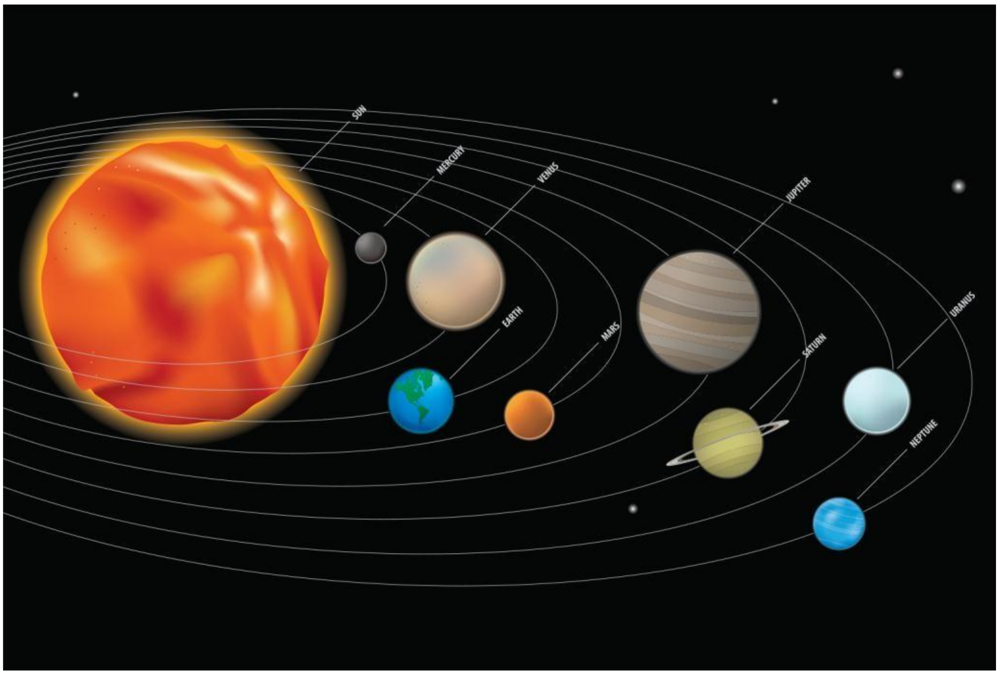
Matemática
UNINOVE

Estudo das cônicas

elipse

Objetivo: Conhecer as elipses, seus elementos, equações e gráficos.

Módulo III



O astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) disse que “qualquer planeta gira em torno do Sol descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos”.

Algumas órbitas elípticas são mais “achatadas” do que outras. A órbita da Terra, por exemplo, é quase circular, enquanto a de Plutão é a mais “oval”.

Elipse

Definição

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos do plano, tais que a distância entre eles seja 2c. Seja a > c. Chama-se elipse o conjunto dos pontos P de um plano α cuja soma das distâncias aos dois pontos F_1 e F_2 é constante e igual a 2a.

Elipse = $\left\{\mathrm{P} \in \ \alpha \mid d_{PF_2} = 2a\right\}$

Na elipse da figura anterior, destacamos:

- O: centro (ponto médio de A_1A_2, B_1B_2 e F_1F_2).
- F_1 e F_2: focos.
- $F_1F_2 = 2c$: distância focal.
- A_1, A_2, B_1 e B_2: vértices.
- $A_1A_2 = 2a$: eixo maior.
- $B_1B_2 = 2b$: eixo menor.

Relação fundamental

Na elipse anterior, observe o triângulo OB_1F_2. Como ele é retângulo, podemos escrever a relação:

$$\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2$$

Excentricidade

Responsável pela "forma" da elipse, pois as que possuem excentricidade perto de 0 são aproximadamente circulares, enquanto as com excentricidade próxima de 1 são "achatadas".

$$\mathrm{e} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}, 0 < \mathrm{e} < 1$$

Equações na forma reduzida

Seja a elipse do centro O (0, 0).

Podemos obter a equação reduzida da elipse através da definição acima. Temos dois casos:

- **Eixo maior horizontal:** $A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$$

- **Eixo maior vertical:** $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$

Note que os focos estão sempre no mesmo eixo que os vértices A_1 e A_2!

Observação: *como, em toda elipse, tem-se a > b (ou $a^2 > b^2$), para saber se a elipse tem seu eixo maior sobre Ox ou sobre Oy, basta observar onde está o maior denominador (a^2) na sua equação reduzida. Se esse for denominador de x^2, o eixo maior está sobre Ox, caso contrário, estará sobre Oy.*

EXEMPLOS

1) Determine as coordenadas dos focos e dos vértices e esboce o gráfico das elipses:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solução

Como o maior denominador é 9 e ele é denominador de x^2, o eixo maior da elipse está sobre o eixo x.

Assim, temos:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$
$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Portanto, os vértices têm as seguintes coordenadas:

A_1 (-3, 0); A_2 (3, 0); B_1 (0, 2); B_2 (0, -2)

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso, precisamos da relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$9 = 4 + c^2$$
$$c^2 = 5$$
$$c = \sqrt{5}$$

Logo, as coordenadas dos focos são:

F_1 $(-\sqrt{5}, 0)$; F_2 $(-\sqrt{5}, 0)$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Solução

Como o maior denominador é 25 e ele é denominador de y^2, o eixo maior da elipse está sobre o eixo y.

