MATEMÁTICA

UNINOVE

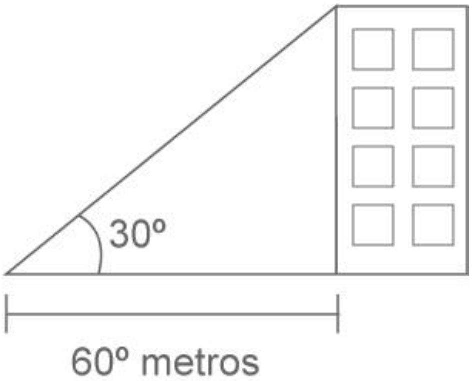
Módulo - IV

Trigonometria

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Objetivo: Definir as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Situação-problema 1



Uma pessoa está a 60 metros de um edifício e vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 30º. Desconsiderando a altura do observador, determine a altura do edifício.

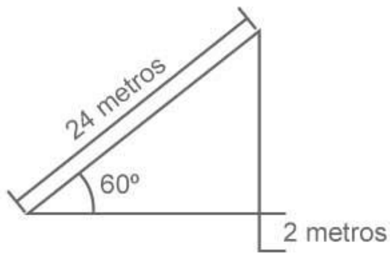
Resposta

$$\text{tg } 30^{\circ} = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\text{CO}}{60} \quad \Rightarrow \quad \text{CO} = 20\sqrt{3} \cong 34{,}64$$

Logo, o edifício tem, aproximadamente, 34,64 metros de altura.

Situação-problema 2

Uma escada de bombeiros tem 24 metros de comprimento e está sobre um caminhão a 2 metros do solo. Sabendo que o ângulo máximo de abertura dessa escada é de 60º, determine a altura máxima que ela atinge.



Resposta

$$\text{sen } 60^{o} = \frac{\text{CO}}{\text{HI}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{CO}}{24} \quad \Rightarrow \quad \text{CO} = 12\sqrt{3} \cong 20{,}78$$

Logo, a escada atinge, no máximo, 22,78 metros.

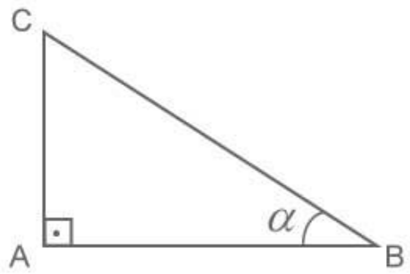
Para resolver estes tipos de problemas, precisamos ter o conhecimento das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

DICA:

Triângulo retângulo

Um triângulo retângulo é um polígono de três lados e um dos seus ângulos mede 90°. Os lados que formam o ângulo de 90° são chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo de 90°, de hipotenusa.



As relações trigonométricas são razões entre os lados de um triângulo retângulo.

A razão entre a medida do Cateto Oposto (CO) ao ângulo α e da hipotenusa (HI) é chamada de seno deste ângulo, e representada por $\mathrm{sen}\alpha$, ou seja:

$$\mathrm{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{HI}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$$

Por outro lado, a razão entre a medida do Cateto Adjacente (CA) ao ângulo α e da hipotenusa é chamada de cosseno deste ângulo, e representada por $\cos\alpha$, ou seja:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\text{CA}}{\text{HI}} = \frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{BC}}}$$

Finalmente, a razão entre a medida do cateto oposto (CO) ao ângulo α e a medida do cateto adjacente (CA) deste ângulo α é chamada de tangente, e representada por tgα, ou seja:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{AB}}}$$

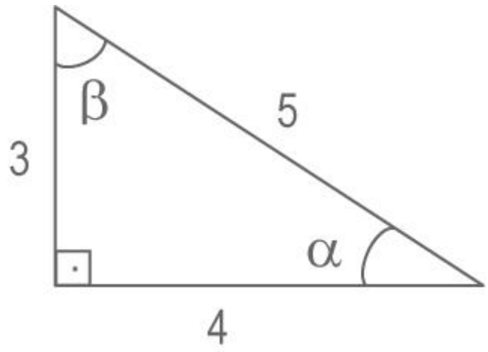
EXEMPLO

1. Determine o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4 cm e a hipotenusa, 5cm.

DICA:

Ângulo agudo é um ângulo cuja medida é menor que 90º.

Resposta



Para o ângulo α:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{CO}}{\text{HI}} = \frac{3}{5} = 0{,}6\ ,\cos\alpha = \frac{\text{CA}}{\text{HI}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \text{ e } \text{tg}\alpha = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Para o ângulo β:

$$\text{sen}\beta = \frac{\text{CO}}{\text{HI}} = \frac{4}{5} = 0{,}8,\ \cos\beta = \frac{\text{CA}}{\text{HI}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ e } \text{tg}\alpha = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \frac{4}{3} \cong 1{,}33.$$

2. No triângulo ABC, retângulo em B, o cateto oposto ao vértice C mede 8 cm e a hipotenusa mede 10 cm. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo Â.

