MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - IV

Trigonometria

Relações trigonométricas

Objetivo: Definir as principais relações trigonométricas.

Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

Pense no meio ambiente: imprima apenas se necessário.

Situação-problema

Sabendo que $sen\, x = \frac{2}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine $\text{cotg}\, x$.

Solução: pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$sen^2\, x + cos^2\, x = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\, x = 1 - sen^2\, x.$

Logo,$cos^2\, x = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad cos\, x = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então o ângulo pertence ao segundo quadrante.

Portanto, o cosseno é negativo: $cos\, x = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$

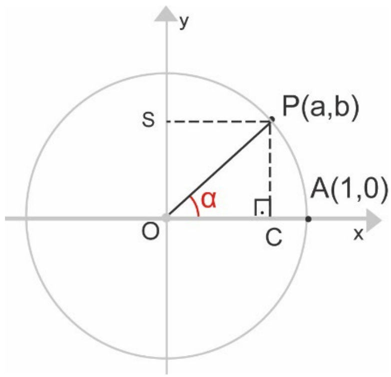
Sabemos ainda que $cotg\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}$. Assim, temos:

$cotg\, x = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.\frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$

Para resolver esse tipo de problema, precisamos conhecer a relação fundamental da trigonometria e as demais relações trigonométricas.

Relação fundamental da trigonometria

Seja P(*a, b*) um ponto do ciclo trigonométrico. Por este ponto, trace paralelas aos eixos. As intersecções destas paralelas com os eixos *x* e *y* definem os pontos C e S, respectivamente. Considere o ângulo AÔP= α , o arco (AP) e os triângulos OCP onde O é a origem do plano cartesiano, conforme ilustrado na figura.



Lembre-se de que $\mathrm{OP} = 1$, $\mathrm{OC} = \cos\alpha$ e $\mathrm{OS} = \mathrm{CP} = \operatorname{sen}\alpha$.

O triângulo OCP é retângulo em C. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

DICA:

Teorema de Pitágoras: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, ou seja, $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$

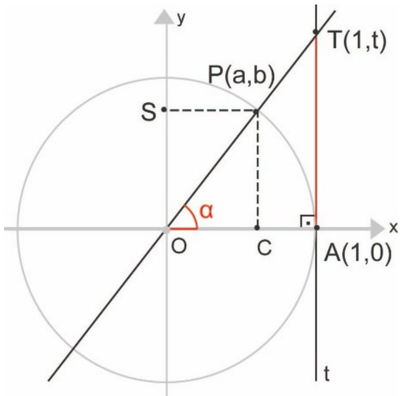
$\mathrm{CP}^2 + \mathrm{OC}^2 = \mathrm{OP}^2$. Portanto, $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.

IMPORTANTE:

O ciclo trigonométrico tem raio unitário, ou seja, o raio tem medida igual a uma unidade. Logo, OP=1.

Relação entre seno, cosseno e tangente

Sejam P (*a, b*) um ponto do ciclo trigonométrico e *t* uma reta perpendicular ao eixo x, passando por A (1,0). Pelo ponto P, trace paralelas aos eixos . As intersecções dessas paralelas com os eixos x e y definem os pontos C e S, respectivamente. Considere o ângulo AÔP = α , o arco(AP) e os triângulos OCP e OAT onde O é a origem do plano cartesiano e T, a intersecção da reta *t* com a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$, conforme ilustrado na figura.

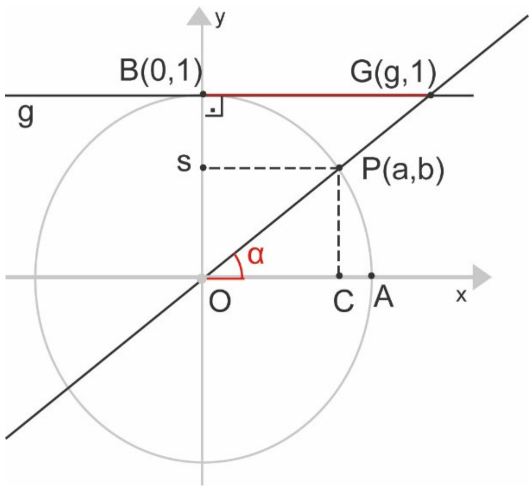


Lembre-se de que $\mathrm{OA} = 1$, $\mathrm{AT} = tg\ \alpha$, $\mathrm{OC} = cos\ \alpha$ e $\mathrm{OS} = \mathrm{CP} = sen\ \alpha$.

