Matemática

UNINOVE

Números complexos

representação geométrica

Plano Argand-Gauss

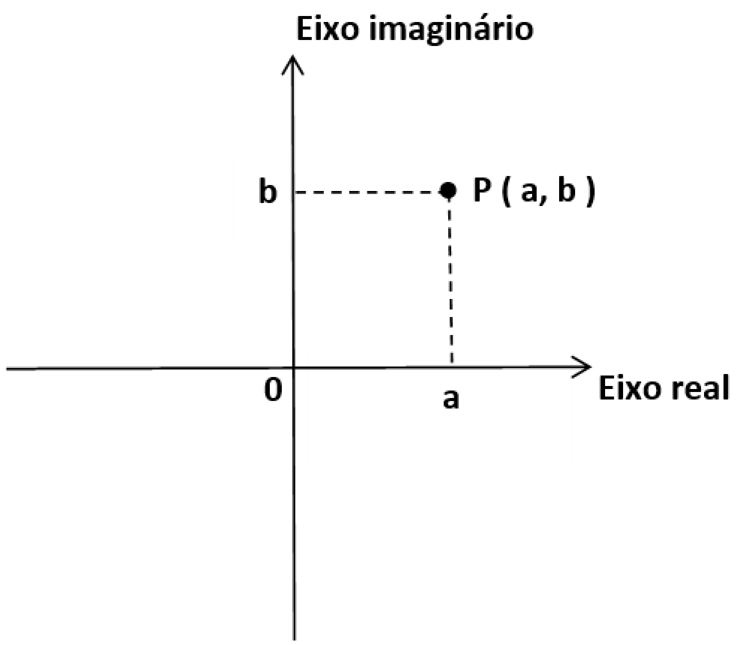
Objetivo: Apresentar os conceitos da representação geométrica de um número complexo no plano de Argand-Gauss.

Módulo IV

Situação-problema

Da mesma maneira que podemos representar entes geométricos (pontos, retas, planos etc.) analiticamente usando o plano cartesiano, que utiliza coordenadas (pares ordenados) dispostas em dois eixos perpendiculares, também podemos representar os números complexos, devido ao fato deles apresentarem duas coordenadas (real e imaginária) em forma de pares ordenados.

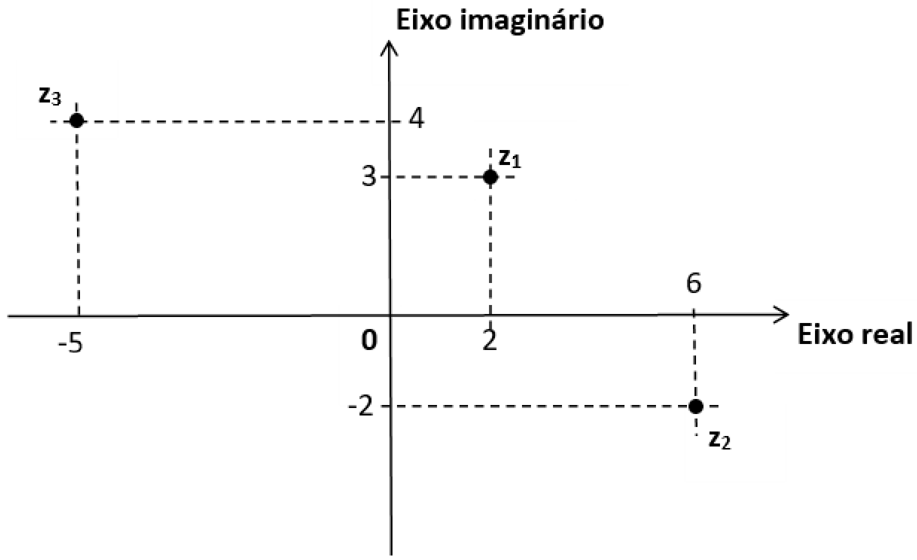
Por meio de suas características, podemos representar o número complexo $z = a + bi$ na forma de um ponto **P (a, b)** do plano, em que "**a**" é representado no eixo das **abscissas** (parte real) e "**b**" no eixo das **ordenadas** (parte imaginária), tal plano é conhecido como **plano de Argand-Gauss** ou **plano complexo**, que segue desenhado a seguir:



EXEMPLO

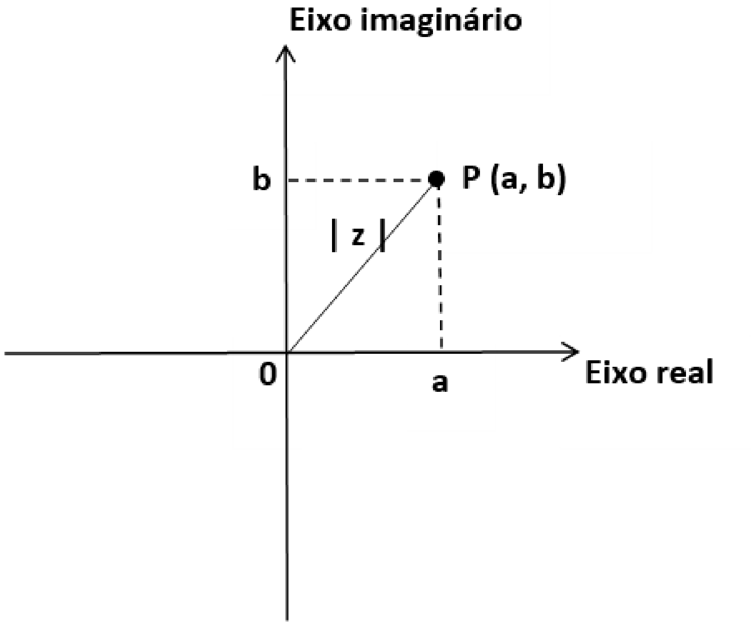
Dados os seguintes números complexos e suas respectivas coordenadas, represente os números no sistema de Argand-Gauss:

$$\begin{cases} \mathbf{z_1 = 2 + 3i \implies P_1\,(\,2, 3\,)} \\ \mathbf{z_2 = 6 - 2i \implies P_2\,(\,6, \text{-}2\,)} \\ \mathbf{z_3 = -5 + 4i \implies P_3\,(\,\text{-}5, 4\,)} \end{cases}$$



Módulo de um número complexo ($|z|$)

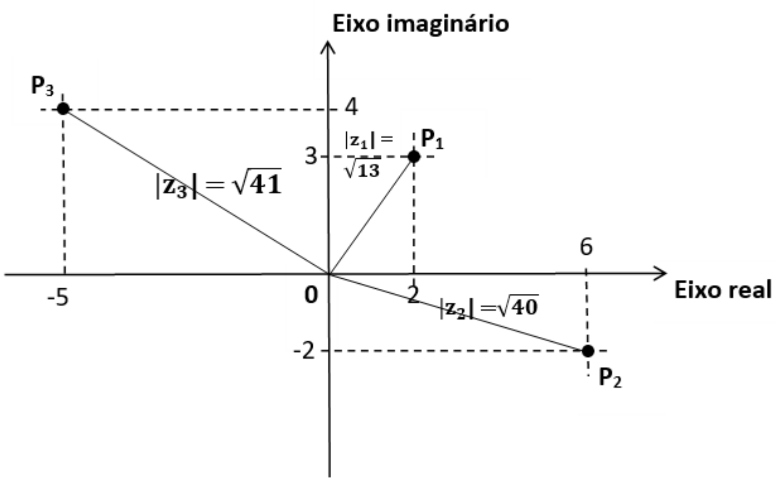
Seja um número complexo $\mathbf{z = a + bi}$, dizemos que seu **módulo**, denotado por $|z|$, é o número real ρ, tal que $\boldsymbol{\rho} = |\,\mathbf{z}\,| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} = \sqrt{\mathbf{z}\,.\,\bar{\mathbf{z}}}$, com $|\,\mathbf{z}\,| \geq \mathbf{0}$ (Observe que, seja $\mathbf{z = a + bi} \in \mathbb{C}$, temos que $\bar{z} = \mathrm{a} - \mathrm{bi}$ é seu **conjugado)**. Geometricamente, $|\,\mathbf{z}\,|$ equivale à distância da **origem** do plano Argand-Gauss até o ponto **P** representado pelo número complexo.



EXEMPLO

Dados os números complexos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 6 - 2i$ e $z_3 = -5 + 4i$, determine os módulos e faça a representação de Argand-Gauss.

$$\begin{cases} z_1 = 2 + 3i \implies P_1\,(2, 3) \implies |z_1| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} \implies |z_1| = \sqrt{13} \\ z_2 = 6 - 2i \implies P_2\,(6, -2) \implies |z_2| = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} \implies |z_2| = \sqrt{40} \\ z_3 = -5 + 4i \implies P_3\,(-5, 4) \implies |z_3| = \sqrt{(-5)^2 + (4)^2} = \sqrt{25+16} \implies |z_3| = \sqrt{41} \end{cases}$$

