MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

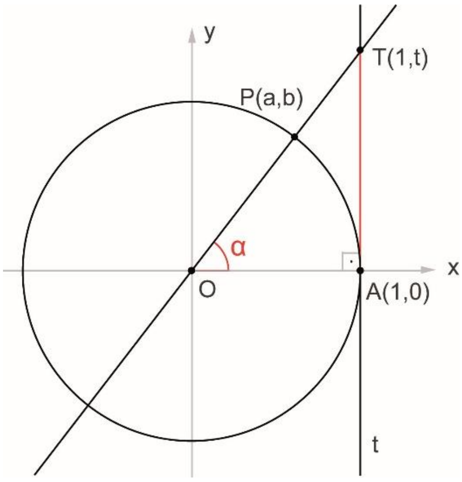
Trigonometria

Estudos das funções tangente, cotangente, secante e cossecante

Objetivo: Definir as funções tangente, cotangente, secante e cossecante.

Tangente de um arco

Sejam P (a, b) um ponto do ciclo trigonométrico pertencente ao primeiro quadrante e t uma reta perpendicular ao eixo x, passando pelo ponto A (1,0). Considere o ângulo AÔP = α, o arco (AP) e o triângulo OAT, em que O é a origem do plano cartesiano e T, a intersecção da reta t com a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ conforme ilustrado na figura. Observe que $\overline{OA} = 1$ e T possui coordenadas (1, t).



Como o triângulo OAT é retângulo em A, podemos aplicar a definição da tangente de um ângulo: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{t}{1} = t$.

Observe que $\operatorname{tg}\alpha$ é a ordenada t do ponto T. Note ainda que a reta $t = \overleftrightarrow{\mathrm{AT}}$, chamada de eixo das tangentes, tem origem em A, mesmo sentido e mesma unidade do eixo dos senos.

DICA:

A tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo.

Observe que se um ângulo pertence ao primeiro ou terceiro quadrantes, então a tangente é positiva. Por outro lado, se pertence ao segundo ou quarto quadrantes, é negativa.

Observe, ainda, que não existe a tangente de todos os ângulos, pois se P é uma intersecção do ciclo trigonométrico com o eixo *y*, então as retas $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ e t não se cruzam e, portanto, a tangente não está definida para os ângulos $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in\ Z$.

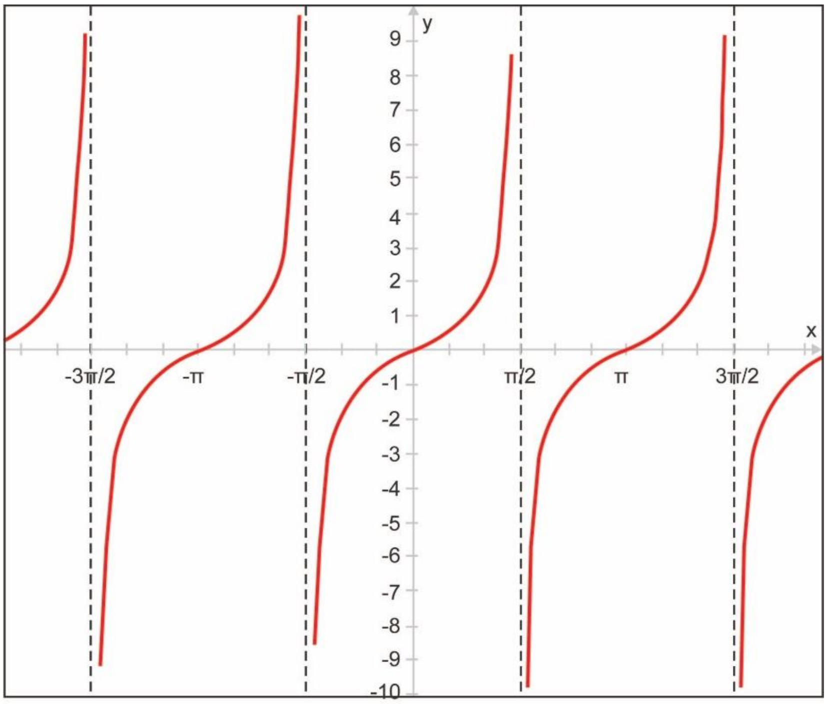
Por outro lado, para arcos cuja extremidade P é uma intersecção do ciclo trigonométrico com o eixo *x*, a tangente é igual a zero, uma vez que as retas $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ e t se cruzam no ponto A (1, 0).

