MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Trigonometria

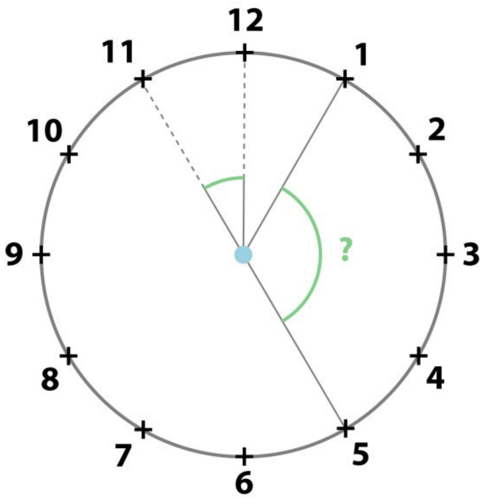
Círculo trigonométrico

Objetivo: Reconhecer as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para ângulos maiores que 90°, possibilitando a aplicação da trigonometria a triângulos quaisquer.

Situação-problema 1

Um atleta corria em uma pista circular de 50 metros de raio. Após ter completado meia volta, ele precisou interromper a corrida. Quantos metros, aproximadamente, ele percorreu?

Resposta: $C = \frac{2\pi r}{2} = \pi * 50 = 50\pi \cong 157$ metros



Situação-problema 2

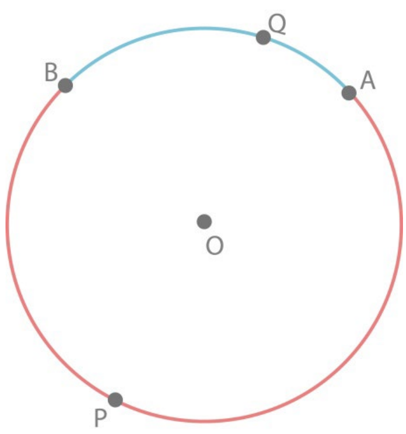
Um relógio marca 13 horas e 25 minutos. Qual a medida, em graus, do ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos? E em radianos?

Resposta: O ângulo central da circunferência mede 360 º. Logo, o ângulo entre cada hora é de $\alpha = \frac{360}{12} = 30^o$. Portanto, o ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos quando o relógio marca 13 horas e 25 minutos é 120º ou $\frac{2\pi}{3}$radianos.

Para resolver estes tipos de problemas, precisamos conhecer unidades de medidas de um arco, comprimento de arco e o ciclo trigonométrico.

Arcos de circunferência

Considere dois pontos quaisquer A e B em uma circunferência; eles dividem a circunferência em duas partes chamadas de arco de circunferência:



- **Arco(AB):** arco de extremidades A e B, contendo P.
- **Arco(BA):** arco de extremidades A e B, contendo Q.

Medidas de arcos e ângulos

As unidades mais utilizadas para medir um arco são o grau (°) e o radiano (rad).

Um arco mede 1 ° (um grau) quando equivale a $\frac{1}{360}$ da circunferência que o contém. Dizemos, então, que a circunferência mede 360º. Por outro lado, um arco mede 1 rad (1 radiano) quando seu comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

Comprimento de arco

Na Grécia Antiga já se sabia que, em qualquer circunferência, a razão entre o comprimento (C) e o raio (r), ou seja, $\frac{C}{r}$ é uma constante. A metade desta constante foi chamada de π .Assim temos, $\frac{1}{2}.\frac{C}{r} = \pi$ e, portanto $C = 2\pi\, r$.

Por outro lado, sabe-se também que para arcos determinados por um mesmo ângulo central, a razão entre o comprimento do arco l e o raio r da circunferência que o contém é constante e representa a medida do arco, em radiano. Logo, $\frac{I}{r} = \alpha$ e, portanto, $I = \alpha\, r$.

Exemplos:

1) Calcule o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 15 cm.

Resposta: Sabemos que $C = 2\pi\, r$ então $C = 2\pi\, .15 = 30\pi \cong 94{,}25$ cm.