Assim, temos:

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$
$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

Portanto, os vértices têm como coordenadas:

A_1 $(0, 5)$; A_2 $(0, -5)$; B_1 $(-4, 0)$; B_2 $(4, 0)$

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso, precisamos da relação fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 16 + c^2$

$c^2 = 9$

$c = 3$

Logo, as coordenadas dos focos são:

F_1 (0, 3); F_2 (0, -3)

2) Calcule a excentricidade e faça o esboço do gráfico das elipses num mesmo par de eixos:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Solução

Nos três itens, o maior denominador é 25 e ele é denominador de x^2, portanto, o eixo maior da elipse está sobre o eixo x.

Assim, temos: $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

O valor de b é diferente em cada item:

a) $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Portanto, os vértices têm como coordenadas:

A_1 (−5, 0); A_2 (5, 0); B_1 (0, 2); B_2 (0, −2)

Para determinarmos a excentricidade, precisamos descobrir o valor de c e, para isso, precisamos da relação fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 4 + c^2$

$c^2 = 21$

$c = \sqrt{21}$

Logo, a excentricidade é: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} \cong 0{,}92$

E as coordenadas dos focos são:

F_1 $(-\sqrt{21}, 0)$; F_2 $(\sqrt{21}, 0)$

b) $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Portanto, os vértices têm como coordenadas:

A_1 $(-5, 0)$; A_2 $(5, 0)$; B_1 $(0, 3)$; B_2 $(0, -3)$

Para determinarmos a excentricidade, precisamos descobrir o valor de c e, para isso, precisamos da relação fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 9 + c^2$

$c^2 = 16$

$c = 4$

Logo, a excentricidade é: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

E as coordenadas dos focos são:

F_1 $(-4, 0)$; F_2 $(4, 0)$

c) $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

Portanto, os vértices têm como coordenadas:

A_1 (-5, 0); A_2 (5, 0); B_1 (0, 4); B_2 (0, -4)

Para determinarmos a excentricidade, precisamos descobrir o valor de c e, para isso, precisamos da relação fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 16 + c^2$

$c^2 = 9$

$c = 3$

Logo, a excentricidade é: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

E as coordenadas dos focos são:

F_1 (-3, 0); F_2 (3, 0)

Quanto mais os focos se distanciam do centro da elipse, mais achatada é a curva e a excentricidade é um número mais próximo de 1. No entanto, se os focos se aproximam de seu centro, mais próxima a uma circunferência é a elipse e a excentricidade é um número mais próximo de 0.

3) Determine a equação da elipse sendo dados:

a) F_1 (-4, 0) e eixo maior = 12

Solução

Como o foco é um ponto do eixo x, a equação desta elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Precisamos achar os valores de a e b. Como o eixo maior mede 12, isto é:

2a = 12

a = 6

Como um dos focos é (-4, 0) o outro é (4, 0) e o valor de c é 4. Usando a relação fundamental, encontramos b^2:

$a^2 = b^2+c^2$

$6^2 = b^2 + 4^2$

$b^2 = 20$

Logo, a equação procurada é: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

b) F_1 (0, 3) e B_1 (1, 0)

Solução

Como o foco é um ponto do eixo y, a equação desta elipse é da forma

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Precisamos achar os valores de a e b.

Como um dos focos é (0, 3), o outro é (0, -3) e o valor de c é 3.

Como um dos vértices do eixo menor é (1, 0), o outro será (-1, 0) e o valor de b é 1.

Usando a relação fundamental, encontramos a2:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 1^2 + 3^2$

$a^2 = 10$

Logo, a equação procurada é: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1$

c) e = $\frac{1}{2}$ e A_1 $(0, 2\sqrt{3})$

Solução

Como um dos vértices do eixo maior é um ponto do eixo y, a equação desta elipse é da forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Precisamos achar os valores de a e b.

Como um dos vértices do eixo maior é $(0, 2\sqrt{3})$, o outro será $(0, -2\sqrt{3})$ e o valor de a é $2\sqrt{3}$.

Como a excentricidade é

e = $\frac{1}{2}$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

c = $\sqrt{3}$

Usando a relação fundamental, encontramos b^2:

$a^2 = b^2 + c^2$

$(2\sqrt{3})^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$

$2 = b^2 + 3$

$b^2 = 9$

Logo, a equação procurada é: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$

4) Dada a elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, determine as coordenadas dos focos e dos vértices e esboce o seu gráfico.

Solução

Primeiro precisamos expressar a equação na forma reduzida e, para isso, dividimos ambos os membros da equação por 225:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

Simplificando temos: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Como o maior denominador é 25, e ele é denominador de x2, o eixo maior da elipse está sobre o eixo dos x.

Assim, temos:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Portanto, os vértices têm como coordenadas:

A_1 (-5, 0); A_2 (5, 0); B_1 (0, 3); B_2 (0, -3)

Para determinarmos os focos, precisamos descobrir o valor de c e, para isso, precisamos da relação fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 9 + c^2$

$c^2 = 16$

$c = 4$

Logo, as coordenadas dos focos são:

F_1 (-4, 0); F_2 (4, 0)

Vamos agora voltar ao sistema solar e às órbitas dos planetas apresentado!

No sistema solar, a órbita dos planetas ao redor do Sol é elíptica. O Sol está em um dos focos da elipse. A maioria dos planetas têm órbitas aproximadamente circulares, o que significa dizer que suas excentricidades estão perto de zero, conforme você viu!

A órbita de Vênus tem excentricidade 0,007, a da Terra 0,017, a de Marte 0,093, a de Júpiter 0,048, a de Saturno 0,056, a de Urano 0,047, a de Netuno 0,009. Mercúrio e Plutão têm as órbitas mais "achatadas"; suas excentricidades são 0,206 e 0,249 respectivamente.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar*: Geometria Analítica. São Paulo: Atual, 2000. v. 7.

MELLO, J. L. P. *Matemática* – volume único: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.

WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 2000