MATEMÁTICA

*UNINOVE*

Módulo - V

# Sistemas lineares

## Introdução, classificação e resolução por regra de Cramer

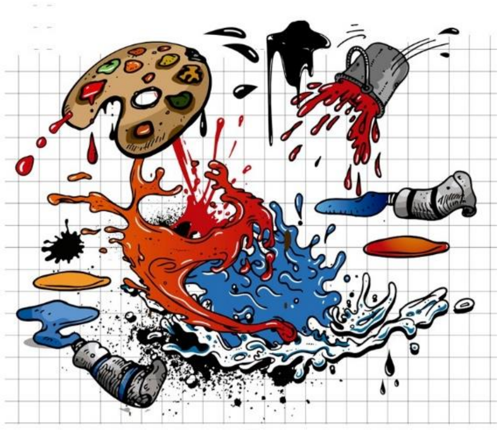
**Objetivo:** Introduzir os conceitos de sistemas lineares. Classificar os sistemas lineares de acordo com o número de soluções. Resolver sistemas lineares por meio da regra de Cramer.

Você já conhece dois métodos de resolução de sistemas: o método da adição e o método da substituição, certo?

Estudaremos os sistemas lineares e, para isso, são necessários os conceitos de matrizes e determinantes que estudamos nas aulas anteriores. Reveja essas aulas!

Muitas situações do dia a dia podem ser representadas e resolvidas por sistemas lineares.

**Considere o seguinte problema:**



Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Vamos calcular a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros, obtenha latas de:

**1.** R$ 100,00 sendo o preço do látex R$ 04,00 e o do corante R$ 08,00.

**2.** R$ 80,00 sendo o preço do látex R$ 04,00 e o do corante R$ 04,00.

**3.** R$ 60,00 sendo o preço do látex R$ 04,00 e o do corante R$ 04,00.

## Sistemas lineares – Introdução

Denomina-se **sistema linear** de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ a todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que os números reais $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ..., a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}$ são denominados coeficientes e $b_1, b_2, ..., b_m$ são os termos independentes.

***EXEMPLO***

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -8 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ 7x + 2y - 3z = 2 \\ 0x + 0y + z = 3 \end{cases}$$

Temos aí um sistema de 4 equações e 3 incógnitas (ou variáveis).

Se o conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisfazer todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

***EXEMPLO***

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 6} \\ \boldsymbol{2x + y - z = 1} \\ \boldsymbol{3x - y + z = 4} \end{cases}$$

**1.** (1, 2, 3) é solução desse sistema?

Substituindo, ordenadamente, esses valores no sistema, temos.

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6; \text{Ok} \\ 2.1 + 2 - 3 = 1; \text{Ok} \\ 3.1 - 2 + 3 = 4; \text{Ok} \end{cases}$$

É solução!

**2.** (-5, 11, 0) é solução desse sistema?

Substituindo, ordenadamente, esses valores no sistema, temos:

$$\begin{cases} -5 + 11 + 0 = 6; \text{Ok} \\ 2.(-5) + 11 - 0 = 1; \text{Ok} \\ 3.(-5) - 11 + 0 = -26; \text{X} \end{cases}$$

Não é solução!

***Observação: Se o termo independente de todas as equações do sistema (b1, b2, ..., bm) for nulo, o sistema linear é dito homogêneo.***

***EXEMPLO***

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + x = 0 \end{cases}$$

É fácil notar que um sistema linear homogêneo admite sempre como solução (0, 0 , … , 0), chamada solução trivial.

## Expressão matricial

Utilizando matrizes, podemos representar um sistema linear da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz dos termos independentes

Matriz das incógnitas

Matriz dos coeficientes

Observe que se efetuarmos a multiplicação das matrizes indicadas, obteremos o sistema dado.

***EXEMPLO***

**1.** $$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 7z = 0 \\ -2x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**2.** $$\begin{cases} 3x - z + 2t = 5 \\ y - 6z = 0 \end{cases}$$

Expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Classificação

- Se um sistema de equações possuir pelo menos uma solução, dizemos que ele é **POSSÍVEL** ou **COMPATÍVEL**.
- Se o sistema de equações é COMPATÍVEL e possui apenas uma solução, dizemos que ele é **DETERMINADO**.
- Se o sistema de equações é COMPATÍVEL e possui mais de uma solução, dizemos que ele é **INDETERMINADO**.
- Se um sistema de equações não possuir solução, dizemos que ele é **IMPOSSÍVEL** ou **INCOMPATÍVEL**.

## Regra de Cramer

***(Gabriel Cramer - matemático suíço - 1704/1752)***

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

Onde os coeficientes $a_{11}$, $a_{12}$, ..., $a_{nn}$ são números reais, os termos independentes $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$, são números reais e $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ são as incógnitas do sistema nxn.