2)Calcule o comprimento de um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad determinado em uma circunferência de raio 12 cm.

Resposta: Sabemos que $I = \alpha\, r$ então $I = \frac{\pi}{6}\, .12 = 2\pi \cong 6{,}28$cm.

Conversão de medidas

Vimos que o comprimento de arco é dado por $I = \alpha\, r$, logo o comprimento da circunferência pode ser escrito como $C = \alpha\, r$. No entanto, sabemos também que o comprimento da circunferência de raio é $C = 2\pi\, r$. Igualando estas duas expressões, concluímos que $\alpha\, r = 2\pi\, r$ e, portanto,$\alpha = 2\pi$. Logo, o ângulo central da circunferência, medido em radianos, é 2π rad. Portanto, podemos concluir que $2\pi \text{ rad} = 360^o$, ou seja, $\pi \text{ rad} = 180^o$.

Exemplos:

1. Determine, em radiano, a medida do ângulo de 30º.

Resposta: Sabendo que $\pi \text{ rad} = 180^o$, podemos utilizar a seguinte regra de três:

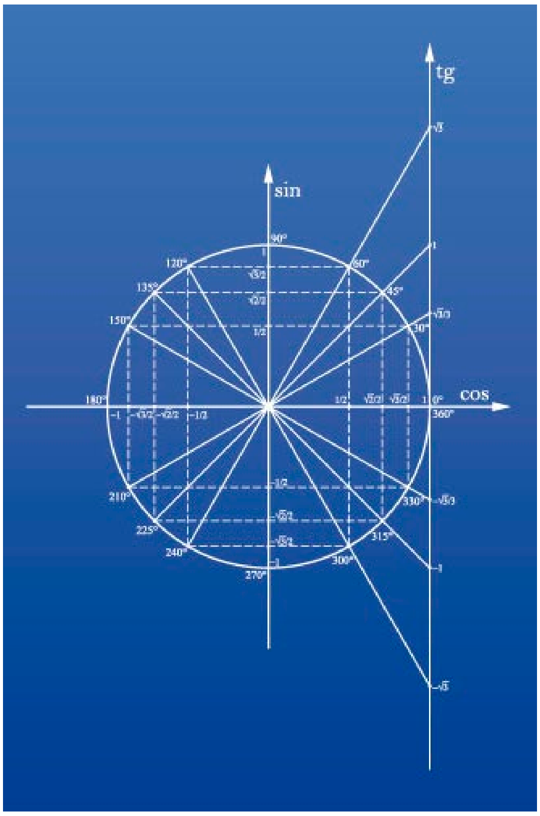
$$\left.\begin{array}{l} \pi \text{ rad} \_\_\_\_\_\_ 180^o \\ x \text{ rad} \_\_\_\_\_\_ 30^o \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 180x = 30\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

2. Determine, em graus, a medida do ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Resposta: Sabendo que $\pi\,\mathrm{rad} = 180^o$, podemos concluir que: $\frac{2\pi}{3}\mathrm{rad} = \frac{2.180^o}{3} = \frac{360^o}{3} = 120^o$.

Circunferência orientada

Podemos percorrer uma circunferência em dois sentidos: **horário** (no sentido do movimento dos ponteiros do relógio) e **anti-horário** (no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio). Por convenção, o segundo é considerado **positivo** e o sentido horário, **negativo**.

