MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Trigonometria

Inequações trigonométricas

Objetivo: Resolver inequações trigonométricas no conjunto dos números reais.

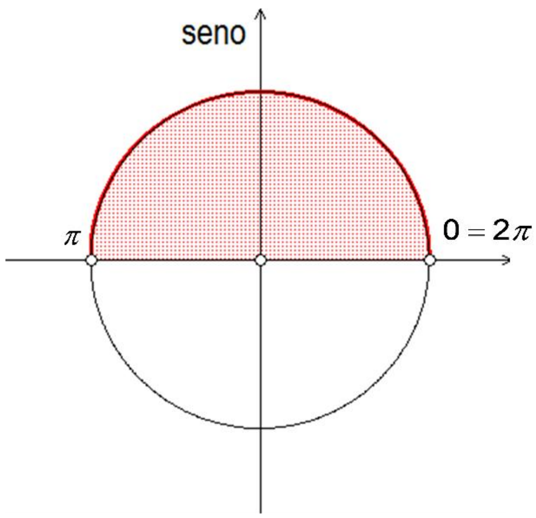
Situação-problema

Em certa cidade litorânea, a altura h da maré, medida em metros, em função do tempo t, é dada pela função $h(t) = 2 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}.t\right)$, em que o tempo é medido em horas, a partir da meia-noite. Em quais horários a altura da maré é superior a 2 metros?

Solução

Como a altura da maré deve ser maior que 2 metros, então $h(t) > 2$. Assim, temos: $2 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}.t\right) > 2 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}.t\right) > 0.$

No intervalo $[0, 2\pi]$, sabemos que os arcos cujo seno é igual zero são: 0, π e 2π. Observando a figura, vemos que os arcos para os quais o seno é maior que zero são aqueles que estão entre 0 e π. Portanto, temos: $0 < \frac{\pi}{6}.t < \pi.$



Considerando os demais arcos obtidos completando-se *k* voltas no sentido horário ou anti-horário no ciclo trigonométrico, concluímos que:

$$2k\pi < \frac{\pi}{6}\,.\,t < \pi + 2k\pi \Rightarrow \frac{6}{\pi}\,.\,(2k\pi) < t < \frac{6}{\pi}\,.\,(\pi + 2k\pi) \Rightarrow 12k < t < 6 + 12k, k \in \mathrm{Z}$$

Como t é medido em horas, devemos atribuir valores para *k*, de modo que $t \in [0, 24]$. Assim, temos:

$k = 0 \Rightarrow 12\,.\,0 < t < 6 + 12\,.\,0 \Rightarrow 0 < t < 6$

$k = 0 \Rightarrow 12\,.\,1 < t < 6 + 12\,.\,1 \Rightarrow 12 < t < 18$

Dessa forma, concluímos que a altura da maré é superior a 2 metros entre 0h e 6h e entre 12h e 18h. Para resolver este tipo de problema, precisamos saber resolver inequações trigonométricas no conjunto dos números reais.

Inequações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é toda inequação em que aparecem funções trigonométricas com arco de medida desconhecida.

IMPORTANTE:

Para que uma inequação seja trigonométrica, é necessário que a incógnita seja a medida de um arco. Dessa forma, as inequações cos $\frac{\pi}{3} - 2x < 1$ e x sen $\frac{\pi}{2} > 4$

As inequações trigonométricas fundamentais com incógnita x podem ser classificadas em três tipos distintos e todas as demais devem ser reduzidas a um deles:

1) sen $x > a$, sen $x < a$, sen $x \geq a$ ou sen $x \leq a$, a é constante.

2) cos $x > a$, cos $x < a$, cos $x \geq a$ ou cos $x \leq a$, a é constante.

3) tg $x > a$, tg $x < a$, tg $x \geq a$ ou tg $x \leq a$, a é constante

De um modo geral, para resolver inequações trigonométricas, resolvemos, primeiramente, a equação associada a cada tipo, sen $x = a$, cos $x = a$ ou tg $x = a$. Em seguida, resolvemos a inequação, consideramos os demais arcos obtidos completando-se *k* voltas no sentido horário ou anti-horário no ciclo trigonométrico. Lembre-se que cada volta equivale a um arco de 2π. Portanto, para representarmos *k* voltas, escrevemos simplesmente 2*k*π, em que *k* positivo indica voltas no sentido anti-horário e *k* negativo, no sentido horário. Dessa forma, temos $k \in Z$.

