MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Soma de matrizes

Produto de número por matriz, multiplicação de matrizes

Objetivo: Calcular a adição de matrizes, o produto de um número real por uma matriz e o produto entre duas matrizes.

Vamos agora falar um pouquinho das operações com matrizes.

É comum vermos em jornais, revistas etc. os resultados numéricos referentes a uma pesquisa apresentados por meio de gráficos.

É comum as donas de casa pesquisarem os preços dos produtos antes de efetuarem a compra. Considere o seguinte problema.

Uma dona de casa precisa comprar alguns produtos e resolveu pesquisar os preços em dois supermercados. A tabela seguinte mostra os preços pesquisados.

	Produto			
Supermercado	**Farinha**	**Açúcar**	**Leite**	**Ovos**
Alfa	R$1,30	R$2,50	R$1,90	R$4,10
Beta	R$1,80	R$2,10	R$2,20	R$4,60

Ela precisa de 2 kg de farinha, 3 kg de açúcar, 2 litros de leite e 1 dúzia de ovos. Esses dados também podem ser dispostos em uma tabela.

Produto	**Quantidade**
Farinha	2 kg
Açúcar	3 kg
Leite	2 litros
Ovos	1 dúzia

Em qual supermercado é mais vantajoso fazer a compra?

Após esta aula você será capaz de responder essa pergunta!

Adição e subtração

Em primeiro lugar, só podemos adicionar ou subtrair matrizes se elas forem do mesmo tipo (mesma ordem). Se isso acontecer, é só adicionar (ou subtrair) os elementos que ocupam a mesma posição. **Obs.:** A + B = B + A, mas A − B ≠ B − A.

EXEMPLO

Dadas A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule: A + B; A − B; B − A.

A + B = $\begin{bmatrix} 2+3 & 1+(-2) & 3+1 \\ 0+(-4) & 5+1 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

A − B = $\begin{bmatrix} 2-3 & 1-(-2) & 3-1 \\ 0-(-4) & 5-1 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

B − A = $\begin{bmatrix} 3-2 & -2-1 & 1-3 \\ -4-0 & 1-5 & 3-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Produto de número por matriz

Dada uma matriz A = $(a_{ij})_{mxn}$ e um número real K, denomina-se **matriz produto K.A** a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos de A por K.

EXEMPLO

1. Se A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, então 3A = $\begin{bmatrix} 3.2 & 3.1 \\ 3.3 & 3.0 \\ 3.1 & 3.4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ e

-5A = $\begin{bmatrix} -5.2 & -5.1 \\ -5.3 & -5.0 \\ -5.1 & -5.4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -15 & 0 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$.

2. Vamos calcular a matriz X tal que X − A = 2B − 3C, com A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

B = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

X − A = 2B − 3C

X = A + 2B − 3C

X = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ + 2$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ - 3$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

X = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

X = $\begin{bmatrix} 1 + 6 - (-3) & 2 + 10 - 0 \\ 0 + 4 - 9 & -1 + 0 - 0 \end{bmatrix}$

X = $\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

3. Se A = $(a_{ij})_{2x2}$ é tal que $a_{ij} = 2i - j$, então A − A^t é.

A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

A= $\begin{bmatrix} 2.1-1 & 2.1-2 \\ 2.2-1 & 2.2-2 \end{bmatrix}$

A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Logo, A^t = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

e portanto, A − A^t = $\begin{bmatrix} 1-1 & 0-3 \\ 3-0 & 2-2 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

4. Dadas A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $\frac{1}{2}(X^t - A) = 2B$.

Primeiro vamos tirar o MMC para simplificar a equação.

$$\frac{1}{2}(X^t - A) = \frac{4B}{2}$$
$$X^t - A = 4B$$

Agora vamos isolar a incógnita.

