MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Equações Polinomiais

Multiplicidade de uma raiz e raízes complexas

Objetivo: Ampliar os conhecimentos sobre as raízes de uma equação polinomial e apresentar um teorema que facilite a determinação das raízes.

Como comentamos anteriormente, uma equação polinomial de grau **n** tem exatamente **n** raízes. O que não comentamos é que algumas da **n** raízes podem ser iguais entre si.

Quando temos o caso de exatamente **r** raízes (**r** menor que **n**) serem iguais a certo número **α**, dizemos que **α** é raiz de multiplicidade **r**, ou seja, com o polinômio na forma fatorada, o fator (x - α) aparece **r** vezes.

DICA:

α é raiz de multiplicidade r do polinômio P(x), se e somente se:
$P(x) = (x-\alpha)^r \cdot Q(x)$,com $Q(\alpha) \neq 0$

Veja este exemplo para esclarecer melhor as ideias:

Seja $x^2 - 10x + 25 = 0$ uma equação de grau 2, vamos determinar o seu conjunto solução:

$\Delta = 100 - 100 = 0$: como delta é igual a zero, temos duas raízes iguais.

$$x = \frac{10 \pm 0}{2} \rightarrow x_1 = 5 \; ; \; x_2 = 5$$

Neste caso, dizemos que 5 é raiz de multiplicidade 2, ou ainda, 5 é uma raiz dupla da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Veja agora um exemplo em que o polinômio está na forma fatorada:

$$P(x) = (x-3)\,(x+2)\,(x+2)\,(x-4)$$

Neste caso, de acordo com o teorema da decomposição, as raízes do polinômio são: 3, 3, -2, -2 e 4 e o polinômio é de grau 5, pois temos 5 raízes. O conjunto solução da equação polinomial é { 3, -2, 4 }. 0.

Neste caso, temos:

x = 3 é raiz de multiplicidade 2, ou raiz dupla da equação P(x) = 0.

x = -2 é raiz de multiplicidade 2, ou raiz dupla da equação P(x) = 0.

x = 4 é raiz de multiplicidade 1, ou raiz simples da equação P(x) = 0.

Raízes complexas de equações polinomiais com coeficientes reais

Antes de citar o teorema das raízes complexas, vamos recordar algumas propriedades importantes a respeito do conjugado de um número complexo.

Considere também a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, em que os coeficientes **a**, **b**, **c** e **d** são números reais. Considere ainda que a equação admite a raiz complexa z = a + bi, isto é, $az^3 + bz^2 + cz + d = 0.$ Desta maneira, o conjugado do número complexo $az^3 + bz^2 + cz + d$ também é igual a zero, isto é:

$$\overline{az^3 + bz^2 + cz + d} = 0$$

Vamos recordar as propriedades do conjugado de um número complexo:

i. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iii. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

iv. $a = \bar{a}$; se a ϵ R

Desta maneira, o conjugado de um número complexo também é raiz da equação dada. Esta conclusão pode ser generalizada para equações polinomiais de grau **n‹** como **n›1** e com coeficientes reais.

IMPORTANTE:

Se um número complexo z = a + bi, com a e b pertencentes ao conjunto dos números reais, é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então, o conjugado $\bar{z}$=a-bi também é raiz da equação.

Veja este exemplo:

Sabendo que 2 + i é uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17_x - 15$, vamos obter o conjunto solução das raízes de P(x).

Resolução:

Sabemos que se (2 + i) é raiz de P(x), então (2 – i) também é. Assim, P(x) é divisível por $(x - (2 + i)\ (x - (2 - i)) = x^2 - 4x + 5$. Verifique!

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\mathrm{x}^3 & -7x^2 & +17 & -15 & \mathrm{x}^2 \quad -4\mathrm{x} \quad +5 \\ \cline{5-5}
-\mathrm{x}^3 & +4\mathrm{x}^2 & -5\mathrm{x} & & \mathrm{x} \quad -3 \\ \cline{1-4}
 & -3\mathrm{x}^2 & +12x & -15 & \\
 & -3\mathrm{x}^2 & +12x & -15 & \\ \cline{1-4}
 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Como $\mathrm{P}\,(\mathrm{x}) = \ (\mathrm{x} - (2 + \mathrm{i})\ (\mathrm{x} - (2 - \mathrm{i})\ (\mathrm{Q}(\mathrm{x}))$, então P(x) também é divisível por (x - 3). Logo, o conjunto solução é: $\{3\ ;\ 2 + \mathrm{i}\ ;\ 2 - \mathrm{i}\}$.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Matemática – Ciência e aplicações*. Ensino Médio - 3º ano. 3. ed. SãoPaulo: Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática.* Ensino Médio. 3º ano. São Paulo:Saraiva, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau* - 3º ano.São Paulo: Atual, 2001.