Matemática

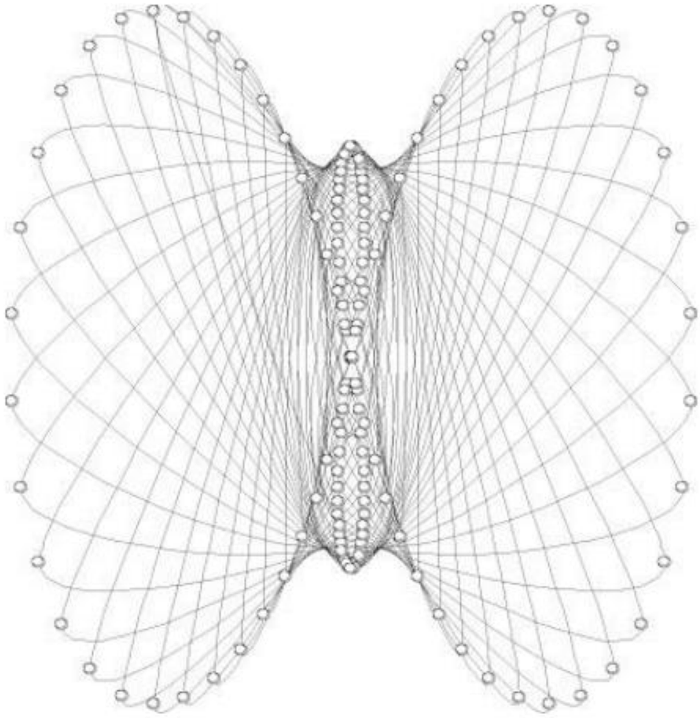
UNINOVE

Números complexos

forma trigonométrica (polar)

Objetivo: Ampliar os conhecimentos de forma trigonométrica dos números complexos

Módulo IV



Situação-problema

Como utilizar os elementos da geometria analítica (coordenadas cartesianas) para representar os números complexos?

Sabemos que $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$. Isolando **“a”** e **“b”,** temos que a = $|z|.\cos\theta$ e b = $|z|.\operatorname{sen}\theta$, portanto, substituindo **“a”** e **“b”** em **z = a + bi**, chegamos à **forma trigonométrica (ou polar)** do número complexo, denotada por $z = |z|.\cos\theta + (|z|.\operatorname{sen}\theta)i$. Assim, $\mathbf{z} = |\mathbf{z}|.(\mathbf{\cos\theta + i\ sen\,\theta})$.

EXEMPLO

Determine o módulo, um argumento e a forma trigonométrica de **z = 3 + 3i**.

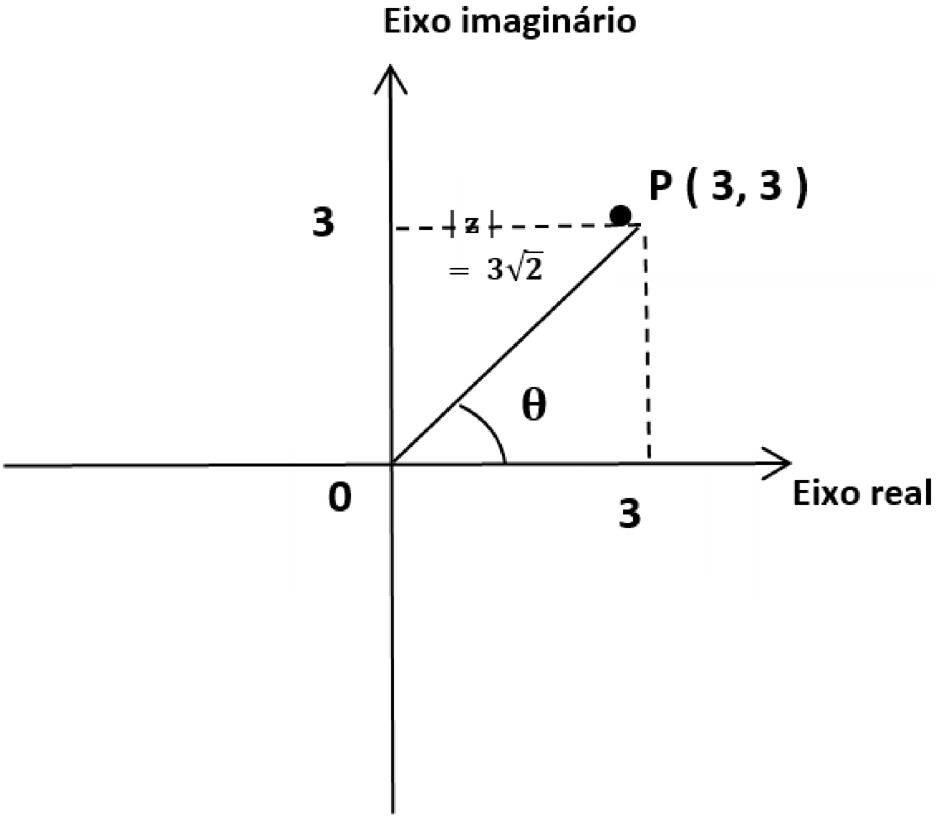
Resolução

$$\boldsymbol{\rho} = |\mathbf{z}\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,.\,\bar{z}} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \Rightarrow \boldsymbol{\rho} = |\mathbf{z}\,| = \mathbf{3\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Concluímos, então, que $\theta \in$ primeiro quadrante, $\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{4}$.

