

**MATEMÁTICA**

**UNINOVE**

**Módulo – III**

# Geometria

## Espacial Métrica

### Sólidos geométricos

**Objetivo:** Identificar, dentre as figuras espaciais, os poliedros e os corpos redondos; resolver situações – problema que os envolvam, levando em consideração a contextualização e a conexão com outros temas matemáticos; reconhecer, dentre os poliedros, os prismas, as pirâmides e os troncos de pirâmides, bem como suas propriedades e elementos.

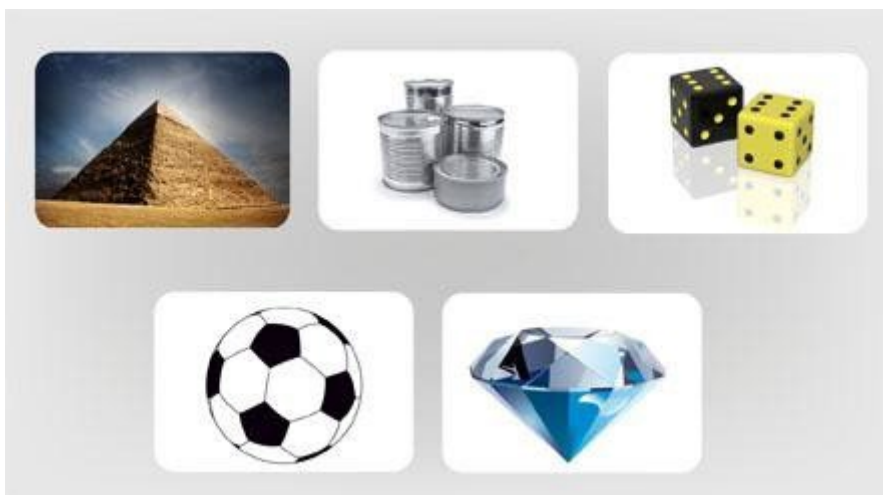


Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

**Pense no meio ambiente:** imprima apenas se necessário.

## Introdução

O estudo da Geometria Espacial é importante, pois as figuras espaciais não são objetos de interesse apenas da Matemática. Elas fazem parte do mundo e de tudo o que está a nossa volta, estando presentes no nosso dia a dia. É inegável que ele proporciona ao homem melhor “desempenho geométrico” em oficinas mecânicas, consultórios de dentistas, pranchetas de engenheiros, decisões de empreiteiros, observações de astrônomos ou, mesmo, assentamento de um tijolo pelo pedreiro. Por isso, muitas áreas do conhecimento, como a Geografia, a Arquitetura, a Física, a Odontologia, a Biologia, a Química, a Engenharia, têm-se interessado por elas.

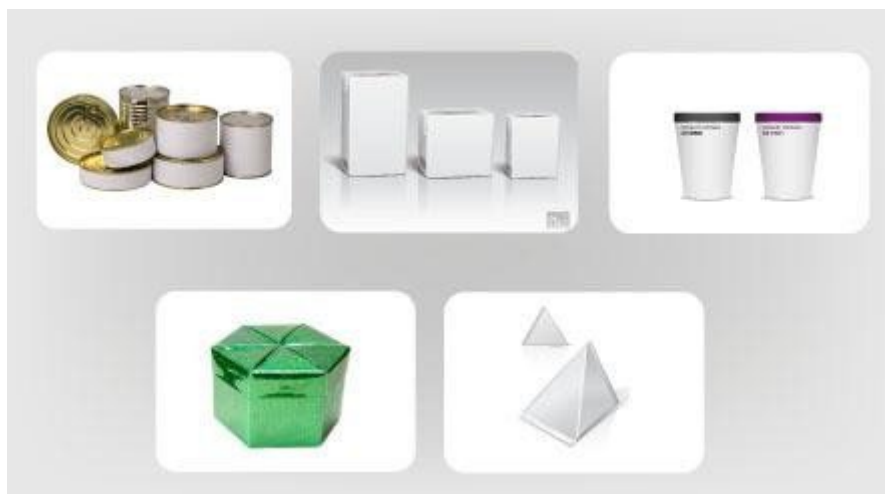


Normalmente, não temos a inclinação nem a oportunidade de sermos observadores. Na verdade, muitos aspectos da Geometria em situações do nosso dia a dia nos escapam. Observemos, por exemplo, as embalagens da caixa de leite, pasta de dente, sabão em pó, remédios etc., todas elas são modelos de sólidos geométricos.

