MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Análise combinatória

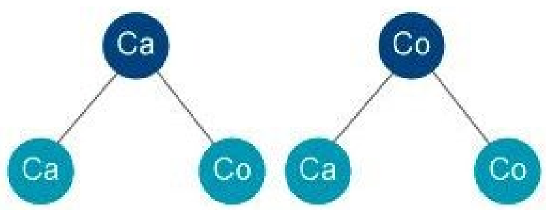
Princípio multiplicativo

Objetivo: Apresentar três pontos fundamentais da análise combinatória que são os diagramas de árvore, o princípio multiplicativo e o fatorial através de exemplos.

Diagrama de árvore

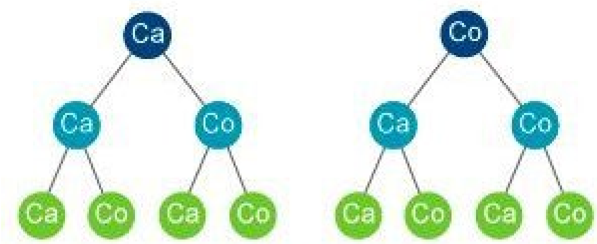
Situação Problema. Dada uma moeda de faces cara (**Ca**) e coroa (**Co**), quantas configurações (situações) são possíveis em dois lançamentos seguidos?

No primeiro lançamento, duas possibilidades, **Ca** ou **Co,** e no segundo lançamento temos a mesma situação. Portanto as configurações possíveis são um total de quatro: (**Ca**,**Ca**), (**Ca**,**Co**), (**Co**,**Ca**) e (**Co**,**Co**). Um diagrama de árvore nada mais é que colocarmos as configurações acima no seguinte tipo de figura.

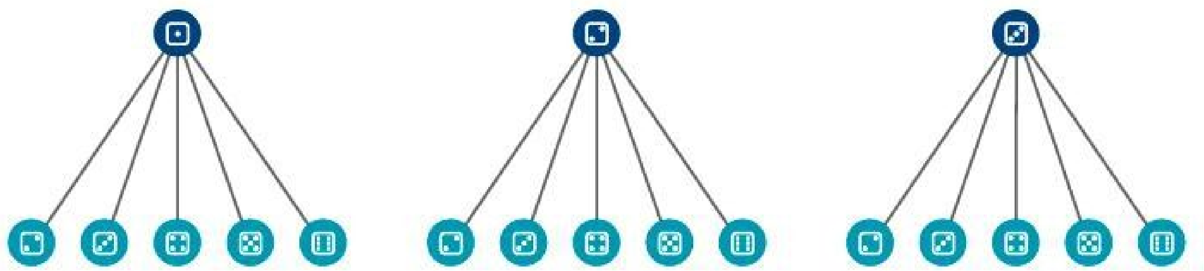


Situação Problema. Se considerarmos a mesma moeda, mas realizarmos três lançamentos sucessivos, quantas serão as configurações e como ficará o diagrama de árvore?

Claro! Basta repetirmos o processo do caso de dois lançamentos e acrescentarmos mais um ao final. Logo, há 8 configurações possíveis: (**Ca**,**Ca**,**Ca**), (**Ca**,**Ca**,**Co**), (**Ca**,**Co**,**Ca**), (**Ca**,**Co**,**Co**), (**Co**,**Ca**,**Ca**), (**Co**,**Ca**,**Co**), (**Co**,**Co**,**Ca**),(**Co**,**Co**,**Co**). E o nosso diagrama de árvore fica:



Exercício Resolvido. Considere um dado comum com seis faces. Construa odiagrama de árvore para dois lançamentos consecutivos desse dado e suponha que,no primeiro lançamento, só ocorrem faces de número menor que quatro e no segundo lançamento, só ocorrem faces com número maior que um.