Os triângulos OAT e OCP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Logo, podemos afirmar que $\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{OC}}$. Então, $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

Portanto $\boxed{tg\ \alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$.

Relação entre seno, cosseno e cotangente



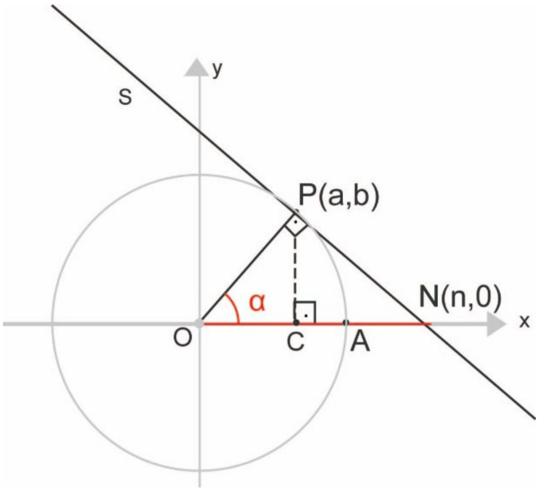
Sejam P (*a, b*) um ponto do ciclo trigonométrico e g uma reta perpendicular ao eixo *y*, passando por B(0, 1). Pelo ponto P, trace paralelas aos eixos. As intersecções destas paralelas com os eixos *x* e *y* definem os pontos C e S, respectivamente. Considere o ângulo AÔP=α , o arco (AP) e os triângulos OSP e OBG onde O é a origem do plano cartesiano e G, a intersecção da reta *g* com a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ conforme ilustrado na figura. Lembre-se de que $\mathrm{OB} = 1$, $\mathrm{BG} = \operatorname{cotg}\alpha$ e $\mathrm{OS} = \operatorname{sen}\alpha$.

Os triângulos OBG e OSP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Logo, podemos afirmar que $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{OS}}$. Então, $\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Portanto, $\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},\ \alpha \neq k\pi}$.

Relação entre cosseno e secante

Seja P(*a, b*) um ponto do ciclo trigonométrico e s a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$ no ponto P. Pelo ponto P, trace uma paralela ao eixo y. A intersecção desta paralela com o eixo x define o ponto C. Considere o ângulo AÔP = α , o arco (AP) e os triângulos OPN e OCP, onde O (0, 0), A (1, 0) e N é a intersecção da reta s com o eixo x, conforme ilustrado na figura.

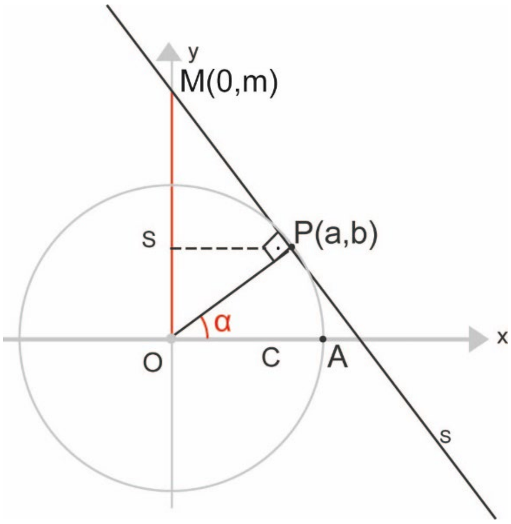


Lembre-se de que $\mathrm{OP} = 1$, $\mathrm{ON} = \sec\alpha$ e $\mathrm{OC} = \cos\alpha$.

Os triângulos OPN e OCP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Logo, podemos afirmar que $\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OC}}$. Então, $\frac{sec\,\alpha}{1} = \frac{1}{cos\,\alpha}$. Portanto, $\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$.

