MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - III

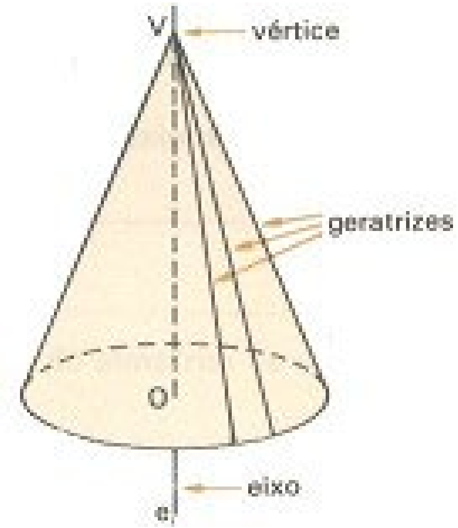
Estudo das cônicas

Parábola

Objetivo: Estudar as parábolas, seus elementos, equações e gráficos.

Introdução

Ao estudarmos o cone circular, ou seja, um cone cuja base é um círculo.



Destacamos os seguintes elementos:

Vértice: ponto V.

Eixo: reta e, conduzida pelo vértice e pelo centro, O, do círculo da base.

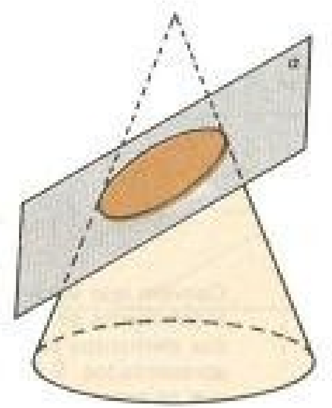
Geratriz: é todo segmento que tem uma extremidade em V e a outra num ponto qualquer da circunferência da base.

Seccionando um cone através de planos convenientemente posicionados, ficam determinadas três figuras cujos contornos são chamados **elipse**, **hipérbole** e **parábola**.

Apolônio de Perga (262 – 200 a.C.) deixou um tratado sobre cônicas em oito livros. Seu grande avanço foi ter conseguido gerar todas as cônicas a partir de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de intersecção. Atribui-se a ele, também, o mérito de ter dado os nomes dos contornos já mencionados.

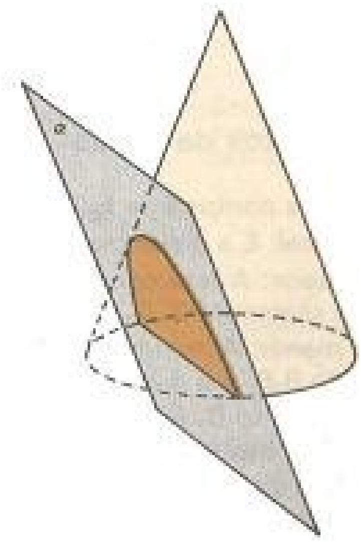
A elipse tem origem em todos os planos secantes compreendidos entre a base e a(s) geratriz(es) do cone:

Elipse

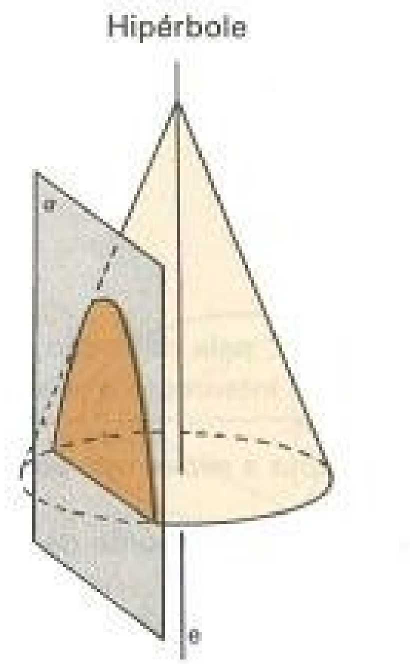


A parábola surge de um plano secante paralelo à(s) geratriz(es) do cone:

Parábola



Se considerarmos dois cones iguais e opostos pelo vértice, a hipérbole surgede um plano secante que intercepta ambos os cones do duplo cone:



Estudemos, então, a parábola!