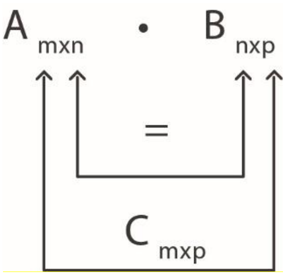
$$X^t = A + 4B$$
$$X = (A + 4B)^t$$

Assim, A + 4B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$+$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 19 \end{bmatrix}$

e portanto, $X = (A + 4B)^t = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 19 \end{bmatrix}$

Produto de matrizes

Em primeiro lugar, só podemos multiplicar duas matrizes A e B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Nesse caso, a matriz produto C = AB fica com o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

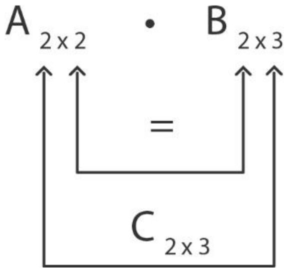


EXEMPLO

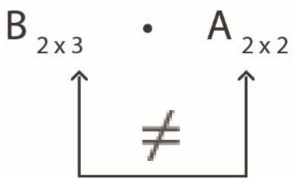
A = $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

A matriz A é de ordem 2x2 e a matriz B é de ordem 2x3.

Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, podemos multiplicar A por B e a matriz produto C = AB é de ordem 2x3



O produto BA não é possível.



Agora vamos multiplicar as matrizes A e B.

Cada elemento da matriz produto C = AB é dado pela soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo elemento correspondente da coluna j de B.

Como vimos, a matriz produto C é de ordem 2x3. Vamos então montar essa matriz genericamente.

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1^{\text{a}}\text{ linha de A} \cdot 1^{\text{a}}\text{ coluna de B} & 1^{\text{a}}\text{ linha de A} \cdot 2^{\text{a}}\text{ coluna de B} & 1^{\text{a}}\text{ linha de A} \cdot 3^{\text{a}}\text{ coluna de B} \\ 2^{\text{a}}\text{ linha de A} \cdot 1^{\text{a}}\text{ coluna de B} & 2^{\text{a}}\text{ linha de A} \cdot 2^{\text{a}}\text{ coluna de B} & 2^{\text{a}}\text{ linha de A} \cdot 3^{\text{a}}\text{ coluna de B} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9.1 + 7.4 & 9.2 + 7.5 & 9.3 + 7.6 \\ 0.1 + 8.4 & 0.2 + 8.5 & 0.3 + 8.6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 37 & 53 & 69 \\ 32 & 40 & 48 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

Multiplique a matriz A pela matriz B.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

A matriz A é de ordem 4x2 e a matriz B é de ordem 2x1.

Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, podemos multiplicar A por B e a matriz produto C = AB é de ordem 4x1.

Vamos então montar a matriz C genericamente.

C = AB = $\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1^a \text{ linha de A} \cdot 1^a \text{ coluna de } \mathbf{B} \\ 2^a \text{ linha de A} \cdot 1^a \text{ coluna de } \mathbf{B} \\ 3^a \text{ linha de A} \cdot 1^a \text{ coluna de } \mathbf{B} \\ 4^a \text{ linha de A} \cdot 1^a \text{ coluna de } \mathbf{B} \end{bmatrix}$

C = $\begin{bmatrix} 1.3 + 3.2 \\ 0.3 + (-5).2 \\ 2.3 + 0.2 \\ -1.3 + 4.2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

Vamos agora voltar ao problema apresentado no início desta aula e responder à pergunta proposta!

Para saber em qual supermercado a dona de casa gastará menos, podemos efetuar o produto das duas matrizes:

P = $\begin{bmatrix} 1{,}30 & 2{,}50 & 1{,}90 & 4{,}10 \\ 1{,}80 & 2{,}10 & 2{,}20 & 4{,}60 \end{bmatrix}$ e Q = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

A matriz P (preço) é de ordem 2x4 e a matriz Q (quantidade) é de ordem 4x1.

Como o número de colunas de P é igual ao número de linhas de Q, podemos multiplicar P por Q e a matriz C (custo) = P.Q é de ordem 2x1.

Vamos então montar a matriz C genericamente.

$$C = P.Q = \begin{bmatrix} 1{,}30 & 2{,}50 & 1{,}90 & 4{,}10 \\ 1{,}80 & 2{,}10 & 2{,}20 & 4{,}60 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}30.2 + 2{,}50.3 + 1{,}90.2 + 4{,}10.1 \\ 1{,}80.2 + 2{,}10.3 + 2{,}20.2 + 4{,}60.1 \end{bmatrix} =$$

$$C = \begin{bmatrix} 18{,}00 \\ 18{,}90 \end{bmatrix}$$

Portando, a dona de casa gastará menos no supermercado Alfa.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar*: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.