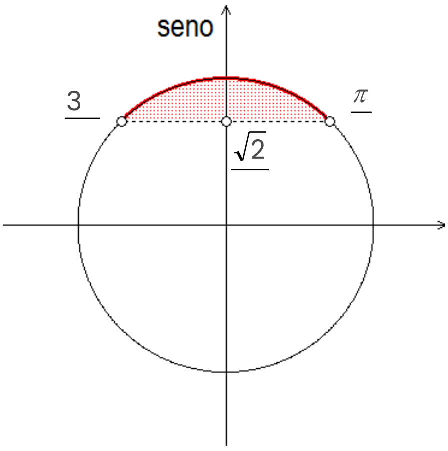
Inequações trigonométricas do primeiro tipo

EXEMPLOS

1) Resolva a inequação $\text{sen}\ x > \frac{\sqrt{2}}{2}$:

Resolução

Sabemos que os ângulos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$ possuem seno igual a $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Observando a figura, vemos que os valores de x para os quais $\text{sen}x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ são aqueles que estão entre $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, ou seja, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.



Logo, considerando os demais ângulos obtidos completando-se *k* voltas no sentido horário ou anti-horário, podemos concluir que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathrm{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \mathrm{x} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}$$

2) Resolva a inequação $\mathrm{sen}\ x > 2$:

Resolução

Sabemos que o seno de um ângulo varia entre –1 e 1. Logo, não existe nenhum ângulo cujo seno seja maior que dois. Portanto, a inequação não tem solução e o conjunto solução é vazio, S = { }.

IMPORTANTE:

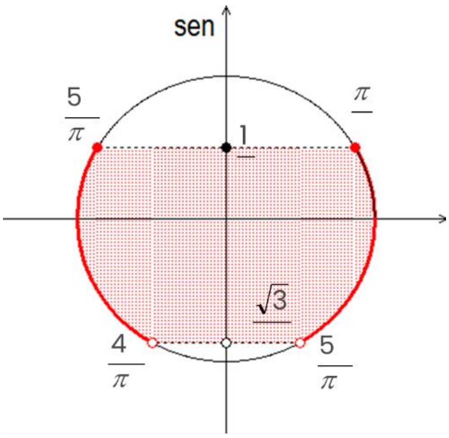
É importante observar que nem toda inequação trigonométrica tem solução. Devemos lembrar que o seno e o cosseno de um arco variam entre -1 e 1. Deste modo, é impossível obter valores menores que -1 e maiores que 1.

3) Resolva a inequação $-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen x} \leq \frac{1}{2}$:

Resolução

Sabemos que os ângulos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ possuem seno igual a $\frac{1}{2}$ e que os ângulos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ possuem seno igual a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Observando a figura, vemos que os valores de x para os quais $-\frac{\sqrt{3}}{2} < sen x \leq \frac{1}{2}$ são aqueles que estão entre 0 (inclusive) e $\frac{\pi}{6}$ (inclusive), ou entre $\frac{5\pi}{6}$ (inclusive) e $\frac{4\pi}{3}$, ou entre $\frac{5\pi}{3}$ e 2π (inclusive).

Note que os ângulos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ devem ser incluídos, pois nos interessa a igualdade $sen x = \frac{1}{2}$. Além disso, também devemos incluir os ângulos 0 e 2π, pois $\text{sen}0 = \text{sen}2\pi = 0$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 < \frac{1}{2}$.



DICA:

Observe que para indicar o arco de $\frac{5\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{6}$, é necessário separá-lo em dois: de 0 a $\frac{\pi}{6}$, e de $\frac{5\pi}{3}$ a 2π, uma vez $\frac{5\pi}{3} > \frac{\pi}{6}$. No entanto, poderíamos também tê-lo indicado, utilizando o ângulo negativo $-\frac{\pi}{3}$, escrevendo assim $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}$

Logo, considerando os demais ângulos obtidos completando-se *k* voltas no sentido horário ou anti-horário, podemos concluir que o conjunto solução é:

$S = \{x \in R \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ou

$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x \leq 2k\pi + 2k\pi, k \in Z$

