MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Matrizes

Definição, tipos de matrizes, igualdade de matrizes

Objetivo: Definir as matrizes e estudá-las a partir do seu elemento genérico, definindo algumas propriedades características. Trabalhar com a igualdade entre duas matrizes.

Matrizes nada mais são do que tabelas de números que possuem diversas aplicações tanto na Matemática como em outras áreas do conhecimento.

Um exemplo de seu uso são as tabelas que mostram o valor nutricional dos alimentos.

Tabela de Informações Nutricionais **Porção de 50g (1/4 de xícara de arroz cru)**		
Quantidade por porção		%VD(*)
Valor Energético	170kcal/714kj	9%
Carboidratos	40,0g	13%
Proteínas	3,0g	4%
Gorduras totais	0g	0%
Gorduras saturadas	0g	0%
Fibra alimentar	1,0g	4%
Sódio	0mg	0%
(*)% Valores com base em uma dieta de 2000kcal ou 8400 kjl (*)% Valores com base em uma dieta de 2000kcal ou 8400. Fonte: ANVISA		

Definição

As matrizes são tabelas de números reais dispostos ordenadamente em linhas e colunas.

EXEMPLO

A tabela abaixo mostra o número de vendas efetuadas por uma agência de automóveis durante o primeiro trimestre.

	Jan.	**Fev.**	**Mar.**
Gol	20	18	25
Corsa	12	10	15
Fiesta	15	16	20
Astra	18	15	21

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 25 \\ 12 & 10 & 15 \\ 15 & 16 & 20 \\ 18 & 15 & 21 \end{bmatrix}$ é uma **matriz** e cada número é chamado **elemento** da matriz.

Observação: *representa-se uma matriz colocando-se seus elementos entre parênteses ou colchetes.*

Nesse exemplo, a matriz tem 4 linhas e 3 colunas. Dizemos, portanto, que é uma **matriz de ordem 4 por 3 (4x3)**.

Representação genérica

Um elemento genérico de uma matriz A é indicado por a_{ij}, em que i indica a linha e j a coluna a qual o elemento pertence.

Notação: $A = (a_{ij})_{mxn}$

nº de colunas

nº de linhas

Agora consideremos a matriz A acima indicada por: $A = (a_{ij})_{4x3}$

- Quem é o elemento a_{13}?

O elemento a_{13} é o que pertence à 1ª linha e à 3ª coluna da matriz A, ou seja, $a_{13} = 25$.

- Quem é o elemento a_{31}?

O elemento a_{31} é o que pertence à 3ª linha e à 1ª coluna da matriz A, ou seja, $a_{31} = 15$.

- Quem é o elemento a_{42}?

O elemento a_{42} é o que pertence à 4ª linha e à 2ª coluna da matriz A, ou seja, $a_{42} = 15$.

- Quem é o elemento a_{24}?

O elemento a_{24} é o que pertence à 2ª linha e à 4ª coluna da matriz A, ou seja, esse elemento não existe.

EXEMPLO

Vamos encontrar uma matriz dados a sua ordem e a sua forma geral. Para isso, devemos, em primeiro lugar, montá-la genericamente. Por exemplo:

1. $A = (a_{ij})_{3x2}$ tal que $a_{ij} = 3i - 2j$

Como A é de ordem 3 por 2, A tem 3 linhas e 2 colunas. Assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 3.1 - 2.1 = 3 - 2 = 1$ **(i = 1 e j = 1)**

$a_{12} = 3.1 - 2.2 = 3 - 4 = -1$ **(i = 1 e j = 2)**

$a_{21} = 3.2 - 2.1 = 6 - 2 = 4$ **(i = 2 e j = 1)**

$a_{22} = 3.2 - 2.2 = 6 - 4 = 2$ **(i = 2 e j = 2)**

$a_{31} = 3.3 - 2.1 = 9 - 2 = 7$ **(i = 3 e j = 1)**

$a_{32} = 3.3 - 2.2 = 9 - 4 = 5$ **(i = 3 e j = 2)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

2. A = $(a_{ij})_{2x2}$ tal que $a_{ij} = (i + j)^2$

Como A é de ordem 2 por 2, A tem 2 linhas e 2 colunas. Assim:

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$a_{11} = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$ (i = 1 e j = 1)

$a_{12} = (1 + 2)^2 = 3^2 = 9$ (i = 1 e j = 2)

$a_{21} = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9$ (i = 2 e j = 1)

$a_{22} = (2 + 2)^2 = 4^2 = 16$ (i = 2 e j = 2)

A = $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

Matrizes especiais

Algumas matrizes possuem propriedades características e recebem nomes especiais.