$$\mathbf{z} = |\mathbf{z}|.(\cos\boldsymbol{\theta} + \mathbf{i}.\operatorname{sen}\boldsymbol{\theta}) \Rightarrow \mathbf{z} = 3\sqrt{2}\,.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i}\right)$$



Uma outra maneira de apresentarmos a forma polar seria:

$$\mathbf{z = 3\sqrt{2} \,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i.\,sen\,\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]}\ \ ;\mathbf{k}\ \in \mathbb{Z}\,.$$

Operações com números complexos na forma trigonométrica (ou polar)

Multiplicação

Sejam os complexos não-nulos

$$\begin{cases} \mathbf{z_1} = |\mathbf{z_1}|.(\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta_1} + \mathbf{i.sen}\,\boldsymbol{\theta_1}\,) \\ \mathbf{z_2} = |\mathbf{z_2}|.(\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta_2} + \mathbf{i.sen}\,\boldsymbol{\theta_2}\,) \end{cases} ; \quad \textbf{temos:}$$

$$\mathbf{z_3} = \mathbf{z_1.z_2} = [|z_1|.(\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\,\theta_1\,)].[|z_2|.(\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\,\theta_2\,)] =$$

$$= |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\,\theta_1\,).(\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\,\theta_2\,) =$$

$$= |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + \cos\theta_1.\ i\,\text{sen}\,\theta_2 + i\ \text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\,\theta_1.\ i\,\text{sen}\,\theta_2\,) =$$

$$= |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 + i^2\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2\,) =$$

$$= |z_1|.|z_2|.[\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i(\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{z_3} = \mathbf{z_1.z_2} = |\mathbf{z_1}|.|\mathbf{z_2}|.[\mathbf{cos}\,(\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2}) + \mathbf{i\,sen}\,(\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2})].$$

DICA:

Para multiplicar dois números complexos na forma trigonométrica, nós multiplicamos os módulos e somamos os argumentos. Esta ideia pode ser estendida para a multiplicação de mais de dois números complexos.

EXEMPLO

Sejam os complexos $\begin{cases} \mathbf{z_1} = \mathbf{10.(\,cos\,30^o + i\ sen30^o\,)} \\ \mathbf{z_2} = \mathbf{7.(\,cos\,48^o + i\ sen\,48^o\,)} \end{cases}$ determine $\mathbf{z_1.z_2}$.

Resolução

Temos $\begin{cases} |z_1| = 10 \\ \theta_1 = 30^o \\ |z_2| = 7 \\ \theta_2 = 48^o \end{cases}$ portanto

$$z_1 . z_2 = |z_1| . |z_2| . [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i . \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] =$$

$$= 10 . 7 . [\cos(30^o + 48^o) + i . \text{sen}(30^o + 48^o)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z_1 . z_2 = 70 . [\cos 78^o + i \text{ sen } 78^o] .$$

Divisão

Sejam os complexos não nulos:

$$\begin{cases} z_1 = |z_1| . (\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1) \\ z_2 = |z_2| . (\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2) \end{cases}$$

Analogamente à multiplicação:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} . [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i . \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

DICA:

Para dividir dois números complexos na forma trigonométrica, nós dividimos os módulos e subtraímos os argumentos. Esta ideia pode ser estendida para divisão de mais de dois números complexos.

EXEMPLO

Sejam os complexos $\begin{cases} \mathbf{z_1 \ = \ 7.(\ cos\ 48^o \ + \ i \ \ sen\ 48^o\ )} \\ \\ \mathbf{z_2 \ = \ 10.(\ cos\ 30^o \ + \ i \ \ sen 30^o \ \ )} \end{cases}$, determine $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução

Temos $\begin{cases} \mathbf{|z_1| = 7} \\ \mathbf{\theta_1 = 48^o} \\ \mathbf{|z_2| = 10} \\ \mathbf{\theta_2 = 30^o} \end{cases}$ portanto:

$$\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] =$$

$$= \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}.[\cos(\mathbf{48^o - 30^o}) + i.\text{sen}(\mathbf{48^o - 30^o})] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}.[\mathbf{\cos 18^o + i\ sen\ 18^o}]\ .$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Matemática* – Ciência e aplicações - Ensino Médio - 3º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do segundo grau* - 3º ano. São Paulo: Atual, 2001.

KIYUKAWA, Rokusaburo. *Os elos da Matemática.* Ensino Médio - 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2010.