MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Trigonometria

Seno e cosseno

Da soma e da diferença
dos arcos

Objetivo: Calcular seno e cosseno da soma e da diferença de arcos.

Situação problema

Sem utilizar uma calculadora ou tabelas trigonométricas, calcule $\cos 105º$.

Resposta: Sabemos que $\cos 45º = sen\, 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60º = \frac{1}{2}$ e $\text{sen } 60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Utilizando essas informações, podemos calcular:

$$\cos 105° = \cos(45° + 60°) = \cos 45°. \cos 60° - \text{sen } 45°. \text{sen } 60° \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 105° = \cos(45° + 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \cdot$$

Para resolver esse tipo de problema, precisamos conhecer as fórmulas que nos permitem calcular o seno e o cosseno da soma e da diferença de arcos.

A vantagem de conhecer tais fórmulas é que elas nos permitem calcular, sem precisarmos recorrer a uma tabela trigonométrica ou calculadora, o seno e o cosseno de ângulos obtidos pela soma ou subtração dos ângulos 30º, 45º e 60º. Lembre-se de que já conhecemos o seno e o cosseno destes ângulos e que as demais funções trigonométricas (tangente, cotangente, secante e cossecante) podem ser obtidas por relações envolvendo o seno e o cosseno.

Ângulo	Seno	Cosseno
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Cosseno da soma

Considere os pontos O (0, 0) e A (1, 0) e os seguintes arcos no ciclo trigonométrico, conforme figura:

• De origem A e extremidade P, tal que o ângulo AÔP = a.

• De origem A e extremidade Q, tal que o ângulo AÔQ = – b.

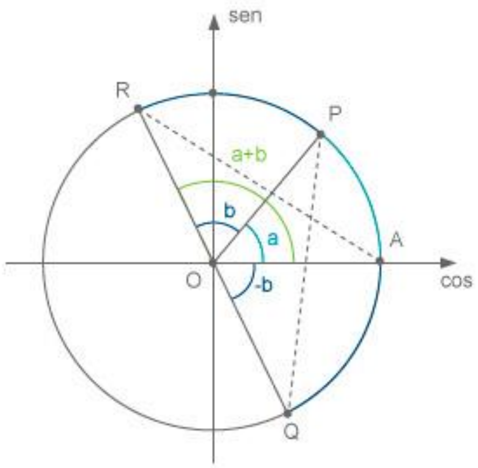
• De origem A e extremidade R, tal que o ângulo AÔR = a + b.

Conhecendo a, b, sen **a**, sen **b,** cos **a** e cos **b**, vamos determinar cos (a+b).

Lembrando que os eixos dos cossenos e dos senos são os eixos x e y, respectivamente, sabemos que as coordenadas dos P, Q e R são:

$\mathrm{P}(\cos \mathrm{a}, \operatorname{sen} \mathrm{a}),\ \ \mathrm{Q}(\cos(-\mathrm{b}), \operatorname{sen}(-\mathrm{b}))$ e $\mathrm{R}(\cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}), \operatorname{sen}(\mathrm{a}+\mathrm{b}))$. No entanto como $\cos(-\mathrm{b}) = \cos \mathrm{b}$ e $sen(-\mathrm{b}) = -\operatorname{sen} \mathrm{b}$, temos que:

$\mathrm{P}(\cos \mathrm{a}, \operatorname{sen} \mathrm{a}),\ \mathrm{Q}(\cos \mathrm{b}, -\operatorname{sen} \mathrm{b})$ e $\mathrm{R}\big(\cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}), \operatorname{sen}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\big)$.



