Matemática

UNINOVE

Trigonometria

estudo das funções seno e cosseno

Objetivo: Definir as funções seno e cosseno.

Módulo IV

Situação-Problema

Em certa cidade litorânea, a altura h da maré, medida em metros, em função do tempo t, é dada pela função $h(t) = 3 + 0{,}4.\cos\left(\frac{\pi}{3}.t\right)$, e o tempo é medido em horas, a partir da meia-noite.

a) Qual a altura da maré às 9 horas da manhã?

b) Qual a altura máxima e a altura mínima da maré?

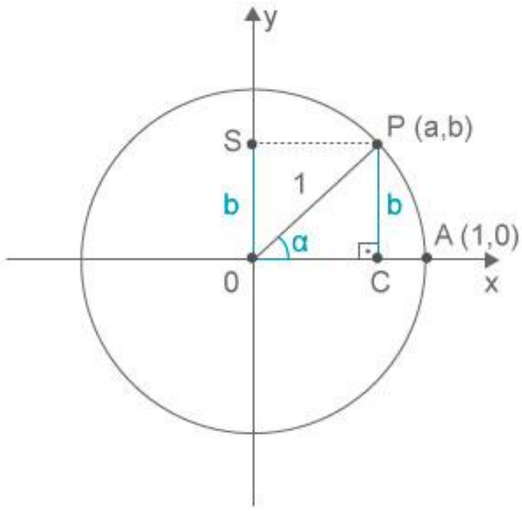
Respostas

a) Às 9 horas da manhã, temos t = 9. Logo, a altura da maré é dada por $h(9) = 3 + 0{,}4.\cos\left(\frac{\pi}{3}.9\right) = 3 + 0{,}4.\cos(3\pi) = 3 - 0{,}4 = 2{,}6$ metros.

b) Como a função cosseno varia de - 1 a 1, então a altura máxima da maré é: 3 + 0,4 = 3,4 metros e, a altura mínima é: 3 - 0,4 = 2,6 metros.

Para respondermos a este tipo de problemas, é necessário conhecermos as funções trigonométricas.

Seno de um arco



Seja P (a, b) um ponto do ciclo trigonométrico pertencente ao primeiro quadrante. Por este ponto, trace paralelas aos eixos. As intersecções destas paralelas com os eixos x e y definem os pontos C e S, respectivamente. Considere ainda o ângulo AÔP = α, o arco (AP) e o triângulo OCP, onde O (0, 0) e A (1, 0), conforme ilustrado na figura. Observe que $\overline{\text{OP}} = 1$, pois o raio do ciclo trigonométrico é unitário, $\overline{\text{OC}} = \text{a}$ e $\overline{\text{CP}} = \overline{\text{OS}} = \text{b}$, pois são os valores da abscissa e ordenada do ponto P, respectivamente.

Como o triângulo OCP é retângulo em C, podemos aplicar a definição do seno: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{\text{CP}}}{\overline{\text{OP}}} = \frac{\text{b}}{1} = \text{b}$. Observe que $\operatorname{sen}\alpha$ é a ordenada b do ponto P. Portanto, o eixo y (das ordenadas) também é chamado de eixo dos senos.

DICA:

O seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

Observe que se um ângulo pertence ao primeiro ou segundo quadrantes, o seno é positivo. Por outro lado, se pertence ao terceiro ou quarto quadrantes, o seno é negativo.

Note, também, que se conhecemos o seno de um arco, podemos facilmente obter o seno dos arcos simétricos a ele em relação aos eixos x e y e à origem do plano cartesiano. Por exemplo, considere o arco $\frac{\pi}{6}$ pertencente ao primeiro quadrante. Sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30^{o} = \frac{1}{2}$. Usando este valor, podemos determinar o seno dos arcos simétricos à $\frac{\pi}{6}$:

Simetria em relação ao eixo y:

Note que o arco simétrico a $\frac{\pi}{6}$ em relação ao eixo y, pertence ao segundo quadrante e para obtê-lo, basta fazer: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Como o seno de um arco no segundo quadrante é positivo, então $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Simetria em relação ao eixo x:

Note que o arco simétrico a $\frac{\pi}{6}$ em relação ao eixo x, pertence ao quarto quadrante e para obtê-lo, basta fazer: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Como o seno de um arco no 4º quadrante é negativo, então $\mathrm{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Simetria em relação à origem do plano cartesiano:

Note que o arco simétrico a $\frac{\pi}{6}$ em relação à origem, pertence ao terceiro quadrante e, para obtê-lo, basta fazer: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Como o seno de um arco no terceiro quadrante é negativo, então $\mathrm{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

DICA:

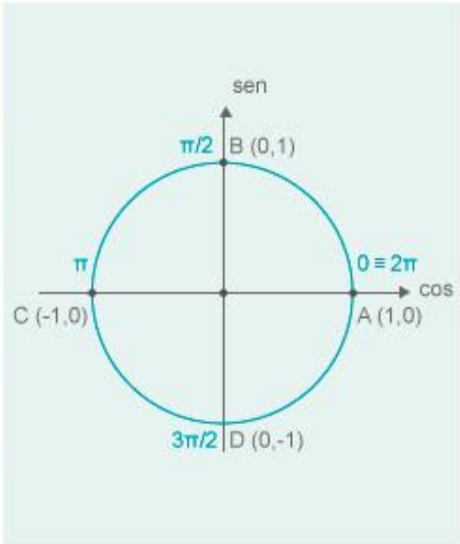
Seja α um arco pertencente ao primeiro quadrante.

- O arco simétrico a α em relação ao eixo x tem medida igual a $2\pi - \alpha$.
- O arco simétrico a α em relação ao eixo y tem medida igual a $\pi - \alpha$.
- O arco simétrico a α em relação à origem O tem medida igual a $\pi + \alpha$.

Observe agora os arcos cujas extremidades são os pontos (A, B, C e D), cujas coordenadas são conhecidas conforme ilustra a figura a seguir.

Como o seno é igual à ordenada (valor de y) de cada ponto, temos:

Ângulo (x) (em radiano)	sen x
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0



Função seno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x. Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada de P é o seno do arco de medida x. Logo:

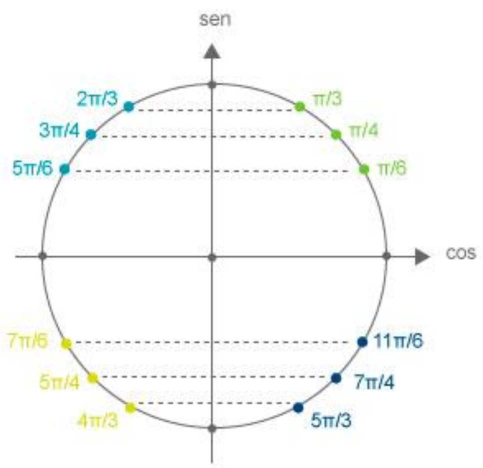
A **função seno** é a função $f: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ que associa cada número real x ao número real $y = \operatorname{sen} x$, ou seja, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Para construir o gráfico da função seno, vamos utilizar uma tabela de valores para x com informações já conhecidas:

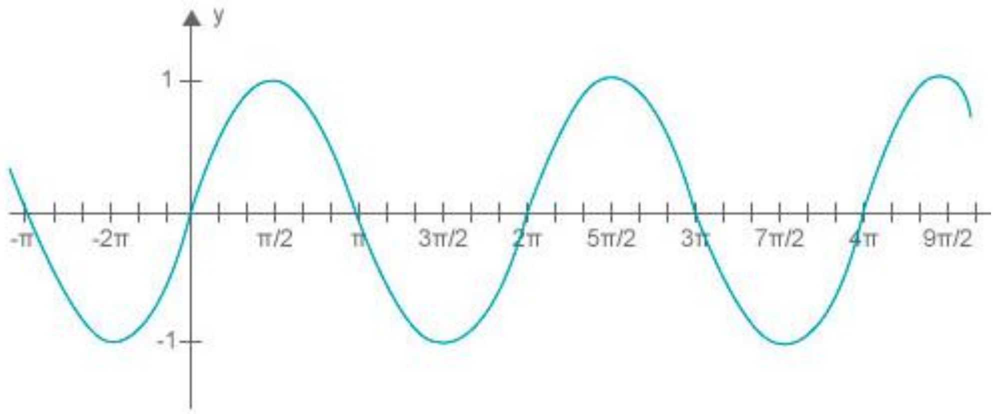
Ângulo (x) (graus)	0	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
Ângulo (x) (radiano)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

A partir destes valores, podemos encontrar outros por simetria em relação aos eixos x e y ou em relação à origem do plano cartesiano, conforme ilustrado na figura. Observe que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$.

Além disso, podemos obter outros valores para a função seno, se considerarmos os ângulos maiores que 2π ou menores que zero, pois, nestes casos, o seno de x assume os valores da primeira volta.



