MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Binômio de Newton

Objetivo: Apresentar o conceito de binômio de Newton na álgebra e análise combinatória, e estudar alguns exemplos típicos.

Definição

Chama-se binômio de Newton o desenvolvimento do seguinte binômio: $(x + a)^n$.

Em que $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$, isto é, n é um número natural e x, a são números reais quaisquer.

Exemplos: são nossos conhecidos os desenvolvimentos:

$$(x + a)^0 = 1$$

$$(x + a)^1 = x + a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x2a + 3xa^2 + a^3$$

Às vezes, eles recebem o nome de produtos notáveis, pois aparecem com muita frequência quando estudamos álgebra.

Teorema Binomial

A análise combinatória nos permite estabelecer o desenvolvimento em geral de:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a).\,(x + a)\ldots(x + a)}_{\text{n fatores}}$$

Este desenvolvimento é dado pela expressão:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}a^k + \ldots + \binom{n}{n}a^n$$

Estes números são chamados de coeficientes binomiais, para cada k natural, tal que $0 \leq k \leq n$. A fórmula do desenvolvimento também pode ser escrita na notação de somatório:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

Situação-problema 1

Desenvolver, pelo binômio de Newton: $(x+3)^4$.

Aplicando a fórmula, nós temos.

$$(x+3)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k} 3^k$$

$$= \binom{4}{0}x^4 3^0 + \binom{4}{1}x^3 3^1 + \binom{4}{2}x^2 3^2 + \binom{4}{3}x^1 3^3 + \binom{4}{4}x^0 3^4$$

Mas temos que os coeficientes binomiais são:

$$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1$$

Portanto, segue que:

$$(x+3)^4 = (1.x^4.1) + (4.x^3.3) + (6.x^2.9) + (4.x.27) + (1\,.1\,.81)$$

$$= x + 12x^3 + 36x^2 + 108x + 81.$$

E este é o desenvolvimento do binômio pedido.

Situação-problema 2

Desenvolver, pelo teorema binomial, a expressão $(3x^2 - 2a)^5$.

Em primeiro lugar, para não cometermos erros com o sinal, vamos reescrever $(3x^2 - 2a)^5 = [3x^2 + (-2a)]^5$. Agora é o mesmo procedimento que no caso anterior. Apliquemos a fórmula:

$$[3x^2 + (-2a)]^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (3x^2)^{5-k}(-2a)^k$$

Os coeficientes binomiais são: $\binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = 5, \binom{5}{2} = 10, \binom{5}{3} = 10, \binom{5}{4} = 5, \binom{5}{5} = 1$. Além disso, temos de resolver e simplificar cada uma das seis potências que aparecem no binômio desenvolvido:

$$(3x^2)^5(-2a)^0 = 243x^{10},$$

$$(3x^2)^4(-2a)^1 = -162x^8a,$$

$$(3x^2)^3(-2a)^2 = 108x^6a^2,$$

$$(3x^2)^2(-2a)^3 = -72x^4a^3,$$

$(3x^2)^1(-2a)^4 = 48x^2a^4,$

$(3x^2)^0(-2a)^5 = -32a^5.$

Juntando tudo, temos:

$(3x^2 - 2a)^5 = 1 \cdot (243x^{10}) + 5 \cdot (-162x^8a) + 10 \cdot (108x^6a^2) + 10 \cdot (-72x^4a^3) + 5 \cdot (48x^2a^4) + 1 \cdot (-32a^5),$

E agora simplificando e agrupando, obtemos finalmente que:

$$(3x^2 - 2a)^5 = 243x^{10} - 810x^8a + 108x^6a^2 - 720x^4a^3 + 240x^2a^4 - 32a^5$$

E assim terminamos.

IMPORTANTE:

Vimos no exercício anterior a dificuldade com o sinal. Para não errarmos, colocamos o monômio inteiro dentro de parênteses. Faça sempre isso para não ter problemas!

DICA:

Teorema binomial e formula do desenvolvimento binomial são sinônimos.

Exercício resolvido 1: desenvolver, pelo teorema binomial, a expressão $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$.