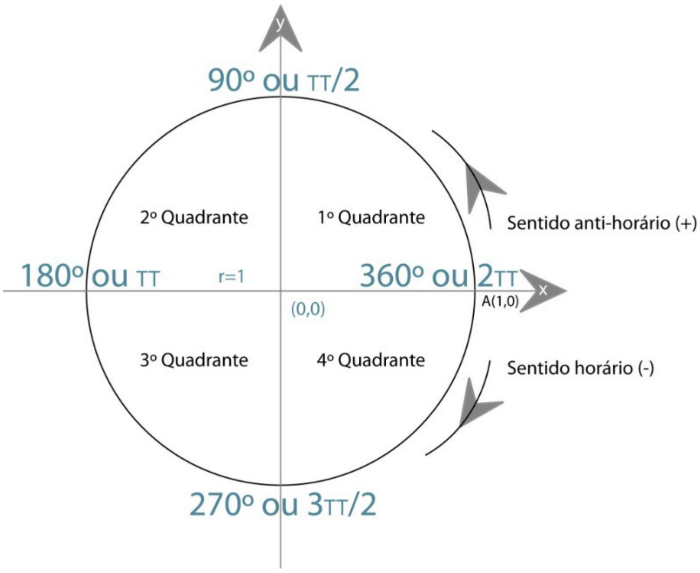


Circunferência ou ciclo trigonométrico

A **circunferência trigonométrica**, ou **ciclo trigonométrico**, é uma circunferência orientada com centro na origem do plano cartesiano e raio unitário, ou seja, o centro é o ponto $(0, 0)$ e o raio mede 1 unidade. Na circunferência trigonométrica, o ponto $A(1, 0)$ é a origem de todos os arcos, isto é, o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto B para formar o arco(AB).

Os eixos x e y dividem a circunferência trigonométrica em quatro quadrantes, conforme ilustra a figura a seguir:

Como a circunferência tem 360 ° ou 2π rad , concluímos que cada um destes arcos mede 90 ° ou $\frac{\pi}{2}$ rad.



Arcos trigonométricos

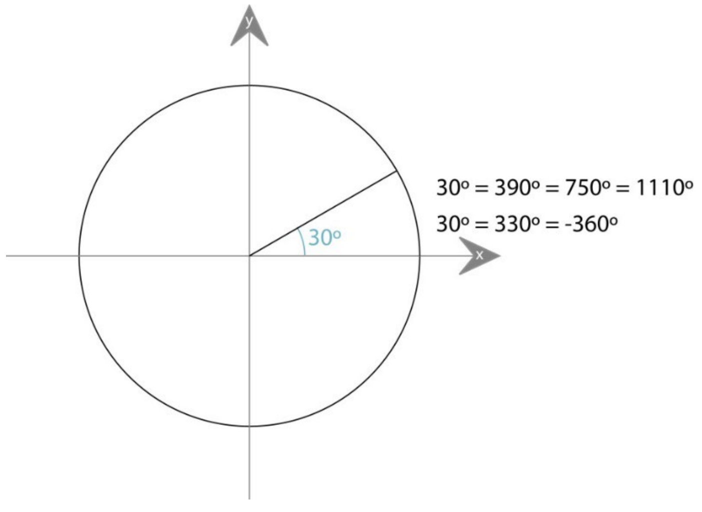
São os arcos de uma circunferência trigonométrica com mesma origem e mesma extremidade.

Observe que um arco trigonométrico também pode ser positivo ou negativo. Ainda que é possível determinar arcos de qualquer medida, pois arcos maiores que 360º ou 2π rad são obtidos após completarmos mais de uma volta no ciclo trigonométrico.

Assim, dado um arco de origem em A (1,0) e extremidade B, tal que a medida do arco (AB) é 30 º, temos infinitos outros arcos de mesma origem e extremidade, mas com medidas diferentes, dependendo do número de voltas no sentido anti-horário (positivo) ou no sentido horário (negativo).

Logo, se a partir do ponto B dermos uma volta completa no sentido anti-horário, a medida do arco(AB) será 30 º + 360 º = 390 º . Se dermos duas voltas completas, a medida do arco(AB) será 30º+2x360º= 750 º. Se dermos três voltas completas, a medida do arco(AB) será 30º + 3 . 360º = 1110º e, assim, sucessivamente.

Analogamente, se dermos uma no sentido horário a medida do arco(AB) será 30º - 360º = -330º. Se dermos duas voltas completas no sentido horário, a medida do arco (AB) será 30º - 2 x 360º = - 690 º.



Dessa forma, podemos concluir que quando, medido em graus, a medida *x* do arco (AB) pode ser representada por: $\boxed{x = x_0 + k\,.360^o, k \ \in Z}$.