Usando todos estes pontos $(x, \operatorname{sen} x)$, obtemos o gráfico da função seno:



Dizemos que a função seno é periódica, pois para todo $x \in \mathrm{R}$ temos:

- $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \ldots.$ (para voltas no sentido anti-horário).
- $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x - 2\pi) = \operatorname{sen}(x - 4\pi) = \ldots.$ (para voltas no sentido horário).

Assim, concluímos que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, $K \in Z$ e, portanto, o período da função seno é 2π.

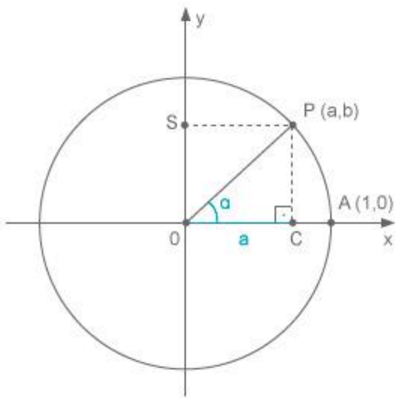
Resumindo as principais informações sobre a **função seno**, temos que:

- O domínio é o conjunto dos números reais.
- A imagem é o intervalo [-1, 1] e, portanto, é limitada.
- É positiva se x pertence ao primeiro ou segundo quadrantes, e negativa se pertence ao terceiro ou quarto quadrantes.
- É periódica de período 2π, ou seja, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, $\mathrm{K} \in \mathrm{Z}$.

Cosseno de um arco

Seja P (a, b) um ponto do ciclo trigonométrico pertencente ao primeiro quadrante. Por ele, trace paralelas aos eixos. As intersecções destas paralelas com os eixos x e y definem os pontos C e S, respectivamente. Considere ainda o ângulo AÔP = α, o arco (AP) e o triângulo OCP, em que O $(0, 0)$ e A $(1, 0)$, conforme ilustrado na figura. Observe que $\overline{OP} = 1$, pois o raio do ciclo trigonométrico é unitário, $\overline{OC} = a$ e $\overline{CP} = \overline{OS} = b$, pois são os valores da abscissa e ordenada do ponto P, respectivamente.

Como o triângulo OCP é retângulo em C, podemos aplicar a definição do cosseno de um ângulo: $\cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{a}{1} = a$. Observe que $cos\,\alpha$ é a abscissa a do ponto P. Portanto, o eixo x $($das abscissas$)$ também é chamado de eixo dos cossenos.



DICA:

O cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

Observe que se um ângulo pertence ao primeiro ou quarto quadrantes, então o cosseno é positivo. Por outro lado, se pertence ao segundo ou terceiro quadrantes, o cosseno é negativo.

Note também que se conhecemos o cosseno de um arco, podemos facilmente obter o cosseno dos arcos simétricos a ele em relação aos eixos x e y e à origem do plano cartesiano.

Por exemplo, considere o arco $\frac{\pi}{3}$ pertencente ao primeiro quadrante. Sabemos que $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60º = \frac{1}{2}$. Usando este valor, podemos determinar o cosseno dos arcos simétricos à $\frac{\pi}{3}$:

Simetria em relação ao eixo y:

Note que o arco simétrico a $\frac{\pi}{3}$ em relação ao eixo y, pertence ao segundo quadrante e para obtê-lo, basta fazer: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi-\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Como o cosseno de um arco no segundo quadrante é positivo, então $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Simetria em relação ao eixo x:

Note que o arco simétrico a $\frac{\pi}{3}$ em relação ao eixo x, pertence ao quarto quadrante e para obtê-lo, basta fazer: $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi-\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Como o cosseno de um arco no quarto quadrante é positivo, então $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

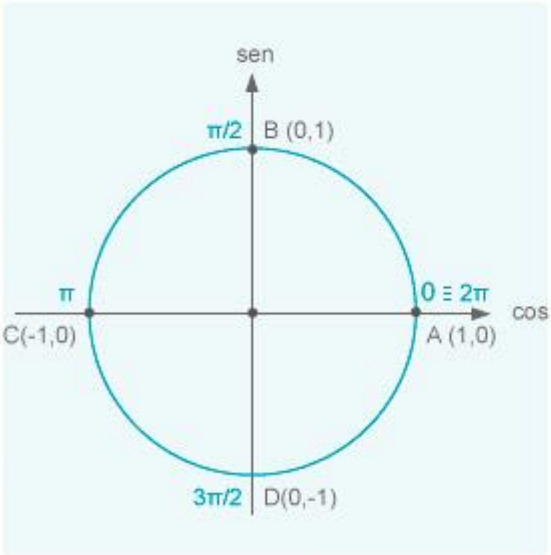
Simetria em relação à origem do plano cartesiano:

Note que o arco simétrico a $\frac{\pi}{3}$ em relação à origem, pertence ao terceiro quadrante e para obtê-lo, basta fazer: $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi+\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Como o cosseno de um arco no terceiro quadrante é negativo, então $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Observe agora os arcos cujas extremidades são os pontos (A, B, C e D) com coordenadas conhecidas, conforme ilustra a figura a seguir.

