MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - III

Semelhança de triângulos

Objetivo: Identificar os triângulos semelhantes e a razão de semelhança entre eles.

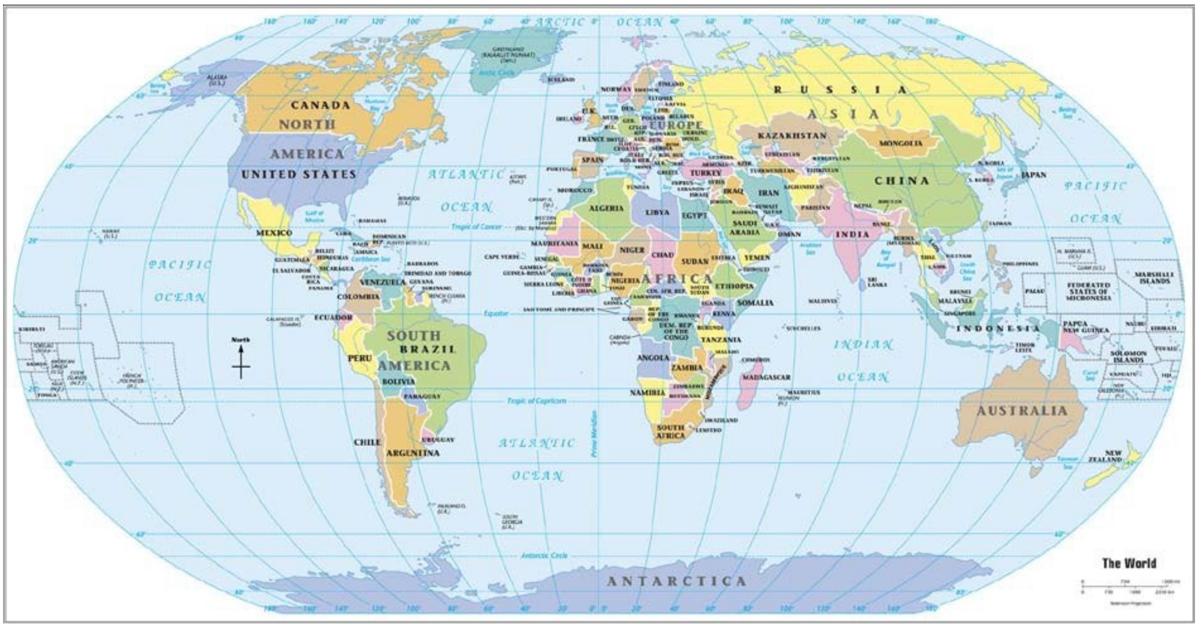
Observe as figuras a seguir:

As figuras 1 e 2, apesar de não terem o mesmo tamanho, têm a mesma forma. Dizemos que são **figuras semelhantes**.

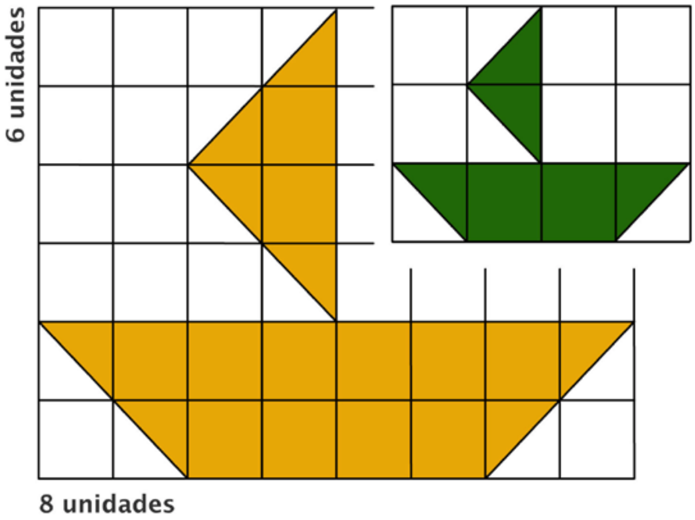
Já a figura 3 está deformada em relação à figura 1; apesar das alturas serem as mesmas, os comprimentos são diferentes. Essas figuras não são semelhantes.

No nosso dia a dia lidamos com muitas situações de objetos semelhantes.Por exemplo, as maquetes de prédios, casas e parques que nos mostram como ficarão os produtos finais depois de construídos.