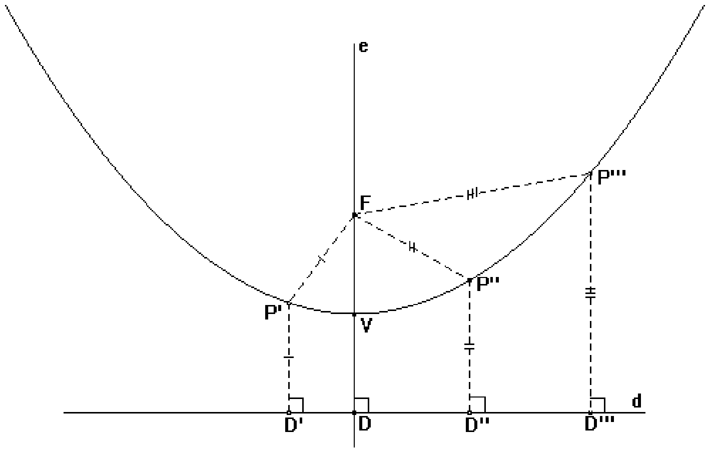
A antena parabólica é usada para captar e ampliar sinais emitidos porsatélites ou ondas de rádio. Por que será que esse tipo de antena tem esse formato?

Parábola

Definição:

Sejam F um ponto e d uma reta, pertencentes a um plano α, tais que $F \notin d$. Seja p a distância entre F e d. Chama-se **parábola** o conjunto dos pontos P do plano que estão à mesma distância de F e de d.

Parábola = $\{P \in \alpha I d_{PF} = d_{Pd}\}$



Na parábola da figura anterior, destacamos:

- F: foco.
- d: reta diretriz.
- V: vértice (ponto médio do segmento FD).
- e: eixo de simetria (reta que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz).
- p: parâmetro (distância entre F e d).