Função tangente

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico de centro O correspondente ao número real *x*. Considerando o ponto T, obtido pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ com a reta *t*, perpendicular ao eixo x no ponto A (1, 0), a ordenada de T é a tangente do arco de medida *x*. Logo:

A **função tangente** é a função $f: R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in\ Z\right\} \rightarrow R$ que associa cada número x do domínio ao número real $y = tg\, x$, ou seja, $f(x) = tg\, x$.

O gráfico da função tangente é:



Dizemos que a função tangente é periódica, pois para todo x pertencente ao seu domínio, temos:

$tg\,x = tg(x + \pi) = tg(x + 2\pi) =$ .... (para voltas no sentido anti-horário).

$tg\,x = tg(x - \pi) = tg(x - 2\pi) =$ .... (para voltas no sentido horário).

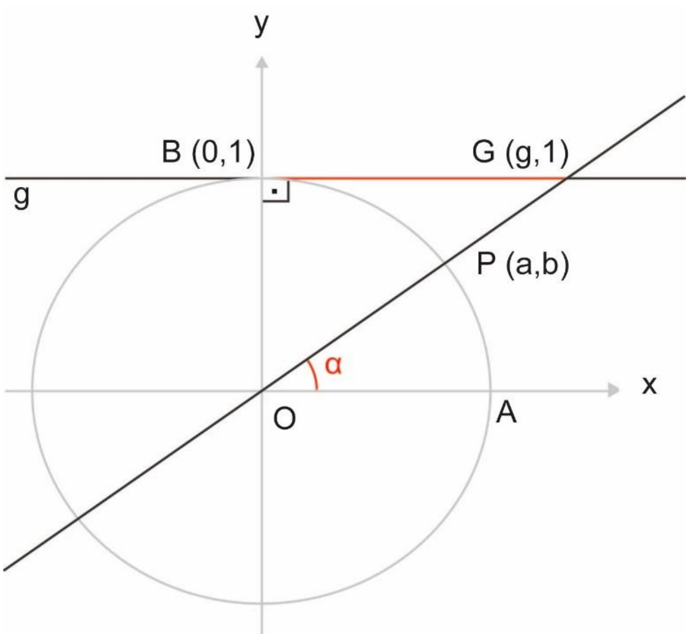
Assim, concluímos que $tg\,x = tg(x + k\pi), k \in Z$ e, portanto, o período da função tangente é π.

Resumindo as principais informações encontradas sobre a **função tangente**, temos que:

- O domínio é o conjunto $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$.
- A imagem é o conjunto dos números reais.
- É positiva se x pertence ao primeiro ou terceiro quadrantes, e negativa se pertence aos segundo ou quarto quadrantes.
- É periódica de período π, ou seja, $tg\, x = tg(x + k\pi), k \in Z$.

Cotangente de um arco

Sejam P (*a*, *b*) um ponto do ciclo trigonométrico pertencente ao primeiro quadrante e *g* uma reta perpendicular ao eixo *y*, passando pelo ponto B (0,1). Considere o ângulo AÔP = α, o arco (AP) e o triângulo OBG, em que O (0, 0), B (0, 1) e G é a intersecção da reta *g* com a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$, conforme ilustrado na figura. Observe que $\overline{OB} = 1$ e G possui coordenadas (*g*, 1).



A cotangente do ângulo α, representada por $cotg\ \alpha$, é a abscissa g do ponto G. Note que a reta $g = \overleftrightarrow{\mathrm{BG}}$, chamada de eixo das cotangentes, tem origem em B, o mesmo sentido e a mesma unidade do eixo dos cossenos.