Outro exemplo é o mapa, desenho semelhante à região real do globo terrestre. Para que saibamos as distâncias reais apresentadas em um mapa, são usadas **escalas** que estabelecem a relação entre o comprimento de uma linha no mapa e o seu comprimento na realidade.



Observe este exemplo. O barco vermelho é uma ampliação do barco azul, pois as dimensões do vermelho são 2 vezes maiores do que as dimensões do barco azul, ou seja, os lados correspondentes foram dobrados na mesma proporção.



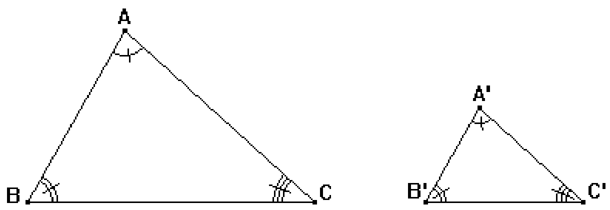
$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$$

Esse quociente é denominado razão de semelhança.

A ideia de semelhança como a relação entre figuras que têm a mesma forma está presente nas figuras geométricas. Vamos estudar a semelhança dos triângulos.

Semelhança de triângulos

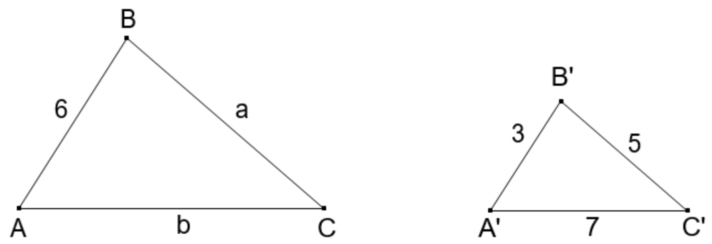
Dois triângulos são semelhantes se possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados *homólogos* proporcionais **(Dois lados homólogos (*homo* = mesmo e *logos* = lugar) são lados opostos a ângulos congruentes).**



ABC~ΔA'B'C'⇔ $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ B \cong B' \\ C \cong C' \end{cases}$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$

K é chamado **razão de semelhança** dos triângulos.

Exemplo: Os triângulos ABC e A’B’C’ são semelhantes:



Determine a razão de semelhança e os outros dois lados do triângulo ABC.

Solução:

ΔABC~ΔA'B'C'

Logo:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} = 2$$

Logo, a razão de semelhança é 2.

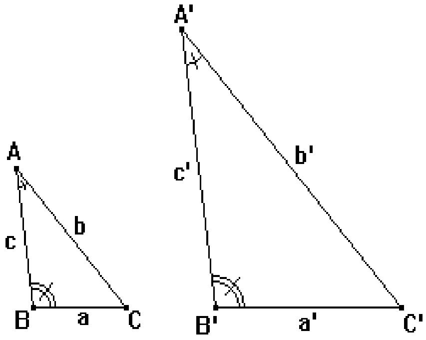
$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{5} = 2 \Rightarrow a=10 \\ \frac{b}{7} = 2 \Rightarrow b=14 \end{cases}$$

Logo, BC = 10 e AC = 14.

Casos de semelhança

Para que dois triângulos sejam semelhantes, não é necessário verificar se todos os lados são proporcionais e se todos os ângulos são congruentes. Existem certos critérios que permitem estabelecer a semelhança entre eles:

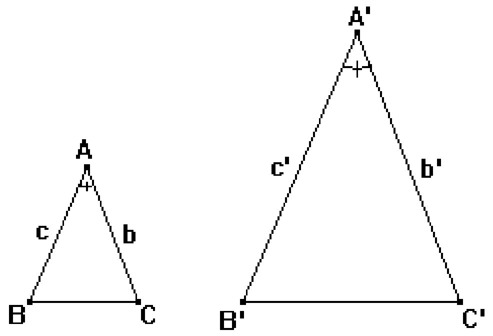
- **Caso AA:** Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes,então, eles são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \hat{C} \cong \hat{C}' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

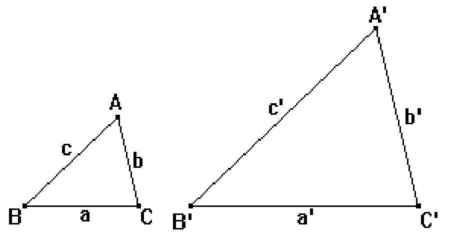
- **Caso LAL:** Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos de outro triângulo e os ângulos que eles determinam são congruentes, então, os triângulos são semelhantes.



$$\left.\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = k\right\} \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \frac{a}{a'} = k,\ \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'$$

- **Caso LLL:** Se dois triângulos possuem os lados homólogos proporcionais, então,eles são semelhantes.