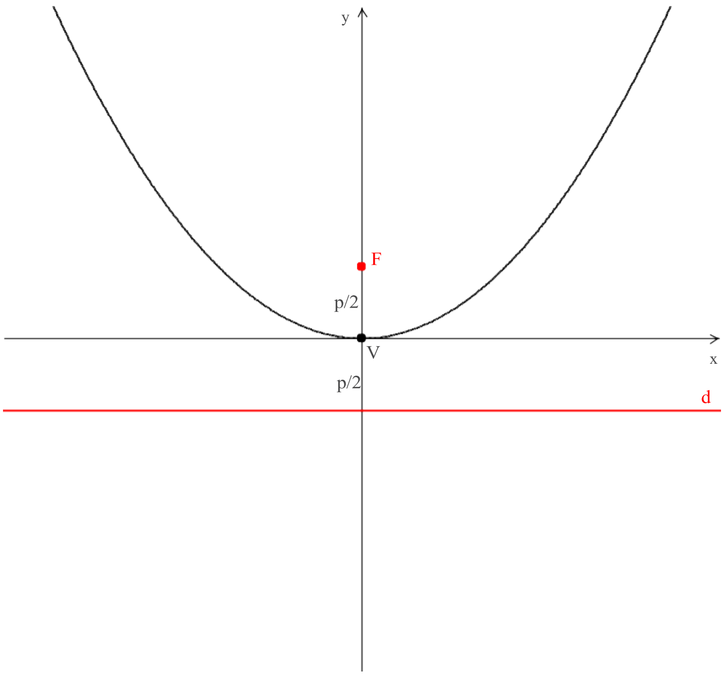
Logo, VF = $\frac{p}{2}$

Equações na forma reduzida

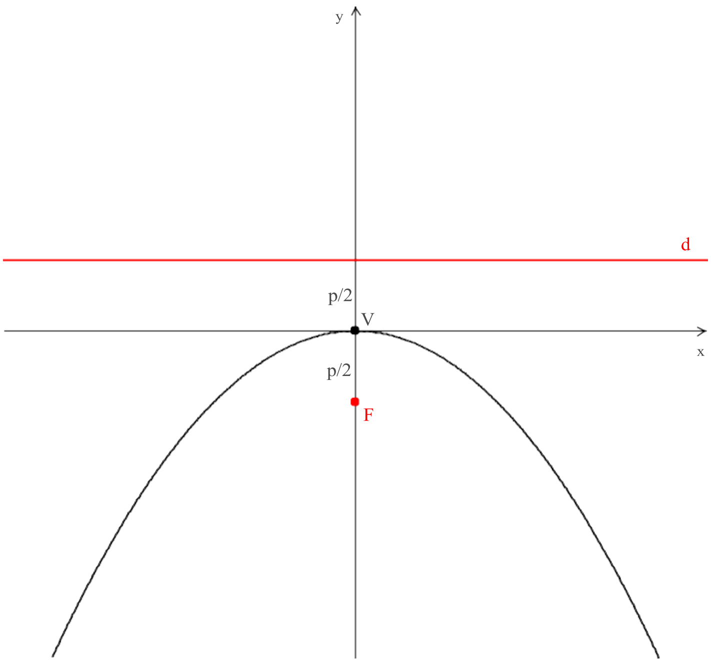
Seja a parábola de vértice V(0, 0). Temos dois casos:

- **Eixo de simetria vertical:** o foco F está sobre o eixo das ordenadas (F∈y).

p > 0 (concavidade voltada para cima)



p < 0 (concavidade voltada para baixo)



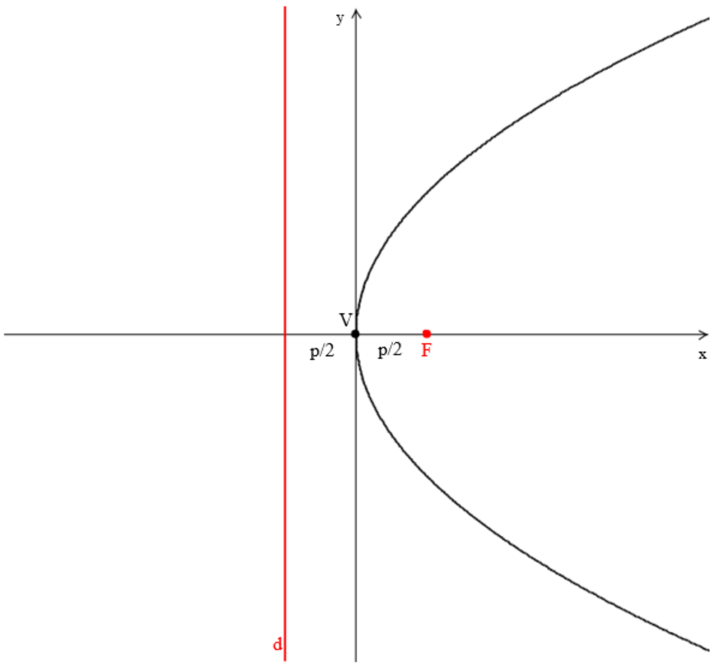
Como podemos verificar, o foco tem coordenadas $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e a diretriz d, que é uma reta paralela ao eixo x, tem equação $y = \frac{-p}{2}$.

Através da definição anterior, e considerando a origem do sistema cartesiano como o vértice da parábola, sua equação, chamada equação reduzida, será dada por:

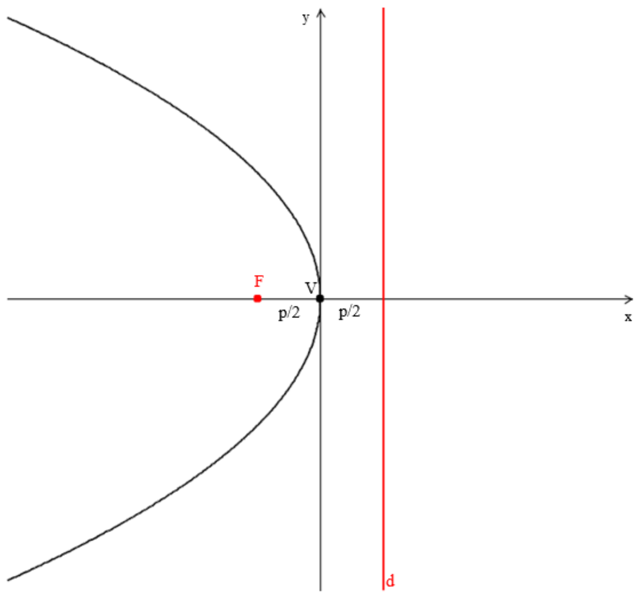
$$x^2 = 2py$$

- **Eixo de simetria horizontal:** o foco F está sobre o eixo das abscissas ($F \in x$).

