MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - VI

Termo geral

de uma Progressão Geométrica (PG)

Objetivo: Resolver problemas envolvendo o termo geral de uma PG.

Situação-problema

Uma editora está produzindo 20.000 livros, no dia de hoje e, a cada dia, deve produzir 30% a mais do que produziu no dia anterior. Determine:

- **a.** Quanto deverá produzir em 5 dias?
- **b.** Em quantos dias deverá produzir 33.800 livros?

Como você resolveria esta situação? Em breve você saberá resolver este problema.

Introdução

Toda Progressão Geométrica (PG) é formada por uma sequência numérica onde os números são decididos (exceto o primeiro) utilizando a constante q, chamadade razão.

O próximo número da PG sempre será o número atual multiplicado por **q**.

Exemplo:

(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,...), na qual a razão é 2.

Uma razão pode ser qualquer número racional (positivos, negativos ou frações).

Para descobrir a razão de uma PG, basta escolher qualquer número da sequência e dividir pelo número anterior.

Toda PG é classificadas em quatro tipos, de acordo com o valor da razão:

Oscilante ($q < 0$)

Neste tipo, a razão é negativa, o que fará com que a sequência numérica seja composta de números negativos e positivos se intercalando.

(3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768,...), na qual a razão é -2.

Crescente ($q > 0$)

Na PG crescente, a razão é sempre positiva e, por isto, a sequência seráformada por números crescentes, como:

(1, 3, 9, 27, 81, ...), na qual a razão é 3.

Constante

Nesta PG, a sequência numérica tem sempre os mesmos números, podendo ter a exceção do primeiro. Para isso, a razão deve ser sempre 0 ou 1. São exemplos:

(4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...), na qual a razão é 0.

(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...), na qual a razão é 1.

Decrescente

As progressões geométricas decrescentes têm a razão sempre positiva e diferente de zero, e os números da sequência são sempre menores do que o número anterior: (64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, ..) razão = ½ (-1, -3, -9, -27, -81, ...) onde a razão é 3 (observe que na PG crescente, temos um exemplo com a mesma razão, porém o número inicial aqui é negativo, alterando toda a sequência).

Já sabemos que o termo seguinte a um termo de uma PG será sempre igual ao termo anterior multiplicado pela razão **q**, então dizemos que para obtermos uma PG genérica, deveremos sempre observar:

O segundo termo será igual ao primeiro termo, $\mathbf{a_1}$, vezes a razão **q**.

$\mathbf{a_2 = a_1 . q}$

O terceiro termo será resultado da multiplicação do segundo termo pela razão **q**.

$\mathbf{a_3 = a_2 . q^2}$

No entanto, como vimos que $\mathbf{a_2 = a_1 \,.\, q}$, substituindo-o na expressão temos:

$\mathbf{a_3 = a_1 .\, q \,.\, q \Rightarrow a_3 = a_1 \,.\, q^2}$

Pelo mesmo raciocínio, o quinto termo será:

$\mathbf{a_5 = a_1 .\, q^3 .\, q \Rightarrow a_5 = a_1 .\, q^4}$

E o sexto termo será:

$\mathbf{a_6 = a_1 .\, q^4 .\, q \Rightarrow a_6 = a_1 .\, q^5}$

De forma resumida temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 . q \\ a_3 = a_1 . q^2 \\ a_4 = a_1 . q^3 \\ a_5 = a_1 . q^4 \\ a_6 = a_1 . q^5 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ a_n = a_1 . q^{(n-1)} \end{cases}$$

Portanto, partindo-se do primeiro termo, a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica é:

$$\mathbf{a_n = a_1 . a^{(n-1)}}$$

Mas e se partirmos de outro termo que não o primeiro? Como ficaria?

Vejamos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 . q \\ a_3 = a_1 . q^2 \\ a_4 = a_1 . q^3 \\ a_5 = a_1 . q^4 \\ a_6 = a_1 . q^5 \\ \quad . \\ \quad . \\ a_n = a_1 . q^{(n-1)} \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = a_2 . q \\ a_4 = a_2 . q^2 \\ a_5 = a_2 . q^3 \\ a_6 = a_2 . q^4 \\ \quad . \\ \quad . \\ a_n = a_2 . q^{(n-2)} \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 = a_3 . q \\ a_5 = a_3 . q^2 \\ a_6 = a_3 . q^3 \\ \quad . \\ \quad . \\ a_n = a_3 . q^{(n-3)} \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 = a_4 . q \\ a_6 = a_4 . q^2 \\ \quad . \\ \quad . \\ a_n = a_4 . q^{(n-4)} \end{cases}$$

Podemos perceber que para se obter a fórmula do termo geral da PG basta subtraímos **1** de **n** quando partimos do termo **a_1**.

