

# Informe de Métodos Numéricos

## Tarea 2

Leonardo Leiva: RUT 18.668.622-5

### 1. Introducción

El presente informe muestra la resolución numérica de dos ecuaciones: la primera corresponde al oscilador de Van der Pol, la segunda es sistema de Lorentz. Se usarán condiciones iniciales particular. El desarrollo se dividirá en dos partes, una para cada ecuación.

### 2. Oscilador de Van der Pol

#### 2.1. Caracterización del Problema

En esta sección se describirá el proceso para resolver la ecuación del oscilador de Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt} \quad (1)$$

donde  $k$  es una constante elástica y  $\mu$  es coeficiente de roce. Para  $absx > a$  el roce amortigua el movimiento, pero si  $absx < a$  se inyecta energía.

Para hacer más fácil el trabajo de la ecuación se usan los cambios de variable  $y = x/a$  y  $s = t/\sqrt{k}$ . Desarrollando y aplicando regla de la cadena para las derivadas y dobles derivadas se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds} \quad (2)$$

donde  $\mu^* = \frac{\mu a}{\sqrt{k}}$  según las constantes de la ecuación anterior. A partir de aquí se hablará de  $t$  y de  $s$  como equivalentes por comodidad.

Se resolverá la ecuación (2) mediante el método de Runge-Kutta de tercer orden. Se implementará este método con un algoritmo propio.

#### 2.2. Implementación de Runge-Kutta de Tercer Orden

Se realiza la integración de la ecuación con el parámetro  $\mu^* = 1,622$ . Se realizará desde un tiempo  $t_0 = 0$  hasta que se cumplan, aproximadamente 10 períodos, es decir  $t_f = 20\pi$ . Entre el tiempo inicial y el final se tomaron 5000 valores equi-espaciados. El paso es el tiempo

final dividido en el total de valores tomados.

Para resolver el problema se usaron dos pares de condiciones iniciales:

$$\frac{dy}{ds} = 0; y = 0,1 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{ds} = 0; y = 4,0 \quad (4)$$

En ambos casos se usó el mismo método y solo se cambiaron los valores iniciales, además de tomar listas nuevas para ingresar los valores a medida que se iba iterando el proceso. De esta manera quedaban los vectores con los valores de  $y(t)$  y  $\frac{dy(t)}{dt}$  que luego son graficados. Sus valores se pueden ver en la figura 1 que está más adelante.

Para el proceso de integración en sí misma se define el sistema de ecuaciones para integrar de manera que

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \quad (5)$$

$$\frac{df}{dt} = -y - \mu^*(y^2 - 1)f(t) \quad (6)$$

Esta relación se define como una función de dos variables  $(y(t), f(t))$  que da como resultado las derivadas de ambas componentes según las ecuaciones (5) y (6). Para lo que viene a continuación se introducirá:

$$g(t) = \left( \frac{dy}{dt}, \frac{df}{dt} \right) \quad (7)$$

Para realizar la integración se usó que, de acuerdo al método de runge kutta una integral se puede aproximar por:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(y(t), f(t)) \simeq g(t_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (8)$$

Donde  $t_n$  y  $t_{n+1}$  serían los pasos  $n$  y  $n + 1$  del proceso y los valores de  $k$  son:

$$k_1 = hg(y_n, f_n) \quad (9)$$

$$k_2 = hg(y_n + k_1^1/2, f_n + k_1^2/2) \quad (10)$$

$$k_3 = hg(y_n - k_1^1 + 2k_2^1, f_n - k_1^2 + 2k_2^2) \quad (11)$$

Notar que  $g(y, f)$  entrega 2 componentes, por lo tanto, cada  $k$  tiene dos componentes. Asimismo,  $k_i^j$  corresponde a la componente  $j$  del  $i$ -ésimo valor de  $k$  (con  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2$ ). En la práctica se ocupó la siguiente relación (que corresponde a reescribir la ecuación (8)):

$$g_{n+1} = g(t_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (12)$$

El desarrollo de este método se encuentra en el archivo 'p1.py'. Los gráficos obtenidos se encuentran en las figuras (1) y (2).

