MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Distribuição binomial

ensaio de Bernoulli

Objetivo: Apresentar a ideia de ensaio de Bernoulli, que leva à distribuição binomial de probabilidades, e estudar alguns exemplos típicos.

Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

Pense no meio ambiente: imprima apenas se necessário.

Definição

Considere um experimento aleatório que é constituído por uma sequência de ensaios (tentativas) **independentes entre si**, ou seja, o resultado de cada ensaio não depende do resultado anterior e tampouco do resultado seguinte. Cada ensaio será caracterizado por dois atributos: Sucesso (S) e Fracasso (F), sendo que estas palavras **não** têm o significado usual do cotidiano.

Fato: Atribuindo probabilidade p ao sucesso de um ensaio e probabilidade q ao fracasso, conclui-se da complementaridade dos resultados que $p + q = 1$, ou seja, $q = 1 - p$.

IMPORTANTE:

A primeira pessoa a fazer este tipo de experimento aleatório foi o matemático Jacques Bernoulli, no século XVII.

EXEMPLO

Considere uma moeda comum com faces *C* (coroa) e *K* (cara). Chamaremos de sucesso se, num lançamento, sair a face *C* e, portanto, de fracasso se sair a face *K*. As probabilidades, como bem sabemos, são $P(C) = p = ½$ e $P(K) = q = ½$; vemos também que, de fato, $p = 1 - q$.

Situação-problema 1

Num jogo de banco imobiliário, Zezinho precisa, necessariamente, que ao jogar o dado, saia a face seis, caso contrário, ele perderá. Identifique o experimento aleatório, caracterize o ensaio e atribua as probabilidades.

1) O experimento aleatório em questão é o lançamento de um dado.

2) O ensaio consiste em "sair a face seis", que é caracterizado como sucesso, e "não sair a face seis" é caracterizado como fracasso.

3) As probabilidades são P (sucesso) = p = 1/6 e P (fracasso) = q = 5/6 e claramente notamos que q = 1 - p.

Situação-problema 2

Uma urna contém dez bolas, sendo que uma é preta a as outras são brancas. Considere o experimento aleatório que consiste num único sorteio, ao acaso, de uma bola dentre as dez e atribuamos dois resultados: "sai bola preta" e "sai bola branca". Caracterize o ensaio e atribua as probabilidades.

1) Há duas opções para sucesso e fracasso. Escolhamos uma delas, por exemplo, s cesso para "sai bola preta" e fracasso para "sai bola branca".

2) Desta forma, temos p = 1/10 e q = 9/10 e, evidentemente, segue-se que q = 1 – p.

DICA:

Um ensaio de Bernoulli é composto somente de dois resultados: sucesso e fracasso.

Exemplo (estudo da moeda)

Consideremos o experimento aleatório de lançar-se uma moeda e verificar a face obtida. Vamos atribuir sucesso ao resultado "saiu coroa = C" e, portanto, fracasso ao resultado "saiu cara = K". As probabilidades, tanto para sucesso como fracasso, são ½, no caso de um único lançamento. Vamos estudar então as probabilidades de algumas sequências de eventos:

- Lança-se a moeda cinco vezes em seguida e obtém-se K em todas as vezes. Chamando de E_i o evento "ocorreu cara no i-ésimo lançamento", então P (E_i) = ½. O evento complementar "ocorreu coroa no i-ésimo lançamento" é tal que P (E_i^C) = ½. Note-se que cada lançamento da moeda independe de um lançamento anterior e de um lançamento posterior.
- O evento $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5$, isto é, "sair cinco caras em seguida" tem probabilidade $P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

- O evento $E_1^C \cap E_2 \cap E_3^C \cap E_4 \cap E_5^C$, isto é, "sair coroa, depois cara, depois coroa, depois cara, depois coroa" tem probabilidade $P(E_1^C \cap E_2 \cap E_3^C \cap E_4 \cap E_5^C) = 1/32$
- Ou seja, percebemos que quaisquer das 32 sequências de cara/coroa em cinco lançamentos seguidos sempre terão probabilidade igual a 1/32, isto é, $P(\_\cap\_\cap\_\cap\_\cap\_) = 1/32$

Vamos considerar, agora, eventos mais complicados, mas que estão baseados em cinco lançamentos da moeda.

- Considere o evento A_1 = "sair nenhuma cara", isto é, $A_1 = \{(C,C,C,C,C)\}$, logo, como já vimos, $P(A_1) = 1/32$.
- Considere o evento A_2 = "sair exatamente uma cara", isto é, $A_2 = \{(K,C,C,C,C), (C,K,C,C,C), (C,C,K,C,C), (C, C, C, K, C), (C, C, C, C, K)\}$, logo, como $n(A_2) = 5$, segue que $P(A_2) = 5/32$. Veja que o número de elementos de A_2 é dado calculando uma permutação, com repetição de 5 elementos, com um deles repetindo-se 4 vezes, isto é, $P_5^4 = \frac{5!}{4!} = 5$.
- Considere o evento A_3 = "sair exatamente duas caras", isto é, $A_3 = \{K, K, C, C, C), \ldots, (C, C, C, K, K)\}$, que tem 10 elementos, pois calculamos a permutação de 5 elementos sendo que um deles se repete duas vezes (K) e o outro três vezes (C), logo $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} =$ 10/32.
- Considere o evento A_4 = "sair exatamente três caras", isto é $A_4 = \{(K, K, K, C, C), \ldots, (C, C, K, K, K)\}$ que tem 10 elementos, pois

calculamos a permutação de 5 elementos, sendo que um deles se repete três vezes (K) e o outro duas vezes (C), logo $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$. Segue que a probabilidade de A_4 é dada por $P(A_4) = 10/32$.

- Considere o evento A_5 = "sair exatamente quatro caras", isto é $A_5 = \{(K, K, K, K, C), (K, K, K, C, K), (K, K, C, K, K), (K, C, K, K, K), (C, K, K, K, K)\}$, e veja que o número de elementos de A_5 é dado calculando uma permutação, com repetição, de 5 elementos, com um deles repetindo-se 4 vezes, isto é, $P_5^4 = \frac{5!}{4!} = 5$.
- Considere o evento A_6 = "saírem todas caras", isto é $A_6 = \{(K, K, K, K, K)\}$, logo, como já vimos, $P(A_6) = 1/32$.

Note que todas as configurações de cara/coroa para cinco lançamentos seguidos, que são 32, foram contempladas: 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32.

Veja, também, que cada permutação com termos repetidos que usamos coincide com os coeficientes binomiais:

$$1 = P_5^5 = \binom{5}{5};\ 5 = P_5^4 = \binom{5}{4};\ 10 = P_5^{3,2} = \binom{5}{3};\ 10 = P_5^{3,2} = \binom{5}{2};\ 5 = P_5^4 = \binom{5}{1};\ 1 = P_5^5 = \binom{5}{0}$$

Mais ainda, se olharmos para as probabilidades, vemos que:

$$\frac{1}{32}=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0};\frac{5}{32}=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1};\frac{10}{32}=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2};\frac{10}{32}=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3};\frac{5}{32}=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4};\frac{1}{32}=\binom{5}{52}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}$$

Ou seja, a probabilidades dos eventos que estudamos estão distribuídas de acordo com os termos do desenvolvimento do binômio de Newton.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

KIYUKAWA, Rokusaburo et al. *Os elos da matemática* 2. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 1993.