Solução. No 1º lançamento só podem ocorrer as seguintes faces 1, 2 e 3. Já no 2º lançamento podem ocorrer as faces 2, 3, 4, 5 e 6. Portanto, montando o diagrama de árvore, nós temos:

Notamos que há um total de 15 configurações distintas, pois há 3 na primeira etapa e 5 a segunda etapa, logo, multiplicando, obtemos $3 \cdot 5 = 15$

O Princípio multiplicativo

Na seção anterior, ficou claro que os diagramas de árvore nos fornecem a quantidade de modos que um evento, formado por etapas sucessivas, pode ocorrer. Dois fatores precisam ser observados: 1º se a ordem dos elementos que formarãoas etapas é relevante ou não, 2º se há elementos repetidos.

Se um acontecimento é composto por duas etapas sucessivas, independentes uma da outra e se a primeira pode ocorrer de ***n*** modos e a segunda de ***m*** modos, então o número de possibilidades de ocorrência do acontecimento é dado por $n \cdot m$.

Ou seja, o número total de possibilidades é dado pela multiplicação do total de possibilidades em cada etapa do acontecimento.

DICA:

É por causa dessa fórmula que o princípio leva o nome de princípio multiplicativo.

Situação Problema. Quantos anagramas (palavras formadas com as mesmas letras de um vocábulo dado e que não necessariamente tem sentido) da palavra TROFÉU são possíveis? Alguns anagramas são UEFORT, FEUTRO, EOUFRT (note que a ordem importa), mas quantos são ao todo? Vejamos.

6	5	4	3	2	1
1ª letra	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	6ª letra

Ou seja, pelo princípio multiplicativo, há um total de $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ anagramas da palavra TROFÉU.

DICA:

Ao resolver exercícios de análise combinatória procure descobrir, em primeiro lugar, se o fator ordem é importante ou não.

Exercício Resolvido. Quantos anagramas da palavra TROFÉU começampela letra F?

Solução. Montando um quadro como acima temos:

1	5	4	3	2	1
Letra F	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	6ª letra

Portanto, temos $1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ anagramas começando por F.

Exercício Resolvido. Quantos anagramas têm a palavra CARA?

Solução. Ela tem 4 letras, logo $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas, certo? Errado! Apalavra CARA tem duas letras A repetidas.

2	**1**
1ª letra A	2ª letra A

Portanto, há $2 \times 1 = 2$ possibilidades de troca entre as duas letras A. Resultando, por conseguinte, em $24 \div 2 = 12$ anagramas da palavra CARA.

Exercício Resolvido. Arnaldo, Bruno, Carlos e Daniel querem saber quantas duplas entre si eles podem formar.

Solução. Construindo a tabela abaixo, nós vemos:

4	**3**
1ª pessoa	2ª pessoa

Portanto, pelo mesmo raciocínio anterior, há $4 \times 3 = 12$ grupos. Porém, a duplaArnaldo e Daniel é a mesma que Daniel e Arnaldo, isto é, a ordem não importa. As mudanças entre os elementos escolhidos não alterarão o grupo, logo:

2	**1**
1ª pessoa	2ª pessoa

Ou seja, há $2 \times 1 = 2$ mudanças entre os escolhidos que não alterarão o grupo. Resulta que os grupos distintos são $12 \div 2 = 6$.

O fatorial

Definição. Dado $n \geq 2$ um número natural, então o fatorial de n é dado por: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$

Casos especiais são $0! = 1$ e $1! = 1$.

Situação Problema. Queremos calcular $5!$. Ora, basta escrevermos a definição e fazer, passo a passo, as multiplicações:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

IMPORTANTE:

O fatorial cresce muito rápido, por exemplo, 70! = 70 . 69 . 68 ... 3 . 2 . 1 é um número com cem dígitos.

Exercício Resolvido. Ache n tal que $(n\text{-}5)! = 720$.

Solução. Escreva 720 como um fatorial.

Temos $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 = 6!$, logo $(n\text{-}5)!\,\text{-}6!$. Comparando, nós temos que $n\text{-}5 = 6$ e, portanto $n = 11$.

Exercício Resolvido. Determine o valor de $\frac{10!}{7!}$

Solução. Fazemos o seguinte tipo de desenvolvimento.

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6 ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os Elos da Matemática*. 3 ed. São Paulo: Editora Saraiva, 1993.