Para começarmos nosso estudo do espaço tridimensional, vamos considerar uma dessas situações:

### Atividade 1: manipulando sólidos geométricos

Procure uma grande variedade de embalagens (vários modelos de sólidos) de vários formatos diferentes. Recolha tudo e coloque sobre uma mesa.



Observe que as figuras geométricas que temos sobre a mesa são não planas. Separe as figuras que “rolam” (naturalmente, não vale empurrar, ok?!) das que “não rolam” e observe que as figuras que “não rolam” têm todas as faces planas.

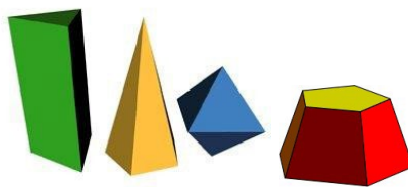
Os sólidos que “não rolam” que você identificou, exemplificam uma importante classe de figuras, chamadas *poliedros*. Já os do outro tipo, são chamados de **corpos redondos**.

Das embalagens que você procurou, quais são poliedros e quais são corpos redondos? Você saberia dar nomes a esses sólidos? Que formas geométricas (ou seja, quais polígonos) estão presentes nas faces de cada sólido?

### Poliedros

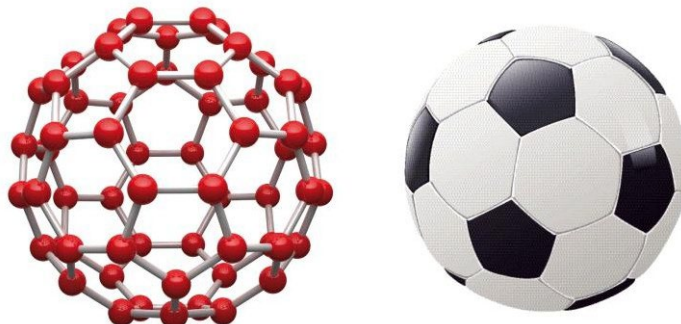
Agora que você já sabe distinguir um poliedro de um corpo redondo, vamos introduzir o conceito de poliedros, pois são figuras que despertam o interesse do homem há muitos séculos.

Na atividade 1, você procurou diversas embalagens com formatos diferentes. Pegue somente os poliedros, identifique e separe os sólidos que você julga possuírem características semelhantes. Você deve ter quatro grupos de sólidos: um prisma, uma pirâmide, um poliedro regular e um tronco de pirâmide.

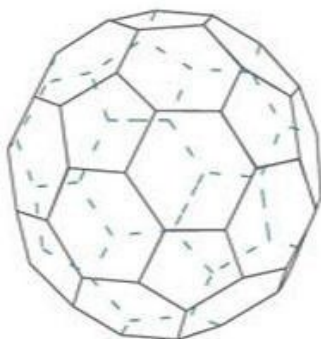


## Definição de poliedro

Observe as figuras a seguir:



A figura à esquerda trata-se de uma molécula de carbono. Sua estrutura é a mesma da bola de futebol. Ambas têm a forma de um poliedro descoberto por Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), formado por 12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares:



Você consegue determinar, pelas figuras, o número de átomos de carbono da molécula (ou o número de vértices do poliedro) e o número de ligações entre eles (ou o número de arestas do poliedro)?

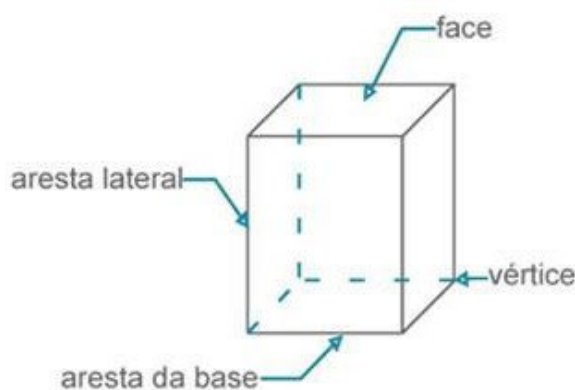
**Resposta:** 60 átomos e 90 ligações

Sabemos que um polígono é uma figura plana formada por vários ângulos. Em grego, “*poli*” dá a ideia de vários e “*gonos*” a de ângulo.

