

BIOLOGIA

UNINOVE

Módulo – III

Equação da circunferência

Objetivo: Estudar as circunferências e suas equações.



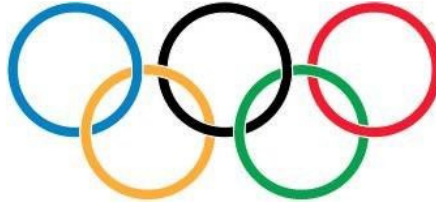
Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

Pense no meio ambiente: imprima apenas se necessário.

MATEMÁTICA UNINOVE – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Nesta aula iremos estudar as equações de uma circunferência.

O símbolo olímpico é formado por cinco circunferências. Ele foi desenhado pelo Barão de Coubertim, fundador dos jogos olímpicos modernos, em 1914, durante o Congresso Olímpico.



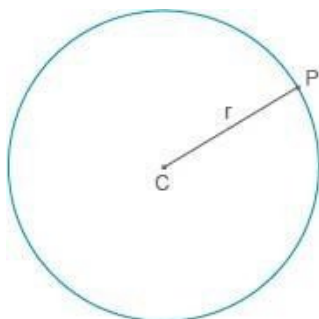
As cores azul, preto, vermelho nas três argolas de cima e amarelo e verde nas duas de baixo representam os cinco continentes, Europa, Ásia, África, Austrália e América. Dizem que essas cores foram escolhidas por fazerem parte das cores das bandeiras de praticamente todos os países do mundo, sendo que na ausência de uma cor, está a outra. Já o pano de fundo deve ser sempre branco, sem nenhuma borda de nenhuma outra cor. A parte branca serve para simbolizar a paz e as argolas estão entrelaçadas representando a união dos povos, o maior intuito dos jogos olímpicos.

Suponha que o símbolo está representado em um sistema de coordenadas cartesianas onde a circunferência preta tem centro na origem e raio de medida 1 unidade. As circunferências azul e vermelha têm seus centros a 2,5 unidades do centro da circunferência preta e as circunferências amarela e verde têm seus centros a 1,25 unidades do centro da circunferência preta e ordenada (-1) . Quais são as equações das 5 circunferências?

Após esta aula você será capaz de responder a essa pergunta!

Equações da circunferência

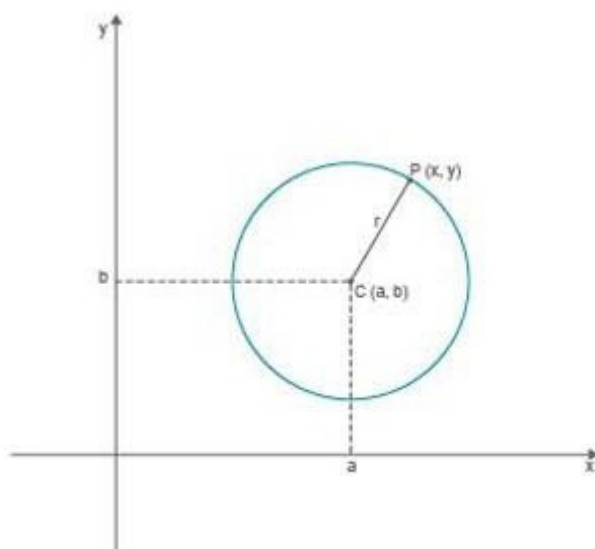
Uma circunferência é o conjunto dos pontos P do plano, que estão a uma mesma distância r de um ponto C .



O ponto C é o **centro** e r é o **raio** da circunferência.

Então, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência e (a, b) as coordenadas de C , a distância de C a P representa o raio da circunferência.

MATEMÁTICA UNINOVE – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA



Ou seja: $d_{C,P} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$ (veja aula 15)

Elevando-se ao quadrado os dois membros da equação obtemos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \rightarrow$ **equação reduzida** da circunferência.

Exemplos

- A circunferência de centro $C(5, 6)$ e raio $r = 2$ tem equação $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 4$.
- A circunferência, cujo centro coincide com a origem do sistema cartesiano e cujo raio mede 5 unidades, tem equação $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$, ou seja, $x^2 + y^2 = 25$.
- A circunferência de centro $C(-1, 2)$ e diâmetro 6 tem equação $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, pois se o diâmetro é 6, o raio é 3.

MATEMÁTICA UNINOVE – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

- A equação reduzida de uma circunferência é dada por $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Determine as coordenadas do seu centro e a medida do raio.

