Matemática
UNINOVE

Geometria Especial Métrica

cálculo de áreas e volumes de prisma

Objetivo: Estudar os prismas e seus elementos. Calcular as áreas da base, lateral e total e os volumes dos prismas.

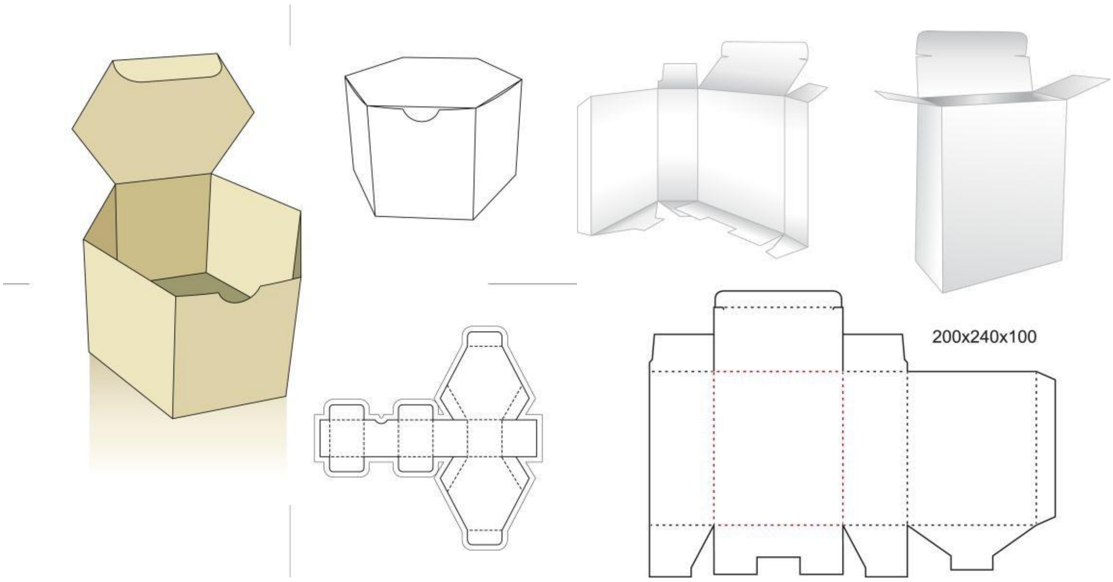
Módulo III

Já identificamos os poliedros e, dentre eles, caracterizamos os prismas. Estudaremos a definição formal de um prisma, seus elementos, cálculo de áreas e volumes.

A embalagem tem uma significativa importância para o produto. Além de protegê-lo, valoriza sua apresentação. Há um dito popular que diz: “A primeira impressão é a que fica.” Partindo dessa premissa, a embalagem precisa “impressionar os olhos” do consumidor, ou seja, atender ao senso estético. Mas isso não é suficiente. É necessário que seja fácil manuseá-la e que o produto fique devidamente protegido da ação do transporte e do tempo. Para isso, alguns cuidados devem ser tomados, em particular, com a forma e a resistência.

Existem diversos tipos de embalagem seja na forma, no tamanho e no material, tais como: folhas de papel ou celofane, saco ou sacola de pano, plástico ou papel, caixa de papelão ou de metal, lata de alumínio, dentre outros.

Para criar uma embalagem, necessitamos saber qual o produto (tipo, tamanho), para que tipo de consumidor (material, cor, adorno) e como será transportado. Com essas informações, inicialmente, procuramos fazer um desenho (em perspectiva e planificado) que deve conter todas as informações necessárias à sua confecção, como medidas, espécie de material, dentre outros.



Considere o seguinte problema: uma fábrica de embalagens produz caixas depapelão (sem abas) em forma de paralelepípedo retângulo de dimensões 9 cm, 5 cm e 3 cm. Calcule quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer uma dessas caixas.

Você será capaz de responder a essa pergunta ao final do texto.

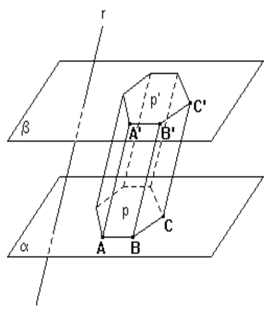
Prismas

Definição: consideremos dois planos paralelos α e β, p um polígono convexo contido em α, e r uma reta que intercepta α e β. Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos à r, tais que uma de suasextremidades é um ponto do polígono p e a outra extremidade é um ponto no plano β.

