos que $\text{sen}\hat{C} = \frac{h'}{b}$ e $\boxed{\text{sen}\hat{B} = \frac{h'}{c}}$. Isolando *h'* em ambas as igualdades, temos: $h' = b.\text{sen}\hat{C}$ e $h' = c.\text{sen}\hat{B}$. Logo, podemos afirmar que $b.\text{sen}\hat{C} = c.\text{sen}\hat{B}$ e, portanto, $\frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}}$ (II)

De (I) e (II), enunciamos a lei dos senos: $\boxed{\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}}$

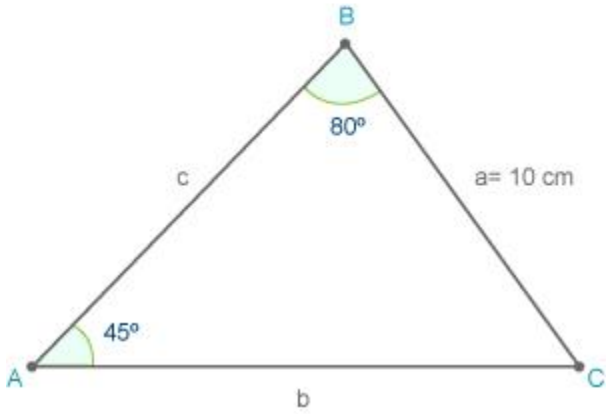
EXEMPLO:

Um triângulo tem ângulos de medidas 80 ° e 45 °. O lado oposto ao ângulo de 45° mede 10 cm. Calcule o perímetro do triângulo:

DICA:

O Perímetro (p) de um triângulo é a soma das medidas dos seus três lados, ou seja, $p = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$

Resposta:



Como a soma dos ângulos interno de um triângulo é 180º, podemos concluir que o ângulo $\hat{C}$ mede 55º.

Pela lei dos senos, sabemos que:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}.$$

Logo:

$$\frac{10}{\text{sen}45^{\text{o}}} = \frac{\text{b}}{\text{sen}80^{\text{o}}} = \frac{\text{c}}{\text{sen}55^{\text{o}}}$$

Portanto:

$$\frac{10}{\text{sen}45^{\text{o}}} = \frac{\text{b}}{\text{sen}80^{\text{o}}} \Rightarrow \text{b} = \frac{10\text{sen } \ 80^{\text{o}}}{\text{sen}45^{\text{o}}} \cong 13{,}93 \text{ e}$$

$$\frac{10}{\text{sen}45^{\text{o}}} = \frac{\text{c}}{\text{sen}55^{\text{o}}} \Rightarrow \text{c} = \frac{10\text{sen } \ 55^{\text{o}}}{\text{sen}45^{\text{o}}} \cong 11{,}58$$

Assim, o perímetro do triângulo é 10 + 13,93 + 11,58 ≅ 35,51 cm.

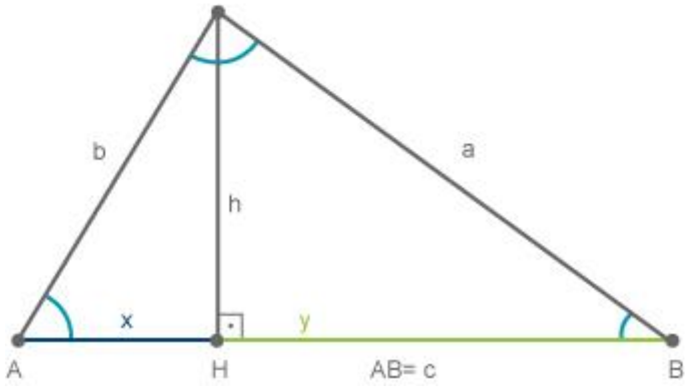
DICA:

Para calcular seno, cosseno e tangente de ângulos diferentes de 30 º, 45 º e 60 º, podemos utilizar tabelas que contenham estes valores ou efetuar os cálculos na calculadora. Para esta última opção, é necessário que a unidade de ângulo configurada na sua calculadora seja graus (º).

