Matemática

UNINOVE

Equação da Reta

Objetivo: Estudar as retas e suas várias formas de equações.

Módulo III

Considere o seguinte problema:

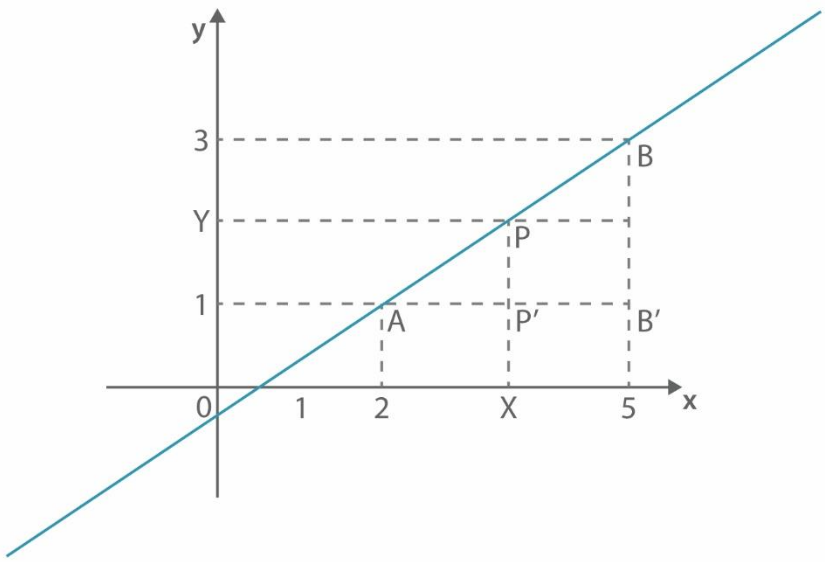
Sabemos que a pressão atmosférica diminui conforme subimos em relação ao nível do mar, onde a pressão é de 1 atm. A 100 metros de altura, a pressão é de 0,95 atm. Se a variação de pressão é linear, represente num plano cartesiano e determine a lei que define esta variação.

Equação geral da reta

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta. Qual é, então, a equação da reta que passa por dois pontos dados?

Por exemplo, se tivermos os pontos A (2 , 1) e B (5 , 3).

Vamos escrever a equação da reta que passa por esses dois pontos:



P(x,y) pertence à reta procurada se vale:

Δ APP' ~ Δ ABB' (pois possuem dois ângulos congruentes):

Â é comum e m(∠PP’A) = m(∠BB’A) = 90

Assim:

$$\frac{AP'}{PP'} = \frac{AB'}{BB'}$$
$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{5-2}{3-1}$$
$$2(x-2) = 3(y-1)$$
$$2x - 3y - 1 = 0$$

Por outro lado, sabemos que se três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados, então vale:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja, a **equação geral** de uma reta r, sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos conhecidos e $P(x, y)$ um ponto genérico, é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, para o exemplo anterior, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$x + 5y + 6 - 5 - 3x - 2y = 0$$
$$-2x + 3y + 1 = 0$$
$$2x - 3y - 1 = 0$$

Genericamente, a **equação geral** de uma reta é dada pela expressão:

$$\mathbf{ax + by + c = 0}$$

Propriedade

A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in IR$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, está associada uma única reta r do plano cartesiano cujos pontos $P(x , y)$ são as soluções da equação dada.

Dessa forma, todo ponto que satisfaz a condição $ax + by + c = 0$, pertence, necessariamente, à reta r.

EXEMPLO

1. Construa o gráfico da reta de equação $x + 2y - 6 = 0$.

Solução:

Como sabemos, basta acharmos dois pontos para construirmos o gráfico.