Elementos

Num prisma consideramos os seguintes elementos:

- Os polígonos p e p^1, que são congruentes, são as **bases**.
- Os paralelogramos AA’BB, BB’CC etc, são as **faces laterais.**
- Os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \cdots, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}$ etc são as **arestas das bases.**
- Os segmentos $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ etc, são as **arestas laterais.**
- A distância entre os planos das bases α e β é a **altura** do prisma.



DICA:

Reveja o conteúdo nº 7!

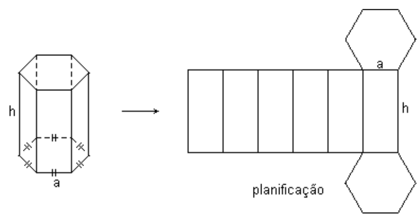
Áreas da superfície de um prisma

Dado um prisma qualquer, definimos.

- A **área da base (A_b)** é a área do polígono da base.
- A **área lateral (A_l)** é a soma das áreas das faces laterais.
- A **área total (A_t)** é a soma da área lateral com as áreas das bases: $\mathbf{A_t = A_l + 2A_b}$

EXEMPLOS

1. Calcular a área total do prisma hexagonal regular a seguir que tem aresta da base **a** e aresta lateral **h**.



Resolução

Como vimos, um prisma regular é um prisma reto e, portanto, as faces laterais são retângulos congruentes.

Assim, a área lateral do prisma é dada por:

A_l = 6.(área do retângulo)

$A_l = 6.a.h$

A base do prisma é um hexágono regular de lado **a**, portanto, a área da base é dada por:

$$A_b = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

DICA:

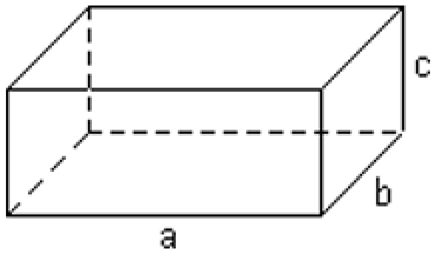
Recorde.
A área de um triângulo equilátero de lado l é dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.
Assim, a área de um hexágono regular de lado l é dada por $A = 6\,\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\,l^2\sqrt{3}}{2}$

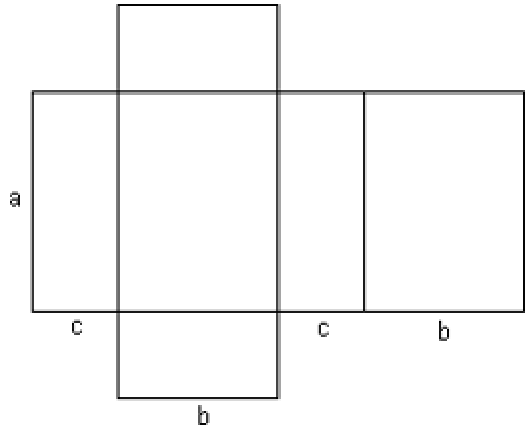
Logo, a área total do prisma hexagonal regular é:

$A_t = A_l + 2^{a}{}_{b} = 6ah +$ formula 04 $2\,.\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 6ah + 3a^2\sqrt{3}$

$$A_t = 3a\left(2h + a\sqrt{3}\right)$$

2. Calcular a área total do paralelepípedo retângulo a seguir:





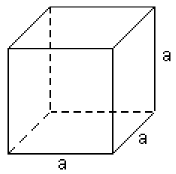
Resolução

A sua área total é a soma das áreas de seis retângulos: os dois retângulos das bases que têm dimensões **a** e **b**; dois retângulos com dimensões **a** e **c** e dois retângulos com dimensões **b** e **c**, das faces laterais. Então,

$A_t = 2ab + 2ac + 2bc$

$A_t = 2(ab + ac + bc)$

3. Calcular a área total do cubo.



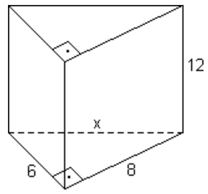
Resolução

Como o cubo é um paralelepípedo retângulo de arestas congruentes, temos:

$A_t = 2\ (aa + aa + aa)$

$A_t = 6a^2$

4. Determine a área da base e as áreas lateral e total de um prisma triangular reto de altura igual a 12 cm, sabendo que o triângulo da base é retângulo de catetos 6 cm e 8 cm.