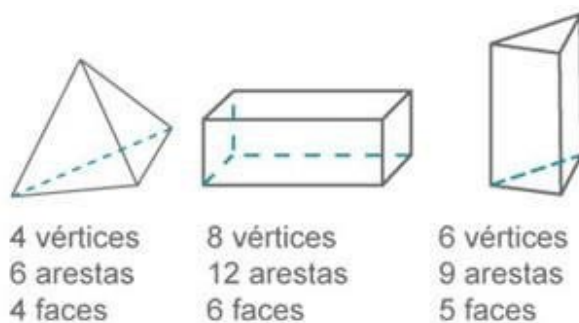
Um **poliedro** é uma figura espacial formada por várias faces (edro, do Grego, *hedra*, que se refere a face).

Dessa forma, poliedro é um conjunto finito de polígonos planos, em que cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

- Cada um desses polígonos representa uma **face** do poliedro.
- Cada lado comum a duas faces chama-se **aresta** do poliedro.
- Cada vértice de uma face chama-se **vértice** do poliedro.
- À figura composta por um vértice  $V$  e pelas arestas com extremidade  $V$ , dá-se o nome de **ângulo poliédrico**.



**Exemplos:**



**Refleta:**

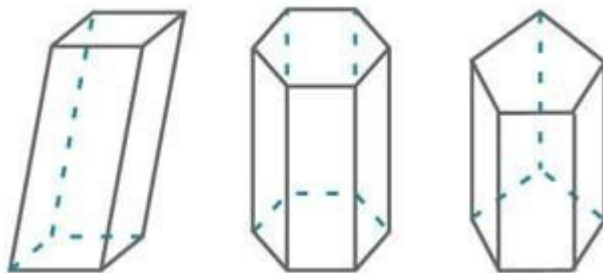
Existem poliedros com 2 vértices? E com 3?

Existem poliedros com 1, 2 ou 3 faces?

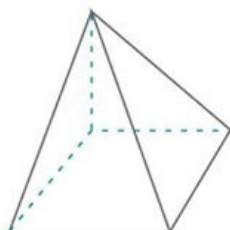
**Respostas:** Não existe, o número mínimo de vértices e de faces de um poliedro é quatro.

Dentre os poliedros, temos:

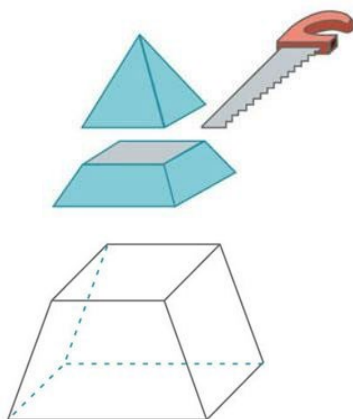
Os **prismas**, que possuem duas faces congruentes, contidas em planos paralelos distintos; a essas, chamamos **bases** do prisma. As demais faces, chamadas **faces laterais**, têm todas 4 arestas cada (paralelogramos).



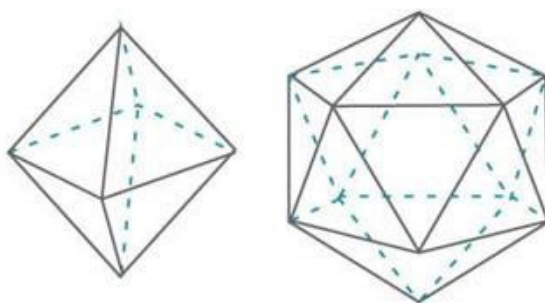
As **pirâmides**, que possuem uma face (**base**) contida em um plano e apenas um vértice (chamado vértice da pirâmide) fora desse plano. As demais faces (**laterais**) têm todas 3 arestas cada, ou seja, são os triângulos determinados, cada um deles, por um lado da base e o vértice da pirâmide.



Os **troncos de pirâmide**, que são obtidos ao fazermos um corte em uma pirâmide em paralelo a sua base.