Como o cosseno é igual à abscissa (valor de x) de cada ponto, temos:

Ângulo (x) (em radiano)	cos x
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



Função cosseno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x. Considerando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, a abscissa de P é o cosseno do arco de medida x. Logo:

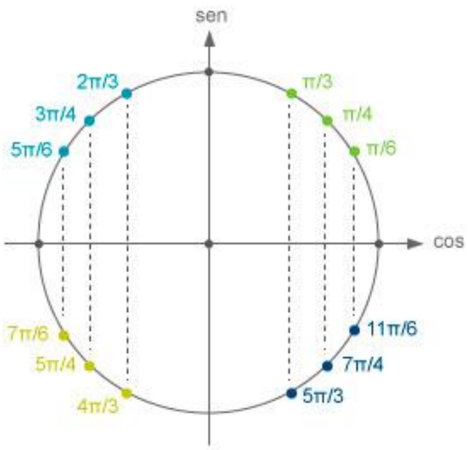
A **função cosseno** é a função $f: R \to R$ que associa cada número real x ao número real $y = \cos x$, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Para construir o gráfico da função cosseno, vamos utilizar uma tabela de valores para x com informações já conhecidas:

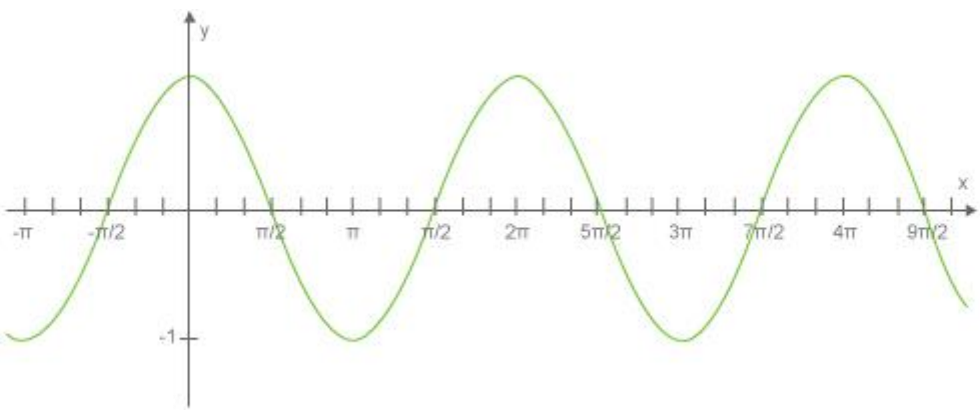
Ângulo (x) (graus)	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Ângulo (x) (radiano)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

A partir destes valores, podemos encontrar outros por simetria em relação aos eixos x e y ou em relação à origem do plano cartesiano, conforme ilustrado na figura. Observe que $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$ e $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Além disso, podemos obter outros valores para a função cosseno, se considerarmos os ângulos maiores que 2π ou menores que zero, pois, nestes casos, o cosseno de x assume os valores da primeira volta.



Usando todos estes pontos $(x, \cos x)$, obtemos o gráfico da função cosseno:



Dizemos que a função cosseno é periódica, pois para todo $x \in R$ temos:

- $\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ldots.$ (para voltas no sentido anti-horário).
- $\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \ldots.$ (para voltas no sentido horário).

Assim, concluímos que $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, $K \in Z$ e, portanto, o período da função cosseno é 2π.

Resumindo as principais informações sobre a **função cosseno**, temos que:

- O domínio é o conjunto dos números reais.
- A imagem é o intervalo [-1, 1] e, portanto, é limitada.
- É positiva se x pertence ao primeiro ou quarto quadrantes, e negativa se pertence aos segundo ou terceiro quadrantes.
- É periódica de período 2π, ou seja, $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, $k \in Z$.