Observe que se um ângulo pertence ao primeiro ou terceiro quadrantes, então a cotangente é positiva. Por outro lado, se pertence ao segundo ou quarto quadrantes, é negativa.

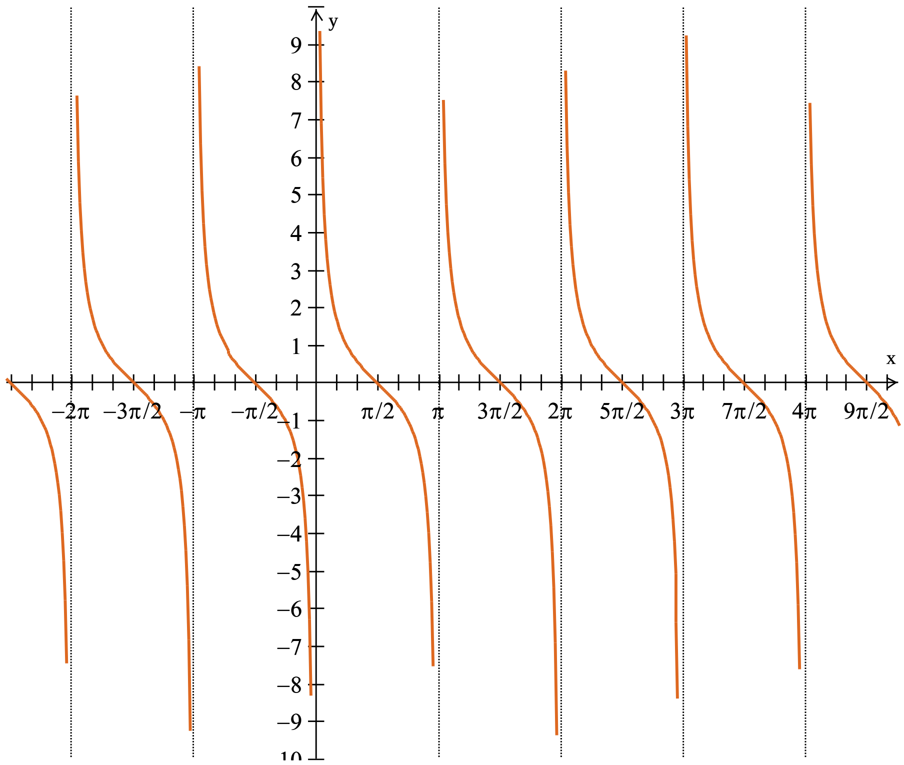
Observe ainda que não existe a cotangente de todos os ângulos, pois se P é uma intersecção do ciclo trigonométrico com o eixo *x* então as retas $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ e g não se cruzam e, portanto, a cotangente não está definida para os ângulos $\alpha = k\pi,\ k \in Z$. Por outro lado, para arcos cuja extremidade P é uma intersecção do ciclo trigonométrico com o eixo *y*, a cotangente é igual a zero, uma vez que as retas $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ e g se cruzam no ponto B $(0, 1)$.

Função cotangente

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico de centro O, correspondente ao número real *x*. Considerando o ponto G, obtido pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ com a reta *g*, perpendicular ao eixo y no ponto B $(0, 1)$, a abscissa de G é a cotangente do arco de medida *x*. Logo:

A **função cotangente** é a função $f: R - \{k\pi, k \in Z\} \rightarrow R$ que associa cada número x do domínio ao número real $y = cotg\, x$, ou seja, $f(x) = cotg\, x$.

O gráfico da função cotangente é:



Dizemos que a função cotangente é periódica, pois para todo x pertencente ao seu domínio, temos:

- $co\, tg\, x = cotg(x + \pi) = cotg(x + 2\pi) =$ .... (para voltas no sentido anti-horário).
- $cotg\, x = cotg(x - \pi) = cotg(x - 2\pi) =$ .... (para voltas no sentido horário).