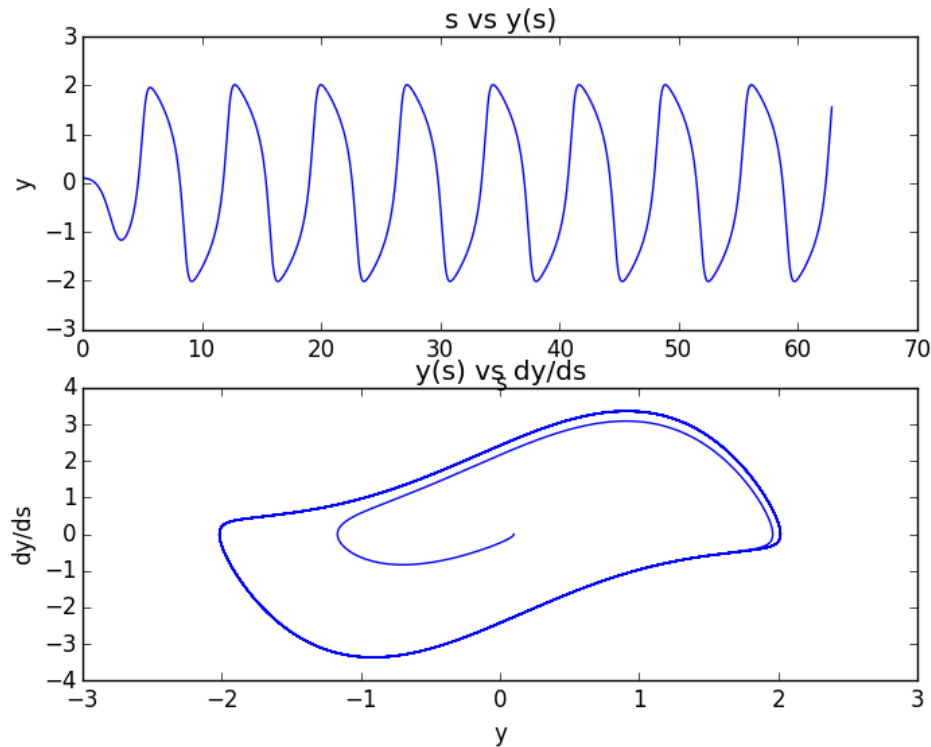


Figura 1: Soluciones de la Ecuación de Van der Pol para condiciones iniciales  $y = 0,1$  y  $\frac{dy}{ds} = 0$ . El primer gráfico corresponde a  $s$  vs  $y(s)$  y el segundo a  $y(s)$  vs  $\frac{dy}{ds}$ .

### 2.3. Análisis de los Resultados

Se puede ver en los gráficos de  $s$  vs  $y(s)$  (de las figuras (1) y (2)) diferencia importante se debe a la condición inicial, donde se observa que antes de comenzar las oscilaciones, primero debe estabilizarse el valor de  $y(s)$ . Esto se nota más en el gráfico de condición inicial  $y(0) = 4$ . También se puede observar que los peaks de  $y(s)$  no se encuentran en los mismos valores de  $s$  debido al inicio fuera del equilibrio desplaza el inicio de la oscilación. Se verificó (Cambiando los valores de la condición inicial) que para valores más grandes de  $y(0)$  el sistema tarda más en entrar al equilibrio (se probó para algunos valores hasta  $y(0)=10$ , donde se observa esta tendencia). Se nota que la forma de la oscilación en el equilibrio muy similar en cada caso, tal como se observa en las figuras mencionadas.

Paralos graficos  $y(s)$  vs  $\frac{dy}{ds}$  se observa solo diferencia en torno a los valores iniciales, que correspondería al  $y$  cercano a 0 de la figura (1) y el  $y = 4$  en la figura (2). Para el primer caso se observa que la partícula de a poco se acerca a la trayectoria (en el espacio de fase) estable, mientras que en el segundo caso se acerca directamente a la curva que describe en el estado estacionario y una vez que la alcanza se mantiene ahí.