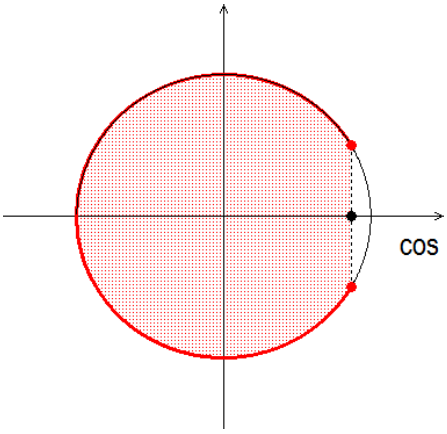
Inequações trigonométricas do segundo tipo

EXEMPLOS

1) Resolva a inequação $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução

Sabemos que os ângulos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ possuem o cosseno igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Observando a figura, vemos que os valores de *x* para os quais $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ são aqueles que estão entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$, incluindo estes dois valores, já que também nos interessa a igualdade $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, temos que: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$.



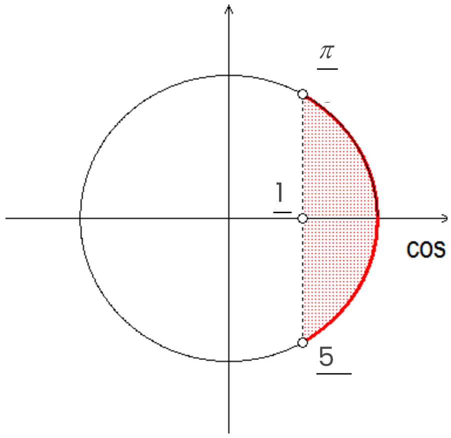
Logo, considerando os demais ângulos obtidos completando-se *k* voltas no sentido horário ou anti-horário, podemos concluir que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in R \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\right\}$$

2) Resolva a inequação $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$

Resolução

Sabemos que os ângulos $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ possuem o cosseno igual a $\frac{1}{2}$. Observando a figura, vemos que os arcos para os quais o cosseno são maiores que $\frac{1}{2}$ são aqueles que estão entre 0 (inclusive) e $\frac{\pi}{3}$, e entre $\frac{5\pi}{3}$ e 2π (inclusive). Note que devemos incluir os arcos 0 e 2π, pois $\cos 0 = \cos 2\pi = 1 > \frac{1}{2}$. Lembre-se que devemos percorrer o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário. Assim, temos que, , $0 \leq 2\mathrm{x} < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < 2\mathrm{x} \leq 2\pi$.



Logo, considerando os demais ângulos obtidos completando-se *k* voltas nosentido horário ou anti-horário, podemos concluir:

$$0 + 2\mathrm{k}\pi \leq 2\mathrm{x} < \frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi < 2\mathrm{x} \leq 2\pi + 2\mathrm{k}\pi$$

Como queremos saber os valores de x que satisfaçam a desigualdade, devemos dividir a inequação por 2. Dessa forma, obtemos:

$$\frac{2k\pi}{2} \leq \mathrm{x} < \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2} \text{ ou } \frac{\frac{5\pi}{3}+2\mathrm{k}\pi}{2} < \mathrm{x} \leq \frac{2\pi+2\mathrm{k}\pi}{2}$$

$$\mathrm{k}\pi \leq \mathrm{x} < \frac{\pi}{6} + \mathrm{k}\pi \text{ ou } \frac{5k}{6} + \mathrm{k}\pi < \mathrm{x} \leq \pi + \mathrm{k}\pi$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R} \mid \mathrm{k}\pi \leq \mathrm{x} < \frac{\pi}{6} + \mathrm{k}\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + \mathrm{k}\pi < \mathrm{x} \leq \pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$$

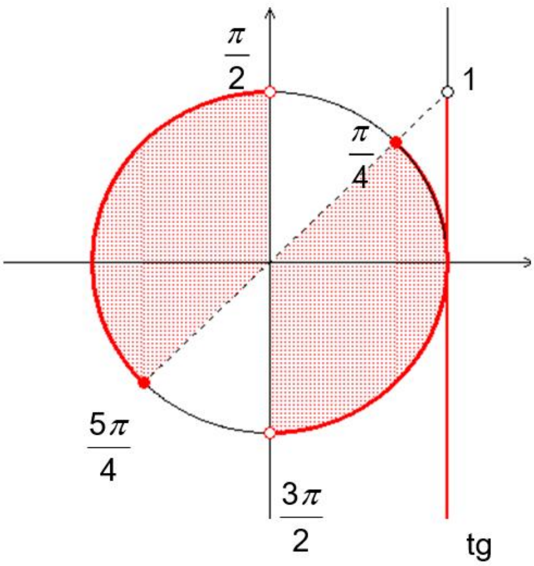
Inequações trigonométricas do terceiro tipo