Perceba que quando partimos do termo **a_2**, subtraímos **2** de **n**, assim como subtraímos **3** ao partirmos de **a_3** e **4** quando partirmos de **a_4**. Partindo, então, de um termo **m**, podemos reescrever a fórmula do termo geral da PG como:

$$a_n = a_m . q^{(n-m)}$$

Vamos a um exemplo para que a explicação fique de mais fácil entendimento.

Por meio da fórmula, vamos expressar o termo **a_7** de uma PG genérica, em função do termo **a_4**:

$$a_n = a_m . q^{(n-m)} \quad a_7 = a_4 . q^{(7-4)}$$

Temos, então, que o termo $\mathbf{a_7}$ pode ser expresso em função do termo $\mathbf{a_4}$, como:

$$\mathbf{a_7 = a_4 \,.\, q^3}$$

Agora vamos prestar muita atenção ao seguinte:

Sabemos que o próximo termo após $\mathbf{a_4}$ é o termo $\mathbf{a_5}$, que equivale a $\mathbf{a_4}$ vezes $\mathbf{q}$.Para chegarmos ao próximo termo, o $\mathbf{a_6}$, multiplicamos mais uma vez pela razão $\mathbf{q}$ e para chegarmos finalmente ao termo $\mathbf{a_7}$, multiplicamos mais outra vez por $\mathbf{q}$, ou seja, como nos deslocamos três posições à direita, multiplicamos $\mathbf{a_4}$ por $\mathbf{q^3}$ para chegarmosao termo $\mathbf{a_7}$.

Veja que foi exatamente este o resultado obtido em função da fórmula, ou seja, $\mathbf{a_7 = a_4 \,.\, q^3}$.

Vejamos que este raciocínio é bem mais prático que recorrermos à formula para voltarmos de $\mathbf{a_7}$ para $\mathbf{a_4}$.

Agora o termo procurado está à esquerda do termo atual, na verdade três posições, então vamos multiplicar $\mathbf{a_7}$ por $\mathbf{q^{-3}}$, temos então que $\mathbf{a_4 = a_7 \,.\, q^{-3}}$, que equivale a dividirmos $\mathbf{a_7}$ por $\mathbf{q}$ três vezes.

Então vamos chegar ao mesmo resultado através da fórmula para confirmarmos esta explicação:

$$\mathbf{a_n = a_m .\ q^{(n-m)} \Rightarrow a \ = a\ .\ q^{(4-7)} \Rightarrow a_4 = a_7 .\ q^{-3}}.$$

Resumindo, se partindo do termo atual iremos avançar **n** termos à direita, para chegarmos ao termo final, então temos que multiplicar o termo inicial por **n** vezes a razão **q**, ou seja, multiplicá-lo por $\mathbf{q^n}$. Se nos deslocarmos à esquerda, o procedimento é semelhante, só que ao invés de multiplicarmos, iremos dividir o termo inicial **n** vezespela razão **q**, o que equivale a multiplicá-lo por $\mathbf{q^{-n}}$.

Propriedades principais:

P1: Em toda PG, um termo é a média geométrica dos termos imediatamente anterior e posterior.

Exemplo: PG (A, B, C, D, E, F, G)

Temos então:

$B^2 = A . C$

$C^2 = B . D$

$D^2 = C . E$

$E^2 = D . F$

P2: O Produto dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é constante.

Exemplo: PG (A, B, C, D, E, F, G)

Temos então:

A. G = B. F = C. E = D.D = D^2

Pensando nesta situação, a resolução da situação- problema será: (20000, 26000, ...) e q = 1,3

a) $a_n = a_1.\ q^4 \Rightarrow a_5 = 20000.\ (1{,}3)^4 \Rightarrow a_5 = 57122$

b) $a_n = 33800 \Rightarrow a_1.\ q^{n-1} = 33800 \Rightarrow 20000.\ (1{,}3)^{n-1} = 33800 \Rightarrow (1{,}3)^{n-1} = 1{,}69 \Rightarrow (1{,}3)^{n-1} = (1{,}3)^2$ ⍰ $n = 3$

Exercícios resolvidos:

1. Em uma P.G de 6 termos, o primeiro termo é 2 e o último é 486. Determine a razão.

Solução:

$n = 6$

$a_1 = 2$

$a_6 = 486$

Sabemos que a regra de resolução de um termo geral da PG é $a_n = a_1.\ q^{n-1}$.