Relação entre seno e cossecante

Seja P(a, b) um ponto do ciclo trigonométrico e s a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$ no ponto P. Pelo ponto P, trace uma paralela ao eixo x. A intersecção desta paralela com o eixo y define o ponto S. Considere o ângulo AÔP = α , o arco (AP) e os triângulos OPM e OSP, onde O (0, 0), A (1, 0) e M é a intersecção da reta s com o eixo y, conforme ilustrado na figura.



Lembre-se de que $\text{OP} = 1$, $\text{OM} = \text{cossec}\,\alpha$ e $\text{OS} = \text{sen}\,\alpha$.

Os triângulos OPM e OSP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Logo, podemos afirmar que $\frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \frac{\text{OP}}{\text{OS}}$. Então, $\frac{cossec\,\alpha}{1} = \frac{1}{sen\,\alpha}$. Portanto, $\boxed{cossec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha},\ \alpha \neq k\pi}$

Outras relações trigonométricas

Já aprendemos a relação fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Se dividirmos os dois membros por $\text{sen}^2\,\alpha$, obtemos:

$$\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha} \quad \Rightarrow \quad 1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \text{cossec}^2\,\alpha.$$

Logo, $\boxed{\text{cossec}^2\,\alpha = 1 + \text{cotg}^2\,\alpha}$.

DICA:

Sabemos que: cossec α $\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$ e cotg $\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$.

Elevando as duas equações ao quadrado, obtemos: $(\text{cossec}\ \alpha)^2 = \left(\frac{1}{\text{sen}\ \alpha}\right)^2$

$\Rightarrow \text{cossec}\ \alpha\ = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$

$$(\text{cotg}\,\alpha)^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{cotg}^2\,\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha}$$

Por outro lado, se dividirmos ambos os membros da relação fundamental da trigonometria por $\cos^2\alpha$, obtemos:

$\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$. Logo,

$\boxed{\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha}$

DICA:

Sabemos que: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ e $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

Elevando as duas equações ao quadrado, obtemos:

$$(\sec\ \alpha)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$(\text{tg}\,\alpha)^2 = \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{tg}^2\,\alpha = \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Exemplos:

1.Sabendo que $\cos x = -\frac{4}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine $\text{tg}\,x$.

Solução: sabemos que $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$. Então, precisamos determinar o valor de $\text{sen}\,x$, utilizando a relação fundamental da trigonometria.

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2\,x = 1 - \cos^2 x.$$

Logo, $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$.

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o ângulo pertence ao terceiro quadrante.

Portanto, o seno é negativo: $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$.

Finalmente, obtemos: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5}.\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}$.

2. Sabendo que $\sec x = 4$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, determine $\operatorname{tg} x$.

Solução: Sabemos que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Logo, $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

$\operatorname{tg}^2 x = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{15}$.

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então o ângulo pertence ao quarto quadrante. Portanto, a tangente é negativa: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{15}$.

3. Sabendo que $\operatorname{cossec} x = \frac{13}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine $\sec x$.

Solução: Sabemos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Logo, precisamos determinar o valor de $\cos x$. Para isso, vamos utilizar a seguinte relação:

$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$. Logo, $\frac{13}{5} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \Rightarrow \quad 13 \operatorname{sen} x = 5 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$.

Pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Logo,

$cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169} \quad \Rightarrow \quad cos\, x = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$.

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então o ângulo pertence ao primeiro quadrante. Portanto, o cosseno é positivo: $\cos x = \frac{12}{13}$.

Finalmente, obtemos: $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$.

4. Sabendo que $sec\, x = 3$, determine o valor da expressão: $9\cos^2 x + \frac{\mathrm{tg}^2\, x}{2}$.

Solução: Sabemos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

Logo, $\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{3}$.

Sabemos também que $\sec^2 \alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha$.

Logo, $\mathrm{tg}^2\, \alpha = \sec^2 \alpha - 1\ \mathrm{tg}^2\, \alpha = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$.

Portanto, o valor da expressão é:

$9\cos^2 x + \frac{\mathrm{tg}^2\, x}{2} = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{2} = 1 + 4 = 5$.

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, GELSON. *Fundamentos da Matemática Elementar – Ensino Médio*. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. V.3.

MELLO, José Luiz Pastore. *Matemática: construção e significado – Ensino Médio*. São Paulo: Moderna, 2005.