Matemática
UNINOVE

Função logarítmica

definição e representação gráfica

Objetivo: Ampliar os conhecimentos sobre a função logarítmica e sobre a construção do seu gráfico.

Módulo II

Situação-problema

Um pai resolveu depositar suas economias em uma caderneta de poupança para ajudar seu filho com os estudos do ensino superior. Ele conseguiu uma conta que rende 2% ao mês, em capitalização composta, isto é, o juro incide mês a mês de acordo com o somatório acumulativo do capital com o rendimento mensal, ou seja, prática do juro sobre juro. Em quantos meses o capital investido irá triplicar? Como estabelecer uma fórmula para saber em quantos meses o capital investido irá multiplicar x vezes?

Resolução: Suponha que o capital inicial do pai era C, então:

No primeiro mês: $C + C \times 2\% = C + 0{,}02C = C\ (1 + 0{,}02) = C\ (1{,}02)$

No segundo mês: $C\ (1{,}02) + 0{,}02\ (C\ (1{,}02)) = C\ (1{,}02)\ (1 + 0{,}02) = C\ (1{,}02)^2$

No final de n meses, teremos: $C\ (1{,}02)^n$

Para triplicar o capital, precisamos de:

$C\ (1{,}02)^n = 3C$

$(1{,}02)^n = 3$ (dividir os dois lados da igualdade por C)

Para determinar o valor de n (número d meses), utilizam-se as propriedadesdos logaritmos (visto anteriormente).

$\log_{1,02} (1{,}02)^n = \log_{1,02} 3$, assim: $n = \log_{1,02} 3$ para triplicar o capital.

E para multiplicar x vezes?

Basta fazer e para qualquer valor de x, positivo, temos o número de meses necessários para multiplicar x vezes o capital investido.

A fórmula $n = \log_{1,02} x$ é um caso particular da função logarítmica, que

definiremos, agora:

Definição: Dado um número real **a**, com a > 0 e a ≠ 1, chamamos de função logarítmica de base a, a função f: $R^*_+ \rightarrow R$, dada pela lei f (x) = $\log_a$ x.

IMPORTANTE:

R^*_+ = conjunto dos números reais positivos, sem o número zero.

EXEMPLO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

a) f (x) = $\log_2$ x

b) y = $\log_{\frac{1}{2}}$ x

c) f (x) = $\log_{10}$ x

Gráfico da função logarítmica

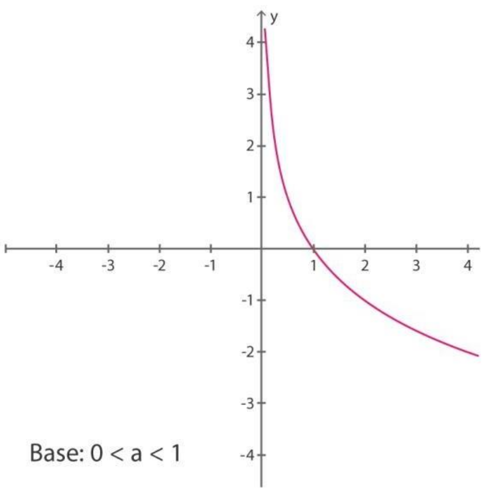
DICA:

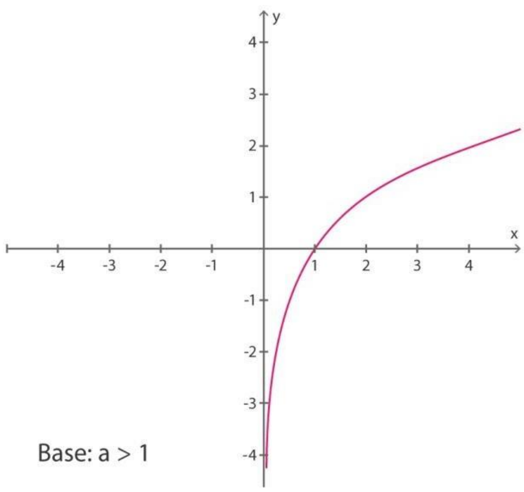
A função logarítmica é inversa à função exponencial.
Seu gráfico é simétrico à função exponencial em relação à bissetriz.