Lei dos cossenos

Considere um triângulo qualquer ABC, com altura de medida $\text{h} = \overline{\text{CH}}$, relativa ao lado $\overline{\text{AB}}$. O ponto H divide o lado $\overline{\text{AB}}$ em duas partes: $\text{x} = \overline{\text{AH}}$ e $\text{y} = \overline{\text{HB}}$.

Observe que o triângulo AHC é retângulo em H e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras temos: $\text{x}^2 + \text{h}^2 = \text{b}^2$. No entanto, como $\text{x} + \text{y} = \text{c}$, temos que $\text{x} = \text{c} - \text{y}$. Logo, $\boxed{(\text{c} - \text{y})^2 + \text{h}^2 = \text{b}^2}$ (I).



Por outro lado, do triângulo BHC, temos:

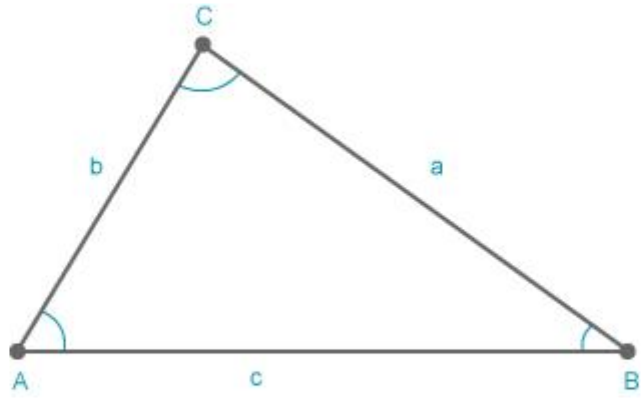
$\boxed{sen\hat{B} = \frac{h}{a} \Rightarrow \ h = a.sen\hat{B}}$ (II) e $\boxed{cos\hat{B} = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a.cos\hat{B}}$ (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), temos:

- $b^2 = (c - a.cos\hat{B})^2 + (a.sen\hat{B})^2$
- $b^2 = c^2 - 2ac\, cos\hat{B} + a^2 \cos^2 \hat{B} + a^2 sen^2 \hat{B}$
- $b^2 = c^2 - 2ac\, cos\hat{B} + a^2(\cos^2 \hat{B} + sen^2 \hat{B})$
- $b^2 = c^2 - 2ac\, cos\hat{B} + a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos\hat{B}$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, obtemos a lei dos cossenos:

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos\hat{B}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\hat{A}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\hat{C}$



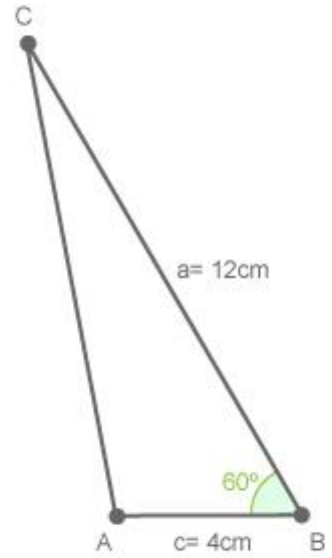
EXEMPLO:

Dois lados de um triângulo medem 4 e 12 cm, e o ângulo formado por eles é igual a 60 º. Determine a medida do terceiro lado.

Pela lei dos cossenos, sabemos que:

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
- $b^2 = 4^2 + 12^2 - 2.4.12.\cos 60^o$
- $b^2 = 16 + 144 - 96.\frac{1}{2}$
- $b^2 = 112$
- $b = \sqrt{112} = 4\sqrt{7} \cong 10{,}58$

Logo, o terceiro lado do triângulo mede, aproximadamente, 10,58 cm.



DICA:

Para concluir que $\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$, basta decompor o número 112 em fatores de números primos e efetuar as simplificações. Assim teremos,

$\sqrt{112} = \sqrt{2^4 . 7} = \sqrt{2^4} . \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. *Fundamentos da Matemática Elementar* - Ensino Médio – 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.v.3

MELLO, José Luiz Pastore. *Matemática*: construção e significado – Ensino médio. São Paulo: Moderna, 2005.