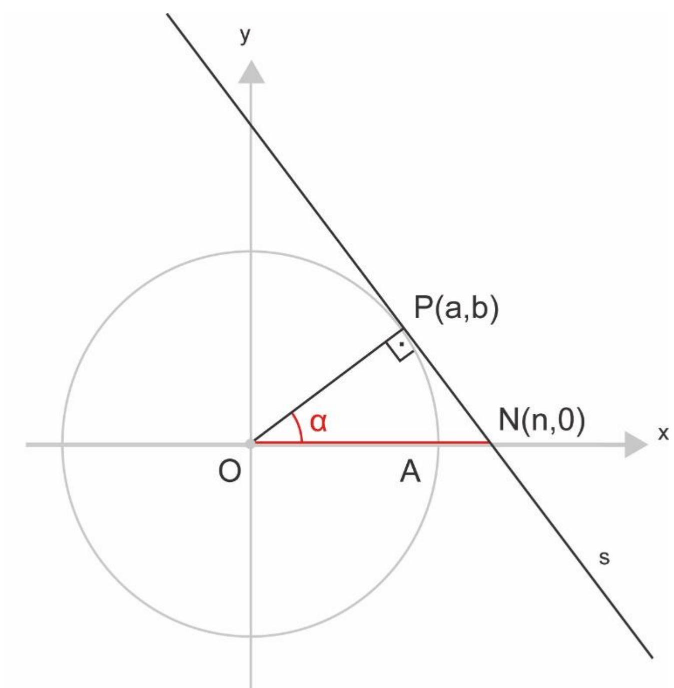
Assim, concluímos que $cotg\, x = cotg(x + k\pi)$, $kKk \in Z$ e, portanto, o período da função cotangente é π.

Resumindo as principais informações encontradas sobre a **função cotangente**, temos:

- O domínio é o conjunto $R - \{k\pi, k \in \ Z\}$.
- A imagem é o conjunto dos números reais.
- É positiva se x pertence ao primeiro ou terceiro quadrantes, e negativa se pertence aos segundo ou quarto quadrantes.
- É periódica de período π, ou seja, $cotg\, x = cotg(\, x + k\pi)$, $k \in \ Z$.

Secante de um arco

Seja P (a, b) um ponto do ciclo trigonométrico pertencente ao primeiro quadrante e s a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$ no ponto P. Considere o ângulo AÔP = α, o arco (AP) e o triângulo OPN, em que O (0, 0), A (1, 0) e N é a intersecção da reta s com o eixo x, conforme ilustrado na figura. Observe que N possui coordenadas (n, 0).



A secante do ângulo α, representada por $sec\,\alpha$, é a abscissa *n* do ponto N. Note que se um ângulo pertence ao primeiro ou quarto quadrantes, então a secante é positiva. Por outro lado, se pertence ao segundo ou terceiro, é negativa.

