MATEMÁTICA

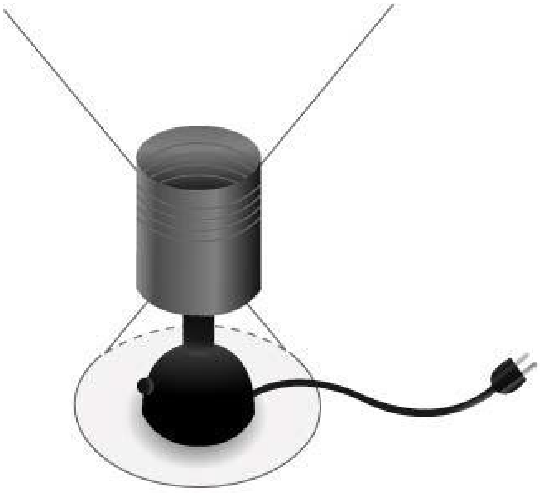
UNINOVE

Módulo - III

Estudo das cônicas

Hipérbole

Objetivo: Conhecer as hipérboles, seus elementos, equações e gráficos.



A luz de um abajur desenha na parede uma hipérbole. Os engenheiros da área da iluminação usam este fato, entre outros, para construírem candeeiros, lanternas, etc.

Considere o seguinte problema:

Suponha que o mapa de uma cidade esteja localizado sobre um sistema de coordenadas cartesianas em que o centro da cidade está na origem. Se um avião voa sobre essa cidade obedecendo à equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{81} = 1$, a qual a distância mínima (unidade em quilômetros) em relação ao centro da cidade ele chegará?

Hipérbole

Definição:

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos do plano, tais que a distância entre eles seja 2c. Seja a < c. Chama-se **hipérbole** o conjunto dos pontos

P de um plano α, cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, aos dois pontos F_1 e F_2 é constante e igual a 2a.

Hipérbole = $\{P \in \alpha \text{ I } |d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a\}$

2a< 2c

Na hipérbole da figura a seguir, destacamos:

- O: centro (ponto médio de A_1A_2, B_1B_2 e F_1F_2).
- F_1 e F_2: focos.
- $F_1F_2 = 2c$: distância focal.
- A_1 e A_2: vértices.
- $A_1A_2 = 2a$: eixo real (ou transverso).
- $B_1B_2 = 2b$: eixo imaginário (ou conjugado).

Relação Fundamental

Na hipérbole anterior, observe o triângulo OB_1A_2. Como ele é retângulo, podemos escrever a relação:

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$

Excentricidade

Responsável pela "abertura" da hipérbole: quanto maior o valor de e, mais"aberta" é a curva.

$e = \frac{c}{a}, e > 1$

Assíntotas

Na hipérbole da figura a seguir, temos um retângulo de lados 2a e 2b. Asretas a_1 e a_2, que contêm as diagonais desse retângulo são chamadas **assíntotas** da hipérbole. As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida em que os pontos se afastam dos vértices. Dessa forma, as assíntotas são excelentes guias para traçar o esboço do gráfico da hipérbole!

Quando a hipérbole tem as medidas dos semieixos iguais, isto é, quando a = b, o retângulo se transforma num quadrado e as assíntotas são perpendiculares. A hipérbole, neste caso, é denominada **hipérbole equilátera**.

Equações na forma reduzida

Seja a hipérbole de centro O (0, 0).

Podemos obter a equação reduzida da hipérbole através da definição anterior.

Temos dois casos:

- **Eixo real horizontal:** $A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Assíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} x$

- **Eixo real vertical:** $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Assíntotas: $y = \pm \frac{a}{b} x$

Note que os focos estão sempre no mesmo eixo que os vértices A_1 e A_2!

Observação

Lembre-se que na elipse sempre temos a > b, isso **não** vale para a hipérbole. Para saber se a hipérbole tem seu eixo real sobre Ox ou sobre Oy, temos que observar os numeradores das equações reduzidas.

Exemplos

1) Determine as coordenadas dos focos e dos vértices e esboce o gráfico das hipérboles:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Solução:

A equação representa uma hipérbole com eixo real sobre Ox.Assim, temos:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Portanto, os vértices têm as coordenadas: $A_1(-3, 0)$; $A_2(3, 0)$

E os pontos do eixo imaginário têm as coordenadas: $B_1(0, 2)$; $B_2(0, -2)$

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso,precisamos da relação fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 13$

$c = \sqrt{13}$

Logo, as coordenadas dos focos são:

$F_1(-\sqrt{13}, \; F_2(\sqrt{13}, \; 0)$

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

Solução:

A equação representa uma hipérbole com eixo real sobre Oy.Assim, temos:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

Portanto, os vértices têm as coordenadas: A1(0, 3); A2(0, -3)

E os pontos do eixo imaginário têm as coordenadas: B1(-4, 0); B2(4, 0)

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso,precisamos da relação fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 9 + 16$

$c^2 = 25$

c = 5

Logo, as coordenadas dos focos são:

$F_1(0, 5)$; $F_2(0, -5)$

2) Determine a equação da hipérbole sendo dados:

a) $F_1(-7, 0)$ e eixo real = 10

Solução:

Como o foco é um ponto do eixo x, a equação desta hipérbole é da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Precisamos achar os valores de a e b.