p > 0 (concavidade voltada para a direita)



p < 0 (concavidade voltada para a esquerda)



Como podemos verificar, o foco tem coordenadas $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ e a diretriz *d*, que é uma reta paralela ao eixo y, tem equação $x = \frac{-p}{2}$.

Chama-se equação reduzida da parábola a equação que todo P(x, y) da parábola verifica:

$$d_{PF} = d_{Pd} \Leftrightarrow y^2 = 2px$$

Exemplos:

1) Determine o foco, a equação da reta diretriz e esboce o gráfico das parábolas.

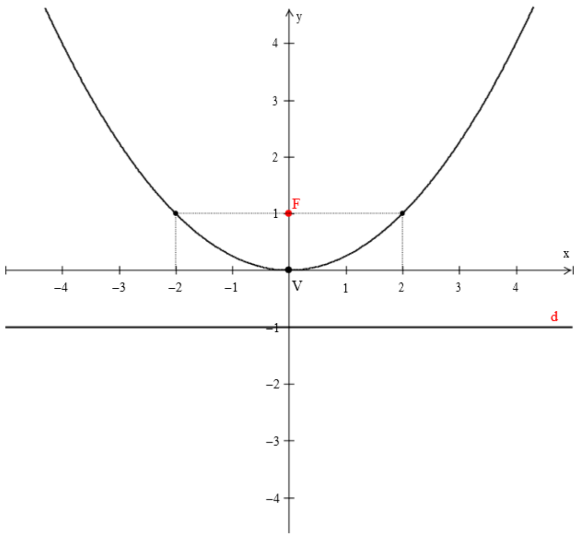
a) $x^2 = 4y$

Solução:

Pela equação dada, sabemos que o eixo de simetria é vertical e que a parábola tem concavidade voltada para cima.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \mathbf{2p}y \\ x^2 = \mathbf{4}y \end{array}\right\} 2p = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow \frac{p}{2} = 1$$

Logo, o foco tem coordenadas $F(0\,,1)$ e a reta diretriz, equação $y = -1$.



b) $y^2 = -8x$

Solução:

Pela equação dada, sabemos que o eixo de simetria é horizontal e que a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = \mathbf{2p}x \\ y^2 = \mathbf{-\,8}x \end{array}\right\}$$

$$2p = -8 \Rightarrow p = -4 \Rightarrow \frac{p}{2} = -2.$$

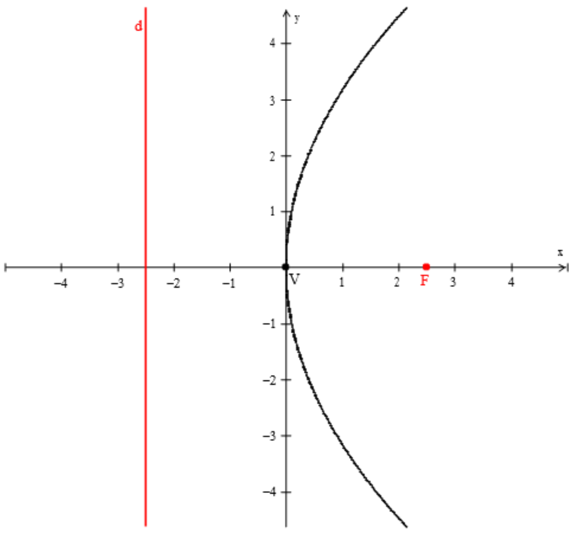
É claro que p é uma distância e, portanto, vale 4. O sinal negativo indica a concavidade para a esquerda!