O gráfico da função logarítmica tem as seguintes características:

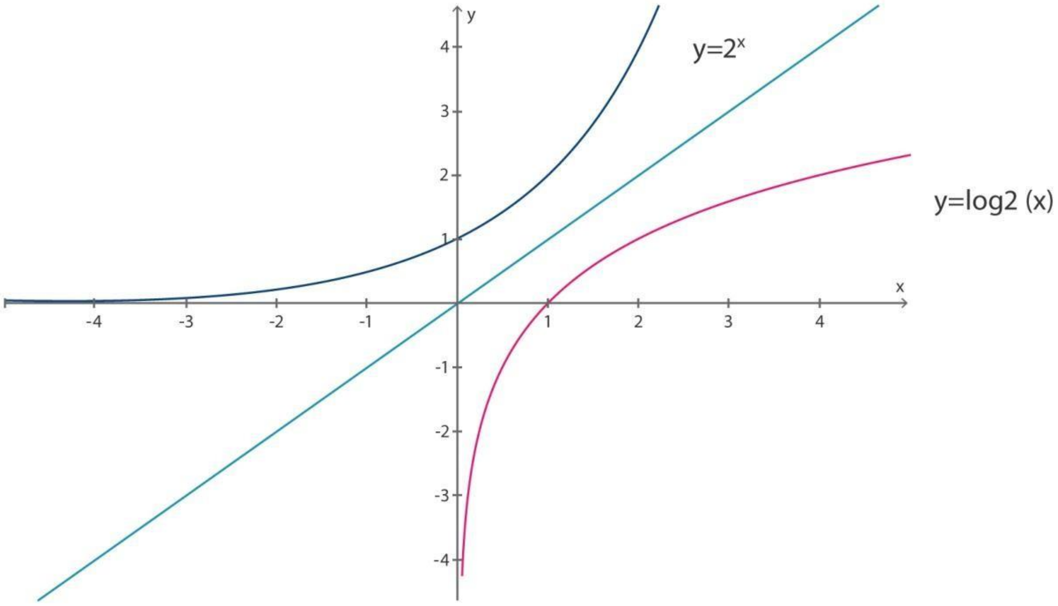
- É crescente quando a base é um número maior que 1 e é decrescente quando a base é um número entre 0 e 1
- A curva do gráfico está toda à direita do eixo y, pois a função só admite valores para x maiores que 0.
- Corta o eixo x, na abscissa 1, pois, qualquer que seja a base **a**.

Veja a seguir o gráfico da função logarítmica quando a base é um número maior que 1 e quando a base é um número entre 0 e 1.





Veja agora o gráfico da função e da função f (x) = $\log_2 x$ e da função f (x) = 2^x, que são inversas e simétricas:



Exercícios resolvidos

1) Dada a função f (x) = $\log_2 x - 3$, determine f (1) e f (4), isto é, o valor da função para x = 1 e x = 3.

Resolução

$f(1) = \log_2 1 - 3 = -3$

$f(4) = \log_2 4 - 3 = -1$

2) Dados os números $\log_{0,2} 5$ e $\log_{0,2} \sqrt{3}$, qual deles tem o maior valor?

Resolução

Como as funções são decrescentes, pois a base está entre 0 e 1, então quanto maior o valor de x, menor o valor da função. Assim, $\log_{0,2} \sqrt{3}$ é maior que $\log_{0,2} 5$, pois $\sqrt{3}$ é menor que 5.

3) Uma pessoa aplicou um capital de R$ 500,00 em um banco que paga juros mensais de 3,5% ao mês, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante (capital final) será de R$ 3.500,00?

Resolução

Para o cálculo dos juros compostos, utilizamos a função: ***$M = C * (1+i)^t$***.