EXEMPLOS

1) Resolva a inequação tg x ≤ 1:

Resolução

Sabemos que os ângulos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$ possuem a tangente igual a 1. Observando a figura, vemos que os valores de x para os quais tg x ≤ 1 são aqueles que estão entre 0 (inclusive) e $\frac{\pi}{4}$ (inclusive), entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{4}$ (inclusive), e entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π (inclusive). Observe que devemos incluir os ângulos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, pois a tangente não está definida nestes ângulos. Assim, temos que, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$.



Logo, considerando os demais ângulos obtidos completando-se k voltas no sentido horário ou anti-horário, podemos concluir que:

$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou

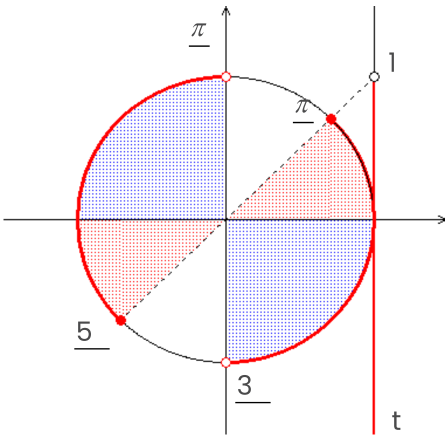
$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$

Note na figura, que estas três condições podem ser reescritas em apenas duas, considerando que tg x = tg (x + kπ). Assim, obtemos:

$k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi$

Portanto, o conjunto solução é:

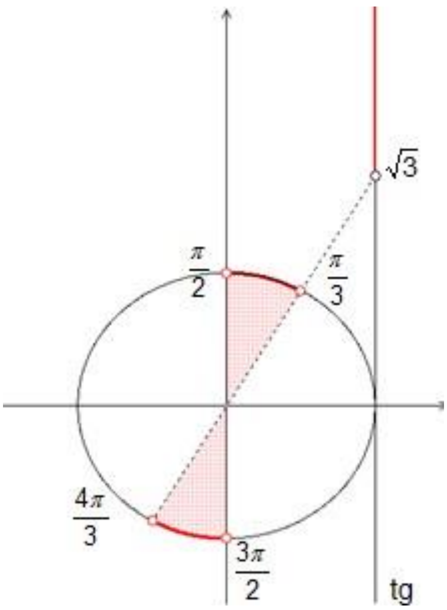
$S = \{x \in R \mid k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi, x \in Z\}$.



2) Resolva a inequação tg $\left(\frac{\pi}{6}x\right) > \sqrt{3}$:

Resolução

Sabemos que os ângulos $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ possuem a tangente igual a $\sqrt{3}$. Observando a figura, vemos que os ângulos para os quais a tangente é menor que $\sqrt{3}$ são aqueles que estão entre $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, entre $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{3\pi}{3}$. Lembre-se que devemos percorrer o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário e que a tangente não está definida para os ângulos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Assim, temos que $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{4\pi}{3} < \frac{\pi}{6}x < \frac{3\pi}{2}$.



Logo, considerando os demais ângulos obtidos completando-se *k* voltas no sentido horário ou anti-horário, podemos concluir que:

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \frac{\pi}{6}x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < \frac{\pi}{6}x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Note que é possível reunirmos estas duas condições, escrevendo simplesmente que: $\frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{\pi}{6}x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Como queremos encontrar os valores de x de satisfaçam esta inequação, então devemos multiplicá-la por $\frac{6}{\pi}$ de modo a isolarmos x: $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)\frac{6}{\pi} < x < \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{6}{\pi} \Rightarrow 2 + 6k < x < 3 + 6k.$

Portanto, o conjunto solução é: $S = \{x \in R \mid 2 + 6k < x < 3 + 6k, k \in Z\}$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar* – Ensino Médio. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. v. 3.

MELLO, José Luiz Pastore. *Matemática*: construção e significado – Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2005.