Resolução

Sendo a base do prisma um triângulo retângulo, temos:

$$A_b = \frac{6.8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

A área lateral é dada pela soma das áreas dos retângulos que compõem as faces laterais. Calculando a medida da hipotenusa do triângulo da base, temos:

$x^2 = 6^2 + 8^2$ (Teorema de Pitágoras)

x = 10cm

Portanto,

$A_l = 6 . 12 + 8 . 12 + 10 . 12$

$A_l = 288 \text{ cm}^2$

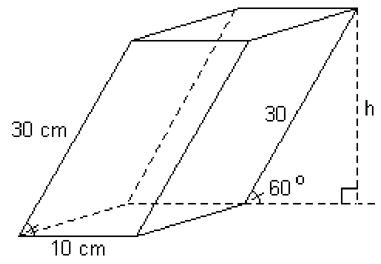
E a área total é:

$A_t = A_l + 2^a{}_b$

$A_t = 288 + 2 . 24$

$A_t = 336 \text{ cm}^2$

5. Determine a área total do prisma oblíquo de base quadrada da figura a seguir:



Resolução

Sendo a base do prisma um triângulo retângulo, temos:

$A_b = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$

Para calcularmos a área lateral que é formada por quatro paralelogramos de base 10 cm, precisamos calcular a medida da altura **h**.

Para isso, vamos usar uma relação trigonométrica no triângulo retângulo formado conforme a figura.

$$\text{sen}\,60^{\text{o}} = \frac{\text{h}}{30}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{h}}{30}$$

$$\text{h} = 15\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Portanto,

$$\text{A}_\text{l} = 4\,.\underbrace{(10.15\sqrt{3})}_{\text{Área do paralelogramo}} = 600\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

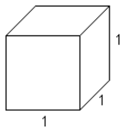
E a área total é:

$A_t = A_l + 2^{a}{}_{b}$

$A_t = 600\sqrt{3} + 2\,.\,100 = 200\left(1 + 3\sqrt{3}\right) cm^2$ raiz quadrada

Volume de um prisma

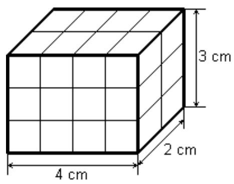
Podemos dizer que o volume de um sólido é a quantidade de espaço ocupada por ele. Muitas vezes, na prática, calculamos volumes sem saber: “Hoje tomei um copo de leite”; “Mãe, quantas xícaras de açúcar vão no bolo?”. Quando dizemos copo de leite ou xícara de açúcar, estamos nos referindo ao conteúdo, à quantidade de leite ou de açúcar, logo o copo e a xícara são medidas de volume. Porém, há copos e xícaras de vários tamanhos e, dessa forma, as medidas de volume podem não ser as mesmas para todas as pessoas. Assim, vamos calcular o volume dos sólidos por meio de uma medida padrão, que, ao invés de ser um copo ou uma xícara, será um cubo de aresta uma unidade. Dessa forma, o volume de um prisma deve ser o número que exprime quantas vezes o sólido contém o cubo unitário.



O volume do cubo é 1 x 1 x 1 = $1u^3$, ou seja, 1 x 1 (área da base) e 1 x 1 x 1 é a área da base vezes a altura.

EXEMPLO

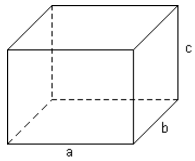
Vamos calcular o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões 4 cm, 2 cm e 3 cm.



Analisando a figura, vemos que o paralelepípedo é formado por 8 (4 x 2) cubos unitários na base e que tem 3 camadas iguais à camada da base. Logo, tem 3 x 8 = 24 cubos unitários no total. Portanto, o paralelepípedo é formado por 4 x 2 x 3 = 24 cubos de $1cm^3$ e dizemos que o seu volume é de $24cm^3$.

De modo geral, o volume **V** de um paralelepípedo retângulo de dimensões **a, b** e **c** é dado por:

$V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot c$



Observação: *Como **a.b** é a área da base e **c** é a altura do paralelepípedo, podemos escrever:* $\boldsymbol{V = A_b \cdot h}$

EXEMPLO

1. Uma indústria de embalagens gastou 600 cm^2 de papelão para construir uma caixa cúbica. Calcule o volume dessa caixa.

Resolução

Como vimos, a área total de um cubo é dada por $A_t = 6a^2$.