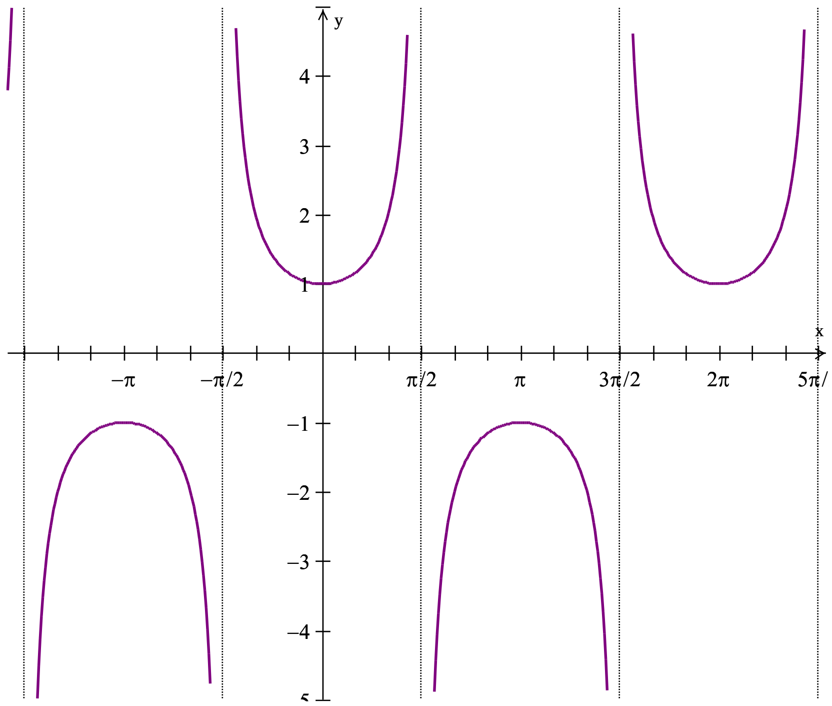
Note ainda que não existe a secante de todos os ângulos, pois se P estiver na intersecção do ciclo trigonométrico com eixo y, a reta s é paralela ao eixo x e, portanto, não cruza o eixo x. Logo, a secante não está definida para ângulos $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \ Z$.

Função secante

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico de centro O correspondente ao número real *x*. Considerando o ponto N, obtido pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ com a reta *s*, perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ no ponto P, a abscissa de N é a secante do arco de medida *x*. Logo:

A **função secante** é a função $f: R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \ Z\right\} \rightarrow R$ que associa cada número real x, pertence ao domínio, ao número real $y = sec\ x$, ou seja, $f\ (x) = sec\ x$.

O gráfico da função secante é:



Dizemos que a função secante é periódica, pois para todo $x \in R$ temos:

- $sec\,x = sec(\,x + 2\pi) = sec(\,x + 4\pi) =\ldots$. (para voltas no sentido anti-horário).
- $sec\,x = sec(\,x - 2\pi) = sec(\,x - 4\pi) =\ldots$. (para voltas no sentido horário).

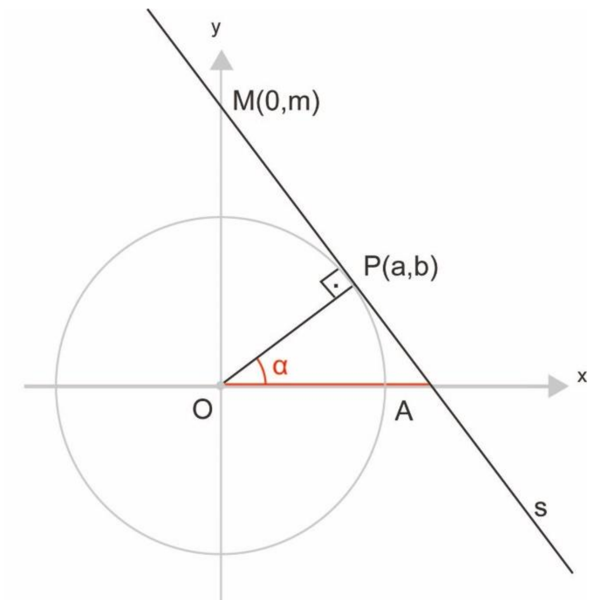
Assim, concluímos que $sec\,x = sec(\,x + 2k\pi)$, $K \in Z$ e, portanto, o período da função secante é 2π.

Resumindo as principais informações encontradas sobre a **função secante**, temos:

- O domínio é o conjunto $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$.
- A imagem é o conjunto R -] - 1,1 [, ou seja, y = sec x ≥ 1 ou y sec x≤ −1;
- É positiva se x pertence ao primeiro ou quarto quadrantes, e negativa se pertence aos segundo ou terceiro quadrantes.
- É periódica de período 2π, ou seja, $sec\, x = sec(x + 2k\pi), K \in Z$.