Por exemplo:

Se $x = 0$, temos:

$0 + 2y - 6 = 0$

$2y = 6$

$y = 3$

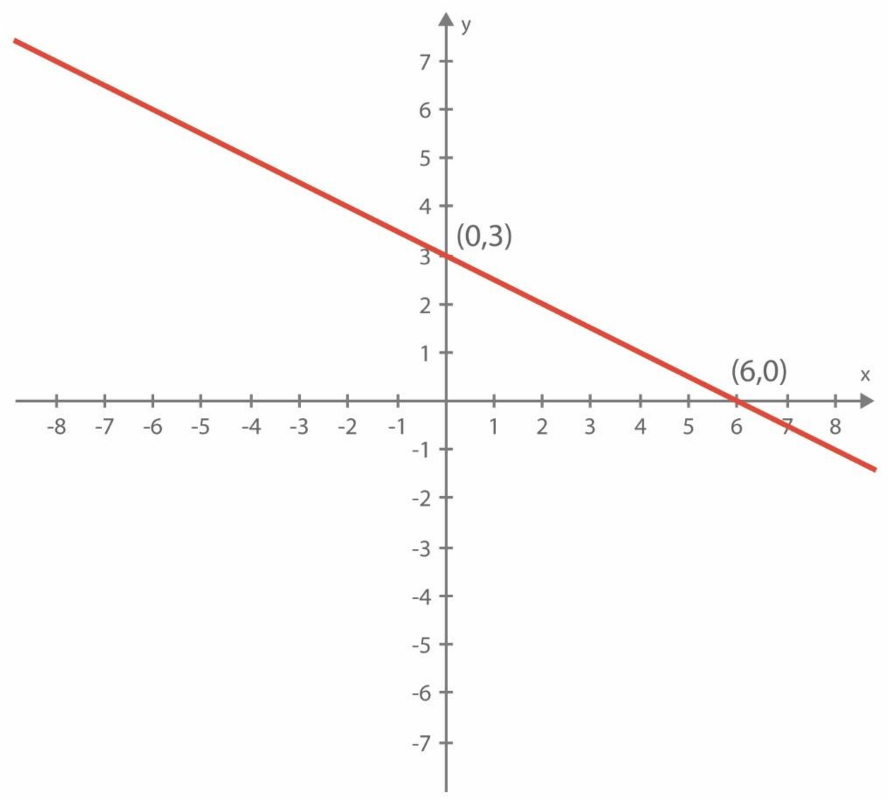
$\therefore (0 , 3)$ é um ponto da reta

Se $y = 0$, temos:

$x + 2.0 - 6 = 0$

$x = 6$

$\therefore (6 , 0)$ é outro ponto da reta



2. Agora verifique se os pontos A(2 , 2), B(4 , 1) e C(7 , -1) pertencem à reta r de equação $x + 2y - 6 = 0$.

Solução:

Basta substituir x e y na equação dada pelas coordenadas de cada ponto e verificar se a igualdade obtida é verdadeira ou falsa:

Ponto A:

$2 + 2.2 - 6 = 0 \Rightarrow$ verdadeira

$\therefore A \in r$

Ponto B:

$4 + 2.1 - 6 = 0 \Rightarrow$ verdadeira

$\therefore B \in r$

Ponto C:

$7 + 2.(-1) - 6 = 0 \Rightarrow$ falsa

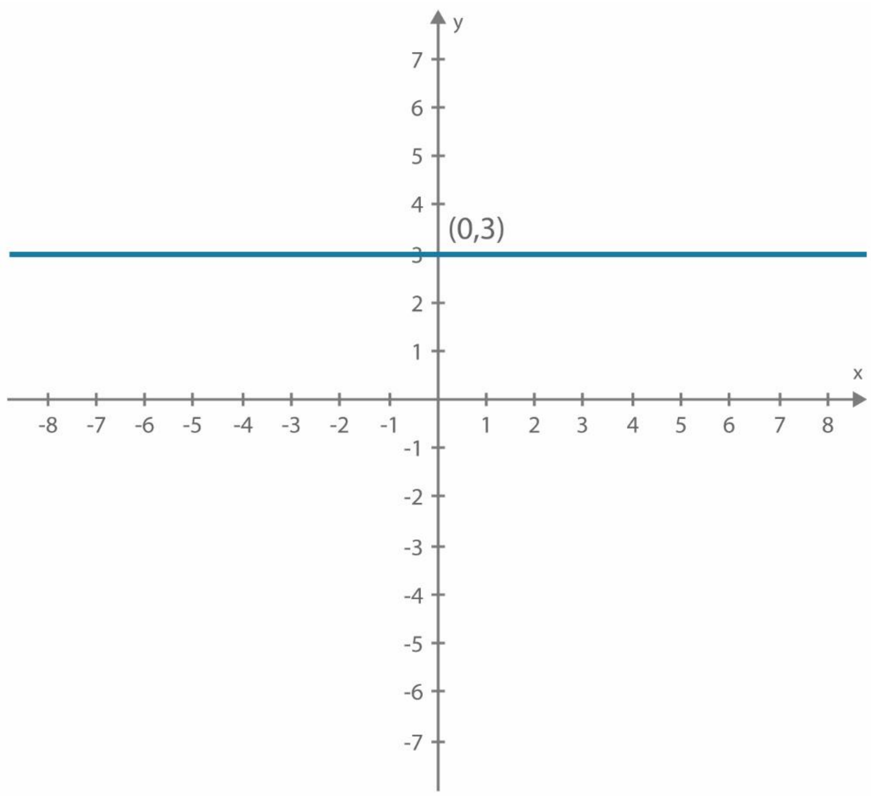
$\therefore C \notin r$

3. Construa o gráfico da reta de equação:

a) $2y - 6 = 0$

Solução:

$$2y - 6 = 0$$
$$2y = 6$$
$$y = 3$$



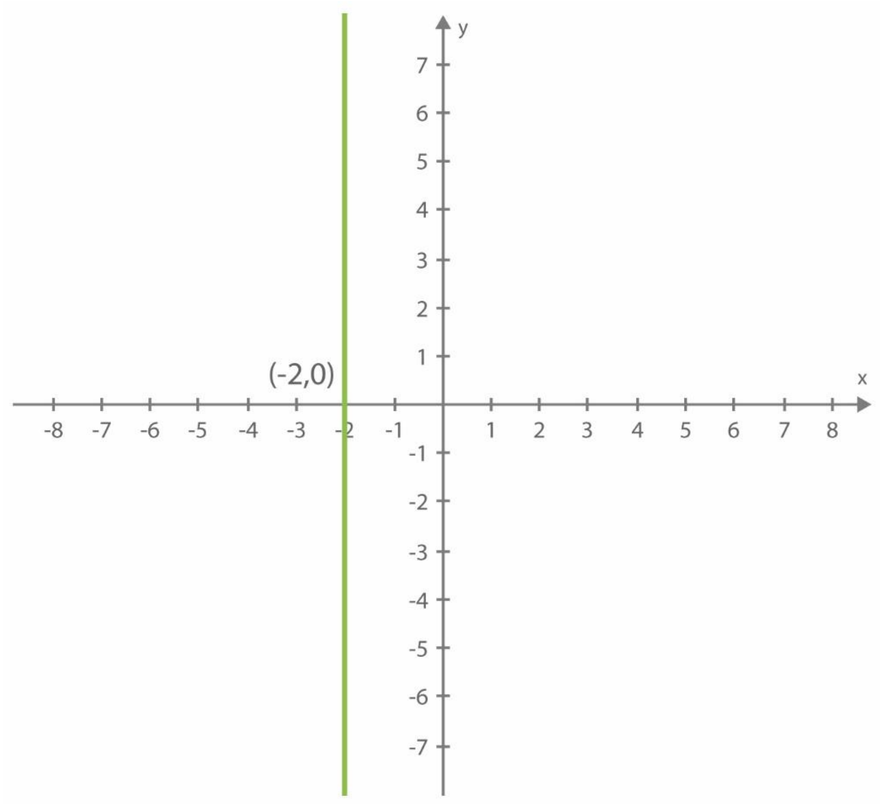
Como podemos perceber, nesta equação o coeficiente de x é 0.

Quando a equação não tem o termo em x, a reta é paralela ao eixo das abscissas.

b) $2x + 4 = 0$

Solução:

$$2x + 4 = 0$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$



Como podemos perceber, nessa equação o coeficiente de y é 0.

