MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - VI

Cálculo da soma dos números

Primeiros termos de uma PG

Objetivo: Resolver problemas envolvendo a soma do n primeiros termos de uma PG.

Recordando...

Chamamos de Progressão Geométrica (PG) uma sequência de números reais, formada por termos, que a partir do 2º, é igual ao produto do anterior por uma constante q dada, chamada de razão da PG.

Situação-problema

Um tipo de bactéria divide-se em duas a cada hora. Após 12 horas, qual será o número de bactérias? Como você resolveria esta situação? Ao final deste conteúdo você estará pronto para resolver este problema. Antes de resolvermos, vamos ver algumas definições:

Este conteúdo está pautado na sequência que possui algum padrão matemático. De acordo com este padrão, será possível definir diversos elementos de uma sequência apenas sabendo seu primeiro elemento e a razão dessa sequência.

Em determinadas situações, deveremos calcular a soma dos termos de uma determinada sequência. Nas sequências do tipo de progressão geométrica, podemos encontrar dois tipos de somatória, a somatória de termos finitos e a somatória de termos infinitos.

Veremos então a expressão para calcularmos a soma de finitos termos de uma PG, utilizando apenas o termo a_1 e a razão q.

Caso tivermos, por exemplo, 4 + 7 + 13 + 25 + 49 = 97, fica fácil, pois ela possui apenas cinco elementos, caso seja necessário somarmos os termos de uma sequência com mais de dez elementos, o que é mais complicado, é preciso utilizar uma fórmula ou uma calculadora.

Vejamos como poderíamos demonstrar caso seja aplicado uma fórmula:

PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. A soma desses n elementos será.

$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$

Sabemos que:

$a_2 = a_1 . q \; a_3 = a_1 . q^2$
$a_n = a_{1.} . q^{n\text{-}1}$

Poderemos verificar que a razão da PG poderá ser $a_1 . a_3 = {a_2}^2$. Nesta condição vamos dizer que a soma dessa PG será:

$$S_1 = \frac{a_1(1\text{-}q^n)}{1\text{-}q}$$

EXEMPLO 1

Dê a soma dos termos da seguinte PG (7, 14, 28, ... , 3.584).

Solução

Para utilizarmos a fórmula da soma, é preciso saber quem é o primeiro termo, a razão e a quantidade de elementos que essa PG possui.

$a_1 = 7$
$q = 2$
$n = ?$
$S_n = ?$

Portanto, é preciso que encontremos a quantidade de elementos que possui essa PG, utilizando a fórmula do termo geral.

$\mathrm{a_n} = \mathrm{a_1}.\,\mathrm{q}^{n-1}$

$3.584 = 7.\,2^{\mathrm{n}\text{-}1}$

$3.584 : 7 = 2^{n-1}$

$2^9 = 2^{\mathrm{n}\text{-}1}$

$\mathrm{n} - 1 = 9$

$\mathrm{n} = 10$

Sabendo que temos 10 termos poderemos agora aplicar a definição citada:

$\mathrm{S_1} = \frac{\mathrm{a_1}(\mathrm{q^n}\text{-}1)}{\mathrm{q}\text{-}1}$ ou $\mathrm{S_1} = \frac{\mathrm{a_1}(1\text{-}\mathrm{q^n})}{1\text{-}\mathrm{q}}$

Assim:

$$\mathrm{S_{10}} = \frac{7(2^{10} - 1)}{2\text{-}1}$$

$$\mathrm{S_{10}} = \frac{7(1024 - 1)}{2\text{-}1}$$

$$\mathrm{S_{10}} = \frac{7(1023)}{1}$$

$$\mathrm{S_{10}} = 7161$$

EXEMPLO 2

Dada a PG com $a_2 = 5$ e $q = \frac{2}{5}$, calcule a soma dos infinitos termos.

Primeiramente deveremos calcular o valor numérico de a_1 e para isso utilizaremos a fórmula do termo geral:

$$a_2 = a_1 . q$$

$$5 = a_1 . \frac{2}{5}$$

$$a_1 = \frac{25}{2}$$

Agora é só substituir na fórmula da soma:

$$S_1 = \frac{a_1(q^n\text{-}1)}{q\text{-}1} \qquad S_n = \frac{\frac{25}{2}(\text{-}1)}{\frac{2}{5}\text{-}1} \qquad S_n = \frac{\text{-}\frac{25}{2}}{\text{-}\frac{3}{5}} \qquad S_n = \frac{125}{6}$$

EXEMPLO 3

Determine a soma dos oito primeiros termos da P.G. (2, 2², 2³,...).

$$a_1 = 7$$

$$q = 2$$

$$n = 8$$

$$S_8 = \frac{2(2^8 - 1)}{2\text{-}1}$$

$$S_8 = \frac{2(256 - 1)}{2\text{-}1}$$

$$S_8 = \frac{2(255)}{1}$$

$$S_8 = 510$$

Agora com as definições apresentadas, já podemos solucionar a situação problema proposta no início. Vejamos:

Um tipo de bactéria divide-se em duas a cada hora. Após 12 horas, qual será o número de bactérias?

Solução:

$a_1 = 1$

$q = 2$

$n = 12$

$$S_{12} = \frac{1(2^{12} - 1)}{2\text{-}1}$$

$$S_{12} = \frac{1(4096)}{1}$$

$$S_{12} = 4096$$

Após 12 horas o número de bactérias será igual a 4.096.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José. *Matemática Completa*: ensino médio – 1º ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática Ciência e Aplicação*: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor – Ensino Médio.* São Paulo: Secretaria da Educação, 2011.

XAVIER, Claudio da Silva; BARRETO, Benigno Filho. *Matemática Aula por Aula*: ensino médio – 1 º ano. São Paulo: FTD, 2005.