Logo, o foco tem coordenadas $F(-2\ ,\ 0)$ e a reta diretriz tem equação x=2.

2) Determine a equação da parábola, sendo dado:

a) $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Pelas coordenadas do foco, sabemos que a parábola tem eixo de simetria horizontal e concavidade voltada para a direita:

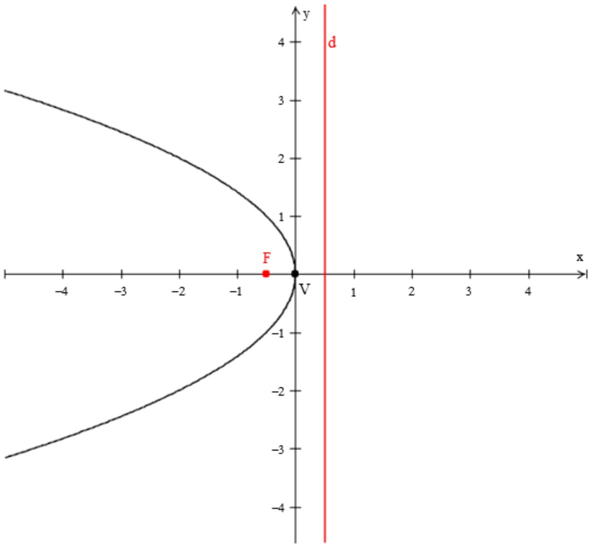


$$\left.\begin{array}{l} F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right) \\ \\ F\left(\dfrac{5}{2}, 0\right) \end{array}\right\} \quad \frac{p}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow p = 5$$

Portanto, a parábola tem equação $y^2=10x$.

b) reta diretriz $x = \frac{1}{2}$

Pela equação da diretriz, sabemos que a parábola tem eixo de simetria horizontal e concavidade voltada para a esquerda:



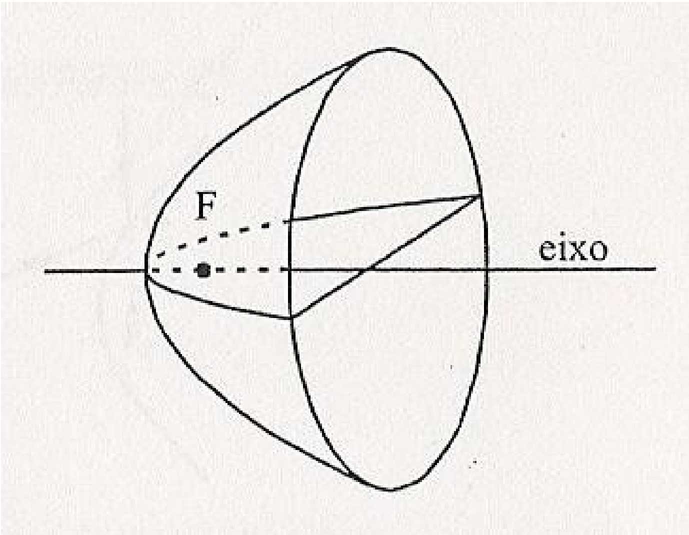
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-p}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} -\frac{p}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = -1$$

Portanto, a parábola tem equação $y^2 = -2x$.

Vamos agora voltar ao problema já apresentado e responder à pergunta proposta!

A antena parabólica tem esse formato em decorrência de uma propriedade dessa curva: os sinais, vindos de uma mesma direção, que incidem em uma antena parabólica, necessariamente refletem em um único ponto, o foco da parábola. Colocando-se um receptor nesse ponto, os sinais recebidos do espaço, que emgeral são muito fracos, podem ser concentrados nele, para serem amplificados.

Os espelhos dos faróis dos automóveis e dos telescópios utilizam esse mesmo princípio na sua fabricação. Na verdade, não se trata de uma única parábola e sim de um paraboloide, que é uma superfície obtida girando-se a parábola emtorno do seu eixo; todas as infinitas parábolas que possamos imaginar formando o paraboloide têm o mesmo foco F.



Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Analítica*. São Paulo: Atual, 2000. V. 7.

MELLO, J. L. P. *Matemática - volume único: construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.

WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 2000.