Seja A a matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas, como A é uma matriz quadrada, podemos calcular o seu determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = \det A$$

Seja $\Delta x_i$ o determinante da matriz que se obtém do sistema dado, substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita $x_i$ (i = 1, 2, 3, ..., n), pelos termos independentes $b_1, b_2, \dots, b_n$.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta x_i$$

A regra de Cramer diz que:

Os valores das incógnitas de um sistema linear de n equações e n incógnitas são dados por frações cujo denominador é o determinante $\Delta$ dos coeficientes das incógnitas e o numerador é o determinante $\Delta x_i$, ou seja: $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$

Obs.: Se $\Delta \neq 0$, então o sistema de equações é possível (ou compatível) e determinado (SPD).

Se $\Delta = 0$ e $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$, então o sistema de equações é possível e indeterminado (SPI).

Se $\Delta = 0$ e pelo menos um $\Delta x_i \neq 0$, então o sistema de equações é impossível ou incompatível (SI).

***EXEMPLO***

Resolva os seguintes sistemas usando a regra de Cramer:

**1.** $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$

Expressão matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\Delta = \det A = 10 - (-1) = 11$ (como $\Delta \neq 0$, o sistema é **SPD**).

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 2 = 33$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita x, ou seja, a 1ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 7 = -11$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita y, ou seja, a 2ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

Portanto, temos:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3 \text{ e } y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-11}{11} = -1$$

E a solução do sistema é: S = $\{(3, -1)\}$.

**2.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

Expressão matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos, usando a Regra de Sarrus (confira os resultados!):

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24$$

(como $\Delta \neq 0$, o sistema é **SPD**).

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita x1, ou seja, a 1ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 48$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita $x_2$, ou seja, a 2ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita $x_3$, ou seja, a 3ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

Portanto, pela regra de Cramer, teremos:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{120}{24} = 5; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{48}{24} = 2 e x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{96}{24} = 4$$

Logo, o conjunto solução do sistema dado é S = $\{(5, 2, 4)\}$.

**3.** $\begin{cases} -2x + y - 3z = 3 \\ x - z = 1 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$

Expressão matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos, usando a Regra de Sarrus (confira os resultados):

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita x, ou seja, a 1ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

Como $\Delta$ **= 0** e $\Delta$**x ≠ 0**, então o sistema de equações é impossível **(SI)**.

S = { }

**4.** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$

Expressão matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos, usando a Regra de Sarrus (confira os resultados!!):

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita x, ou seja, a 1ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita y, ou seja, a 2ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

***Matriz que se obtém da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita z, ou seja, a 3ª coluna, pela coluna dos termos independentes.***

Como $\Delta = 0$ e $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, então o sistema de equações é possível e indeterminado (SPI).

Vamos agora voltar ao problema apresentado no início e responder às perguntas propostas.

Em primeiro lugar, vamos representar por x a quantidade em litros de látex e por y, a de corante. Dessa forma, podemos montar os seguintes sistemas lineares.

$$S_1: \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 8y = 100 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 80 \end{cases}$$

$$S_3: \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 60 \end{cases}$$

## Resolvendo os sistemas por Cramer, temos:

**$S_1$**

Expressão matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$\Delta = \det A = 8 - 4 = 4$ (como $\Delta \neq 0$, o sistema é **SPD**).

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \boxed{20} & 1 \\ \boxed{100} & 8 \end{vmatrix} = 160 - 100 = 60$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{20} \\ 4 & \boxed{100} \end{vmatrix} = 100 - 80 = 20$$

Portanto, temos:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{60}{4} = 15 \quad \text{e} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{20}{4} = 5$$

E a solução do sistema é: S = { (15 , 5) }, ou seja, 15 litros de látex e 5 litros de corante.

**$S_2$:**

Expressão matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det A = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 20 \\ 80 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{vmatrix} = 80 - 80 = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 20 \\ 80 \end{matrix}} \end{vmatrix} = 80 - 80 = 0$$

Como $\Delta = 0$ e $\Delta x = \Delta y = 0$, então o sistema de equações é possível e indeterminado **(SPI)**. Algumas das infinitas soluções do sistema são: (1, 19); (2, 18); (3, 17); (4.2, 15.8), etc.

**$S_3$:**

Expressão matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det A = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 20 \\ 60 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{vmatrix} = 80 - 60 = 20$$

Como $\Delta = 0$ e $\Delta x \neq 0$, então o sistema de equações é impossível **(SI)**.

S = { }

*Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.*

## REFERÊNCIAS

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar:* sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática:* construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.