Matemática
UNINOVE

Números complexos

potenciação e radiciação

Objetivo: Reconhecer a prática das operações de Potenciação e Radiciação de números complexos.

Módulo IV

Sabe-se que os números complexos aceitam as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Precisamos, agora, definir as operações de **potenciação** e **radiciação** dos complexos.

Potenciação

Seja o número complexo, não nulo, na forma trigonométrica $\mathbf{z} = |\mathbf{z}| \, . \, (\mathbf{cos}\, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{i\, sen}\, \boldsymbol{\theta})$, temos:

$z^2 = z \, . \, z = |z| . |z| . [\cos(\theta + \theta) + i . \text{sen}(\theta + \theta)] = |z|^2 . [\cos(2\theta) + i \ \text{sen}(2\theta)]$

$z^3 = z \, . \, z \, . \, z = |z| . |z| . |z| . [\cos(\theta + \theta + \theta) + i \ \text{sen}(\theta + \theta + \theta)] = |z| 3 \, . \, [\cos(3\theta) + i \ \text{sen}(3\theta)]$

Logo, generalizando para uma potência n, temos: $\mathbf{zn} = |\mathbf{z}|\mathbf{n} \, . \, [\mathbf{cos}\,(\mathbf{n}\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{i}\ \mathbf{sen}\,(\mathbf{n}\boldsymbol{\theta})]$; $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$, conhecida como **"Primeira fórmula de Moivre".**

DICA:

Para elevar um número complexo (z) a uma potencia inteira (n), *n* ≥ 2, você deve elevar o módulo do número complexo à potencia n e, em seguida, você deve multiplicar o argumento por n.

EXEMPLO

Seja $\mathbf{z = 3 - 3i}$ determine $\mathbf{z^{-12}}$.

Resolução

$$\boldsymbol{\rho} = |\mathbf{z}\,| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\,.\,\bar{z}} = \sqrt{(3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \Longrightarrow \boldsymbol{\rho} = |\mathbf{z}\,| = \mathbf{3\sqrt{2}}\,.$$

$$\begin{cases} \mathbf{cos\,\theta} = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathbf{sen\,\theta} = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Pelos nossos conhecimentos em trigonometria, concluímos que $\theta \in$ terceiro quadrante, $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

$$\mathbf{z} = |\mathbf{z}|.\,(\mathbf{cos\,\theta + i\,sen\,\theta}) \implies \mathbf{z = 3\sqrt{2}\left[cos\,\frac{7\pi}{4} + i\,sen\,\frac{7\pi}{4}\right]}$$

Aplicando a fórmula de Moivre, temos:

$$z^{-12} = \left(3\sqrt{2}\,\right)^{-12}.\left[\cos\left(-12.\frac{7\pi}{4}\right) + i\ \operatorname{sen}\left(-12.\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \left(\,3\sqrt{2}\,\right)^{-12}.\,[\cos\,(-21\pi) + i\ \operatorname{sen}\,(-21\pi)] =$$

$$= \frac{1}{\left(\,3\sqrt{2}\,\right)^{12}}.\,[\cos\,(\pi) + i\ \operatorname{sen}\,(\pi)] = \frac{1}{(\,3\,)^{12}\left(\sqrt{2}\,\right)^{12}}.\,[(-1) + i\,.\,0] =$$

$$= \frac{1}{(\,3\,)^{12}\,(\,2\,)^{6}}.\,[-1]$$

$$\Longrightarrow \mathbf{z^{-12}} = -\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^{12}.\,2^{6}}}\,.$$

Radiciação

Seja o número complexo **z**, chamamos de **raiz enésima de z** e denotamos por $w = \sqrt[n]{z}$ **os números complexos w** se, e somente nestas condições, $\mathbf{w^n = z}$, com $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{n \geq 2}$, isto é n = 1, 2, 3, (...).

EXEMPLO

São raízes quartas de **16, isto é, w⁴ = 16,** os números reais **2** e **-2**, bem como os números complexos **2i** e **-2i**.