De acordo com a situação-problema, temos:

M (montante) = 3500

C (capital) = 500

i (taxa) = 3,5% = 0,035

t = ?

$M= C * (1 + i)^t$

$3500 = 500 * (1 + 0,035)^t$

$3500/500 = 1{,}035^t$

$1{,}035^t = 7$

Aplicando logaritmo de base 10:

$\log 1{,}035^t = \log 7$

$t (\log 1{,}035) = \log 7$ (utilize a **tecla log** da calculadora científica)

$t (0{,}0149) = 0{,}8451$

$t = 0{,}8451 / 0{,}0149$

$t = 56{,}7$

O montante de R$3.500,00 será originado após 56 de meses de aplicação.

4) Em quanto tempo, 1 kg de certa substância radioativa, que se desintegra à taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 g, sabendo que a taxa de desintegração obedece a seguinte expressão: ***$Q = Q_0 * e^{-rt}$***, cujo **Q** é a massa da substância,**r** é a taxa e **t** é o tempo em anos?

Resolução

$Q = Q_0\ (e^{-rt})$

$200 = 1000\ (e^{-0,02t})$

$200/1000 = e^{-0,02t}$

$1/5 = e^{-0,02t}$

$-0,02t = \log_e 1/5$

$-0,02t = \log_e 5^{-1}$

$-0,02t = -\log_e 5$

$-0,02t = -\ln 5 \times (-1)$

$0,02t = \ln 5$

$t = \ln 5\ /\ 0,02$

$t = 1,6094\ /\ 0,02$

$t = 80,47$

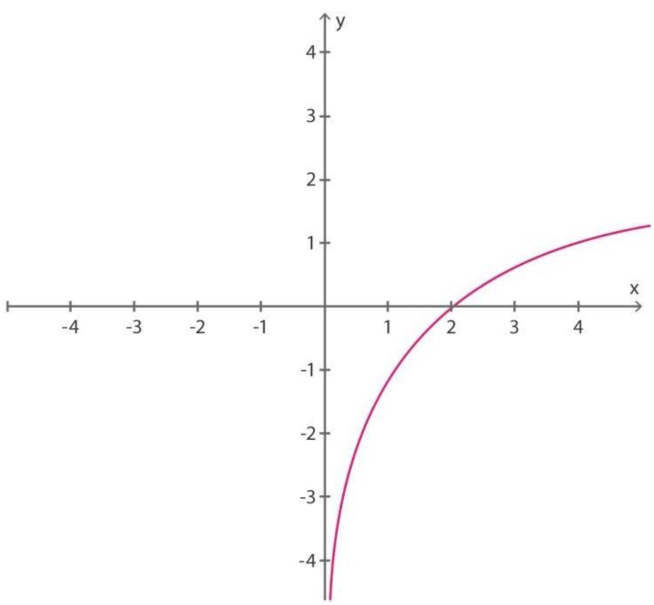
A substância levará, aproximadamente, 81 anos para se reduzir a 200 g.

5) Construa o gráfico da função $f\,(x) = \log_2 x - 1$.

Resolução

Construa uma tabela com valores em x e seus respectivos valores da função:

X	$f\,(x) = \log_2 x - 1$
1/8	$f\,(1/8x) = \log_2 1/8 - 1 = -3 - 1 = -4$
1/4	$f\,(x1/4) = \log_2 1/4 - 1 = -2 - 1 = -3$
1/2	$f\,(1/2) = \log_2 1/2 - 1 = -1 - 1 = -2$
1	$f\,(1) = \log_2 1 - 1 = 0 - 1 = -1$
2	$f\,(2) = \log_2 2 - 1 = 1 - 1 = 0$
4	$f\,(4) = \log_2 4 - 1 = 2 - 1 = 1$



Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – Contexto e Aplicações*. Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

IEZZI, Gelson *et al*. *Matemática – Ciência e Aplicações*. Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

KIYUKAWA, Rokusaburo *et al*. *Os Elos da Matemática*. Ensino Médio, 1º ano. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.