Solução

Comparando a equação dada com a equação na forma reduzida temos:

$$\left. \begin{array}{l} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \text{ e } b = -2 \rightarrow C(3, -2) \\ r^2 = 16 \rightarrow r = 4 \end{array} \right.$$

Equação geral da circunferência

Partindo da equação reduzida de uma circunferência, desenvolvemos os quadrados e obtemos uma equação geral (ou equação normal) da circunferência.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Exemplos

- 1) A equação geral da circunferência de centro $C(5, 6)$ e raio $r = 2$ é:

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 4$$

MATEMÁTICA UNINOVE – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 57 = 0$$

2) Vamos determinar as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de equação.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

Para obter o centro e o raio da circunferência, vamos determinar a sua equação reduzida. Para isso, vamos seguir os passos:

1) Agrupar os termos em x e os termos em y e passar o termo independente para o segundo membro da equação.

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) = 4$$

2) Completar os quadrados para que se tornem trinômios quadrados perfeitos.

$$\underbrace{(x^2 + 2x + \textcolor{red}{?})}_{(1)} + \underbrace{(y^2 - 4y + \textcolor{green}{?})}_{(2)} = 4$$

$$\underbrace{(x^2 + 2x + \textcolor{red}{1})}_{(x+1)^2} + \underbrace{(y^2 - 4y + \textcolor{green}{4})}_{(y-2)^2} = 4 + \textcolor{red}{1} + \textcolor{green}{4}$$

MATEMÁTICA UNINOVE – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Para que tenhamos trinômios quadrados perfeitos, precisamos completar (1) e (2) com os números 1 e 4, respectivamente. No entanto, ao adicionarmos esses valores ao primeiro membro da equação, precisamos adicioná-los também ao segundo membro para que a igualdade se mantenha.

Assim, a equação reduzida da circunferência é $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Portanto, as coordenadas do centro são $C(-1, 2)$ e a medida do raio da circunferência é $r = 3$.

Vamos agora voltar ao problema apresentado no início desta aula e responder à pergunta proposta.

A circunferência preta que tem centro na origem $(0, 0)$ e raio de medida 1 unidade tem equação reduzida:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow \mathbf{x^2 + y^2 = 1}$$

As circunferências azul e vermelha, que têm seus centros a 2.5 unidades do centro da circunferência preta, têm seus centros dados

MATEMÁTICA UNINOVE – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

respectivamente por $(-2,5, 0)$ e $(2,5, 0)$ e raio $r = 1$. Logo, suas equações reduzidas são:

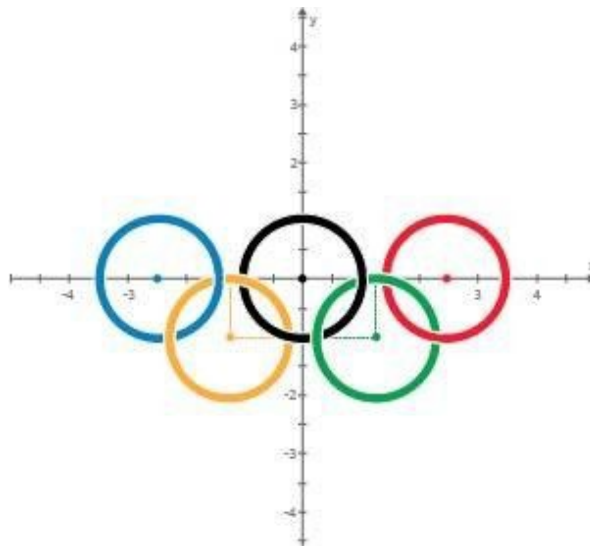
$$(x - (-2,5))^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow \mathbf{(x + 2,5)^2 + y^2 = 1}$$

$$(x - 2,5)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow \mathbf{(x - 2,5)^2 + y^2 = 1}$$

As circunferências amarela e verde, que têm seus centros a 1,25 unidades do centro da circunferência preta e ordenada, (-1) têm seus centros dados respectivamente por $(-1,25, -1)$ e $(1,25, -1)$ e raio $r = 1$. Logo, suas equações reduzidas são:

$$(x - (-1,25))^2 + (y - (-1))^2 = 1^2 \Rightarrow \mathbf{(x + 1,25)^2 + (y + 1)^2 = 1}$$

$$(x - 1,25)^2 + (y - (-1))^2 = 1^2 \Rightarrow \mathbf{(x - 1,25)^2 + (y + 1)^2 = 1}$$



Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar: geometria analítica*.

São Paulo: Atual, 2000. v.7.

MELLO, J.L.P. *Matemática, volume único: construção e significado*. São

Paulo: Moderna, 2005.