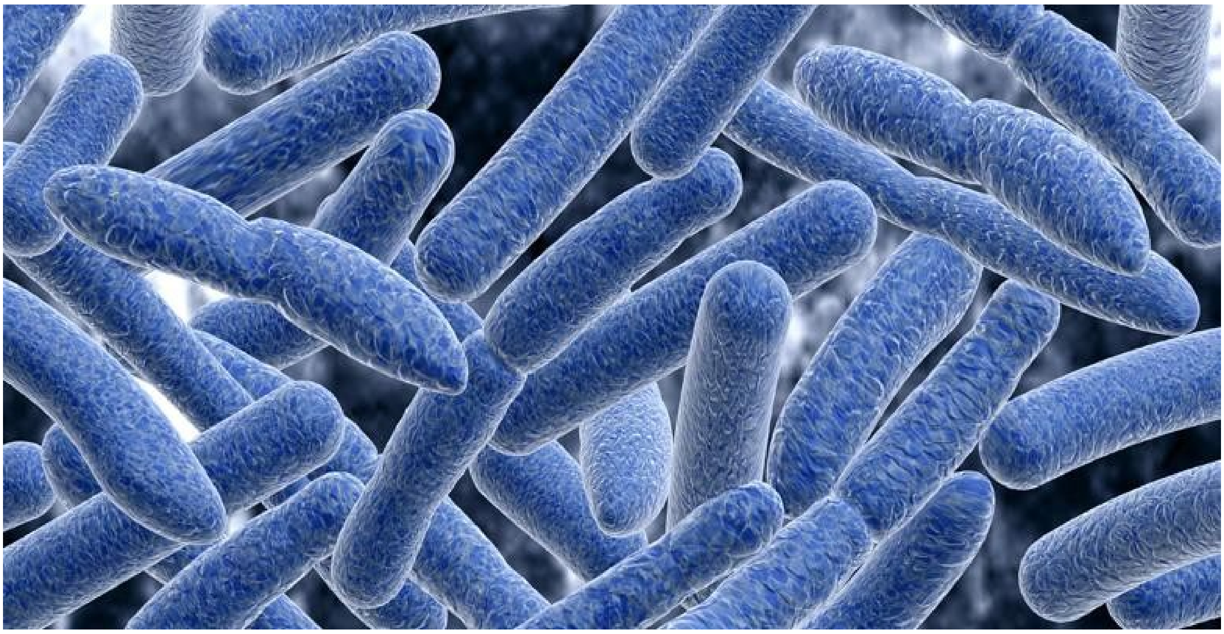
Matemática

UNINOVE

Logaritmos

Objetivo: Ampliar o aprendizado do conceito de logaritmos e suas propriedades.

Módulo II



Situação-problema

Uma dada bactéria cresce a uma taxa de 3% ao mês. Em quantos meses o número de bactérias irá dobrar.

Organizando os dados, temos:

	População
	P_0
	$P_1 = P_0 \times 1{,}03$
	$P_2 = P_1 \times 1{,}03 = (P_0 \times 1{,}03)1{,}03$
	$P_3 = P_0 \times (1{,}03)^3$
⋮	⋮
	$P_x = P_0 \times (1{,}03)^x$

DICA:
1,03 = 100% + 3% = 103% = 103/100 = 1,03

Como o número de bactérias irá dobrar em x mês, temos: $\mathbf{P_x = 2P_0}$. Assim:

$$\mathbf{P_0 \cdot (1,03)^x = 2P_0 \leftrightarrow (1,03)^x = 2}$$

Como não é possível trabalhar com potências de mesma base, utilizamos os logaritmos. Então:

$$\mathbf{\log(1,03)^x = \log 2 \leftrightarrow \times \cdot \log(1,03) = \log 2}$$

$$\times \cdot = \mathbf{\frac{\log 2}{\log(1,03)} = \frac{0,30}{0,013} \cong 23,45}$$

Para resolver problemas onde a variável está no expoente e não é possível trabalhar com potências de mesma base, utilizamos os logaritmos.

Os logaritmos são muito utilizados em aplicações na própria Matemática, como também em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Geografia entre outras.

Mas o que é o logaritmo?

De modo geral, o logaritmo é a operação inversa da exponenciação, que nós estudamos nas aulas anteriores. Segue abaixo a sua definição:

Definição: Dados três números reais, ***a, b*** e ***c***, positivos e com **b** ≠ 1, então chama-se logaritmo de ***a***, na base ***b***, o número real ***c***, de maneira que ***c*** é o expoente de ***b***, para que a potência ***b^c*** seja igual a ***a***, ou seja:

$$\log_b a = c \leftrightarrow b^c\ a, \text{com } a > 0 \text{ e } 1 \neq b > 0$$

Neste contexto, **a** é logaritmando, **b** é a base, **c** é o logaritmo.