Considere as cordas $\overline{\mathrm{AR}}$ e $\overline{\mathrm{PQ}}$. Utilizando a fórmula da distância entre dois pontos, podemos obter o comprimento dessas cordas em termos dos elementos já conhecidos:

- Corda $\overline{\mathrm{AR}}$:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{AR}}^2 = (\mathrm{x_R} - \mathrm{x_A})^2 + (\mathrm{y_R} - \mathrm{y_A})^2 = [\cos\,(\mathrm{a+b}) - 1]^2 + [\mathrm{sen}\,(\mathrm{a+b}) - 0]^2$$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{AR}}^2 = \underline{\cos^2(a+b)} - 2\cos(a+b) + 1 + \underline{\mathrm{sen}^2(a+b)}$$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{AR}}^2 = 1 - 2\cos(\mathrm{a+b}) + 1$$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{AR}}^2 = 2 - 2\cos(a+b)$$

DICA:

Quadrado da diferença: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Relação fundamental da trigonometria: $\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- Corda $\overline{\mathrm{PQ}}$:

$$d_{PQ}^2 = \left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2 = [\cos b - \cos a]^2 + [-\mathrm{sen}\, b - \mathrm{sen}\, a]^2$$

$$d_{PQ}^2 = \underline{\cos^2 b} - 2\cos a \,.\cos b + \underline{\cos^2 a} + \underline{\underline{\mathrm{sen}^2 b}} + 2\mathrm{sen}\, a.\mathrm{sen}\, b + \underline{\underline{\mathrm{sen}^2 a}}$$

$$d_{PQ}^2 = 1 - 2\cos a\,.\cos b + 1 + 2\mathrm{sen}\, a.\mathrm{sen}\, b$$

$$d_{PQ}^2 = 2 - 2\cos a\,.\cos b + 2\mathrm{sen}\, a.\mathrm{sen}\, b$$

Observe que os arcos PQ e AR têm a mesma medida. Assim, podemos concluir que as cordas $\overline{\mathrm{AR}}$ e $\overline{\mathrm{PQ}}$ possuem comprimento iguais.

Logo:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{AR}}^{2} = d_{PQ}^{2}$$

$$2 - 2\cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = 2 - 2\mathrm{cosa}\,.\,\mathrm{cosb} + 2\mathrm{sena}\,.\,\mathrm{senb}$$
$$-2\cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = -2\mathrm{cosa}\,.\,\mathrm{cosb} + 2\mathrm{sena}\,.\,\mathrm{senb}$$
$$\mathbf{cos\ (a+b)\ =\ cos\ a.\ cos\ b\ -\ sen\ a\ .\ sen\ b}$$

Cosseno da diferença

Aplicando a fórmula do cosseno da soma em $\cos(\mathrm{a}+(-\mathrm{b})) = \cos(\mathrm{a}-\mathrm{b})$, obtemos: $\cos(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \cos(\mathrm{a}+(-\mathrm{b})) = \cos \mathrm{a}\,.\cos(-\mathrm{b}) - \mathrm{sen}\,\mathrm{a}\,.\,\mathrm{sen}(-\mathrm{b})$.

No entanto, sabemos que $\cos(-\mathrm{b}) = \cos \mathrm{b}$ e $\mathrm{sen}(-\mathrm{b}) = \mathrm{sen}\ \mathrm{b}$.

Logo:

$$\cos(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \cos \mathrm{a}\,.\cos \mathrm{b} - \mathrm{sena}\ .\,(-\mathrm{sen}\ \mathrm{b})$$
$$\cos(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \cos \mathrm{a}\,.\cos \mathrm{b} + \mathrm{sen}\ \mathrm{a}\ .\,\mathrm{sen}\ \mathrm{b}$$

Seno da soma

Sabemos que $\mathrm{sen}\ \mathrm{x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, pois são arcos complementares. Fazendo $x = a + b$ e aplicando a fórmula do cosseno da diferença, obtemos:

$$\mathrm{sen}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - (\mathrm{a}+\mathrm{b})\right) = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a} - \mathrm{b}\right) = \mathrm{Cos}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) - \mathrm{b}\right)$$

$\text{sen}(\text{a} + \text{b}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{a}\right).\cos \text{b} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{a}\right).\text{sen b}$

No entanto, como $\frac{\pi}{2} - a$ e a são arcos complementares, temos:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen}\ a$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$

Logo:

$\text{sen (a + b)} = \text{sen a . cos b + cos a . sen b}$

$\text{sen (a + b)} = \text{sen a . cos b} - \text{sen b . cos a}$

Seno da diferença

Aplicando a fórmula do seno da soma em $\text{sen}(\text{a} + (-\text{b})) = \text{sen}(\text{a} - \text{b})$, obtemos:

$\text{sen}(\text{a} - \text{b}) = \text{sen}(\text{a} + (-\text{b})) = \text{sen a}.\cos(-\text{b}) + \text{sen}(-\text{b}).\cos \text{a}.$

EXEMPLOS

1) Determine cos 75º.