EXEMPLO

1. Determine os valores reais de m tal que:

a) $\operatorname{sen} x = 4m - 1$

b) $\cos x = 5m + 2$

Solução

a) Como $\operatorname{sen} x \in [-1,1]$, então $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Logo:

$$-1 \leq 4\mathrm{m} - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 4\mathrm{m} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \mathrm{m} \leq \frac{1}{2}$$

b) Como $\cos x \in [-1,1]$, então $-1 \leq \cos x \leq 1$. Logo:

$$-1 \leq 5\mathrm{m} + 2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 5\mathrm{m} \leq -1 \Rightarrow -\frac{3}{5} \leq \mathrm{m} \leq -\frac{1}{5}$$

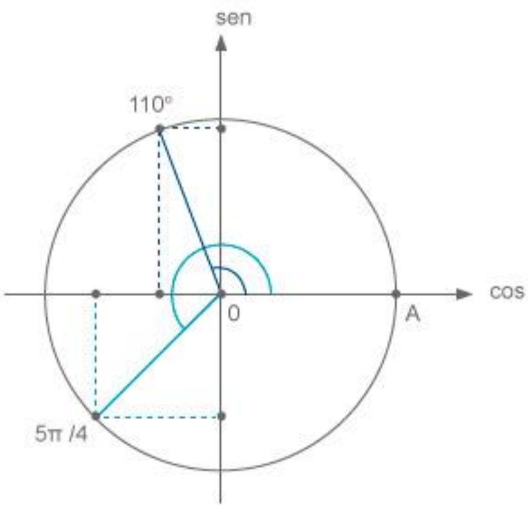
2. Determine o sinal do seno e do cosseno dos ângulos 110º e $\frac{5\pi}{4}$rad.

Solução

Observe a figura:

O ângulo de 110 º está no segundo quadrante. Logo, o seno é positivo e o cosseno, negativo.

O ângulo de $\frac{5\pi}{4}$rad está no terceiro quadrante e possui seno e cosseno negativos.



3. Determine o valor da expressão $\frac{\text{sen } 4\pi\text{-cos}\frac{2\pi}{3}}{\cos\pi}$:

Solução

Para facilitar a resolução, vamos representar estes ângulos no ciclo trigonométrico:

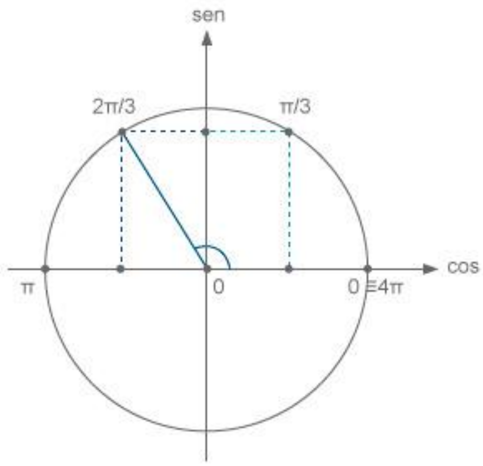
$$\text{sen } 4\pi = \text{sen } 0 = 0$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\pi = -1$$

Logo,

$$\frac{\text{sen}3\pi\text{-cos}\frac{2\pi}{3}}{\cos\pi} = \frac{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} - \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$$



4. Determine o valor do seno e do cosseno dos arcos simétricos a $\frac{\pi}{6}$ nos demais quadrantes:

Solução

O arco $\frac{\pi}{6}$ pertence ao primeiro quadrante e sabemos que $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vamos determinar os arcos simétricos a $\frac{\pi}{6}$:

Segundo quadrante: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Terceiro quadrante: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Quarto quadrante: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Já sabemos os sinais do seno e do cosseno nos quadrantes:

Quadrante	Seno	Cosseno
1º	+	+
2º	+	-
3º	-	-
4º	-	+

Logo, podemos concluir que:

$\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Determine o conjunto imagem da função $f(x) = 3 + \text{sen}\,x$:

Solução

Como $\text{sen}\,x \in [-1,1]$, então $-1 \leq \text{sen}\,x \leq 1$. Somando-se 3 a cada membro da inequação, temos:

$3 - 1 \leq 3 + \text{sen}\,x \leq 3 + 1$

Logo, $2 \leq 3 + \text{sen}\,x \leq 4$ e, portanto, o conjunto imagem é $[2, 4]$.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. Fundamentos da Matemática Elementar - Ensino Médio – 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.v.3

MELLO, José Luiz Pastore. Matemática: construção e significado – Ensino médio. São Paulo: Moderna, 2005.