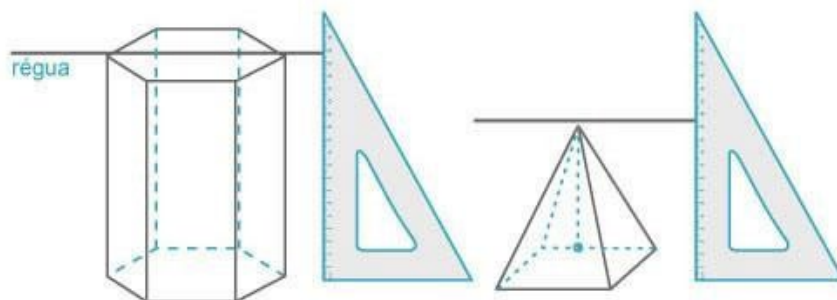
E os poliedros que não são nem prismas, nem pirâmides:





**Exercícios resolvidos:****Alturas de prismas e pirâmides:**

Tendo em mãos uma coleção de prismas e de pirâmides, temos o seguinte problema: queremos colocá-los numa prateleira de 5 cm de altura de uma estante. Como saber quais vão caber, sem efetivamente colocá-los? Meça as alturas de cada poliedro da coleção usando régua e esquadro como mostrado nos exemplos a seguir e complete:



1. A altura de um prisma é:
2. A altura de uma pirâmide é:

**Respostas:**

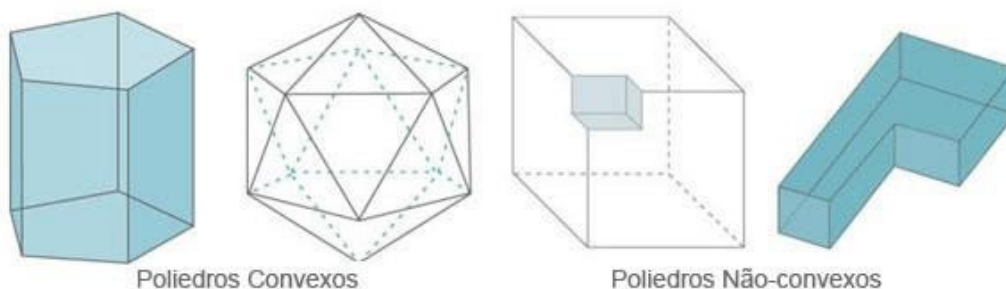
1. A distância entre os planos das bases.
2. A distância entre o vértice da pirâmide e o plano da base.

## Poliedro convexo e poliedro não convexo

Um poliedro é **convexo** se o plano de cada face o deixa num mesmo semi- espaço determinado pelo plano. Se existir pelo menos uma face que não o deixa no mesmo semi-espaço determinado pelo plano que a contém, o poliedro é **não convexo**.

Informalmente, os poliedros convexos são aqueles que não apresentam reentrâncias ou “furos” em sua superfície.

Exemplos:



## Dando nome aos poliedros

Da mesma maneira que demos nomes aos polígonos levando em conta o número de lados ou de ângulos, damos nomes aos poliedros, considerando o seu número de faces.

O número de faces também é designado por uma palavra de origem grega, que é justaposta ao sufixo “-edro”. Assim, um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro (tetra significa quatro), um poliedro de 5 faces

chama-se pentaedro, um poliedro de 6 faces chama-se hexaedro, e assim por diante.

No caso das pirâmides e prismas, é usual nomeá-los de acordo com suas bases. Assim, falamos em pirâmide ou prisma de base triangular, quadrada, retangular, hexagonal, etc. É claro que, por exemplo, uma pirâmide de base retangular é um pentaedro, mas chamá-la por pirâmide de base retangular nos dá uma ideia mais exata do sólido ao qual nos referimos.

Dizemos que um prisma é **reto** quando suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, ou seja, sua altura coincide com a medida das arestas laterais. Num prisma reto, as faces laterais são retângulos.