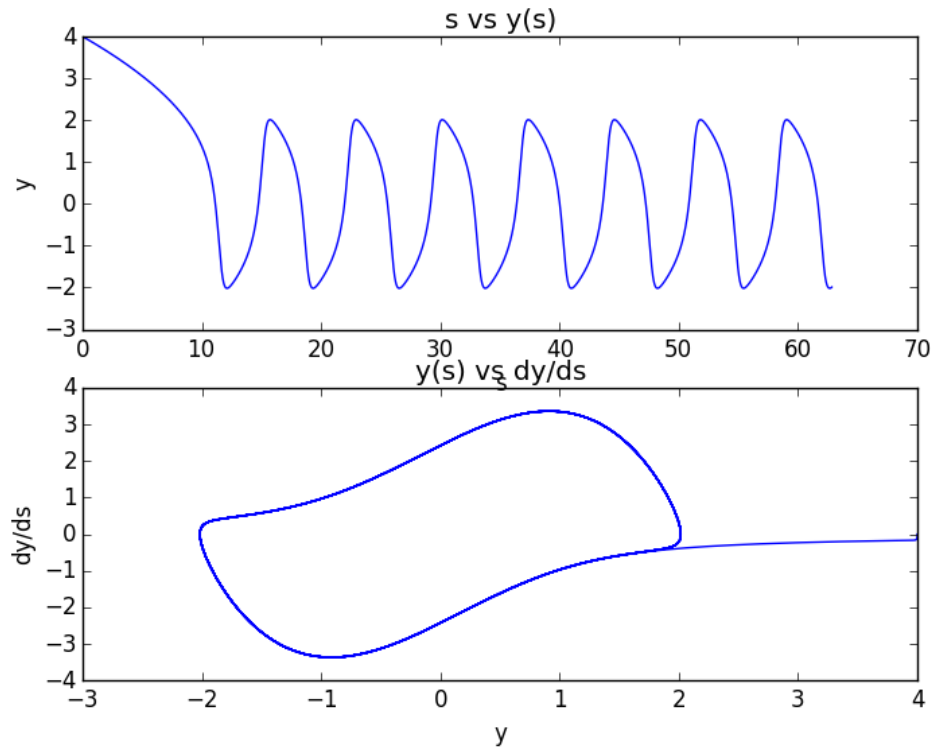


Figura 2: Soluciones de la Ecuación de Van der Pol para condiciones iniciales  $y = 4$  y  $\frac{dy}{ds} = 0$ . El primer gráfico corresponde a  $s$  vs  $y(s)$  y el segundo a  $y(s)$  vs  $\frac{dy}{ds}$ .

#### 2.4. Conclusiones: Oscilador de Van der Pol

Se observa que, mediante los métodos numéricos se puede obtener una aproximación razonable del comportamiento de las soluciones de la ecuación (5) y (6). Dichas soluciones se notan muy estables luego de alcanzar el equilibrio dentro de los rangos de valores observados. El método implementado muestra ser razonable en cuanto a las soluciones que entrega. Se condicen con la información que se puede encontrar en internet<sup>[1]</sup> y resulta ser una herramienta muy útil para ecuaciones que no necesariamente podrían tener una solución analítica.

### 3. Sistema de Lorentz

#### 3.1. Caracterización del Problema: Atractor de Lorentz

En esta sección se describirá el proceso para resolver el sistema de ecuaciones de Lorentz con el método de Runge-Kutta de orden 4 con algún algoritmo pre-hecho que se puede encontrar en las librerías (en particular, se usará `scipy.integrate`).

El sistema de ecuaciones mencionado corresponden a 3 EDO's de primer orden, las cuales

se muestran a continuación:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x) \quad (13)$$

$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y \quad (14)$$

$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z \quad (15)$$

Para esta ocasión se resolverá el Atractor de Lorentz, que se obtiene al usar los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 28$ . El problema se resolverá de acuerdo a las condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0) = (5, 8, -1)$ . Se escogieron dentro de todas porque se pudo verificar que para los valores que se probaran, la solución convergía a los atractores y con estos parámetros se notaba bastante bien este comportamiento.

### 3.2. Metodología

Primero que todo se definieron las funciones analíticas para cada EDO. Luego se establecieron las condiciones iniciales. Se usó el método visto en clases con objetos y clases para integrar (el resolutor 'r'). Luego se realizó una iteración para obtener los valores numéricos de las soluciones. Se integró desde  $t_0 = 0$  hasta  $t_f = 80$  y se dividió el intervalo en 10000 valores para obtener una solución precisa.