Analogamente, quando os arcos são medidos em radianos, a medida *x* do arco (AB) pode ser representada por: $\boxed{x = x_0 + k\,.2\pi = x_0 + 2k\pi, k \ \in Z}$

Exemplos:

1. Considere o arco de origem em A e extremidade em B, tal que a medida do arco(AB) = 40 º. Determine a medida do arco de mesma origem, mas cuja extremidade é obtida após completar 2 voltas no sentido anti-horário a partir de B.

Resposta: Sabemos que $x = x_0 + k\,.360^o$, logo, $x = 40^o + 2\,.360^o = 760^o$.

2. Considere o arco de origem em A e extremidade em B, tal que a medida do arco (AB) = $\frac{\pi}{4}$ rad. Determine a medida do arco de mesma origem, mas cuja extremidade é obtida após completar 3 voltas no sentido anti-horário a partir de B.

Resposta: Sabemos que$x = x_0 + 2k\pi$ logo:

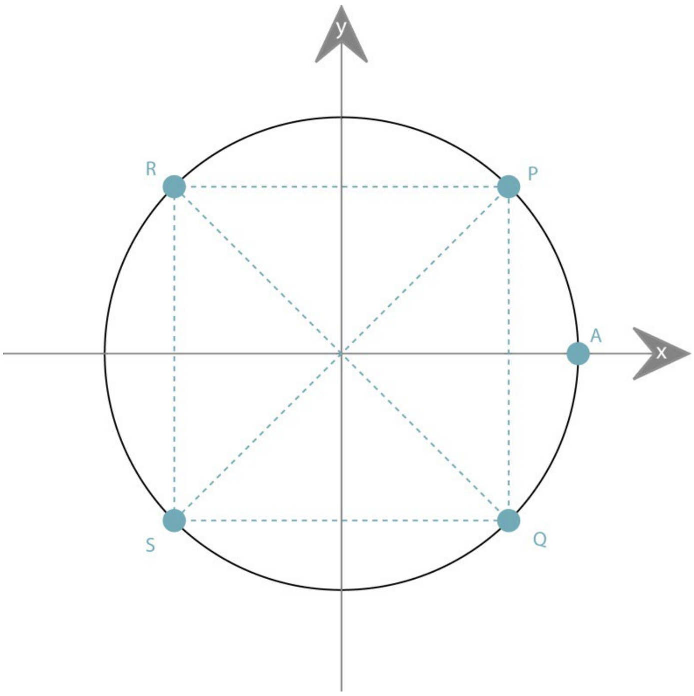
$x = \frac{\pi}{4} + 2.3.\pi = \frac{\pi}{4} + 6.\pi = \frac{\pi + 24\pi}{4} = \frac{25\pi}{4}$ rad.

Arcos simétricos

Dizemos que dois arcos trigonométricos são simétricos se as extremidades destes arcos são pontos simétricos em relação ao eixo x, ou ao eixo y, ou à origem (0, 0).

Observando a figura abaixo, podemos verificar que:

- P e Q são simétricos em relação ao eixo x. Logo, arco(AQ) = 360º - arco(AP) = 2π - arco(AP).
- P e R são simétricos em relação ao eixo y. Logo, arco(AR) = 180º - arco(AP) = π - arco(AP).
- P e S são simétricos em relação à origem do plano cartesiano, ou seja, em relação ao ponto (0, 0). Logo, arco(AS) = 180º + arco(AP) = π + arco(AP).



Exemplo:

Determine os arcos simétricos ao arco de 60 º, em relação ao eixo x, ao eixo y e à origem do plano cartesiano.

Resposta:

- Simétrico em relação ao eixo x: 360 º-60 º= 300 º.
- Simétrico em relação ao eixo y: 180 º - 60 º = 120 º.
- Simétrico em relação ao eixo à origem do plano cartesiano: 80º+ 60º=240 º.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. *Fundamentos da Matemática Elementar - Ensino Médio*. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. v.3

MELLO, José Luiz Pastore. *Matemática: construção e significado – Ensino médio*. São Paulo: Moderna, 2005.