O prisma é **obliquo** quando suas arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

O prisma é **regular** se suas bases são polígonos regulares

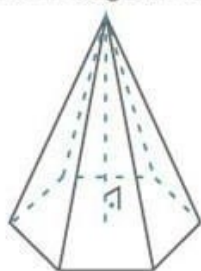


Há prismas que têm nomes especiais:

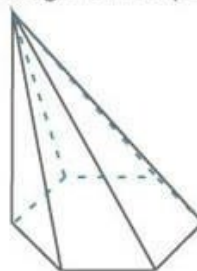
- **Paralelepípedo** é um prisma cujos polígonos das bases são paralelogramos.
- **Paralelepípedo reto** é um prisma reto, cujos polígonos das bases são paralelogramos.
- **Paralelepípedo retângulo (ortoedro)** é um prisma reto, cujos polígonos das bases são retângulos.
- **Cubo** é um paralelepípedo retângulo, cujas arestas são congruentes.
- **Romboedro** é um paralelepípedo que possui as 12 arestas congruentes entre si (os polígonos das faces são losangos).

Dizemos que uma pirâmide é **reta** quando a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base; neste caso, todas as arestas laterais são congruentes. Caso contrário, dizemos que a pirâmide é **oblíqua**. Exemplos:

pirâmide hexagonal reta



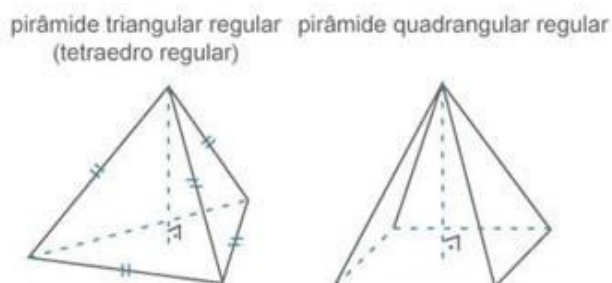
pirâmide hexagonal oblíqua



**Observação:** numa pirâmide reta, as faces laterais são triângulos isósceles.

Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é regular, é uma **pirâmide regular** (as faces laterais são triângulos isósceles congruentes).






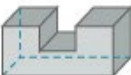
Exemplos:



**Observação:** na pirâmide triangular regular, a base é um triângulo equilátero e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. O tetraedro regular tem as 4 faces constituídas por triângulos equiláteros congruentes.

## Exercícios resolvidos:

- Dados os poliedros a seguir, classifique-os em convexo ou não convexo e complete a tabela sabendo que  $V$  é o número de vértices,  $F$  é o número de faces e  $A$  é o número de arestas do poliedro:

Poliedro	V	F	A	$V + F$	$V + F - A$	Nome do poliedro
a) 						
b) 						
c) 						
d) 						
e) 						
f) 						



### IMPORTANTE:

Relação de Euler (Leonhard Paul Euler – matemático e físico suíço que viveu no século XVIII. Fez importantes descobertas em campos variados da Matemática, Mecânica, Óptica, e Astronomia): em todo poliedro convexo, vale a relação  $V + F - A = 2$ ; em que  $V$  é o número de vértices,  $F$  é o número de faces e  $A$  é o número de arestas do poliedro.

Os poliedros para os quais vale a relação de Euler são chamados de poliedros eulerianos. Pode-se mostrar que todo poliedro convexo é euleriano, mas a recíproca dessa afirmação é falsa, isto é, existem poliedros eulerianos não convexos, como você vai verificar aqui!

## Resolução:

Poliedro	V	F	A	V + F	V + F - A	Nome do poliedro
a) convexo	12	8	18	20	2	Octaedro ou prisma de base hexagonal
b) convexo	8	6	12	14	2	Hexaedro ou prisma oblíquo de base quadrangular ou paralelepípedo
c) convexo	5	5	8	10	2	Pentaedro ou pirâmide de base quadrangular
d) convexo	6	8	12	14	2	Octaedro
e) não convexo	12	8	18	20	2	Octaedro
f) não convexo	16	10	24	26	2	Octaedro

2. Analisando a tabela, que relação existe envolvendo o número de vértices, o número de faces e o número de arestas?

**Resposta:**  $V + F - A = 2$

3. **Desafio:** Encontre um poliedro para o qual não vale a relação de Euler.

**Observação:** obviamente esse poliedro é não convexo!

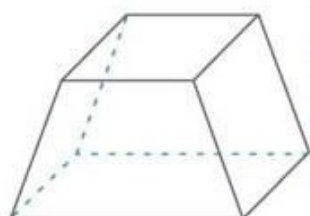
## Poliedros de Platão

São chamados poliedros de Platão se satisfazem às condições:

- Todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas.
- Em todos os vértices concorrem o mesmo número (m) de arestas.

