MATEMÁTICA

UNINOVE

Módulo - III

Geometria Espacial Métrica

Cálculos de áreas e volumes de pirâmides

Objetivo: Estudar as pirâmides e seus elementos e calcular suas áreas da base, lateral e total e seus volumes.

Este material faz parte da UNINOVE. Acesse atividades, conteúdos, encontros virtuais e fóruns diretamente na plataforma.

Pense no meio ambiente: imprima apenas se necessário.

Além dos prismas, as pirâmides constituem outro importante tipo de poliedro. Estudaremos definição formal de uma pirâmide, seus elementos, cálculo de áreas e volumes.
As fotos a seguir são do pátio do Museu do Louvre, em Paris. A pirâmide de vidro, que funciona como entrada principal, é um projeto do arquiteto chinês Ming Pei e foi inaugurada em 1988. Ela está situada na praça central do museu, a Cour Napoléon.

Na verdade, tem-se um conjunto composto por cinco pirâmides: a principal, que dá acesso às entradas para as três alas do museu, três pequenas pirâmides que a ladeiam a grande pirâmide e uma pirâmide invertida (La Pyramide Inversée), que tem a função de uma claraboia, em um centro comercial subterrâneo, em frente ao museu.

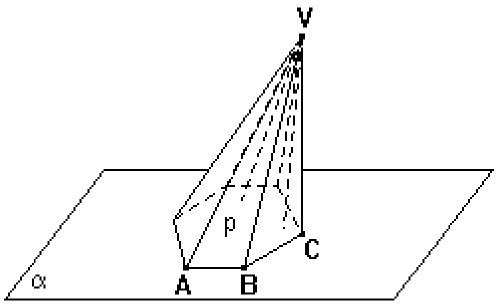
A pirâmide principal é uma estrutura com a forma de pirâmide quadrangular regular cujo lado da base mede 35 metros e altura de 21 metros. É formada por uma estrutura de vidro formada por 603 losangos e 70 triângulos.

Em dezembro de 2011, a pirâmide do Museu do Louvre foi iluminada com a tecnologia de luz LED, caracterizada por ser mais ecológica e muito mais eficiente em termos energéticos. Este sistema permitirá uma redução de 73% no consumo elétrico.


Vamos calcular a área lateral da pirâmide do Louvre?

Pirâmides

Consideremos um plano α, p um polígono contido em α e V um ponto não pertencente a α. Chama-se pirâmide o poliedro formado por todos os segmentos de reta, tais que uma de suas extremidades é um ponto de polígono p e a outra extremidade é o ponto V.



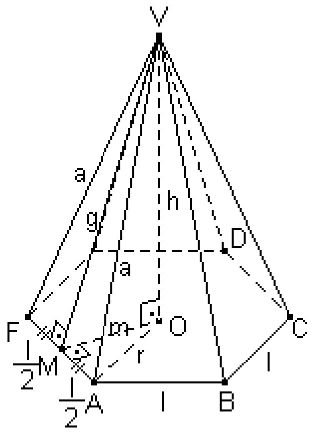
Elementos

Numa pirâmide, consideramos os seguintes elementos:

- O ponto V é o vértice da pirâmide.
- O polígono p é a base.
- Os triângulos AVB, BVC, etc. são as faces laterais.
- Os lados AB , BC , etc. do polígono da base, são as arestas da base.
- Os segmentos AV, BV, CV , etc. são as arestas laterais.
- A distância entre o vértice V e o plano α é a altura da pirâmide (h).

Relações importantes das pirâmides regulares

O apótema[1] do polígono da base ($\overline{OM}$) é chamado de **apótema da base (m)** e a altura de uma face lateral (altura relativa à base de um triângulo isósceles) é chamada **apótema da pirâmide (g).**



- No triângulo retângulo MOA, temos: $r^2 = m^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

- No triângulo retângulo MVO, temos: $g^2 = h^2 + m^2$

- No triângulo retângulo MVA, temos: $a^2 = g^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Áreas da superfície de uma pirâmide

Do mesmo modo que nos prismas, definimos:

- A área da base (A_b) da pirâmide é a área do polígono da base.

- A área lateral (A_l) da pirâmide é a soma das áreas das faces laterais (triângulos).