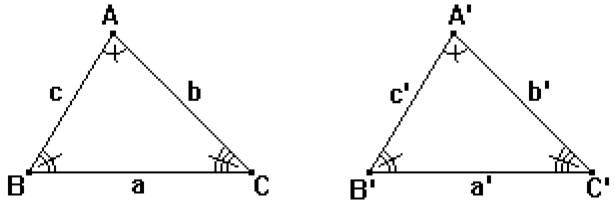


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \hat{A} \cong \hat{A}',\ \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'$$

Observação: *Se a razão de semelhança de dois triângulos for K = 1, então, os triângulos são congruentes:*

Definição: Dois triângulos são congruentes se possuem os lados e os ângulos ordenadamente congruentes

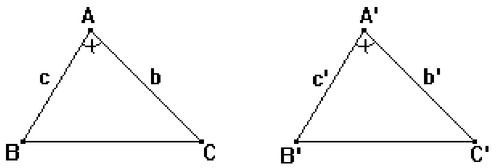


$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \end{cases} \text{ e } \begin{matrix} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{matrix}$$

Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. No entanto, existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes: são os chamados *casos* ou *critérios* de congruência:

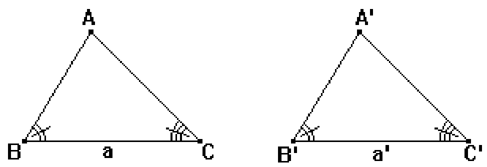
- **Caso LAL:** Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então, eles são congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ A \cong A' \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \hat{B} \cong \hat{B},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \text{ e } \hat{C}' \cong \hat{C}'$$

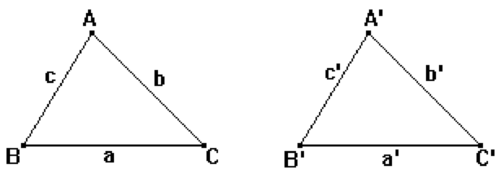
- **Caso ALA:** Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes um lado e osdois ângulos a ele adjacentes, então, eles são congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \cong \hat{B}' \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{C} \cong \hat{C}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \hat{A} \cong \hat{A}' \text{ e } \overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

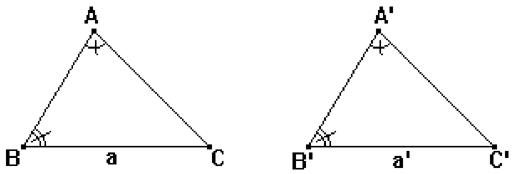
- **Caso LLL:** Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes os três lados, então, eles são congruentes.



$$\left\{\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\end{array}\right. \Rightarrow \Delta\ ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \hat{A} \cong \hat{A}',\ \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'$$

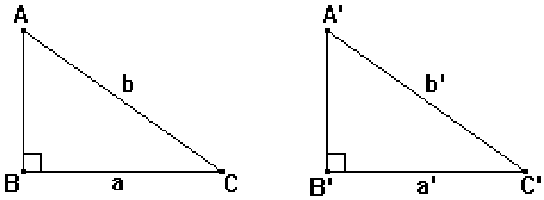
- **Caso LAA_o:** Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes um lado, umângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então, eles são congruentes.



$$\begin{cases} \overline{BC} \cong \overline{BC} \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \end{cases} \Rightarrow \Delta\ ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \overline{AB} \cong \overline{A'B'}\ ,\ \overline{AC}' \cong \overline{A'C'}\ \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'$$

- **Caso especial de congruência de triângulos retângulos:** Se dois triângulos retângulos possuem ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então eles são congruentes.