Quando a equação não tem o termo em y, a reta é paralela ao eixo das ordenadas.

c) $3x + 2y = 0$

Solução:

Como sabemos, basta acharmos dois pontos para construirmos o gráfico.

Por exemplo:

Se x = 0, então:

3.0 + 2y = 0

y = 0

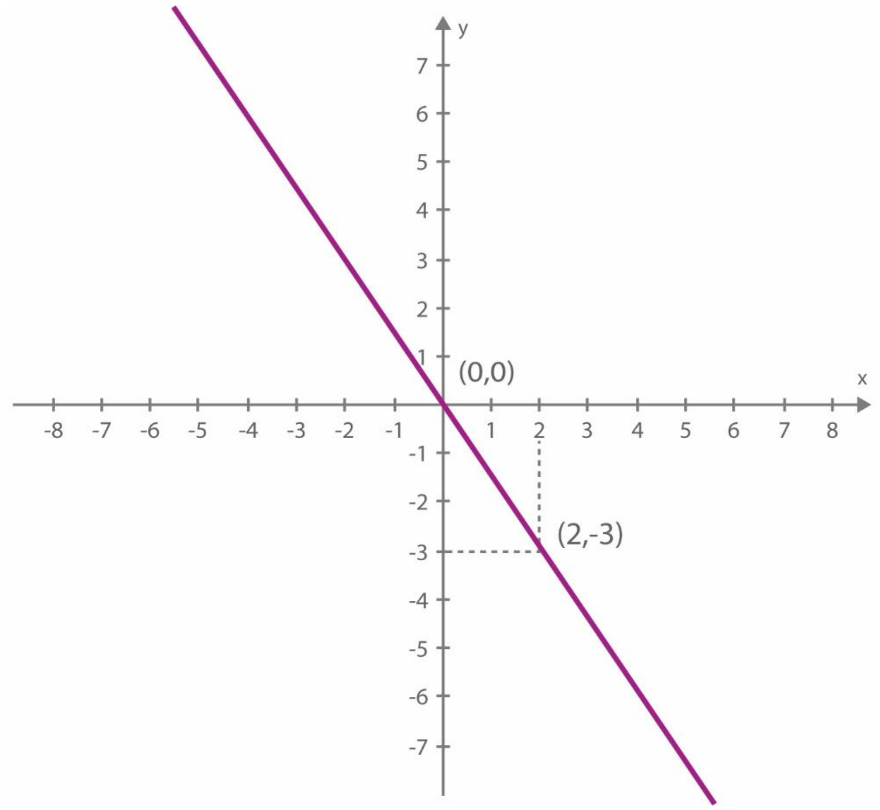
$\therefore$ (0 , 0) é um ponto da reta.

Se x = 2, então:

3.2 + 2y = 0

y = - 3

$\therefore$ (2 , - 3) é outro ponto da reta.



Como podemos perceber, essa equação não tem o termo independente c. Genericamente, sua equação é ax + by = 0 e, portanto, (0 , 0) sempre satisfaz a equação, pois: a.0 + b.0 = 0.

Quando a equação não tem o termo independente c, a reta passa pela origem.

Equação reduzida da reta

Na equação geral ax + by + c = 0, com b ≠ 0, se isolarmos y, obtemos:

$$\mathrm{by} = -\mathrm{ax} - \mathrm{c}$$

$$\mathrm{y} = \underbrace{\left(-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)}_{\mathrm{m}} + \underbrace{\left(-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}\right)}_{\mathrm{q}}$$

$\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{q}$ → **equação reduzida** da reta.

m é o **coeficiente angular** da reta e q, o **coeficiente linear** da reta r, que expressa a ordenada do ponto onde a reta corta o eixo Oy.