Logo:

$a6 = a1.\, q^{6 - 1}$

$486 = 2.\, q^5$

$q^5 = 243$

$q = 3$

2. Qual é o decimo termo da P.G de (2, 6, ...)

Solução:

$n = 10$

$a_1 = 2$

$a_{10} = ?$

$q = 3$

Sabemos que a regra de resolução de um termo geral da P.G é $a_n = a_1.\, q^{n-1}$.

Logo:

$a10 = a1.\, q^{10 - 1}$

$a_{10} = 2.\, 3^9$

3. Em uma PG, a soma do segundo termo com o terceiro é 18 e a soma do sexto como sétimo é 288. Calcule a razão desta PG.

DICA:

Em alguns problemas, sempre deveremos, por conveniência, colocar os termos em função de a_1 e q, lembrando que:

$a_2 = a_1 . q$

$a_3 = a_1 . q^2$

$a_4 = a_2 . q^3$

$a_5 = a_3 . q^4$

E assim por diante.

Solução:

$a_2 + a_3 = 18$ $a_6 + a_7 = 288$

$a_1.q + a_1.q^2 = 18 \Rightarrow a_1 (1 + q^2) = 18$ (I)

$a_1.q^5 + a_1.q^6 = 288 \Rightarrow a_1. q^5 (1 + q) = 288$ (II)

Dividindo-se (II) por (I), temos:

$$\frac{a_1 q^5 (1+q) = 288}{a_{\ 1}(1+q) = 18} \rightarrow q^4 = \frac{288}{18} \rightarrow q = \pm 2$$

4. A soma de 3 números em uma PG é 39 e o produto entre eles é 729. Calcule os 3 números.

DICA:

Neste caso, quando o exercício trata de soma e produto desses termos, é sempre conveniente escrever a PG em função do termo do meio, que indicaremos por "x". Assim, se a PG tem 3 termos, esses serão:

$$\frac{x}{q},\ x,\ x.q$$

Solução:

Neste caso, indicaremos o primeiro termo por $\frac{x}{q}$, o segundo por x e o terceiro por x.q conforme Dica 2. Utilizando tais dados, poderemos utilizar um sistema com duas variáveis conforme representado a seguir:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + x.q = 39 \\ \frac{x}{q}.x.x.q = 729 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{q} + x + x.q = 39 \\ x^3 = 729 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$x^3 = 729 = \mathbf{x = 9}$

$$\boldsymbol{\frac{x}{q} + x + x.q = 39 \rightarrow \frac{9}{q} + 9 + 9.q = 39 \rightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0}$$

Desenvolvendo a equação de Bhaskara, temos a seguinte solução:

x' = 3 ou x''= $\mathbf{\frac{1}{3}}$

Logo:

Quando x = 3 teremos os números {3, 9, 27}

Quando x = $\frac{1}{3}$ teremos {27, 9, 3}

Portanto a solução encontrada é 3, 9, 27.

5. Um carro, cujo preço à vista é de R$ 24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4.000,00 e a quarta parcela de R$ 1.000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

Solução:

$a_n = a1.\, q^{n-1}$

$a_2 = 4000$

$a_4 = 1000$

$a_2 = a_1.\, q \; 4000 = a_1.\, q$

$$a_1 = \frac{4000}{1}$$

$$a_4 = a_1.\, q^3$$

$$1000 = \frac{4000}{q} . q^3$$

$$\frac{1000}{4000} = \frac{q^3}{q}$$

$$\frac{1}{4} = q^2$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{4000}{\frac{1}{2}} \rightarrow a_1 = 8000}$$

1ª prestação: R$ 8.000,00

2ª prestação: R$ 4.000,00

3ª prestação: R$ 2.000,00

4ª prestação: R$ 1.000,00

5ª prestação: R$ 500,00

Soma total das prestações: R$ 15.500,00

Entrada (valor do carro menos o total das prestações).R$ 24.000,00 – R$ 15.500,00 = R$ 8.500,00

O valor da entrada foi de R$ 8.500,00

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José. *Matemática Completa*: *ensino médio* - 1º ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática Ciência e Aplicação*: *ensino médio*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor* - Ensino Médio. São Paulo: Secretaria da Educação, 2011.

XAVIER, Claudio da Silva; BARRETO, Benigno Filho. *Matemática Aula por Aula*: *ensino médio* - 1 º ano. São Paulo: FTD, 2005.