**MATEMÁTICA**

***UNINOVE***

**Módulo - IV**

# Equações polinomiais

## relações de Girard

**Objetivo:** Estudar as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial.

## Situação-problema

Dada a equação $x^3 + 3x^2 + ix + 9 = 0$, determine, de maneira mais eficiente, a soma e o produto entre suas raízes.

**Resolução**

Utilizando as relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$$

$$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{9}{1} = -9$$

Foi Albert Girard quem aprofundou os estudos sobre as raízes de equações polinomiais do 2º grau criando relações entre os seus coeficientes e as raízes da equação. Essas relações determinavam a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau. Conhecendo essas relações e sabendo mais algumas informações sobre as raízes de uma equação, podemos resolver mais facilmente esta equação. A seguir, vamos apresentar essas relações para equações polinomiais de grau 2 e 3, e a partir daí, vamos generalizar para uma equação de grau n.

## Vamos começar então pela equação de grau 2

Sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes de uma equação de grau 2 do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e vamos lembrar do Teorema da Decomposição, que afirma:

$$ax^2 + bx + c \equiv a\,(x-x_1)(x-x_2)$$

**DICA:**

O símbolo ≡ significa que os polinômios são idênticos

Dividindo ambos os lados por *a*, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv (x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)$$

Colocamos, no lado direito da igualdade, x em evidência, fica:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Da identidade de polinômios, temos:

**1)** $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

**2)** $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Que são as relações de Girard para uma equação polinomial de grau 2.

**IMPORTANTE:**
Relações de Girard – equação polinomial de grau 2:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

EXEMPLO

Dada a equação $2x^2 + 6x + 7 = 0$ e sabendo que $x_1$ e $x_2$ são as raízes da equação, calcule:

**1)** $x_1 + x_2$

**Resolução**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

**2)** $x_1 \cdot x_2$

**Resolução**

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

**3)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

**Resolução**

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2} = \frac{-3}{\frac{7}{2}} = -\frac{6}{7}$$

**4)** $(x_1)^2 + (x_2)^2$

**Resolução**

Sabemos que: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1)^2 + 2x_1 . x_2 + (x_2)^2$

Substituindo $x_1 + x_2 = -3$ e $x_1 \,.\, x_2 = \frac{7}{2}$ na equação anterior, temos:

$$(-3)^2 = (x_1)^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right) + (x_2)^2$$

$$9 - 7 = (x_1)^2 + (x_2)^2$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 2$$

## Vamos agora à equação de grau 3

Sejam $x_1$, $x_2$ e $x_3$, as raízes de uma equação de grau 3, do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$ e vamos lembrar do Teorema da Decomposição, que afirma:

$$ax^3 + b + cx + d \equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Dividindo ambos os lados por a e efetuando a distributividade do lado direito, temos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Da identidade de polinômios, temos:

**1)** $\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$

**2)** $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$

**3)** $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}$

Que são as relações de Girard para uma equação polinomial de grau 3.

**IMPORTANTE:**

Relações de Girard – equação polinomial de grau 3.

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$

$x_1 x_2 x_3 = -\frac{b}{a}$

EXEMPLO

Dada equação $x^3 - 4x^2 + 6x - 5 = 0$ e sabendo que $x_1$ e $x_2$ e $x_3$ são as raízes da equação, calcule:

**1)** $x_1 + x_2 + x_3$

**2)** $x_1 x_2 x_3$

## Solução

**1)** $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$

**2)** $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$

## Generalizando as relações de Girard para uma equação de grau n

Seja a equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$; na $\neq 0$ e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, as suas raízes. Conforme raciocínio anterior, obtemos:

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ (soma das n raízes)

$x_1 \,.\, x_2 + x_1 \,.\, x_3 + \cdots + x_n \,.\, x_{n-1} = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$ (soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas)

$$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 + x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_4 + \cdots + x_n \,.\, x_{n-1} \,.\, x_{n-2} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

(soma dos produtos das raízes tomadas três a três)

$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, \cdots \,.\, x_n = (-1)^n \,.\, \frac{a_0}{a_n}$ (produto das n raízes)

Vamos ver um exemplo para uma equação de grau 4:

EXEMPLO

Dada equação $2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ e sabendo que $x_1$ e $x_2$ e $x_3$ são as raízes da equação, calcule:

**1)** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

**Solução**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4}{2} = -2$$

**2)** $x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_1 . x_4 + x_2 . x_3 + x_2 + x_4 + x_3 . x_4$

**Solução**

$$x_1 . x_2 + \ x_1 . x_3 + x_1 . x_4 + x_2 . x_3 + x_2 . x_4 + x_3 . x_4 = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{-3}{2}$$

**3)** $x_1 . x_2 . x_3 + x_1 . x_3 . x_4 + x_1 . x_3 . x_4 + x_2 . x_3 . x_4$

**Solução**

$$x_1 . x_2 . x_3 + x_1 . x_2 . x_4 + x_1 . x_3 . x_4 + x_2 . x_3 . x_4 = \frac{a_{n-3}}{a_n} = -\frac{2}{2} = -1$$

**4)** $x_1 . x_2 . x_3 . x_4$

**Solução**

$$x_1 . x_2 . x_3 . x_4 = (-1)^n . \frac{a_0}{a_n} = (-1)^4 . \frac{-4}{2} = -2$$

## Exercícios resolvidos

**1)** Dada a equação $x^2 - 3x - 10 = 0$, determine suas raízes utilizando as relações de Girard.

**Solução**

Sabemos que $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3$ e que $x_1 x_2 = \frac{-10}{1} = -10$. Deste produto, temos as seguintes situações: -10 = -2 x 5 ou -10 = 2 x -5.

Como a soma é igual a 3, então pode ser -2 + 5 = 3.

Logo: $x_1 = -2$; $x_2 = 5$

**2)** Dada a equação $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ e sabendo que uma das raízes é (2 + 3i), determine as outras raízes

**Solução**

Como uma das raízes é complexa, pelo teorema das raízes complexas, então, temos também o seu conjugado (2 - 3i). Assim, só falta encontrar uma raiz.

Pelas relações de Girard, sabemos que $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$, então:

$$(2 + 3i) + (2 - 3i) + x_3 = 6$$
$$(2 + 2) + (3i - 3i) + x_3 = 6$$
$$x_3 = 6 - 4 = 2$$
$$S = \{(2 + 3i), (2 - 3i), 2\}$$

*Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.*

**REFERÊNCIAS**

IEZZI, Gelson. *Matemática* – Ciência e aplicações – Ensino Médio – 3º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau* – 3º ano São Paulo: Atual, 2001.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática Ensino Médio* – 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2010.