MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - V

Probabilidade condicional

E teorema de Bayes

Objetivo: Apresentar o conceito de probabilidade condicional e o teorema de Bayes e estudar alguns exemplos típicos.

Definição: Em determinadas situações, o conhecimento prévio de certas informações poderá mudar a probabilidade dos eventos. Isso é chamado de probabilidade condicional: a chance de ocorrer E dado que ocorreu F é indicada por $P(E|F)$.

Situação-problema

1) Qual a probabilidade de sair a face 5 em um lançamento de um dado?

2) Porém, qual é a probabilidade de sair uma face 5 dado que saiu um número ímpar?

1) A probabilidade de E = “sair a face 5” é igual a $\frac{1}{6}$ pois E = $\{5\}$ e Ω = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e note que não há informação prévia.

2) Há informação prévia: “saiu um número ímpar”, logo, o espaço amostral fica restrito às possibilidades $\{1, 3, 5\}$, portanto, a probabilidade de “sair 5 dado que saiu ímpar” é $\frac{1}{3}$.

Duas formas de calcular a probabilidade condicional:

1) Usando o novo espaço amostral: com a informação adicional, o espaço amostral dado inicialmente sofrerá alterações, pois determinadas possibilidades serão excluídas (restrição) desse mesmo espaço.

2) Conhecidas as probabilidades $P(E \cap F)$ e $P(F)$: caso não seja possível trabalhar com o novo espaço, mas se conhecermos as probabilidades $P(E|F)$ e $P(F)$, então, poderemos usar a seguinte fórmula:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

É importante observar que é necessário, para o uso da fórmula, que $P(F) \neq 0$.

Situação-problema

Dada uma urna com 20 bolas numeradas de 1 a 20, qual a probabilidade de sortearmos uma bola com um número primo, sabendo que saiu um número ímpar?

Usando o novo espaço amostral: antes da informação adicional ser dada, nosso espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$ e, portanto, sua quantidade de elementos e $n(\Omega) = 20$. A informação adicional dada é que a bola é sorteada é ímpar, logo, o espaço amostral fica restrito a $F=\{1, 3, 5, ..., 17, 19\}$ e, portanto, $n(F) = 10$. O evento E é sair primo, logo temos $E = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, ou seja, $n(E) = 7$. Resulta que:

$$P(E|F) = \frac{n(E)}{n(F)} = \frac{7}{10}$$

Situação-problema

Dados eventos E e F tais que $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ e $P(F) = \frac{4}{5}$, determine a probabilidade do evento E ocorrer dado que F ocorra.

Utilizaremos a fórmula que comentamos: esta situação em que não conhecemos o espaço amostral, mas as informações dadas e a fórmula anterior permite o cálculo da probabilidade pedida. Temos:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{(1/5)}{(4/5)} = \frac{1}{4}$$

Teorema (de Bayes): Quando conhecemos informações adicionais sobre os eventos, é necessário rever as probabilidades. Este fato é o que se conhece por Teorema de Bayes e que se coloca mediante uma fórmula. Dados A, B $\subset \Omega$ eventos de um espaço amostral não vazio, então:

$$P(A|B) = \frac{P(A) . P(B|A)}{P(A). P(B|A) + P(A^C). P(B|A^C)}$$

Onde A^C é conjunto complementar de A em Ω, isto é, $A^C = \Omega - A$. É possível uma versão mais geral do que esta: se $A_1, A_2, \ldots, n_a$ são eventos de Ω, dois a dois exclusivos e tais que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, então vale que.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) . P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k). P(B|A_k)}$$

Situação-problema

Dadas três urnas U_1, U_2 e U_3, em que haja bolinhas de três cores, amarelas (A), brancas (B) e cinzas (C), conforme segue:

U_1 = {A, A, A, B, C, C, C, C, C,}; U_2 = {A, A, A, A, B, B, B, C, C} e U_3 = {A, A, B, B, C, C, C}

Escolhe-se uma urna ao acaso e retira-se dela uma bolinha. Vê-se que a tal bolinha é branca (B). Qual a probabilidade de que esta bolinha tenha sido retirado da urna U_2?

Matematicamente, a pergunta é $P(U_2|B)$, isto é, qual é a probabilidade da bolinha ter sido extraída da urna U_2 dado que ela é branca? Temos uma tarefa para o Teorema de Bayes, pois $\mathrm{P}(U_1) = \frac{1}{3}$; $\mathrm{P}(U_2) = \frac{1}{3}$; $\mathrm{P}(U_3) = \frac{1}{3}$;

Além disso, sabemos que: $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{U}_1) = \frac{1}{9}$; $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{U}_2) = \frac{1}{3}$; $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{U}_3) = \frac{2}{7}$;

Logo, temos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{U}_2|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{U}_2).\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{U}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{U}_1).\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{U}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{U}_2).\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{U}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{U}_3).\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{U}_3)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{9}\right)}{\left(\frac{46}{189}\right)} = \frac{21}{46}$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar*. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da matemática.* 3 ed. São Paulo: Saraiva, 1993.

MEDEIROS, E. *Estatística* – para cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1999.