Como o eixo real mede 10, isto é:

2a = 10

a = 5

Como um dos focos é (-7, 0), o outro é (7, 0) e o valor de c é 7.Usando a relação fundamental, encontramos b2:

$c^2 = a^2 + b^2$

$7^2 = 5^2 + b^2$

$b^2 = 49 - 25 = 24$

Logo, a equação procurada é: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24}$

b) $e = \frac{3}{2}$ e $A_1(0 , 4)$

Solução:

Como um dos vértices é um ponto do eixo y, a equação desta hipérbole é da forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Precisamos achar os valores de a e b.

Como um dos vértices (0, 4), o outro será (0, -4) e o valor de a é 4.

Como a excentricidade é $e = \frac{3}{2}$, então:

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{c}{4} = \frac{3}{2}$$

c = 6

Usando a relação fundamental, encontramos b2:

$c^2 = a^2 + b^2$

$6^2 = 4^2 + b^2$

$36 = 16 + b^2$

$b^2 = 20$

Logo, a equação procurada é: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$

3) Para cada uma das hipérboles, determine as coordenadas dos focos e dosvértices, a excentricidade, o esboço do gráfico e as equações das assíntotas.

a) $9x^2 – 16y^2 = 144$

Solução:

Primeiro, precisamos expressar a equação na forma reduzida e, para isso,dividimos ambos os membros da equação por 144:

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

Simplificando temos: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

A equação representa uma hipérbole com eixo real sobre Ox.Assim, temos:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Portanto, os vértices têm as coordenadas: A1(-4, 0); A2(4, 0)

E os pontos do eixo imaginário têm as coordenadas: B1(0, 3); B2(0, -3)

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso,precisamos da relação fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 16 + 9$

$c^2 = 25$

$c = 5$

Logo, as coordenadas dos focos são: $F_1(-5, 0)$; $F_2(5, 0)$

A excentricidade é: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

E as equações das assíntotas são dadas por $y = \pm\frac{b}{a}x$, ou seja:

$$y = \pm\frac{3}{4}x \begin{cases} a_1: y = -\frac{3}{4}x \\ a_2: y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

b) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

Solução:

Primeiro precisamos expressar a equação na forma reduzida e, para isso,dividimos ambos os membros da equação por -16:

A equação representa uma hipérbole com eixo real sobre Oy.Assim, temos:

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

Portanto, os vértices têm as coordenadas: A1(0, 2); A2(0, -2)

E os pontos do eixo imaginário têm as coordenadas: B1(-4, 0); B2(4, 0)

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso,precisamos da relação fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4 + 16$

$c^2 = =20$

c= $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Logo, as coordenadas dos focos são:

$F_1(0\ , 2\sqrt{5})$; F2 $(0,-\ 2\sqrt{5}\ )$

A excentricidade é: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\ \cong\ 2{,}24$

E as equações das assíntotas são dadas por: $y = \pm\frac{a}{b}x$, ou seja:

$$y = \pm\frac{2}{4}x \left\langle \begin{array}{l} a_1 : y = -\frac{1}{2}x \\ a_2 : y = \frac{1}{2}x \end{array} \right.$$

c) $x^2 - y^2 = 4$

Solução:

Primeiro, precisamos expressar a equação na forma reduzida e, para isso,dividimos ambos os membros da equação por 4:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = \frac{4}{4}$$

Simplificando temos: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

A equação representa uma hipérbole com eixo real sobre Ox.Assim, temos:

$a^2 = b^2 = 4 \Rightarrow a = b = 2$

Portanto, os vértices têm as coordenadas: A1(-2, 0); A2(2, 0)

E os pontos do eixo imaginário têm as coordenadas: B1(0, 2); B2(0, -2)

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso,precisamos da relação fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4 + 4$

$c^2 = 8$

$c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Logo, as coordenadas dos focos são:

$F_1(-2\sqrt{2}, 0)$; $F_2(2\sqrt{2}, 0)$

A excentricidade é: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cong$ 1,4

E as equações das assíntotas são dadas por: $y = \pm\frac{b}{a}x$, ou seja:

$$y = \pm\frac{2}{2}x \left\langle \begin{matrix} a_1 \colon y = -x \\ \\ a_2 \colon y = x \end{matrix} \right.$$

IMPORTANTE:

"Pode-se provar que em toda hipérbole equilátera, a excentricidade é igual a $\sqrt{2}$ e as equações das assíntotas são iguais a $y = \pm$ x.".

Vamos agora voltar ao problema apresentado e responder à pergunta proposta!

A equação dada: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{81} = 1$, representa uma hipérbole com eixo real sobre Ox.

Assim, temos:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 81 \Rightarrow b = 9$

Portanto, os vértices têm as coordenadas: $A_1(-5, 0)$; $A_2(5, 0)$

Logo, a distância mínima em relação ao centro da cidade que o avião chega é 5 km.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Analítica*. São Paulo:Atual, 2000. V. 7.

MELLO, J. L. P. *Matemática, volume único*: *construção e significado*. São Paulo:Moderna, 2005.

WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 2000.