MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Distribuição binomial

Objetivo: Apresentar a distribuição binomial de probabilidades e estudar alguns exemplos típicos.

Distribuição binomial nada mais é do que a generalização dos ensaios de Bernoulli. Para tanto, dada uma sequência de *n* ensaios de Bernoulli, chamemos de *p* a probabilidade de sucesso e de q = 1 - p a probabilidade de fracasso em cada ensaio. Queremos saber qual a probabilidade da ocorrência de exatamente *l* sucessos, com *l* ∈ {0, 1, 2, ..., n}, nos *n* ensaios. A **fórmula da distribuição binomial** é que responde a isso:

$$P_l = \binom{n}{l} p^l \, . \, q^{n-l}$$

Se quisermos, podemos reescrever a expressão, utilizando a notação fatorial para o coeficiente e substituindo a probabilidade de fracasso:

$$P_l = \left(\frac{n!}{l!\ .\ (n-l)!}\right) p^l . (1-p)^{n-l}$$

Vejamos situações de aplicação deste importante teorema de probabilidade no qual a análise combinatória aparece tão explicitamente.

DICA:

A distribuição chama-se binomial porque o valor da probabilidade é dado pelo termo geral do binômio de Newton de $(p+q)^n$.

Situação-problema 1

Tem-se uma urna com 4 bolas vermelhas e 6 brancas. Uma bola é sorteada, observa-se sua cor e, em seguida, ela é recolocada na urna. Repete-se o experimento 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes a bola vermelha?

Trata-se de ensaios de Bernoulli, portanto, posta a pergunta, sucesso para nós será sair bola vermelha e fracasso será sair bola branca.

Vamos identificar os parâmetros necessários à aplicação da fórmula:

- n = 5, porque foram cinco os ensaios realizados ao total.
- l = 3, porque queremos a probabilidade de sortearmos exatamente três bolas vermelhas.
- $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, pois são quatro bolas vermelhas num total de dez.
- $q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5}$, pois são seis bolas brancas entre um total de dez (ou pela probabilidade complementar).

Estamos prontos para aplicarmos a fórmula:

$$p^l = \binom{n}{l} p^l \, . \, q^{n-l} = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,.\,2!} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{144}{625}$$

Situação-problema 2

Em determinada cidade, a probabilidade de uma pessoa ter um carro da marca Drof é de 10%. Escolhem-se trinta pessoas ao acaso, com reposição, e pergunta-se qual a marca do seu carro. Qual a probabilidade de exatamente cinco destas pessoas possuírem carro da marca Drof?

Temos, no problema, experimentos de Bernoulli. Note que sucesso significa sortearmos uma pessoa que tenha um carro da marca Drof e que fracasso será sortearmos uma que não tem. Identifiquemos os parâmetros para aplicarmos a fórmula da distribuição binomial:

- n = 30, já que trinta os ensaios de Bernoulli.
- l = 5, pois queremos exatamente cinco pessoas que tenham carro Drof.
- p = 10% = $\frac{1}{10}$, que foi um dado do problema.
- q = $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, que é, automaticamente, a probabilidade da pessoa não ter um carro Drof.

Pronto, basta aplicarmos a fórmula:

$$P_l = \binom{n}{l} p^l \cdot q^{n-l} = \binom{30}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^5\left(\frac{9}{10}\right)^{30-5} \cong 0{,}102 = 10{,}2\%$$

Situação-problema 3

Nove ensaios de Bernoulli, nos quais a probabilidade de sucesso é p = 1/2, são realizados. Qual a probabilidade de observarmos no máximo três sucessos?

Temos n = 9, p = 1/2 (portanto q = 1 – p = 1/2). É fundamental sabermos entender o que significa o "no máximo" da pergunta: significa que queremos a soma das probabilidades de sucesso para I ∈ $\{0, 1, 2, 3\}$, isto é, está sendo pedida $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$. Vamos calcular cada valor separadamente:

$$P_0 = \binom{9}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

$$P_1 = \binom{9}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{512}$$

$$P_2 = \binom{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{36}{512}$$

$$P_3 = \binom{9}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{84}{512}$$

Logo, $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{130}{512}$ = 0,254 = 25,4%

Situação-problema 4

Em quatro ensaios de Bernoulli, a probabilidade de sucesso em cada um é p = 2/5. Qual a probabilidade de observarmos no mínimo 3 sucessos?

Nós vemos que n = 4 e foi dado que sucesso tem probabilidade p = 2/5, ou seja, fracasso tem probabilidade q = 3/5. O que significa o "no mínimo" no enunciado? Simples, significa a soma das probabilidades para I ∈ $\{3, 4\}$, isto é, quer-se $P_3 + P_4$. Bastar calcularmos então:

$$P_3 = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{96}{625}$$

$$P_4 = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{16}{625}$$

Logo, $P_3 + P_4 = \frac{112}{625} = 17{,}92\%$

IMPORTANTE:

Nos problemas de distribuição binomial, sempre preste muita atenção à pergunta do tipo de probabilidade que ser quer: atenção às palavras-chave exatamente, no máximo, no mínimo, ao menos, pelo menos, etc.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

KIYUKAWA, Rokusaburo et al. *Os elos da matemática*, 2. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 1993.