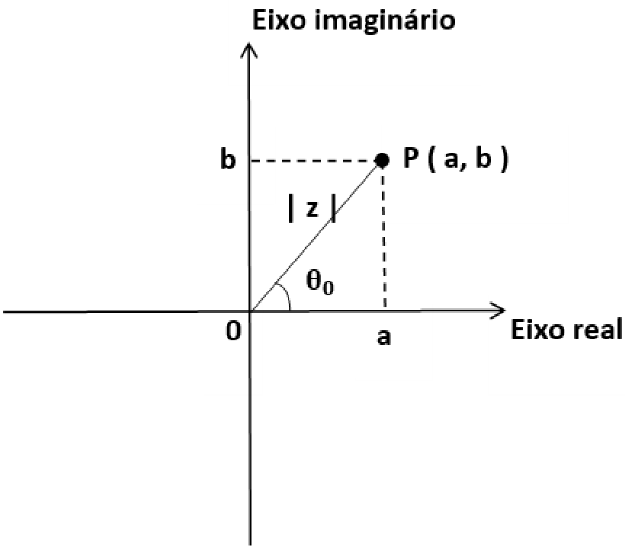


Argumento de um número complexo (θ)

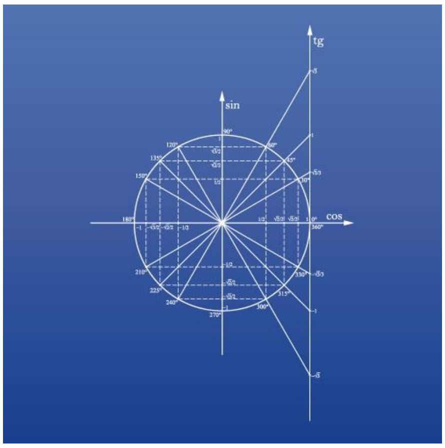
Chamamos de **argumento** de um número complexo $\mathbf{z = a + bi}$, não nulo, ao ângulo θ que satisfaz as condições a seguir:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\rho} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\rho}$$

- Chamamos de **argumento principal de z** ao ângulo θ_0 onde $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.
- $\theta = \theta_0 + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$.



Na figura a seguir, apresentamos os arcos notáveis e seus respectivos valores de seno e cosseno:



EXEMPLO

Determine o módulo e o argumento principal de $\boldsymbol{z} = \mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}$.

Resolução

$$\boldsymbol{\rho} = |\mathbf{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \,.\, \bar{z}} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\rho} = |\mathbf{z}| = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_0 = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \operatorname{sen}\theta_0 = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

IMPORTANTE:

$z \neq 0 \Rightarrow \rho \neq 0$

Pelo menos um ângulo θ satisfaz a definição, pois temos que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta =$

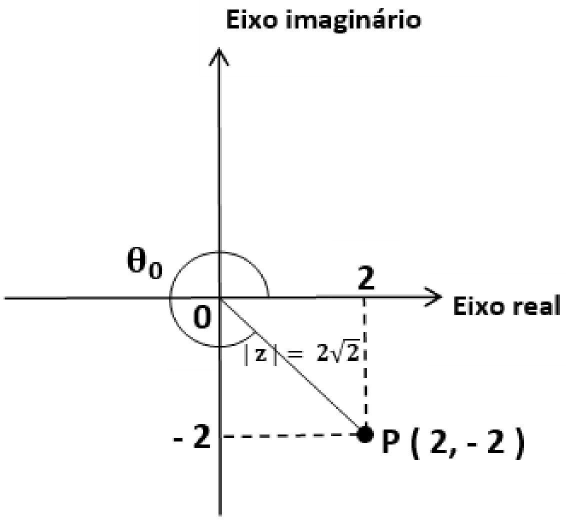
$$\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{|z|^2} = \frac{a^2+b^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

DICA:

Geometricamente, sendo P o representante do complexo z no plano de Argand-Gauss, o argumento de z é a medida do ângulo, em radianos, que devemos girar, no sentido anti-horário, do eixo OX até o segmento OP, formado pela origem do sistema e o ponto P.

Pelos nossos conhecimentos em trigonometria concluímos que $\theta_0 \in$ $3^{\text{º}}\ \text{quadrante}, \theta_0 = \frac{7\pi}{4}$.

Graficamente:



IMPORTANTE:

Para simplificarmos as notações, podemos usar apenas θ com $0 \leq \theta < 2\pi$.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar* – Ensino Médio. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. v. 3.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática Ensino Médio* – 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2010.

MACHADO, Antônio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau.* São Paulo: Atual, 2001.