Solução: há um sinal de menos entre os dois radicais. Reescreva a expressão, conforme o alerta que fizemos anteriormente, para não errar: $[\sqrt{x}+(-\sqrt{y})]^4$. Aplique, então, a fórmula do desenvolvimento binomial. $[\sqrt{x}+(-\sqrt{y})]^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(\sqrt{x})^{4-k}(-\sqrt{y})^k$

Calcule separadamente os coeficientes binomiais $\binom{4}{k}$ para k=0,1,2,3,4.

Agora determine as potências dos radicais:

$(\sqrt{x})^2(-\sqrt{y})^0=x^2,$

$(\sqrt{x})^3(-\sqrt{y})^1=-x\sqrt{x}\sqrt{y}=-x\sqrt{xy},$

$(\sqrt{x})^2(-\sqrt{y})^2=xy,$

$(\sqrt{x})\quad(-\sqrt{y})^3=-y\sqrt{xy},$

$(\sqrt{x})^0(-\sqrt{y})^4=y^2.$

Juntando tudo, nós obtemos:

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4=x^2-4x\sqrt{xy}+6xy-4y\sqrt{xy}+y^2$

E está **finalizado** o exercício.

Exercício Resolvido 2: qual é o valor de : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}2^{k}$

Solução: não sabemos quem é n, logo não pode ser somando termo por termo que chegaremos à resposta. Porém, a soma "tem cara" de desenvolvimento binomial! Tendo em vista que $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}a^{k}$, colocarmos x=3 e a=2, então nós teremos: $(3+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}2^{k} = 5^n$.

Fica estabelecido que a soma dada vale 5^n.

Exercício Resolvido 3: calcule o valor de:

$$S = \binom{20}{0} + \binom{20}{1}2 + \binom{20}{2}2^2 + \ldots + \binom{20}{19}2^{19} + \binom{20}{20}2^{20}$$

Solução: há duas formas de fazermos este exercício. A primeira seria na "força bruta", isto é, calculando cada parte individualmente e depois somarmos tudo ao final. A demanda de trabalho para isso é enorme. Note mais; se tivermos que fazer a conta "na mão", teremos que descobrir quanto vale, por exemplo, 220, que é igual a 1.048.576. A segunda maneira é a mais inteligente, isto é, utilizará o teorema do binômio. Note que s tem "cara de" binômio desenvolvido. Isso mesmo! O segredo está em colocar, artificialmente, o número 1 e suas potências na fórmula de S.

$$S = \binom{20}{0} 1^{20-0}.\,2^0 + \binom{20}{1} 1^{20-1}.\,2^1 + \binom{20}{2} 1^{20-2}.\,2^2 + \cdots + \binom{20}{19} 1^{20-19}.\,2^{19} +$$

$$\binom{20}{20} 1^0.\,2^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} 1^{20-k}.\,2^k$$

Isto porque $1^n = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Agora voltamos da fórmula para o binômio propriamente dito $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} 1^{20-k}.\,2^k = (1+2)^{20} = 3^{20}$

Ou seja, a soma S dada vale 3^{20}.

Exercício Resolvido 4: sabendo que:

$$a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a \quad b^4 + b^5 = 1024$$

Calcule o valor de $(a + b)^2$.

Solução: temos uma soma com aparência de binômio de Newton desenvolvido? Mas faltam os coeficientes binomiais dos monômios a^5 e b^5. Ora, eles são $\binom{5}{0} = 1$ e $\binom{5}{5} = 1$, respectivamente. Por este motivo, eles não foram escritos no enunciado. Reescreva a expressão com eles agora:

$$\binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{21} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a \quad b^4 + \binom{5}{5} \qquad b^5 = 1024$$

Que, na notação de somatório, é: $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k}.\,b^k = 1024$

Agora volte da fórmula do binômio desenvolvido para o binômio propriamente dito, isto é: $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} . b^k = (a+b)^5 = 1024$

Mas, do que aprendemos sobre potências, segue que 1024 = 2^{10} = $(2^2)^5$, logo, nós temos: $(a + b)^5 = (22)^5$

Portanto a + b = 2^2 = 4 e assim $(a + b)^2 = 4^2$ = 16.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6 ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os Elos da Matemática*. 3 ed. São Paulo: Saraiva, 1993.