Assim, temos:

$600 = 6a^2$

$a = 10$ cm

Logo, o volume da caixa é:

$V = a^3$ **(*)**

$V = 10^3$

$V = 1000\ cm^3$

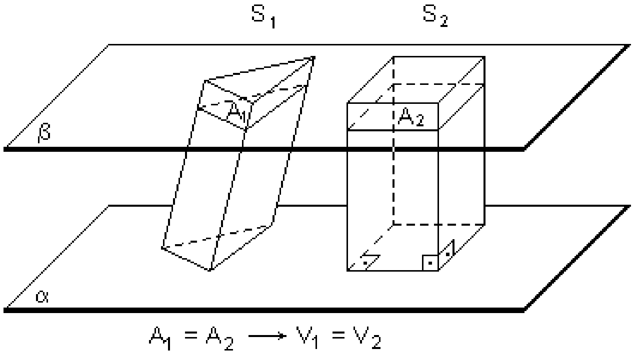
Observação: *O cubo é um caso particular de paralelepípedo retângulo com arestas iguais, portanto, seu volume é dado por* $V_{cubo} = a \cdot a \cdot a = a^3$

Princípio de Cavalieri

Falamos sobre o cubo e o paralelepípedo retângulo. Mas e os outros prismas, como se calcula o volume?

Para qualquer outro sólido, temos que usar um axioma (ou seja, uma afirmação que assumimos como verdade na Matemática), que se chama Princípio de Cavalieri (Francisco Bonaventura Cavalieri, matemático italiano que viveu entre 1598 e 1647).

Dados dois sólidos S_1 e S_2 e um plano α, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área (A), então esses sólidos têm mesmo volume (V).

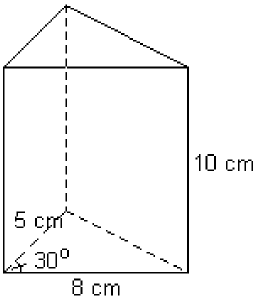


Como S_2 é um paralelepípedo retângulo, sabemos que V_2 = área da base x altura. Então, sendo S_1 um prisma qualquer, sem nenhuma característica particular, seu volume é dado por:

V_{prisma} = área da base x altura

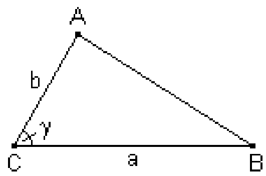
EXEMPLO

Determine o volume do prisma triangular reto da figura.



Resolução

A base do prisma é um triângulo em que conhecemos dois de seus lados (**a** e **b**) e o ângulo **(γ)** formado por eles.



Conhecendo-se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles, podemos calcular sua área pela fórmula: $A = \frac{1}{2} \,.\, a \,.\, b \,.\, \text{sen}\, \gamma$

Logo, sua área é dada por:

$$A_b = \frac{1}{2} \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, \text{sen}\, 30º = \frac{1}{2} \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, \frac{1}{2} = 10\text{cm}^2$$

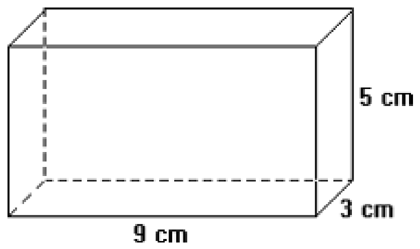
Portanto, o volume do prisma é:

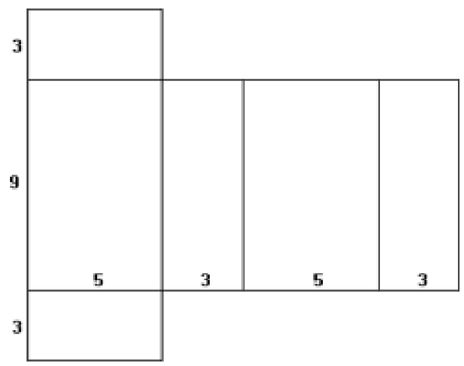
$V = A_b \,.\, h$

$V = 10 \,.\, 10 = 100 \text{ cm}^3$

Vamos agora voltar ao problema das embalagens apresentado no início e responder à pergunta proposta.

De acordo com os dados do problema, podemos montar as seguintes figuras:





Neste caso, temos quatro faces laterais e duas bases na forma retangular (sem considerar as dobras ou junções (internas/externas) que podem ser utilizadas.)

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$

$$A_t = \underbrace{2\,(9 \times 5) + 2\,(3 \times 5)}_{A_{lateral}} + \underbrace{2\,(9 \times 3)}_{A_b} = 174 \text{ cm}^2$$

Portanto, são necessários 174 cm2 de papelão para fazer a planificação de uma caixa.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

DOLCE, O. e POMPEO, J.N. *Fundamentos da matemática elementar* – Geometria espacial: posição e métrica. São Paulo: Atual, 2000. v.10.

MELLO, J.L.P. *Matemática, volume único*: *construção e significado*. São Paulo: Moderna, 2005.