MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Função Polinomial

Definição e operações de adição e multiplicação

Objetivo: Ampliar os conhecimentos do uso e aplicação dos polinômios.

Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

Pense no meio ambiente: imprima apenas se necessário.

Situação-problema

O consumo de combustível de um automóvel é função de sua velocidade média. Para um dado automóvel, essa função é dada pelo polinômio $P(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 15$, em que P(x) é o consumo de combustível, em litros, e x é a velocidade média. Sabendo disso, qual a velocidade média para um consumo de 10 litros.

Solução: queremos saber quando 10 = 0,5x^2 - 4x + 15, ou seja, 0 = 0,5x^2 - 4x + 5

$\Delta = 16 - 20 = -4$

Se a solução ficar limitada ao conjunto dos números reais, não teremos solução. Para isso, precisamos trabalhar com o conjunto dos números complexos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{\frac{1}{2}} = \frac{4 \pm 2i}{\frac{1}{2}} \rightarrow x_1 = 8 + 4i \ ; \ x_2 = 8\text{-}4i$$

Assim, a velocidade média será $x_1 = 8 + 4\mathrm{i}\ ou\ x_2 = 8 - 4\mathrm{i}$

A função P(x) = a x + b, chamada função afim, em que a ≠ 0 e b são números reais e a função P(x) = a x^2 + bx + c, onde a ≠ 0, b e c também são números reais, que é chamada função quadrática.

Vamos, agora, ampliar nossos conhecimentos, com relação a este tipo de funções, conhecidas como funções polinomiais. Além disso, vamos incluir a utilização dos números complexos como os coeficientes dos polinômios, desta maneira:

Dados os números complexos a_n, a_{n-1},... , a_2 , a_1, , a_0 e seja x uma variável complexa. Considere a função $P: C \rightarrow C$, em que C é o conjunto dos números complexos, que a cada número x a função associa o número $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$, isto é, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$ é denominada função polinomial. Os números a_n, a_{n-1}, ... , a_2 , a_1, , a_0 são os coeficientes do polinômio, que representa a soma algébrica dos monômios na variável complexa x.

Veja alguns exemplos de polinômios:

$P(x) = 2x^3 + 3ix^2 + x^1 - 5i, cujos\ a_3 = 2, a_2 = 3i, a_1 = 1\ e\ a_0 = 5i$

$Q(x) = 5x^2 + 2ix^1 + 3\ , cujos\ a_2 = 5, a_1 = 2i\ e\ a_0 = 3/2$

$R(x) = x^2 + 2x^1 + 1, cujos\ a_2 = 1, a_1 = 2\ e\ a_0 = 1$

IMPORTANTE:

As expressões a seguir não representam polinômios:

$P(x)=2x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 5i$, porque um dos expoentes é ½

$Q(x)=5x^{-2} + 2ix^1 + \frac{3}{2}$, porque um dos expoentes é -2.

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio P(x) é o máximo grau observado entre os graus de seus monômios. O coeficiente do monômio de máximo grau é chamado coeficiente dominante do polinômio.

Vejam alguns exemplos:

$P(x) = 2x^4 + 2x^3 + ix^2 + 3x^1 - 5i,$ grau 4 e o coeficiente dominante é 2.

$Q(x) = 0x^3 + 5x^2 + 2ix^1 + \frac{3}{2}$, grau 2 e o coeficiente dominante é 5.

DICA:

Se o coeficiente do monômio é igual a zero, então o monômio é nulo e não é considerado no polinômio.

Valor numérico de um polinômio

Seja α um número complexo e $P: C \rightarrow C$ um polinômio definido por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n\text{-}1} - 1x^{n\text{-}1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Obtemos o valor numérico de P substituindo x por a e efetuando as operações indicadas, ou seja:

$$P(x) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_2 a^2 + a_1 a^1 + a_0 a^0$$

Exemplo:

1) Calcule o valor do polinômio $P(x) = x^2 + 2x^1 + 1$ para x = 1+i

$$P(1 + i) = (1 + i)^2 + 2(1 + i)^1 + 1 = 1 + 2i + i^2 + 2 + 2i + 1 = 4i + 3$$

Lembre: $i^2 = -1$

DICA:

A soma dos coeficientes de um polinômio P(x) é igual a P(1), pois quando substituímos a variável por 1 e multiplicamos um dos coeficiente por 1, o resultado é igual ao próprio coeficiente.