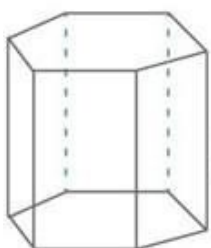
- Vale a relação de Euler.

### Exemplos:



Esse poliedro é de Platão, pois:

- Todas as faces são quadrangulares;
- Em todos os vértices concorrem 3 arestas;
- Como  $V = 8$ ,  $F = 6$  e  $A = 12$ , vale a relação de Euler:  $8 + 6 - 12 = 2$



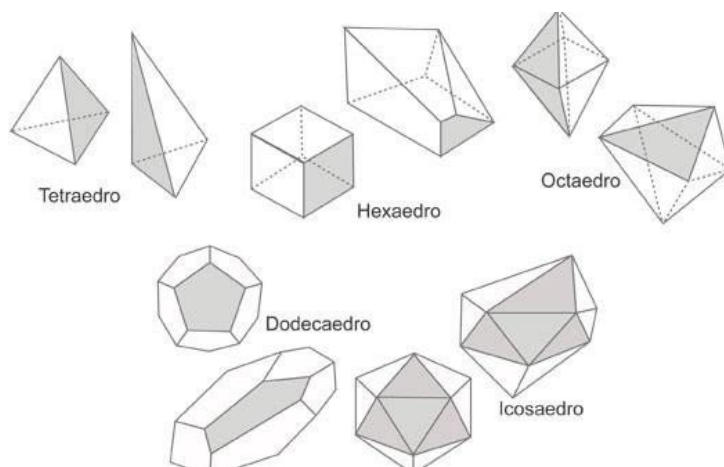
Esse poliedro não é de Platão, pois tem 2 faces hexagonais e 6 faces quadrangulares.

É possível justificar que só existem **cinco** classes de poliedros de Platão, que são:

- **Tetraedro** (4 faces triangulares e ângulos poliédricos de 3 arestas).
- **Hexaedro** (6 faces quadrangulares e ângulos poliédricos de 3 arestas).
- **Octaedro** (8 faces triangulares e ângulos poliédricos de 4 arestas).
- **Dodecaedro** (12 faces pentagonais e ângulos poliédricos de 3 arestas).
- **Icosaedro** (20 faces triangulares e ângulos poliédricos de 5 arestas).



**Exemplos:**

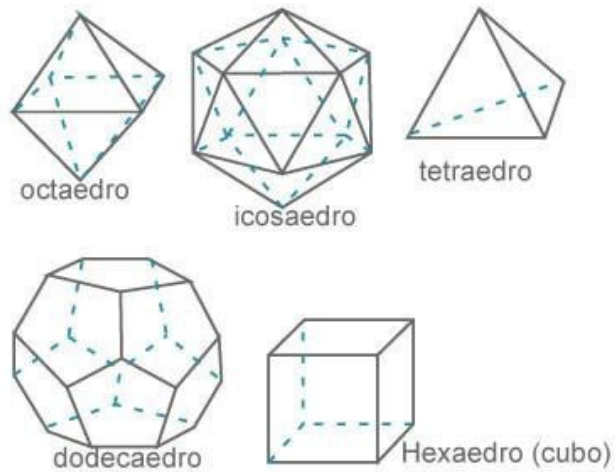


**Poliedros regulares**

Um poliedro convexo que tenha como faces apenas polígonos regulares e congruentes e que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas é um poliedro regular.

Intuitivamente, pode parecer que, como no caso dos polígonos, podemos construir poliedros regulares com tantas faces quantas desejarmos. No entanto, isso não é possível. Na verdade, só é possível construir cinco tipos de poliedros regulares:

- De três modos distintos, utilizando triângulos (tetraedro, octaedro e icosaedro).
- De um só modo, utilizando pentágonos (dodecaedro).
- De um só modo, utilizando quadrados (hexaedro).