EXEMPLO

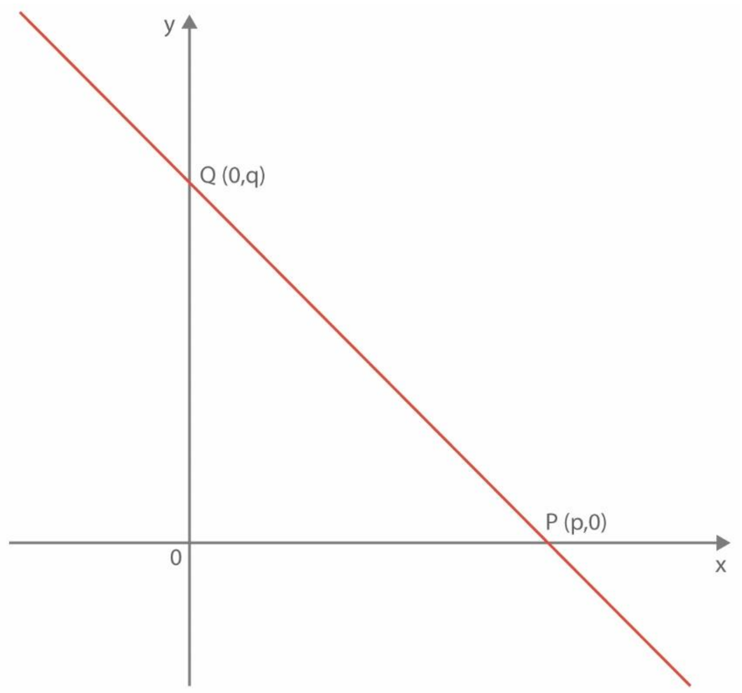
A reta apresentada, que passa pelos pontos A$(2\,,1)$ e B$(5\,,3)$ e possui a equação geral $2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} - 1 = 0$, tem equação reduzida dada por:

$$3\mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 1$$
$$y = \frac{2x - 1}{3}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

O coeficiente angular é $\frac{2}{3}$ e o coeficiente linear é $-\frac{1}{3}$.

Equação segmentária da reta

Seja r uma reta que intercepta os eixos cartesianos nos pontos P(p , 0) e Q(0 , q), sua equação geral é:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$pq - qx - py = 0$$

$$qx + py = pq$$

Dividindo os dois membros da equação por pq, temos:

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

Ou seja: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \rightarrow$ **equação segmentária** da reta

EXEMPLO

1. A equação segmentária da reta que intercepta os eixos em A(2 , 0) e B(0 , -3) é:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

2. Se a equação geral da reta r é 2x − 3y + 4 = 0, para determinar sua equação segmentária devemos seguir os passos:

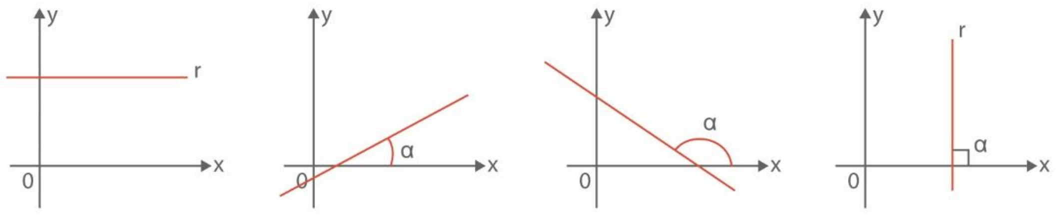
$$2x-3y=-4$$
$$\frac{2x}{-4}-\frac{3y}{-4}=\frac{-4}{-4}$$
$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$$

Coeficiente angular

O **coeficiente angular** (ou **declividade**) da reta r é o número real **m** que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α (menor ângulo que a reta forma com o eixo x), ou seja:

m = tg α

Pode ocorrer, então, que:



Se α = 0º → tg α = 0 → m = 0

Se 0º < α < 90º → tg α > 0 → m > 0

Se 90º < α < 180º → tg α < 0 → m < 0

Se α = 90º → tg α não é definida

Determinação do coeficiente angular

a) Quando conhecemos dois pontos distintos da reta $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, o coeficiente angular é calculado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

EXEMPLO

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(3 , 2) e B(5 , 7) é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 2}{5 - 3} = \frac{5}{2}$$

b) Quando conhecemos a equação geral da reta ax + by + c = 0, o coeficiente angular é calculado por:

$$m = -\frac{a}{b}, b \neq 0$$

Observação: *Vimos anteriormente que a equação reduzida da reta é y = mx + q.*

Dessa forma, quando tivermos a equação da reta na forma reduzida, m é o coeficiente de x.