IMPORTANTE:

Dado um número $\alpha \in C$ (conjunto dos complexos) e um polinômio P(x), quando P(α)=0, então α é chamado de raiz (ou zero) do polinômio P(x).

2) Calcule o valor do polinômio $P(x) = x^2 - 2x + 2$ para x = 1+i

$P(1 + i) = (1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 = 0$

Lembre: $i^2 = -1$

Polinômio nulo

Seja o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x n^{-1} + \cdots + a^2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$. Se os coeficientes do polinômio, isto é, a_n, a_{n-1}, ... , a_2 , a_1, , a0 são todos iguais a zero, dizemos que P é um polinômio nulo, ou um polinômio identicamente nulo, cuja notação é $P(x) \ \Xi \ 0$.

Identidade entre polinômios

Dois polinômios P(x) e Q(x) são idênticos quando todos os coeficientes de P(x) e de Q(x), na mesma ordem, são iguais. Notação: $P(x) \ \Xi \ Q(x)$.

Exemplo: os polinômios $P(x) = 2x^2 - 3x + 2$ e $Q(x) = 2x^2 - 3x + 2$ são idênticos pois o coeficiente $a_2 = b_2$; $a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$ são iguais.

Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Adição e Subtração

Para somar ou subtrair dois polinômios P(x) e Q(x), somamos ou subtraímos os coeficientes de P(x) e de Q(x), na mesma ordem.

Multiplicação

Para multiplicar dois polinômios P(x) e Q(x), aplicamos a propriedade algébrica distributiva da multiplicação em relação à Adição (ou subtração).

Exercícios resolvidos

1) Para que o polinômio $P(x) = (3m + 4)x^3 + x^2 - 2x + 2$, seja de grau 3, qualdeve ser o valor de m?

Resolução: Para que P(x) tenha grau 3, (3m+4) ≠ 0. Assim, m ≠ -4/3

2) Determine o polinômio de grau 2, tal que P(0) = -2, P(1) = -4 e P(-2) = 8

Resolução: Sabemos que um polinômio de grau 2 tem a forma P(x) = ax^2 +bx + c, então:

$P(0) = a(0)^2 + b(0) + c$ então $-2 = c$

$P(1) = a(1)^2 + b(1) + c$ então $-4 = a+b+c$

$P(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c$ então $-2 = 4a + -2b + c$

Como c = -2, então:

$$\begin{cases} a + b - 2 = -4 \\ 4a - 2\text{b} - 2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 4a - 2\text{b} = 10 \end{cases} \rightarrow \ \text{b} = -3 \text{ e a=1}$$

Assim: $P(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow P(x) = 1x^2 - 3x - 2$

3) Para quais valores de a, b e c, o polinômio P(x) = (a-b+1)x2 + (b-2c)x + (2c- 1) é identicamente nulo.

Resolução: Para que o polinômio P(x) seja nulo é necessário que:2c-1=0 então c=1/2

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 2\text{b} - 2\text{c} = 0 \end{cases} \rightarrow \{\text{b} = 1 \text{ e a=0}$$

Assim, para que P(x) seja nulo, a=0, b=1 e c=1/2.

4) Dados os polinômios $P(x) = 2x^3 + 2$ e $Q(x) = -5x^3 + 4x^2 - 3x - 5$,determine o polinômio P(x) +Q(x).

Resolução:

$P(x) + Q(x) = (2-5)x^3 + (0+4)x^2 + (0-3)x + (2-5) =$

$-3x^3 + (4)x^2 + (-3)x + (-3) = -3x^3 + 4x^2 - 3x \pm 3$

5) Determine o produto entre os polinômios $P(x) = 2x + 3\mathrm{i}$ e $Q(x) = 2\mathrm{i}x^2 - 3$

Resolução:

$(2x + 3\mathrm{i})(2\mathrm{i}x^2 - 3) =$

$(2x \times 2\mathrm{i}x^2) + (2x \times -3) + (3\mathrm{i} \times 2\mathrm{i}x^2) + (3\mathrm{i} \times -3) =$

$4\mathrm{i}x^3 - 6x + 6\mathrm{i}^2x^2 - 9\mathrm{i} =$

$4\mathrm{i}x^3 - 6x^2 - 6x - 9\mathrm{i}$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Matemática – Ciência e aplicações* - Ensino Médio - 3º ano. 3. Ed. São Paulo: Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática Ensino Médio* - 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau* - 3º ano. São Paulo: Atual, 2001.