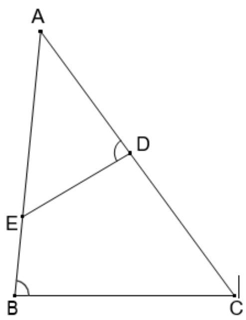


$$\begin{cases} \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ (retos)} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta\ ABC \sim \Delta A'B'C'$$

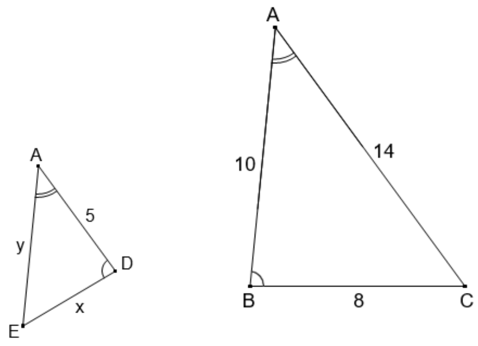
$$\therefore \overline{AB} \cong \overline{A'B'}\ ,\ \hat{A}' \cong \hat{A}' \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'$$

Exemplos:

1. Na figura a seguir, temos: o ângulo B é congruente ao ângulo D; AB = 10; BC = 8;AC = 14 e AD = 5. Calcule as medidas de DE e AE.



Vamos separar os dois triângulos e colocar os dados do problema:



Como o ângulo A é comum aos dois triângulos $\hat{B} \cong \hat{D}$, então, esses dois triângulos são semelhantes pelo caso AA.

Logo,

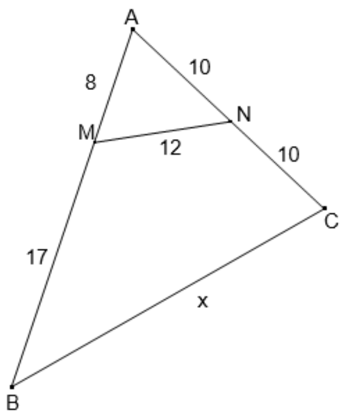
$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow$

$$\frac{8}{x} = \frac{14}{y} = \frac{10}{5} = 2$$

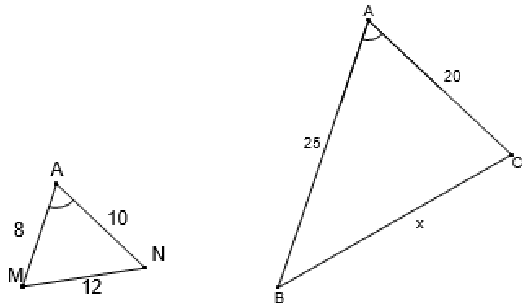
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{x} = 2 \quad x = 4 \\ \frac{14}{y} = 2 \quad y = 7 \end{cases}$$

Portanto, DE = 4 e AE = 14.

2. Determine o valor de x:



Vamos separar os dois triângulos:



Como o ângulo A é comum aos dois triângulos e dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos de outro triângulo $\left\{\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}\right\}$, então, esses dois triângulos são semelhantes pelo caso LAL.

Dessa forma, temos:

ΔANM ~ ΔABC$\Rightarrow$

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{CB}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{2}{5}$$

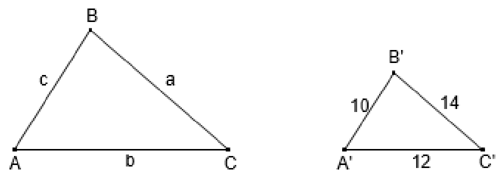
$$x = 30$$

Exercício resolvido

Os triângulos ABC e A’B’C’ são semelhantes. Se a razão de semelhança do primeiro para o segundo é 3/2, determine:

a) a, b e c

b) A razão entre os seus perímetros.



Resolução:

a) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{14} = \frac{b}{12} = \frac{c}{10} = \frac{3}{2}$

Logo:

$$\frac{a}{14} = \frac{3}{2} = a = 21$$

$$\frac{b}{12} = \frac{3}{2} = b = 18$$

$$\frac{c}{10} = \frac{3}{2} = c = 15$$

b) O perímetro do ΔABC = 21 + 18 + 15 = 54. E o perímetro do ΔA’B’C’ = 14 + 12 +10 = 36.

Logo:

$$\frac{perímetro\ \Delta\mathrm{ABC}}{perímetro\ \Delta\mathrm{A'\ B'\ C'}} - \frac{54}{36} - \frac{3}{2}$$

Esse resultado é sempre válido: se a razão de semelhança entre dois triângulos é k, então a razão entre seus perímetros é também k.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar* – v. 9: Geometria Plana. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática: construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.