- A área total (A_t) é a soma da área lateral com a área da base: $A_t = A_l + A_b$.

EXEMPLOS

1) A pirâmide hexagonal regular a seguir tem aresta da base **l** e aresta lateral **a**. Calcule a sua área total.

Solução: A base da pirâmide é um hexágono regular de lado **l**,

portanto a área da base é dada por: $A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$.

$A_i = 6$. (Área do triângulo)

$$A_1 = 6\,.\left(\frac{1 \cdot g}{2}\right)$$

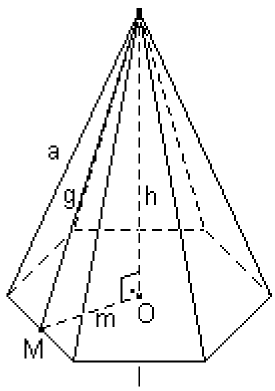
$$A_1 = 3.1.\,g$$

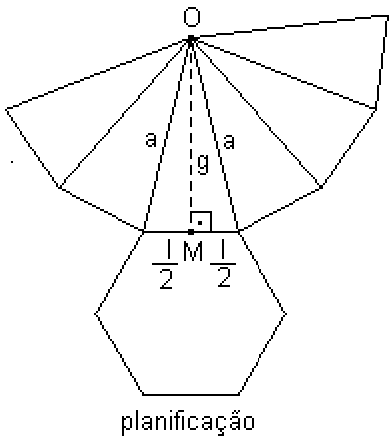
E sua área total por:

$$A_t = A_t + A_b$$

$$A_t = 3.1.\,g + \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_t = 3l\left(g + \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$



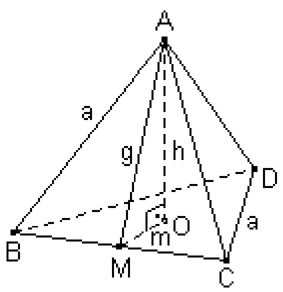


2) A pirâmide a seguir é um tetraedro regular de aresta **a**. Determinemos a sua área total, que é a soma das áreas dos 4 triângulos equiláteros que constituem o tetraedro regular.

Solução:

$$A_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = a^2\sqrt{3}$$



Podemos também determinar a altura (h) do tetraedro regular:

Como vimos, o apótema da base (**m**) é $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Como $a^2 = g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, então temos:

$$g^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, como $g^2 = h^2 + m^2$, temos:

$$\frac{3a^2}{4} = h^2 + \frac{3a^2}{36}$$

$$h^2 = \frac{24a^2}{36}$$

$$h = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

3) Calcule a altura, a área da base, a área lateral e a área total de uma pirâmide triangular regular de aresta da base 6 cm e aresta lateral 5 cm.

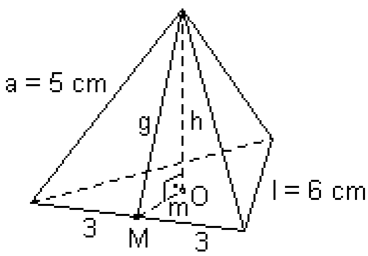
Solução

Como vimos anteriormente:

$$m = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$m = \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$m = \sqrt{3}\,\text{cm}$$



$$a^2 = g^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$g^2 = 5^2 - 3^2$$

$\mathrm{g} = 4 \text{ cm}$
$\bullet\ \mathrm{g}^2 = \mathrm{h}^2 + \mathrm{m}^2$
$\mathrm{h}^2 = 16 - 3$
$\mathrm{h} = \sqrt{13} \text{ cm}$

Logo, a altura da pirâmide mede $\sqrt{13}$ cm.