Verifique:

$$\begin{cases} (\mathbf{2})^4 = 16 \\ (-\mathbf{2})^4 = 16 \\ (\mathbf{2i})^4 = 2^4.\,i^4 = 16.1 = 16 \\ (-\mathbf{2i})^4 = (-2)^4.\,i^4 = 16.1 = 16 \end{cases}$$

Vamos detalhar o método utilizado para encontrar tais raízes.

Seja o complexo $\mathbf{z = |z|.(\cos\theta + i\,sen\,\theta)}$ que possua raiz enésima:

$\mathbf{w = |w|.(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)}$.

Logo, temos $\mathbf{w^n = z \Leftrightarrow |w|^n.[\cos(n\,\alpha) + i\,sen\,(n\alpha)] = |z|.(\cos\theta + i\,sen\,\theta)}$, daí, podemos concluir que $\begin{cases} \mathbf{|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}} \\ \mathbf{\cos(n\,\alpha) = \cos\theta} \\ \mathbf{sen\,(n\alpha) = sen\,\theta} \end{cases}$, então

$\mathbf{n\,\alpha = \theta + 2k.\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k.\pi}{n}}$; $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$, onde θ é o **argumento principal** de **z**.

Finalmente, temos: $\mathbf{w = \sqrt[n]{|z|}.\left[\cos\frac{\theta+2k.\pi}{n} + i\,sen\,\frac{\theta+2k.\pi}{n}\right]}$, que é chamada de "**Segunda fórmula de Moivre** ".

EXEMPLO

Sendo $\mathbf{z\ =\ 16\ \Longrightarrow\ z =\ 16\ +\ 0i}$, determine suas **raízes quartas**.

Resolução

$\mathbf{n\ =\ 4}$

$\mathbf{k\ =\ \{\,0, 1, 2, 3\,\}}$

$\boldsymbol{\rho} = |\,\mathbf{z}\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,.\,\overline{z}} = \sqrt{(16)^2 + (0)^2} = \sqrt{256 + 0} = \sqrt{256} \Longrightarrow$

$\boldsymbol{\rho} = |\,\mathbf{z}\,| = \ \mathbf{16}$

$$\begin{cases} \mathbf{\cos\theta} = \frac{a}{|z|} = \frac{16}{16} = 1 \\ \\ \mathbf{sen\,\theta} = \frac{b}{|z|} = \frac{0}{16} = 0 \end{cases}$$

Pelos nossos conhecimentos em trigonometria, concluímos que $\theta = 0$.

Portanto:

$$\mathbf{w = \sqrt[n]{|z|}.\left[\cos\frac{\theta + 2k.\pi}{n} + i\,sen\,\frac{\theta + 2k.\pi}{n}\right]} =$$

$$= \sqrt[4]{16}.\left[\cos\frac{0 + 2k.\pi}{4} + i\,sen\,\frac{0 + 2k.\pi}{4}\right] =$$

$$= 2.\left[\cos\frac{2k.\pi}{4} + i\,sen\,\frac{2k.\pi}{4}\right] \Longrightarrow \mathbf{w = 2.\left[\cos\frac{k\pi}{2} + i\,sen\,\frac{k\pi}{2}\right]}.$$

Logo, temos:

$$\mathbf{k = 0} \rightarrow w = 2.\left[\cos\frac{0\pi}{2} + i\,sen\,\frac{0\pi}{2}\right] = 2.[\cos 0 + i.sen\,0] = 2.[1 + i.0] = 2\,.$$

$$\mathbf{k = 1} \rightarrow w = 2.\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\,\frac{\pi}{2}\right] = 2.[0 + i.1] = 2i\,.$$

$$\mathbf{k = 2} \rightarrow w = 2.\left[\cos\frac{2\pi}{2} + i\,sen\,\frac{2\pi}{2}\right] = 2.[\cos\pi + i\,sen\,\pi] = 2.[-1 + i.0] = -2\,.$$

$$\mathbf{k = 3} \rightarrow w = 2.\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\,sen\,\frac{3\pi}{2}\right] = 2.[0 + i.(-1)] = 2.[0 - i)] = -2i\,.$$

Então, concluímos que as **raízes quartas** de **16** são **-2, 2, -2i e 2i.**

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. *Matemática* – Ciência e aplicações - Ensino Médio - 3º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau* - 3º ano. São Paulo: Atual, 2001.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática Ensino Médio* - 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2010.