### Exercícios resolvidos:

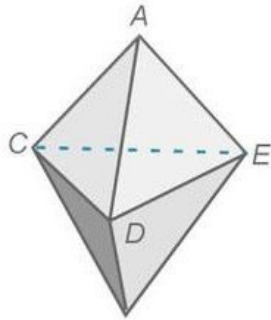
1. Responda as perguntas:

- a) Todo poliedro regular é poliedro de Platão?
- b) E a recíproca é verdadeira? Ou seja, todo poliedro de Platão é um poliedro regular?

### Respostas:

- a) Sim
- b) Não

2. Com 6 triângulos equiláteros, é possível construir este hexaedro:



Trata-se de um poliedro regular? Por quê?

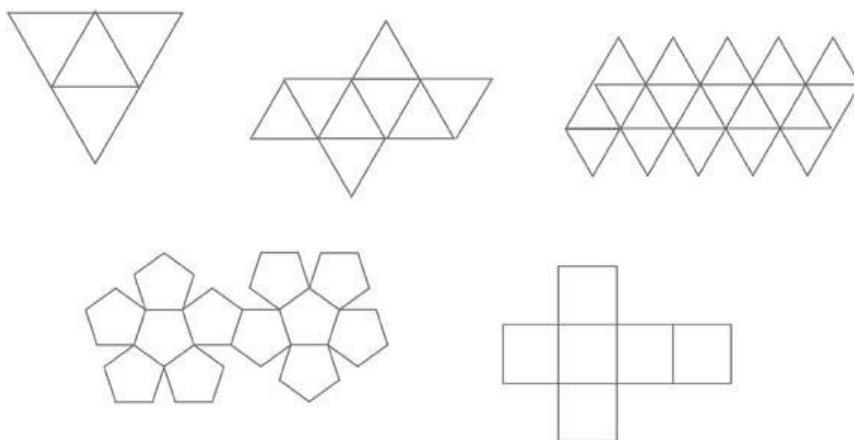
**Resposta:** Não é um poliedro regular, pois, por exemplo, no vértice A concorrem 3 arestas e no vértice D concorrem 4 arestas.

3. Determine o número de faces, de arestas e de vértices de cada um dos poliedros regulares.

**Respostas:**

Poliedro	F	A	V
Tetraedro	4	6	4
Octaedro	8	12	6
Icosaedro	20	30	12
Hexaedro	6	12	8
Dodecaedro	12	30	20

4. As figuras a seguir mostram algumas planificações de cada um dos poliedros regulares:



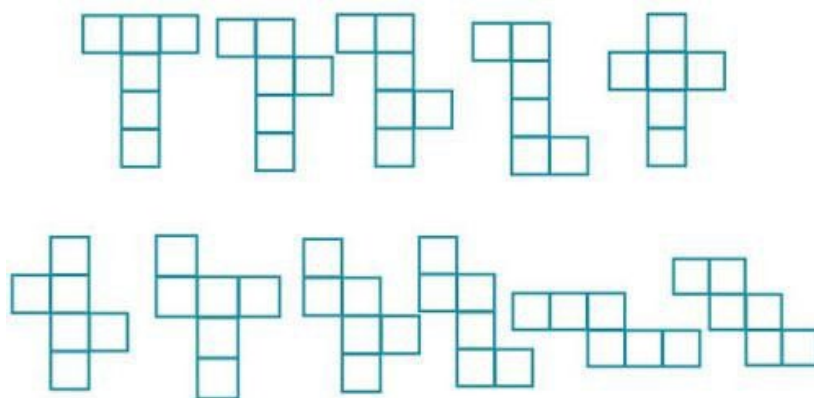
- a) Desenhe diferentes planificações que podem ser usadas para formar o tetraedro regular.
- b) Desenhe diferentes planificações que podem ser usadas para formar o hexaedro regular (cubo).

**Respostas:**

- a) Planificações do tetraedro regular:



**b)** Planificações do cubo



*Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.*

## REFERÊNCIAS

CÂNDIDO, S.L. *Formas num mundo de formas*. São Paulo: Moderna, 1997.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Espacial*. São Paulo: Atual, 2000. V. 10

KALEFF, A. M. *Tomando o ensino da geometria em nossas mãos*. A Educação Matemática em Revista, nº 2, 1994.

MACHADO, N. J. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão: Coleção Vivendo a Matemática*. São Paulo: Scipione, 1997.

MELLO, J. L. P. *Matemática, volume único: construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.