MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Análise combinatória

combinações

Objetivo: Apresentar o conceito de combinação na análise combinatória e estudar alguns exemplos típicos.

Definição

Combinações são agrupamentos que diferem um do outro somente pela natureza dos elementos. Logo, não importa sua ordem. Indica-se e lê-se combinação de n elementos tomados p a p; e sendo que . Tem-se a seguinte fórmula:

$$C_{n,\ p} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!}$$

É comum também utilizar a notação do coeficiente binomial para as combinações, isto é, escreve-se:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!}$$

Situação-problema 1

Consideremos uma sala de aula com 25 alunos no total. Queremos saber de quantas maneiras podemos formar grupos de 5 alunos. Suponha que o primeiro grupo G1 formado tenha escolhido os alunos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. E que um segundo grupo G2 formado tenha escolhido os alunos a_2, a_1, a_3, a_4, a_5. A menos da posição de cada aluno, os grupos G1 e G2 formados são os mesmos, já que a ordem não importa. Precisamos fazer uma combinação de 25 elementos 5 a 5.

$$C_{25\,.\,5} = \frac{25!}{5!\ (25\text{-}5)!} = \frac{25.25.23.22.21.20!}{5.4.3.2.1.20!} = 5.6.23.11.7 = 53130$$

Portanto, podemos formar 53130 grupos distintos com 5 alunos em cada grupo.

Situação-problema 2

Numa assembleia, há 57 deputados, sendo 31 governistas e os demais oposicionistas. Queremos saber quantas comissões de 7 deputados, sendo 4 membros do governo e 3 de oposição, somos capazes de formar.

As comissões governistas são dadas pela combinação de todos os membros do governo (31), tomadas 4 a 4, isto é, $C_{31,4}$. As oposicionistas são dadas pela combinação de todos os membros de oposição (57-31=26), tomadas 3 a 3, isto é, $C_{26,3}$, logo, pelo princípio multiplicativo, o total de comissões é dado pelo produto:

$$C_{31,4} \cdot C_{26,3} = \frac{31!}{4!\ (31\text{-}4)!} \cdot \frac{26!}{3!\ (26\text{-}3)!} = \frac{31.30.29.28}{4.3.2.1} = \frac{26.25.24}{3.2.1}$$

Ou seja, há $C_{31,4} \cdot C_{26,3}$ = 81.809.000 comissões possíveis.

IMPORTANTE:

A ordem nunca é importante quando resolvemos problemas de **combinação**.

Exercício resolvido: em uma prova constam 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução

A ordem importa nesse problema? Não! Como não há preferência por questões específicas, o aluno vai simplesmente selecionar 10 e resolvê-las. Trata-se, então, de um problema de agrupamento por combinação. São 15 questõesque devem ser combinadas, tomando-as de 10 em 10. Claro! É só aplicarmos a fórmula $C_{15,10}$. Temos então que:

$$C_{15\,,\ 10} = \frac{15!}{10!\ (15\text{-}10)!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{10!\,.5.4.3.2.1} = 7.13.3.11 = 30003$$

Portanto há 3003 modos do aluno escolher 10 entre as 15 questões.

Exercício resolvido: em um parque há 10 leões dos quais 5 devem ser escolhidos para ocupar determinado setor. Se entre eles há um casal que deve permanecer junto sempre, encontre o total de maneiras distintas de escolher os 5 que vão para o tal setor.

Solução

Este problema tem um detalhe interessante. O casal que deve permanecer junto pode, ou não, ir para o novo setor. Então há dois casos a considerar: quando eles estiverem no grupo que irá ao novo setor e quando eles não estiverem. Nesse problema a ordem importa? Não! Excetuando a informação de que há 2 leões (casal) que devem permanecer juntos, é indiferente como vamos agrupar os outros 8 leões. É, portanto, um problema de combinação. No caso em que o casal irá para o novo setor, sobram, então, 8 leões para serem combinados de 5 em 5, certo? Errado! O casal ocupará 2 lugares no grupo de 5, logo, sobram 3 posições livres. Assim, vamos combinar 8 elementos tomados 3 a 3, isto é:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8.7.6.5!}{3.2.1.5!} = 56$$

É essa a resposta ao problema? Ainda não, nós precisamos do outro caso! No caso em que o casal não irá para o novo setor. Sobram os 8 leões para, desta vez, serem agrupados de 5 em 5, já que o casal não estará no grupo. Portanto, temos:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8.7.6.5!}{5!\,.3.2.1} = 56$$

Dessa forma, temos 56 possibilidades caso o casal seja levado ao novo setor e outros 56 casos, caso o casal não seja levado. Portanto, há um total de possibilidades.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os Elos da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 1993