Para la integración se definió un paso mínimo porque si no, lanzaba una advertencia de que el paso se volvía muy pequeño. De cualquier manera el programa funcionaba y entre los dos gráficos obtenidos no había demasiada diferencia.

Se cambió el uso de listas por arreglos y se optimizó la manera de agregar los nuevos valores a los arreglos que contienen las variables. Se usó el método adjunto en el archivo '3D.py' para graficar.

Este proceso se encuentra en el archivo 'p2.py'. Los resultados obtenidos se presentan en la figura (3).

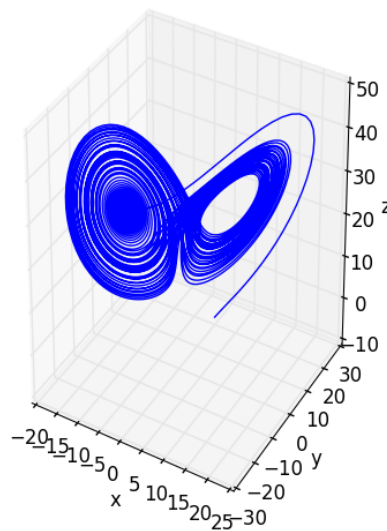


Figura 3: Soluciones del Sistema de Lorentz graficadas en 3 Dimensiones.

### 3.3. Conclusiones: Sistema de Lorentz

Se logra obtener la solución de un sistema de EDO's mediante herramientas numéricas y se grafican, obteniendo resultados similares a los que se pueden encontrar en internet<sup>[2]</sup>. Se observa que para diversos valores de las condiciones iniciales el sistema se estabiliza en las órbitas observadas en la figura (3). Esta observación se realizó cambiando los parámetros iniciales, pero no se guardaron los datos de dichos experimentos.

Otras observaciones que se hicieron fue el comportamiento del sistema a través del tiempo cambiando el tiempo final de integración. Se observa que para tiempos pequeños el sistema se mueve en las órbitas de la izquierda y que hasta aproximadamente  $t = 35$  no se forma la segunda órbita. Para tiempos mucho más grandes que el tiempo usado ( $t = 80$ ) la única diferencia observada es que las órbitas se vuelven mucho más densas, pero se concluye que no es información tan importante, por lo que basta graficar para valores de  $t$  mas pequeños (como el escogido).

Se observan algunos comportamientos extraños de las órbitas al cambiar las indiciones iniciales, extendiéndose un poco mas o abriéndose un poco mas, pero lo que se mantiene fijo es que luego de un tiempo algunas iteraciones, el sistema alcanza un equilibrio muy parecido a las órbitas graficadas.

Se puede concluir que el código es más óptimo y compacto que los anteriormente desarrollados por la implementación de nuevos métodos construcción de los vectores a graficar.

## 4. Conclusiones Generales

Se concluye que los métodos numéricos ayudan a entender sistemas útiles y que se observan en la realidad, pero cuyas soluciones no pueden ser obtenidas de manera analítica. Se muestra un avance (no se sabe si es apropiado o insuficiente) en la estructuración de los códigos. Se eliminan algunos procedimientos innecesarios o que pueden ser realizados de mejor manera (como el agregar objetos en listas de forma burocrática, como aún se observa en la parte 1 de esta tarea). Se busca un equilibrio entre usar variables con nombres compactos pero que sea evidente ver de que se trata. Se requiere un feed-back para saber si debería ser más explícito el trato de variables o parámetros o está bien la forma compacta. Queda pendiente verificar si se podría haber definido el sistema de ecuaciones mediante la función 'lambda x:'. Se intentó, pero producía error al integrar, o no integraba.

## Referencias

- [1] [https://es.wikipedia.org/wiki/Oscilador\\_de\\_van\\_der\\_Pol](https://es.wikipedia.org/wiki/Oscilador_de_van_der_Pol) Oscilador de Van der Pol
- [2] [https://es.wikipedia.org/wiki/Atractor\\_de\\_Lorenz](https://es.wikipedia.org/wiki/Atractor_de_Lorenz) Atractor de Lorentz