MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Análise combinatória

Permutações

Objetivo: Apresentar o conceito de permutação na análise combinatória e estudar alguns exemplos típicos.

Definição

Permutações são arranjos nos quais o número de elementos à disposição (n) é igual ao tamanho (p) do grupo que formaremos, ou seja, $n = p$. Indica-se P_n e lê-se permutação de n elementos. Temos a seguinte fórmula:

$$P_N = N!$$

Nas permutações, a ordem dos elementos continua sendo importante. A diferença essencial é que utilizaremos todos os elementos disponíveis simultaneamente para formarmos os grupos.

Situação-problema 1

Quantos números naturais de seis algarismos distintos nós podemos formar a partir dos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Notamos, novamente, que a ordem é importante, pois 456789 é diferente de 789456. A quantidade de números então será.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Ou seja, há 720 números distintos formados a partir dos algarismos dados.

Situação-problema 2

Qual o número de permutações de anagramas da palavra UNIVERSO?

Temos oito letras distintas, logo o número de anagramas é dado pelo número de permutações de 8 elementos.

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

Ou seja, há 40320 anagramas.

Situação-problema 3

Quantos anagramas são possíveis da palavra BATATA?

Nesta palavra há três "A" repetidos e dois "T" repetidos. Precisamos da fórmula para o número de permutações com termos repetidos:

$$P_n^{a,\,\beta,\,\cdots} = \frac{n!}{a!\ \ \beta!\ \cdots}$$

Nesta última expressão, a, β etc., são a quantidade de elementos repetidos de cada tipo. Para o nosso exemplo, ponhamos $a = 3$ como sendo a quantidade de vezes que a letra "A" se repete e $\beta = 2$ a quantidade de vezes que a letra "T" se repete, e notemos que há um total de $\mathrm{n} = 6$ letras. Portanto, segue que:

$$P_6^{3,\,2} = \frac{6!}{3!\ 2!} = \frac{6.5.4.3!}{3!\,.2.1} = 6.5.2 = 60$$

Ou seja, há 60 anagramas sem repetição da palavra BATATA.

IMPORTANTE:

A ordem sempre é importante quando resolvemos problemas de permutação.

Exercício resolvido 1

Deseja-se dispor em fila 5 crianças: Marcelo, Rogério, Reginaldo, Danielle e Márcio. Calcule o número das distintas maneiras em que elas podem ser dispostas de modo que Rogério e Reginaldo fiquem sempre vizinhos.

Solução: a ordem importa nesse problema? Sim! A posição numa fila muda: estar em primeiro lugar é diferente de estar, digamos, em terceiro. **Ro**gério e **Re**ginaldo serem vizinhos significa estarem um em seguida do outro na fila. Logo há duas (2) configurações vizinhas: **RoRe** ou **ReRo**. Na fila, Rogério e Reginaldo podem ocupar os primeiro e segundo lugares, segundo e terceiro lugares, terceiro e quarto lugares ou, ainda, quarto e quinto lugares. Ou seja, há um total de 4 posições distintas que eles podem ocupar na fila, já que são sempre vizinhos. Ocupados os lugares descritos por Reginaldo e Rogério, sobram outros 3 lugares que serão ocupados pelas 3 crianças restantes. Para achar o total de agrupamentos, usamos uma permutação, já que o total de elementos coincide com o total de lugares.

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Exercício resolvido 1

Deseja-se dispor em fila 5 crianças: Marcelo, Rogério, Reginaldo, Danielle e Márcio. Calcule o número das distintas maneiras em que elas podem ser dispostas de modo que Rogério e Reginaldo fiquem sempre vizinhos.

Solução: a ordem importa nesse problema? Sim! A posição numa fila muda: estar em primeiro lugar é diferente de estar, digamos, em terceiro. **Ro**gério e **Re**ginaldo serem vizinhos significa estarem um em seguida do outro na fila. Logo há duas (2) configurações vizinhas: **RoRe** ou **ReRo**. Na fila, Rogério e Reginaldo podem ocupar os primeiro e segundo lugares, segundo e terceiro lugares, terceiro e quarto lugares ou, ainda, quarto e quinto lugares. Ou seja, há um total de 4 posições distintas que eles podem ocupar na fila, já que são sempre vizinhos. Ocupados os lugares descritos por Reginaldo e Rogério, sobram outros 3 lugares que serão ocupados pelas 3 crianças restantes. Para achar o total de agrupamentos, usamos uma permutação, já que o total de elementos coincide com o total de lugares.

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ou seja, há 6 agrupamentos distintos de 3 lugares na fila que serão ocupadospor Marcelo, Danielle e Márcio. Usando o princípio multiplicativo para concluir, temosum total de $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ maneiras distintas de agrupar os cinco alunos na fila, com Rogério e Reginaldo sendo vizinhos.

Exercício resolvido 2

Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?

Solução: a ordem importa nesse problema? Sim! Já que se trata de anagramas. A primeira letra deve ser consoante, logo há 4 possibilidades: “F”, “L”, “R” e “T”. Fixada a primeira letra (consoante), quantos anagramas são possíveis comas outras 5 letras da palavra FILTRO? Claro! Trata-se de uma permutação sem repetição.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Mas há 4 possíveis inícios desses anagramas, já que são 4 as consoantes de FILTRO. Logo, pelo princípio multiplicativo, nós temos:

$$4 \cdot P_5 = 4 \cdot 120 = 480$$

Ou seja, são 480 os anagramas de FILTRO que começam por consoantes.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os Elos da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 1993.