IMPORTANTE:

$\log_b 1 = 0 \leftrightarrow b^0 = 1$, com $b > 0$ e $1 \neq b > 0$

$\log_b b = 1 \leftrightarrow b^1 = b$, com $b > 0$ e $1 \neq b > 0$

$\log_b b^n = n \leftrightarrow b^n = b^n$, com $b > 0$ e $1 \neq b > 0$

$b^{\log_b n} = N$, com $N > 0, b > 0$ e $1 \neq b > 0$

$\log_b x = \log_b y \leftrightarrow x = y$, com $x, y > 0$, $b > 0$ e $1 \neq b > 0$

Caso particular

Existe um logaritmo muito utilizado em muitas áreas da ciência, que é o logaritmo natural, ou logaritmo neperiano (referência ao matemático escocês John Napier, criador dos logaritmos), o conhecido In.

O logaritmo In é igual ao logaritmo de base **e**, isto é, $\text{In b} = \log_e b$, onde $e = 1,7182...$

Exemplos

1) Calcule $\log_3 27$.

Resolução:

$\underline{\log_3 27 = \mathrm{x} \leftrightarrow 3^x = 27}$

$3^x = 27 \leftrightarrow 3^x = 3^3$

$\mathrm{x} = 3$

2) Determine o valor da base do logaritmo $\log_a 36 = 2$.

Resolução:

$\log_\mathrm{a} 36 = 2 \leftrightarrow \mathrm{a}^2 = 36$

$\mathrm{a}^2 = 36 \leftrightarrow \mathrm{a} = \pm 6$

3) Resolva a soma de logaritmos: $\log_2 16 + \log_3 81 + \log_4 0{,}25$.

Resolução:

$\log_2 16 = \mathrm{x} \leftrightarrow 2^\mathrm{x} = 16 \leftrightarrow 2^\mathrm{x} = 2^4 \leftrightarrow \mathrm{x} = 4$

$\log_3 81 = \mathrm{x} \leftrightarrow 3^\mathrm{x} = 81 \leftrightarrow 3^\mathrm{x} = 3^4 \leftrightarrow \mathrm{x} = 4$

$\log_4 0{,}25 = \mathrm{x} \leftrightarrow 4^\mathrm{x} = 0{,}25 \leftrightarrow 4^\mathrm{x} = \frac{1}{4}$

$4^\mathrm{x} = \leftrightarrow 4^{-1} \leftrightarrow \mathrm{x} = -1$

Portanto: $\log_2 16 + \log_3 81 + \log_4 0{,}25 = 4 + 4 - 1 = 7$

4) Calcule o $2^{\frac{\log_2 3}{3}}$

Resolução:

Aplicando as propriedades de potências e as observações no quadro **Importante**, temos:

$$2^{\frac{\log_2 3}{3}} = 2^{\frac{1}{3}\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

5) Calcule $3^{1+\log_3 5}$

Resolução:

$$3^{1+\log_3 5} = 3^1 \cdot 3^{1+\log_3 5} = 3 \cdot 5 = 15$$

Seguem, ainda, as propriedades operatórias dos logaritmos, ou seja, o que se pode ou não fazer numa operação com logaritmos:

1) Logaritmo de um produto: sejam P e Q, dois números reais positivos, então: $\log_a(P \times Q) = \log_a P + \log_a Q$.

Exemplo: Calcule $\log_2(32)$

$$\log_2(32) = \log_2 (4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

Usando as informações do quadro **Importante**, temos:

$$\log_2(32) = \log_2 (4 \times 8) = \log_2(2^2 \times 2^3) + \log_2 2^{2+3} = 2 + 3 = 5$$

Logaritmo de um quociente: sejam P e Q, dois números reais positivos, então:

$$\log_a(\frac{P}{Q}) = \log_a P - \log_a Q$$

Como exemplo, vale a mesma sugestão já indicada. Tente você!

Logaritmo de uma potência: sejam P e Q, dois números reais positivos, então:

$$\log_a P^Q = Q \times \log_a P$$

Esta propriedade é importante quando queremos determinar a variável que está na potência.

Mudança de base do logaritmo: Sejam **P**, **a** e **b**, três números reais positivos e a, b, diferentes de 1, então:

$$\log_b P = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Esta propriedade é importante quando precisamos fazer mudança de base. Exemplo:

$$\log_5 25 = \frac{\log_2 25}{\log_2 5}$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – Contexto e Aplicações*. Ensino Médio, 1º ano.São Paulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

IEZZI, Gelson *et al*. *Matemática – Ciência e Aplicações*. Ensino Médio, 1º ano. SãoPaulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo *et al*. *Os Elos da Matemática*. Ensino Médio, 1º ano. SãoPaulo: Editora Saraiva, 2010.