MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Trigonometria

Seno e cosseno do arco duplo e arco metade

Objetivo: Calcular seno e cosseno do arco duplo e do arco metade.

Situação-problema

Sabendo que $\operatorname{sen} x = -\frac{2}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule sen(2x) e cos(2x).

Resposta: sabemos que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x. \cos x$. Portanto, para obtermos sen(2x), precisamos primeiro calcular cos x:

Pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Longrightarrow$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\cos x > 0$. Logo, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Portanto, $\operatorname{sen}(2x) = 2\left(-\frac{2}{3}\right).\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

Por outro lado, sabemos também que $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

Logo, $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

Para resolver este tipo de problema, precisamos conhecer as fórmulas que nos permitem calcular o seno e o cosseno do arco duplo.

Seno do arco duplo

Aplicando a fórmula do seno da soma em $\mathrm{sen}(2a) = \mathrm{sen}(a + a)$, obtemos:

$\mathrm{sen}(2a) = \mathrm{sen}(a + a) = \mathrm{sen}\, a. \cos a + \cos a. \mathrm{sen}\, a.$

$\boxed{\mathrm{sen}(2a) = 2\mathrm{sen}\, a. \cos\, a}$.

Cosseno do arco duplo

Aplicando a fórmula do cosseno da soma em $\cos(2a) = \cos(a + a)$, obtemos:

$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos\, a\, .\cos\, a - \mathrm{sen}\, a. \mathrm{sen}\, a.$

$\boxed{\cos(2a) = \cos^2 a - \mathrm{sen}^2\, a}$.

Observe que a partir da relação fundamental da trigonometria, $\mathrm{sem}^2\, a + \cos^2 a = 1$, obtemos: $\mathrm{sem}^2\, a = 1 - \cos^2 a$ e $\cos^2 a = 1 - \mathrm{sen}^2\, a$. Utilizando estas expressões na fórmula do cosseno do arco duplo, encontramos:

$\cos(2a) = (\cos^2 a) - \mathrm{sen}^2\, a = (1 - \mathrm{sen}^2\, a) - \mathrm{sen}^2\, a \Longrightarrow \boxed{\cos(2a) = 1 - 2\mathrm{sen}^2\, a}$.

$\cos(2a) = \cos^2 a - (\mathrm{sen}^2\, a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \Rightarrow \boxed{\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1}$.

Seno do arco metade

Observe que, do cosseno do arco duplo, sabemos que $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. Fazendo $x = \frac{a}{2}$, temos que $2x = a$. Utilizando estas informações na fórmula anterior, podemos escrever:

$$\cos a = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) \Longrightarrow 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \cos a \Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos a}{2}.$$

Logo, $\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}$.

IMPORTANTE:

O sinal positivo ou negativo é determinado pelo quadrante em que se encontra o ângulo. Lembre-se que o seno de um ângulo é positivo para ângulos pertencentes aos primeiro e segundo quadrantes, e negativo, para ângulos nos terceiro e quarto quadrantes.

Cosseno do arco metade

Observe que, do cosseno do arco duplo, sabemos que $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. Fazendo $x = \frac{a}{2}$, temos que $2x = a$. Utilizando estas informações na fórmula anterior, podemos escrever:

$$\cos a = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1 \Longrightarrow 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = 1 + \cos a \Rightarrow \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos a}{2}.$$

Logo, $\boxed{\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}$.

IMPORTANTE:

O sinal positivo ou negativo é determinado pelo quadrante em que se encontra o ângulo. Lembre-se que o cosseno de um ângulo é positivo para ângulos pertencente aos primeiro e quarto quadrantes, e negativo, para ângulos nos segundo e terceiro quadrantes.

Exemplos:

1. Calcule $\cos(2x)$, sabendo que $\text{sen}\,x = \frac{3}{4}$.

Solução: Sabendo que $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, ou $\cos(2a) = 1 - 2\text{sen}^2 a$, ou $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$. Como conhecemos somente sen x, convém utilizar:

$$\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x = 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - 2 \,.\frac{9}{16} = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}.$$

2. Calcule $\text{sen}(2x)$, sabendo que $\text{sen}\,x = \frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$:

Solução: Sabemos que $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}\,x \,.\cos x$. Apesar de não conhecermos o valor de cos x, podemos determiná-lo usando a relação fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\,x$. Logo:

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25} \Longrightarrow \cos x = \pm\frac{3}{5}.$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então $\cos x < 0$. Logo, $\cos x = \pm\frac{3}{5}$.

Dessa forma, temos: $\text{sen}(2x) = 2 \,.\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

3. Sabendo que $\sec x = 3$, calcule cos(2x):

Solução: Sabemos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Como $\sec x = 3$, então $\frac{1}{\cos x} = 3$. Logo, $\cos x = \frac{1}{3}$.

Queremos calcular cos(2x), conhecendo cos x. Utilizando a fórmula $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, obtemos:

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 2 \,.\, \frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}.$$

4. Calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, sabendo que $\cos x = -\frac{3}{8}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$:

Solução: Sabemos que $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. No entanto, como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos que sen x > 0. Logo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8+3}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{11}{8} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

5. Sabendo que $\sec x = -2$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{x+3\pi}{2}\right)$:

Solução: Aplicando a fórmula do seno da soma, obtemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x+3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Como, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, podemos concluir que:

$\text{sen}\left(\frac{x+3\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right).0 + (-1).\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right).$

Por outro lado, sabemos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Como $\sec x = -2$, então $\frac{1}{\cos x} = -2$. Logo, $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Utilizando a fórmula do cosseno do arco metade, temos: $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. No entanto, como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos que cos x < 0.

Logo:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{2-1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, $\text{sen}\left(\frac{x+3\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar* - Ensino Médio. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. v. 3.

MELLO, José Luiz Pastore. *Matemática*: construção e significado – Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2005.