Cossecante de um arco

Seja P (a, b) um ponto do ciclo trigonométrico pertencente ao primeiro quadrante e s a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$ no ponto P. Considere o ângulo AÔP = α, o arco (AP) e o triângulo OPM, em que O (0, 0), A (1, 0) e M é a intersecção da reta s com o eixo y, conforme ilustrado na figura. Observe que M possui coordenadas (0, m).



A cossecante do ângulo α, representada por $cossec\,\alpha$, é a ordenada m do ponto M. Note que se um ângulo pertence ao primeiro ou segundo quadrantes, então cossecante é positiva. Por outro lado, se pertence ao terceiro ou quarto quadrantes, é negativa.

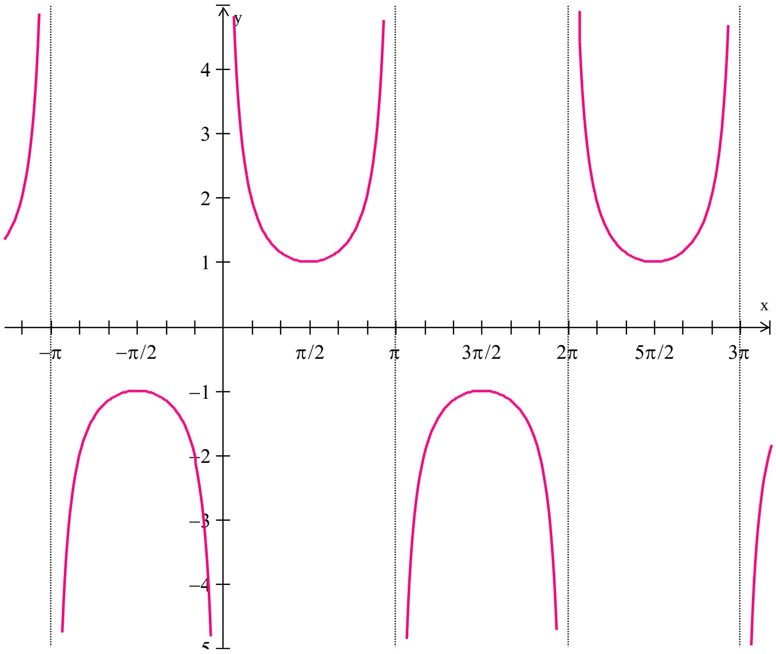
Note, ainda, que não existe a cossecante de todos os ângulos, pois se P estiver na intersecção do ciclo trigonométrico com eixo *x*, a reta *s* é paralela ao eixo *y* e, portanto, não cruza o eixo *y*. Logo, a cossecante não está definida para ângulos $\alpha = k\pi, k \in\ Z$.

Função cossecante

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico de centro O, correspondente ao número real *x*. Considerando o ponto M, obtido pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ com a reta *s*, perpendicular à $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ no ponto P, a ordenada de M é a cossecante do arco de medida *x*. Logo:

A **função cossecante** é a função $f\colon R - \{k\pi, k \in\ Z\} \rightarrow R$ que associa cada número real x, pertence ao domínio, ao número real $y = cossec\,x$, ou seja, $f(x) = cossec\,x$.

O gráfico da função cossecante é:



Dizemos que a função cossecante é periódica, pois para todo $x \in R$ temos:

- $cossec\, x = cossec(x + 2\pi) =$ .... (voltas no sentido anti-horário).
- $cossec\, x = cossec(x - 2\pi) =$ .... (voltas no sentido horário).

Assim, concluímos que $cossec\, x = cosse\ c(x + 2k\pi)$, $K \in Z$ e, portanto, o período da função cossecante é 2π.

Resumindo as principais informações encontradas sobre a **função cossecante**, temos:

- O domínio é o conjunto $R - \{k\pi, k \in \ Z\}$.
- A imagem é o conjunto $R -]-1, 1[$, ou seja, $y = cossec\, x \geq 1$ ou $y = cossec\, x \leq -1$.
- É positiva se x pertence ao 1º ou 2º quadrantes, e negativa se pertence aos 3º ou 4º quadrantes.
- É periódica de período 2π, ou seja, $cossec\, x = cossec(x + 2k\pi)$, $K \in \ Z$.