1. Matriz linha: tem somente uma linha.

Exemplo: $A = [\ 4\ 1\ 2\ ]$, matriz linha de ordem 1x3.

2. Matriz coluna: tem somente uma coluna.

Exemplo: $B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 7 \end{bmatrix}$, matriz coluna de ordem 2x1.

3. Matriz nula: tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo: $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz nula de ordem 2x3.

4. Matriz quadrada: tem o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplo: $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 2x2 ou, simplesmente, de ordem 2.

Observação: *os elementos a_{ij}, em que i = j, formam uma diagonal chamada diagonal principal. A outra diagonal denomina-se diagonal secundária. Na matriz D acima, a diagonal principal é formada pelos números 2 e 5 e a diagonal secundária, pelos números -1 e 3.*

5. Matriz diagonal: é uma matriz quadrada em que os elementos <u>não</u> pertencem à diagonal principal são nulos.

Exemplo: $E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, matriz diagonal de ordem 3.

6. Matriz identidade: é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a.

Notação: *I_n: matriz identidade de ordem n.*

Exemplos: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Matriz transposta: se A é uma matriz de ordem mxn, denominamos a transposta de A a matriz de ordem nxm, obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas.

Notação: *indica-se a transposta de A por A^t*

Exemplo: $\underset{3x2}{A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{2x3}{\boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix}}$

Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são iguais se forem do mesmo tipo (mesma ordem) e se apresentarem todos os elementos correspondentes (elementos que ocupam a mesma posição) iguais.

EXEMPLO

Determine x e y para que A = B

1. $A = \begin{bmatrix} x^2 & 3 \\ y & x+y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Em primeiro lugar, precisamos observar que as matrizes A e B são de mesma ordem. Assim, para que A seja igual a B, devemos ter os elementos correspondentes iguais.

I. $x2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

II. $3 = 3$

III. $y = -1$

IV. $x + y = 1$ (precisamos verificar se os valores encontrados para x e y nos itens e III satisfazem IV).

$y = -1$ e se $x = 2$, temos $x + y = 2 + (-1)$ (ok, satisfaz IV)

$y1$ e se $x = 2$, temos $x + y = -2 + (-1) = -3$ (não satisfaz IV)

Portanto, para que A = B, os valores de x e y devem ser respectivamente 2 e − 1.

2. $A = \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ x + y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Em primeiro lugar, precisamos observar que as matrizes A e B são de mesma ordem. Assim, para que A seja igual a B, devemos ter os elementos correspondentes iguais.

I. $x2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

II. $y = 1$

III. $x + y = 5$ (precisamos verificar se os valores encontrados para x e y nos itens I e II satisfazem III):

$y = 1$ e se $x = 3$, temos $x + y = 3 + 1 = 4$ (não satisfaz III)

$y = 1$ e se $x = -3$ 3, temos $x + y = -3 + 1 = -2$ (não satisfaz III)

Portanto, não existem valores x e y para que a matriz A seja igual à matriz B.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x + y & 5 \\ 3x - y & 1 \end{bmatrix}$

Em primeiro lugar, precisamos observar que as matrizes A e B são de mesma ordem. Assim, para que A seja igual a B, devemos ter os elementos correspondentes iguais.

I. $2 = x + y$
II. $5 = 5$
III. $10 = 3x - y$
IV. $1 = 1$

Portanto, para que A = B, devemos resolver o sistema linear formado pelas equações I e III.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 10 \end{cases} \oplus$$
$$4x + 0 = 12$$
$$x = \frac{12}{4} = 3$$

Substituindo o valor encontrado para x em uma das duas equações temos:

$x + y = 2 \Rightarrow 3 + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 3 \Rightarrow y = -1$

Portanto, para que A = B, os valores de x e y devem ser respectivamente 3 e – 1.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar*: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.