Como a pirâmide é regular, a sua base é um triângulo equilátero e, portanto:

$$A_b = \frac{6^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

As faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Logo:

$\mathrm{A}_l = 3.$ (Área do triângulo)

$$A_l = 3 \cdot \left(\frac{l \cdot \mathrm{g}}{2}\right)$$
$$A_l = \frac{3 \cdot 6 \cdot 4}{2}$$
$$A_l = 36 \text{ cm}^2$$

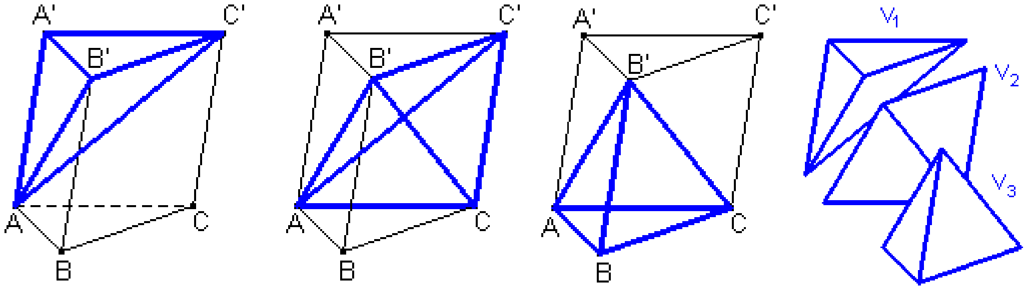
E a área total é dada por:

$$\mathrm{A_t} = \mathrm{A_1} + \mathrm{A_b}$$
$$\mathrm{A_t} = 36 + 9\sqrt{3}$$
$$\mathrm{A_t} = 9\left(4 + \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$$

Volume de uma pirâmide

Para obtermos o volume de uma pirâmide qualquer, vamos primeiramente calcular o volume de uma pirâmide triangular. Para isso, usaremos o seguinte teorema: "Pirâmides com áreas das bases iguais e que têm mesma altura, possuem o mesmo volume".

Consideremos, então, o prisma triangular a seguir, de volume V, que foi decomposto em três pirâmides triangulares de mesma área da base e mesma altura.



Se V_1, V_2 e V_3 são respectivamente, os volumes das três pirâmides triangulares, pelo Teorema citado temos que:

$$V_1 = V_2 = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Como V_{prisma} = área da base x altura, temos que:

$$V_{pirâmide\ triangular} = \frac{área\ da\ base\ x\ altura}{3}$$

Mas e o volume das outras pirâmides?

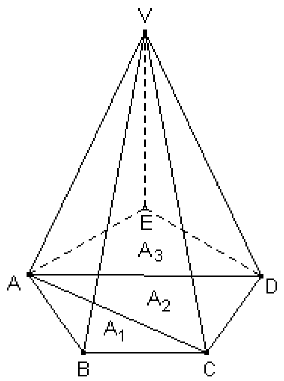
Para uma pirâmide qualquer, podemos dividir o polígono da base em triângulos justapostos por meio de diagonais e, assim, a pirâmide fica dividida em pirâmides triangulares de mesma altura. Se a base da pirâmide tem área A_b e foi dividida em n triângulos de áreas A_1, A_2, ..., A_n, então $A_b = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \cdots + \frac{1}{3}A_nh$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}\underbrace{(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)}_{A_b}.h$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_b \times h$$



Pirâmide pentagonal dividida em 3 pirâmides triangulares: VABC, VACD e VADE.

EXEMPLOS

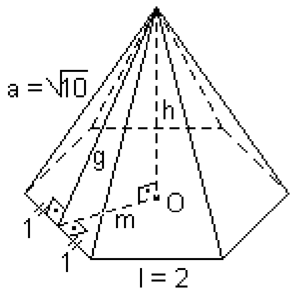
1) Calcular o volume do tetraedro regular de aresta **a**.

Solução

Como vimos, $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ e $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Assim,

$$V = \frac{1}{3}A_b \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}$$
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

2) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular que tem aresta da base 2 cm e aresta lateral $\sqrt{10}$ cm.



Solução

Como já vimos:

$$\mathrm{A_b} = \frac{3\mathrm{I}^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 2^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \ \mathrm{cm}^2$$
$$\mathrm{m} = \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \mathrm{cm}$$

$$\mathrm{a}^2 = \mathrm{g}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\mathrm{g}^2 = 10 - 1 = 9$$
$$\mathrm{g} = 3\ \mathrm{cm}$$
$$\mathrm{g}^2 = \mathrm{h}^2 + \mathrm{m}^2$$
$$\mathrm{h}^2 = 9 - 3 = 6$$
$$\mathrm{h} = \sqrt{6}\ \mathrm{cm}$$