EXEMPLOS

1. Determine o sinal da tangente, da cotangente, da secante e da cossecante dos arcos 230 º e $\frac{2\pi}{3}$:

Solução: Os arcos 230 º e $\frac{2\pi}{3}$ estão no terceiro e segundo quadrante, respectivamente. Já sabemos os sinais destas funções em cada quadrante:

Quadrante	**Tangente**	**Cotangente**	**Secante**	**Cossecante**
Primeiro	+	+	+	+
Segundo	-	-	-	+
Terceiro	+	+	-	-

Quarto	-	-	+	-

Logo, podemos afirmar que:

$tg\, 2\,30^o > 0$, $cotg\, 2\,30^o > 0$, $sec\, 2\,30^o < 0$ e $cossec\, 2\,30^o < 0$

$tg\, \frac{2\pi}{3} < 0$, $cotg\, \frac{2\pi}{3} < 0$, $sec\, \frac{2\pi}{3} < 0$ e $cossec\, \frac{2\pi}{3} > 0$

2. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Solução: Sabemos que a função $tg\, \alpha$ não está definida para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, logo devemos ter:

$$x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \text{x} \neq k\pi.$$

Portanto, o domínio da função é: $D_f = \{x \in R | x \neq k\pi\}$.

b) $g(x) = cotg(3x)$

Solução: Sabemos que a função $\text{cotg}\alpha$ não está definida para $\alpha = k\pi$. Logo, devemos ter: $3x \neq k\pi \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{k\pi}{3}$.

Portanto, o domínio da função é: $D_g = \left\{x \in R | x \neq \frac{k\pi}{3}\right\}$.

c) $h(x) = sec\left(\frac{x+\pi}{4}\right)$

Solução: Sabemos que a função $sec\, \alpha$ não está definida para

$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Logo, devemos ter: $\frac{x+\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, multiplicando por 4

$4.\left(\frac{x+\pi}{4}\right) \neq 4.\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} + \pi \neq 2\pi + 4K\pi$, subtraindo π

$x + \pi - \pi \neq 2\pi - \pi + 4K\pi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} \neq \pi + 4K\pi.$

Portanto, o domínio da função é: $D_h = \{x \in R | x \neq \pi + 4k\pi\}$.

3. Determine o conjunto imagem das funções:

a) $f(x) = 2\, tg\, x$

Solução: Sabemos que o conjunto imagem da função tg *x* é o conjunto dos números reais, ou seja, - ∞ < tg x < ∞. Multiplicando por 2, temos: - ∞ < 2tg x < ∞. Logo, o conjunto a imagem é: Im_f = *R*.

b) $g(x) = 3\, sec\, x$

Solução: Sabemos que o conjunto imagem da função $\sec x$ é o conjunto R -] – 1,1[, ou seja, sec *x* ≤ -1 ou sec *x* ≥ 1. Multiplicando por 3, temos: 3sec *x* ≤ -3 ou 3sec *x* ≥ 3. Logo, o conjunto a imagem é: Im_g = *R* -] *-3,3* [.

c) $h(x) = 1 + 2$ cossec x

Solução: Sabemos que o conjunto imagem da função cossec x é o conjunto R - $]-1,1[$, ou seja:

cossec $x \leq -1$ ou cossec $x \geq 1$, multiplicando por 2

2cossec $x \leq -2$ ou 2cossec $x \geq 2$, somando 1

1 + 2cossec $x \leq 1 + (-2)$ ou 1 + 2cossec x ≥ 1 + 2, logo

1 + 2cossec $x \leq 1$ ou 1 + 2cossec x ≥ 3

Portanto, o conjunto a imagem é: $Im_h = R -]-1,3[$.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. *Fundamentos da Matemática Elementar* - Ensino Médio – 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.v.3

MELLO, José Luiz Pastore. *Matemática*: construção e significado – Ensino médio. São Paulo: Moderna, 2005.