Solução

Podemos escrever 75º = 30º + 45º. Aplicando a fórmula do cosseno da soma: $\cos(a + b) = \cos a \,.\cos b - \text{sen}\, a \,.\text{sen}\, b$, onde a= 30º e b=45º, temos: $\cos 75^0 = \cos(30^0 + 45^0) = \cos 30^0 .\cos 45^0 - \text{sen}\ 30^0.\text{sen}\ 45^0$.

Sabemos que $\cos 45^0 = sen\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\ 30^0 = \frac{1}{2}$.

Logo, $\cos 75^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2) Determine cos 15º:

Solução

Podemos escrever 15º = 45º – 30º. Aplicando a fórmula do cosseno da diferença: $\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b$, onde $a = 45°$ e $b = 30°$, temos:

cos 15º = cos(45º - 30º) = cos45º .cos30º + sen 45º . sen30º

Sabemos que cos 45º = sen 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\ 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e sen 30º = $\frac{1}{2}$.

Logo, $\cos 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3) Calcule sen 105º.

Solução

Podemos escrever 105º = 60º + 45º. Aplicando a fórmula do seno da soma: $\mathrm{sen}\ (\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \mathrm{sen\ a} . \cos \mathrm{b} + \mathrm{sen\ b} . \cos \mathrm{a}$, onde a=60º e b=45º, temos:

$\mathrm{sen}105^0 = \mathrm{sen}(60^0 + 45^0) = \mathrm{sen}60^0 . \cos 45^0 + \mathrm{sen}45^0 . \cos 60^0$

Sabemos que $\cos 45^0 = \mathrm{sen}\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{sen}\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

Logo, $\mathrm{sen}\ 105^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

4) Calcule sen 15º.

Solução

Podemos escrever 15º = 60º - 45º. Aplicando a fórmula do seno da diferença: $\text{sen}(\text{a} - \text{b}) = \text{sen a} \,.\, \cos \text{b} - \text{sen b}.\cos \text{a}$, onde a=60º e b=45º, temos: $\text{sen } 15° = \text{sen } (60° - 45°) \; = \; \text{sen } 60° \,.\, \cos 45° - \text{sen } 45° \,.\, \cos 60°.$

Sabemos que $\cos 45° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \; e \cos 60° = \frac{1}{2}.$

Logo, $\text{sen } 115° = \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

5) Se x e y são arcos do 1º e 4º quadrantes, respectivamente, tais que:

$\cos \text{x} = \frac{3}{5}$ e $\cos \text{y} = \frac{12}{13}$, calcule $\cos (\text{x} + \text{y})$.

Solução

Aplicando a fórmula do cosseno da soma:

$\cos (\text{a} + \text{b}) = \cos \text{a} \,.\, \cos \text{b} - \text{sen a} \;.\, \text{sen b}$, onde a=x e b=y, temos:
$\cos (\text{x} + \text{y}) = \cos \text{x} \,.\, \cos \text{y} \; - \; \text{sen x} \,.\, \text{sen y}.$

Observe que precisamos dos valores de sen x e sen y. Tais valores podem ser obtidos pela relação fundamental da trigonometria:

$\text{sen}^2 \alpha + cos \; \alpha \; = \; 1 \; \Rightarrow \; \text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$:

$$\text{sen}^2 \, x \; = \; 1 \; - \; \cos^2 \, x \; = \; 1 \; - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25 - 9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow sen \; x \; \pm \frac{4}{5}$$

Como x pertence ao primeiro quadrante, então: $sen\,x > 0$. Logo: $sen\,x = -\frac{4}{5}$.

Utilizando esses valores, temos:

$$\cos\,(x+y) = \frac{3}{5}.\frac{12}{13} - \frac{4}{5}.\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65}.$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. Fundamentos da Matemática Elementar – Ensino Médio. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. V.3.

MELLO, José Luiz Pastore. Matemática: construção e significado – Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2005.