

MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo – VI

Interpolação aritmética

E representação genérica de uma PA

Objetivo: Resolver problemas a partir da interpolação aritmética e da representação genérica de uma PA.



Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

Pense no meio ambiente: imprima apenas se necessário.



Problema proposto

Uma empresa obteve no mês de janeiro um lucro líquido equivalente a R\$ 14.000,00. Neste mesmo ano, no mês de dezembro, o lucro líquido foi de R\$ 80.000,00. Sabendo que o lucro foi originado de acordo com uma PA crescente, determine o faturamento referente aos outros meses do ano.

Como você solucionaria esta situação?

Em breve você saberá resolver este problema.

Introdução

Interpolar ou inserir k meios aritméticos entre dois números a_1 e a_n , significa obter uma progressão aritmética de $k + 2$ termos cujos extremos são a_1 e a_n .



DICA:

Podemos dizer que todo problema que envolve interpolação se resume em calcularmos a razão da PA.

Cada termo sequencial de uma PA é dependente do valor da razão e do primeiro termo. Observe:

$$A_2 = a_1 + r$$

$$A_3 = a_1 + 2r$$

$$A_4 = a_1 + 3r$$

$$A_5 = a_1 + 4r$$

$$A_6 = a_1 + 5r$$

$$A_7 = a_1 + 6r$$

$$A_8 = a_1 + 7r$$

E assim sucessivamente. Como frisamos anteriormente para determinarmos os elementos existentes entre os valores extremos de uma PA, necessitamos do valor da razão. Vamos, através do exemplo a seguir, determinar um método prático adotado nesse tipo de situação problema.

EXEMPLO 1

Veja esta PA $(1, \dots, 10)$, vamos inserir 8 meios aritméticos, logo a PA terá $8 + 2$ termos, onde:

$$a_1 = 1;$$

$$a_n = 10;$$

$$k = 8$$

$$n = k + 2 = 10 \text{ termos}$$

$$A_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow r = \frac{a_n - a_1}{(n - 1)} = \frac{10 - 1}{10 - 1} = 1$$

Logo, a PA ficou assim: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$

Pensando no que já foi escrito, a solução do problema proposto ficará desta forma:

$$\text{Janeiro} \rightarrow A_1 = 14.000$$

$$\text{Dezembro} \rightarrow A_{12} = 80.000$$

$$A_{12} = a_1 + 11r$$

$$80.000 = 14.000 + 11r$$

$$80.000 - 14.000 = 11r$$

$$11r = 66000$$

$$r = 6$$

MATEMÁTICA UNINOVE – INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Detalhamento mensal do faturamento da empresa:

Janeiro: R\$ 14.000,00

Fevereiro: R\$ 20.000,00

Março: R\$ 26.000,00

Abril: R\$ 32.000,00

Maior: R\$ 38.000,00

Junho: R\$ 44.000,00

Julho: R\$ 50.000,00

Agosto: R\$ 56.000,00

Setembro: R\$ 60.000,00

Outubro: R\$ 66.000,00

Novembro: R\$ 72.000,00

Dezembro: R\$ 80.000,00

EXEMPLO 2

Interpole cinco meios aritméticos entre 10 e 28.

Solução

Queremos descobrir os números que devem ser colocados entre 10 e 28 para que a sequência formada seja uma PA (10, $_$, $_$, $_$, $_$, $_$, 28).

Dessa forma, vemos que $a_1 = 10$ e $a_7 = 28$. Precisamos, agora, encontrar o valor da razão da progressão aritmética e, para isso, utilizaremos a fórmula do termo geral da PA.

$$a_7 = a_1 + (7-1).r$$

$$28 = 10 + 6r$$

$$6r = 28 - 10$$

$$r = 3$$

Segue que:

Conhecido o valor da razão, utilizamos a definição de PA para determinar os valores dos demais elementos.

$$a_2 = a_1 + r = 10 + 3 = 13$$

$$a_3 = a_2 + r = 13 + 3 = 16$$

$$a_4 = a_3 + r = 16 + 3 = 19$$

$$a_5 = a_4 + r = 19 + 3 = 22$$

$$a_6 = a_5 + r = 22 + 3 = 25$$

Portanto, ficaremos com a sequência:

(10, 13, 16, 19, 22, 25, 28)

EXEMPLO 3

Determine os 10 números que devem ficar entre 7 e 117 para que a sequência formada seja uma progressão aritmética.

Solução

Para resolver o problema, deveremos interpolar 10 meios aritméticos entre 7 e 117.

(7, , , , , , , , , , , 117)

Temos que $a_1 = 7$ e $a_{12} = 117$. Vamos determinar o valor da razão para encontrar os demais termos da PA.

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1) \cdot r$$

$$117 = 7 + 11r$$

$$11r = 117 - 7$$

$$r = 10$$

Agora, basta utilizar a definição de PA para determinarmos os demais termos da sequência.

$$a_2 = a_1 + r = 7 + 10 = 17$$

$$a_3 = a_2 + r = 17 + 10 = 27$$

$$a_4 = a_3 + r = 27 + 10 = 37$$

$$a_5 = a_4 + r = 37 + 10 = 47$$

$$a_6 = a_5 + r = 47 + 10 = 57$$

$$a_7 = a_6 + r = 57 + 10 = 67$$

$$a_8 = a_7 + r = 67 + 10 = 77$$

$$a_9 = a_8 + r = 77 + 10 = 87$$

$$a_{10} = a_9 + r = 87 + 10 = 97$$

Assim, teremos:

$$(7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97, 117)$$

EXEMPLO 4

A população de um município no ano de 2004 era de 12.000 habitantes. Em 2009, a população desse município chegou a 14.500 habitantes. Determine a quantidade de habitantes nesta cidade nos anos entre 2004 e 2009, sabendo que o número de habitantes nesse período forma uma PA.

Solução

Descobrir o número de habitantes dessa cidade entre os anos de 2004 e 2009 de forma a gerar uma PA é o mesmo que interpolar meios aritméticos entre 12.000 e 14.500.

(12.000, $_$, $_$, $_$, $_$, 14.500)

Assim, temos que:

$$a_1 = 12.000 \text{ e } a_6 = 14.500$$

Utilizando a fórmula do termo geral da PA para encontrar a raiz, teremos:

$$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot r$$

$$14500 = 12000 + 5r$$

$$5r = 14500 - 12000$$

$$r = 500$$

Pela definição de PA, temos que:

$$a_2 = a_1 + r = 12.000 + 500 = 12.500$$

$$a_3 = a_2 + r = 12.500 + 500 = 13.000$$

$$a_4 = a_3 + r = 13.000 + 500 = 13.500$$

$$a_5 = a_4 + r = 13.500 + 500 = 14.000$$

Portanto, concluímos que a população desse município nos anos entre 2004 e 2009 foi:

2005 → 12.500 habitantes

2006 → 13.000 habitantes

2007 → 13.500 habitantes

2008 → 14.000 habitantes

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNIO, José. *Matemática Completa*: ensino médio – 1º ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática Ciência e Aplicação*: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor – Ensino Médio*. São Paulo: Secretaria da Educação, 2011.

XAVIER, Claudio da Silva; BARRETO, Benigno Filho. *Matemática Aula por Aula*: ensino médio – 1º ano. São Paulo: FTD, 2005