Logo, o volume da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3} \mathrm{A_b} . \mathrm{n}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$$

$$V = 6\sqrt{2} \quad \mathrm{cm}^3$$

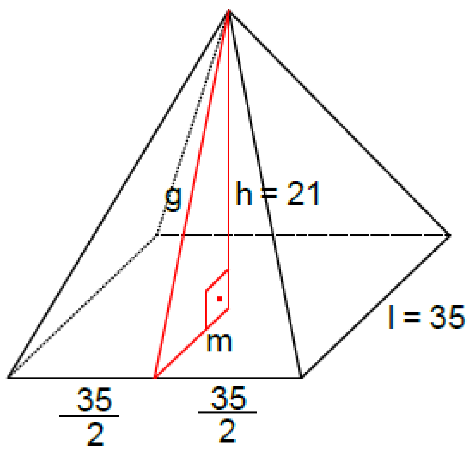
Vamos agora voltar ao problema apresentado anteriormente e responder à pergunta proposta!

Queremos calcular a área lateral de uma pirâmide regular de base quadrada.

Como a pirâmide é reta, a área lateral é a soma de 4 triângulos isósceles e congruentes.

Primeiro precisamos calcular a altura de cada triângulo isósceles, o apótema da pirâmide (g).

O polígono da base é um quadrado, portanto o apótema da base (m) é dado por: $\mathrm{m} = \frac{l}{2} = \frac{35}{2}$.



$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$g^2 = 21^2 + \left(\frac{35}{2}\right)^2$$

$$g^2 = 441 + \frac{1225}{4}$$

$$g^2 = \frac{2989}{4}$$

$$g^2 = \frac{2989}{4}$$

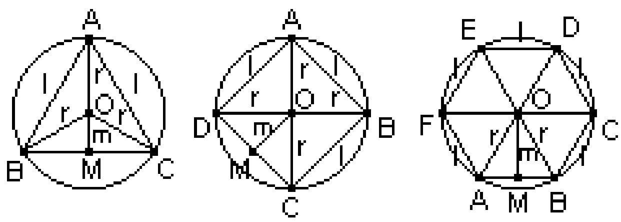
$$g = \sqrt{\frac{2989}{4}} = \frac{7\sqrt{61}}{2}$$

Assim, a área lateral é:

$$A_l = 4$$
$$A_l = 4 \cdot \left(\frac{l \cdot g}{2}\right)$$
$$A_1 = 2.1.g$$
$$A_1 = 2.35.\frac{7\sqrt{61}}{2} = 245\sqrt{61} \cong 1913{,}5\ \mathrm{m}^2$$

Saiba mais

Apótema[1]: É o segmento cujos extremos são o centro do polígono regular (O) e o ponto médio de um de seus lados (M).



$$m = \frac{r}{2} \quad ou \quad m = \frac{l}{2} \qquad m = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$m = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

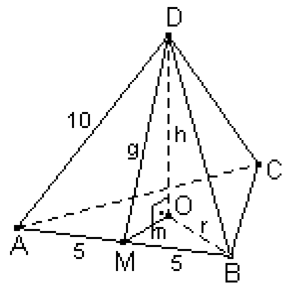
EXEMPLO

1. Um tetraedro regular tem arestas medindo 10 cm. Calcule:

a) O apótema da pirâmide (g).

b) O apótema da base (m).

c) A altura da pirâmide (h).



Solução

Consideremos o tetraedro da figura.

a) No triângulo MDA, temos:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{g}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$10^2 = g^2 + 5^2$$
$$g^2 = 100 - 25 = 75$$
$$g = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\ \text{ cm}$$

b) $m = \frac{1\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6}$

$$m = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$$

c) No triângulo MDO, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2$$
$$75 = h^2 + \frac{25}{3}$$
$$h^2 = 75 - \frac{25}{3} = \frac{200}{3}$$
$$h^2 = \sqrt{\frac{200}{3}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}\,cm$$

Agora é a sua vez! Resolva os exercícios, verifique seu conhecimento e acesse o espaço online da UNINOVE para assistir à videoaula referente ao conteúdo assimilado.

REFERÊNCIAS:

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar* – v. 10: Geometria Espacial: posição e métrica. São Paulo: Atual, 2000.

MELLO, J. L. P. *Matemática, volume único*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.