Matemática
UNINOVE

Geometria Especial Métrica

cálculo de áreas e volumes de cones

Objetivo: Estudar os cones e seus elementos, calcular as áreas da base, lateral e total e os volumes dos cones.

Módulo III

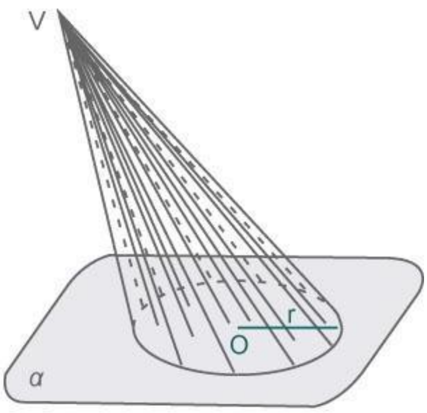
Considere o seguinte problema:

Para a festa de aniversário de 1 ano da minha filha, vou fazer 20 chapéus como os da figura.

Cada chapéu terá 15 cm de altura e 7 cm de raio da base. Quanto eu vou gastar de papel para fazer todos os chapéus?

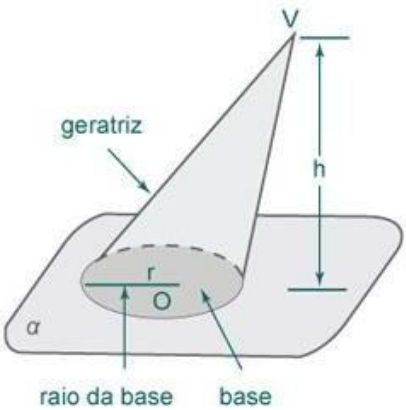
Cones

Consideremos um plano α, C um círculo de raio r e centro O contido em α, e Vum ponto fora desse plano. Chama-se **cone** (ou cone circular) o sólido formado por todos os segmentos de reta, tais que uma de suas extremidades é um ponto do círculo C e a outra extremidade é o ponto V.



Elementos

- Num cone, consideramos os seguintes elementos:
- O círculo C é a **base**.
- Os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência da base e a outra no ponto V são as **geratrizes**.
- O ponto V é o **vértice**.
- A distância entre o vértice e o plano da base é a **altura** do cone.

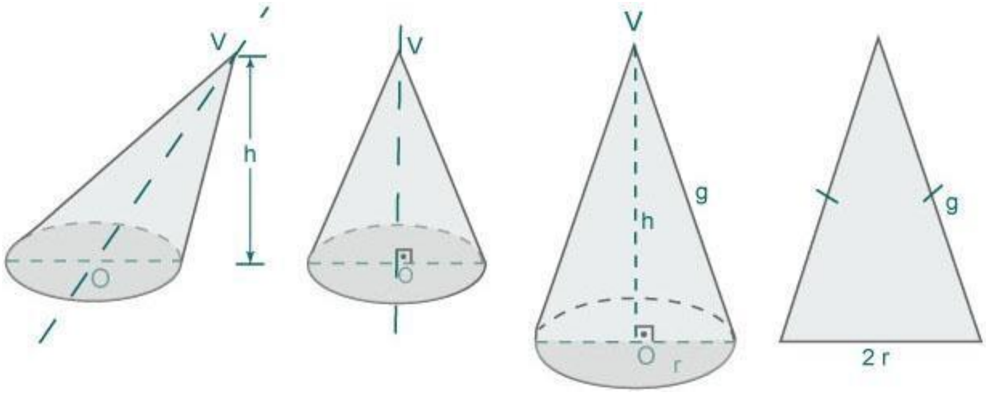


Classificação

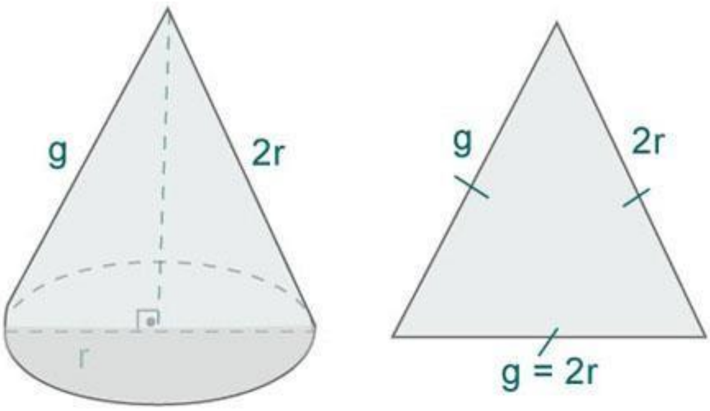
Os cones são classificados pela posição da reta VO (chamada eixo do cone) em relação ao plano da base:

Se a reta VO é oblíqua ao plano da base, temos um cone circular **oblíquo**.