EXEMPLO

O coeficiente angular da reta $2x - 3y + 5 = 0$ é:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Na forma reduzida, essa reta é $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, portanto, $m = \frac{2}{3}$.

Equação da reta de coeficiente angular m e que passa por um ponto $P(x_0 , y_0)$

Conhecendo-se um ponto da reta r e seu coeficiente angular, sua equação é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

EXEMPLO

A equação geral da reta que passa pelo ponto (1, 2) e tem m = - 1 é:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$
$$y - 2 = -1\,(x - 1)$$
$$y - 2 = -x + 1$$
$$x + y - 3 = 0$$

Vamos agora voltar ao problema apresentado e responder à pergunta proposta!

Pelos dados do problema, os pontos que pertencem à reta têm coordenadas (0, 1) e (100, 0.95). Dessa forma, a equação geral da reta é dada por:

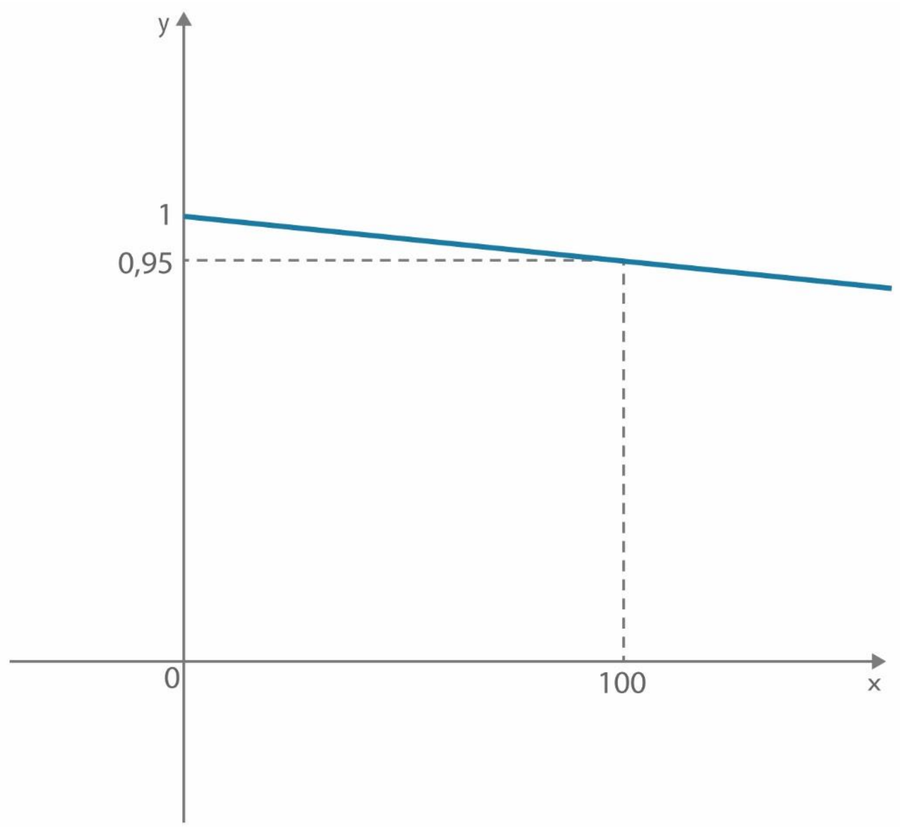
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 100 & 0.95 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja:

$$x + 100y - 100 - 0.95x = 0$$
$$0.05x + 100y - 100 = 0$$

E a equação reduzida por:

$$100y = -0.05x + 100$$
$$y = \frac{-0.05x + 100}{100}$$
$$y = -0.0005x + 1$$



Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar*. v. 7. Geometria Analítica. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J. L. P. *Matemática: construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.