Resposta

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

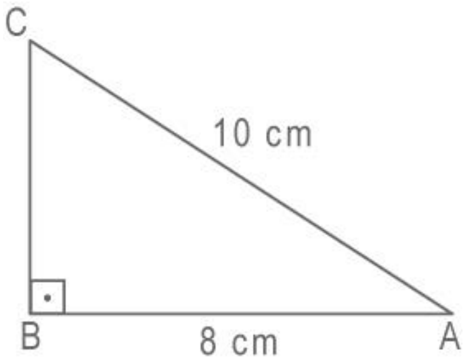
$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

$$BC^2 + 8^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad BC^2 = 100 - 64 = 36 \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{sen}\ \hat{a} = \frac{CO}{HI} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\cos \hat{a} = \frac{CA}{HI} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\text{tg}\ \hat{a} = \frac{CO}{CA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$



DICA:

Teorema de Pitágoras: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, ou seja: $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$

Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30, 45 e 60 °

Para determinar o seno, o cosseno e a tangente do ângulo 45º, considere o quadrado ABCD de lado x e sua diagonal AC.

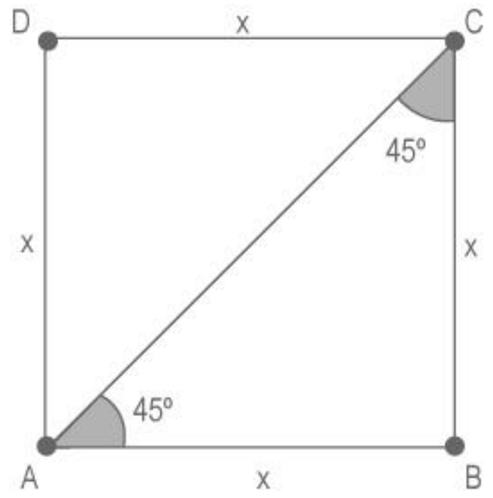
O triângulo retângulo ABC é retângulo em B e os catetos AB e BC medem x. Pelo teorema de Pitágoras, conclui-se que a hipotenusa AC mede $x\sqrt{2}$ conforme demonstrado a seguir:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$x^2 + x^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 2x^2$$
$$AC = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}.\sqrt{x^2} = x\sqrt{2}$$

Além disso, sabe-se que o triângulo ABC possui dois lados iguais e, portanto, é isóscele; logo, os ângulos da base AC são iguais. Como o ângulo B mede 90 °, então a soma dos ângulos A e C do triângulo ABC deve medir 90 °. Dessa forma, conclui-se que A = C = 45 °.

De acordo com a figura, temos:

$$\text{sen } 45^o = \frac{CO}{HI} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 45^o = \frac{CA}{HI} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\text{tg } 45^o = \frac{C0}{CA} = \frac{x}{x} = 1$$

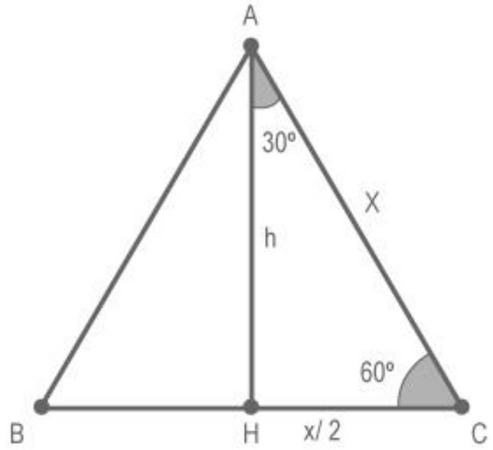


DICA:

Um triângulo isósceles possui dois lados iguais. O único lado de medida diferente é chamado de base, cujos ângulos são iguais.

Para determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30 e 60 º, considere o triângulo equilátero ABC de lado x e altura h, obtida a partir do vértice A. Dessa forma, temos $\mathrm{AC} = \mathrm{x}$ e $\mathrm{AH} = \mathrm{h}$ e $\mathrm{CH} = \frac{\mathrm{x}}{2}$.

Além disso, sabemos que ele é equilátero. Logo, todos os seus ângulos medem 60º e como AH é altura relativa ao ângulo Â, ela o divide em dois ângulos iguais. Portanto o ângulo CÂH mede 30º, conforme ilustrado na figura.



DICA:
Um triângulo equilátero possui os três lados e os três ângulos iguais a 60 º.
A altura de um triângulo equilátero relativa a um vértice é também a mediana e a bissetriz, e encontra a base no ponto médio.

O triângulo AHC é retângulo em H. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Portanto:

$$\text{sen}\ \ 30^o = \cos\ \ 60^o = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2};\ \cos\ \ 30^o = \text{sen}\ \ 60^o = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\ \ 30^o = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \text{tg}\ \ 60^o = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Os resultados obtidos estão resumidos na seguinte tabela:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. *Fundamentos da Matemática Elementar* - Ensino Médio – 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. v.3

MELLO, José Luiz Pastore. *Matemática*: construção e significado – Ensino médio. São Paulo: Moderna, 2005.