Se a reta VO é perpendicular ao plano da base, o cone é **reto**. Neles, a geratriz é também o apótema e temos a relação: $\mathbf{g^2 = h^2 + r^2}$. Note que se cortarmos um cone reto por um plano que contém o seu eixo, teremos um triângulo isósceles.



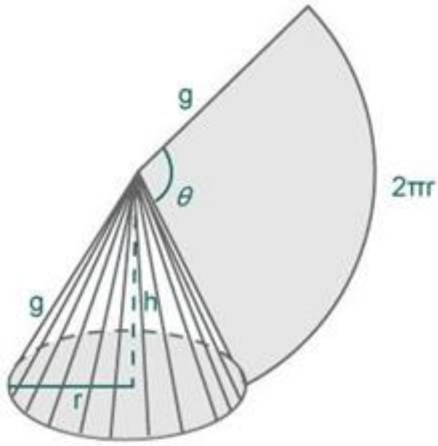
Se o cone reto tiver a medida da geratriz igual ao diâmetro da base (g = 2r), ele é chamado de cone equilátero.



Áreas da superfície de um cone reto

Dado um cone reto, definimos:

- A **área da base (A_b)** é a área do círculo da base ($Ab = \pi r^2$).
- A **área lateral (A_l)** é a área de um setor circular de raio g, ângulo θ e arco de comprimento $2\pi r$. O ângulo θ é dado por:



$$\theta = \frac{2\pi r}{g}\,\text{rad ou}\ \theta = \frac{360r}{g}\,\text{graus}$$

A área lateral do cone pode ser calculada pela fórmula da área de um triângulo:

$A_l = \frac{1}{2} . 2\pi r . g \Rightarrow A_l = \pi r g$

A **área total (A_t)** é a soma da área lateral com a área da base:

$A_t = A_l + A_b = \pi\, r\, g + \pi\, r^2 = \pi\, r\, (g + r)$

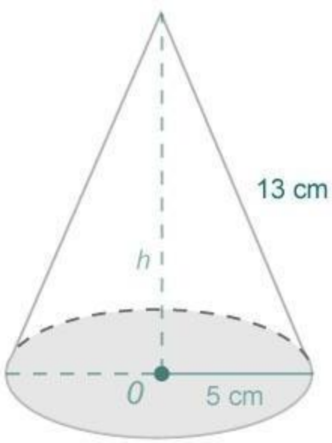
Volume de cone

Para encontrar o volume de um cone, aplica-se o mesmo método usado para obter o volume de uma pirâmide, ou seja:

$V_{cone} = \frac{1}{3}$ x área de base x altura $= \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$

EXEMPLOS

1. Calcular o comprimento da circunferência da base, a altura, a área total e o volume de um cone reto que tem raio de base de 5 cm e geratriz de 13 cm.



Solução

Como o cone é reto, temos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a geratriz, logo:

$13^2 = 5^2 + h^2$

$h = 12cm$

O comprimento da circunferência da base é dado por:

$C = 2\pi r$

$C = 10\pi$ cm

A área total do cone é:

$A_t = \pi\ r\ (g + r)$

$A_t = 5\ \pi\ (13 + 5)$

$A_t = 90\ \pi$ cm^2

E o volume é: $V = \frac{1}{3}\pi\ r^2\ h = \frac{1}{3} . \pi\ .\ 25\ .\ 12 = 100\ \pi$ cm^3

2. Um cone reto, de 10 cm de altura e geratriz de 11 cm, tem por planificação da superfície lateral um setor circular de ângulo θ. Determinar o raio da base do cone e o ângulo θ.

Solução

Como em todo cone reto, temos: $g^2 = h^2 + r^2$, então:

$121 = 100 + r^2$

r = $\sqrt{21} \cong 4{,}58\text{cm}$

O ângulo θ é dado por: $\theta = \frac{360r}{g}$ graus

$$\theta = \frac{360.4{,}58}{11} \cong 150º$$

Vamos voltar ao problema apresentado e responder à pergunta proposta!

Cada chapéu tem o formato de um cone reto de 15cm de altura e 7cm de raio da base. Queremos calcular a sua área lateral e, para isso precisamos saber a medida da geratriz:

$g^2 = h^2 + r^2$

$g^2 = (15)^2 + 7^2$

$g^2 = 274$

$g = \sqrt{274}$ cm

$A_l = \pi \,.7.\, \sqrt{274} \cong 364 cm^2$

Para fazer os 20 chapéus, teremos, aproximadamente:

$20 \,.\, 364 = 7280$ cm^2 de papel

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. *Fundamentos da Matemática Elementar* – v. 10: Geometria Espacial: posição e métrica. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J.L.P. *Matemática, volume único*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005