Informe de Métodos Numéricos
Tarea 2

Leonardo Leiva: RUT 18.668.622-5

1. Introducción

Este informe se divide en dos partes: la primera se centra en resolver algunas preguntas e ideas sobre un tutorial desarrollado por Software Carpentry. La segunda parte es el análisis del comportamiento de órbitas planetarias que inicialmente siguen un potencial de la ley de Gravitación y luego se agrega una correción de acuerdo a la ley de Relatividad General.

2. Tutorial de Software Carpentry

El tutorial busca enseñar a científicos e ingenieros a programar siguiendo el concepto "to get more done in less time, and with less pain". En el tutorial se habla de algunos coneptos que serán tratados a continuación.

2.1. Escribir main drive

Escribir el main driver refiere a escribir las partes generales del programa en un inicio y luego llenar las partes. Esto permite una estructuración del trabajo de manera que es más fácil seguir trabajandolo y facilita a otros usuarios leer el código y entenderlo.

2.2. La función mark$_{f}illed$

La función mark$_{f}illedbuscatrescosas : laprimera, verquexeycumplanlascondicionesquerequiereelp$

2.3. refactoring

Este es un proceso por el cual se cambia la escritura y estructura del programa en función de mejorar su calidad sin cambiar su funcionalidad ni su comportamiento. Se reescriben algunos métodos para que sean mas genéricos, eficientes o entendibles.

2.4. Implementar Tests

Los tests buscan verificar que estamos usando el buen modelo para resolver el problema, en otras palabras, si construimos el programa correcto. Esto significa que esté libre de bugs. La idea en la práctica es implementar una prueba simple que sepamos claramente cual debería

ser el resultado y verificar que el algoritmo hace lo que esperamos que haga. La prueba puede buscar ser lo más genérica posible para poder realizar varios casos y verificar que le programa funciona realmente como se busca.
La estragia que se usa es la de implementar varios modelos para comparar las etapas del programa. Esto permitirá detectar bugs a tiempo y no después de realizar una publicación.

2.5. Optimización del programa

Las dos ideas importantes de optimización de programa son: se puede transar memoria por tiempo y visceversa según las necesidades del problema a resolver. Esto es útil cuando los programas tardan mucho tiempo y se puede disminuir haciendo que algunos procesos que se pueden repetir queden guardados para su utilización posterior. Esto tendrá costos en la memoria del dispositivo, pero otorgará menor tiempo de trabajo. La misma idea funciona en el sentido contrario. La otra idea es la posibilidad de transar tiempo humano (o esfuerzo al programar) por un rendimiento superior del programa. En este sentido, ideas complejas que no son tan evidentes se pueden implementar para el desarrollo de un problema, lo cual requiere mucho esfuerzo para que quede funcional, pero que puede reducir enormemente los costos en tiempo.

2.6. Lazy Evaluation

Corresponde a obtener datos solo cuando se necesitan. En vez de calcular todos los valores para todas las posiciones de una matriz/cuadricula (por ejemplo), calcularlos solo cuando el programa interactue con ellos. En este sentido, se ahorra el tiempo de calcular todos los valores, donde muchos probablemente nunca los necesitemos dado lo azaroso del problema (en el ejemplo que se plantea). Se aplica para casos en donde no importa cuando sea calculado el valor pedido. Si se necesitan todos los valores para cada iteración esta idea probablemente no sea aplicable (por ejemplo, para resolver algunas EDP's).

2.7. La otra moral

Para escribir un programa rapidamente es necesario escribirlo de manera sencilla. Luego debe ser probado, mejorandolo paso a paso (y probandolo cada tanto). Volver a utilizar los tests anteriores ayudará a comprobar que el trabajo está bien hecho en cada etapa.

3. Planetas Orbitando Alrededor del Sol

3.1. Marco Teórico: 1 planeta orbitando

Se modela el comportamiento de un planeta de masa $m = 1$ al rededor de un sol de masa $M = 1$ bajo la acción de la constante de gravitación .especial" para este sistema $G = 1$ por simplicidad. El potencial se puede escribir como:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + \alpha\frac{GMm}{r^2} \tag{1}$$

La cual corresponde a una rectificación de la Ley de gravitación de Newton, obtenida a partir de una aproximación de la Teoría de Relatividad General.
Considerando que no hay otras fuerzas en el sistema que puedan afectar, podemos usar la relación:

$$F(r) = -\nabla \frac{\partial U(r)}{\partial r} \tag{2}$$

Resolviendo e igualando a la masa por la aceleración y despejando la aceleración, se obtiene la ecuación de movimiento:

$$a_x = x(\alpha \frac{GM}{r^4} - \frac{GM}{r^3}) \qquad a_y = y(\alpha \frac{GM}{r^4} - \frac{GM}{r^3}) \tag{3}$$

con r=$\sqrt{x^2 + y^2}$.

3.2. Implementación de la clase

Se resolverá el problema mediante el uso de clases. Se tiene un esqueleto de lo que contiene la clase y los métodos asociados. En primer lugar se define la Clase Planeta con sus caracterísiticas intrínsecas, las cuales son su posición, su velocidad, su tiempo y α, el parámetro de la ecuación (1) que permite la rectificación. Notar que si $\alpha = 0$ se recupera la Ley de Newton.
Luego se definen la función interna que contiene las ecuaciones que permiten la descripción del movimiento dl planeta. Además, se tiene la función energía total, que calcula la energía de la posición actual del planeta según la suma d su energía cinética y potencial.
Luego se encuentran los pasos para los 3 métodos de integración que se usarán. Cada método obtiene los valores de la posición y velocidad en ambos ejes según los valores actuales y ubica al planeta en la posición nueva, ajustando su velocidad y su tiempo correspondiente. Los métodos se describirán más adelante junto con los resultados.
La clase se encuentra definida en el archivo 'planeta.py'.

3.3. Modo de integración

Para cada método se tomará, en primera instancia $\alpha = 0$ y se analizará el comportamiento de las órbitas y de la energía para cada método.
Para ello se realiza una iteración desde un tiempo $t = 0$ hasta un tiempo suficiente para que alcance a dar, al menos, 5 vueltas en cada sistema. Se usarán las condiciones iniciales que se presentan a continuación:

$$x_0 = 10 \tag{4}$$

$$y_0 = 0 \tag{5}$$

$$v_x = 0 \tag{6}$$

$$v_y = 0{,}25 \tag{7}$$

Donde los primeros 3 eran dados y el último se escogió, teniendo cuidado de que la energía fuera menor que 0, lo cual asegura trayectorias elípticas en la teoría. Se define un paso lo suficientemente pequeño para que los métodos aproximen de la mejor manera una solución

real, junto con tener un tiempo razonable de ejecución.
Luego se procede a realizar una iteración hasta $tf = 1000$, el cual se observó que cumplia que todos los sistemas dieran al menos las 5 vueltas pedidas. En cada iteración se van guardando las posiciones actuales y la energía en cada punto. Se grafica la posición espacial en el plano según los ejes x e y. Cabe decir que, dado un potencial central, se puede demostrar que las órbitas se limitan a un plano por la conservación del momentum angular. Además, se grafica el comportamiento de la energía con respecto al tiempo. Para cada método se adjuntan los gráficos obtenidos.

3.4. Método de Euler

Este método, al igual que los otros, toma la posición y velocidad actual del objeto planeta y los cambia por nuevos en un dt dado. En este caso se usa el método de Euler que consiste en considerar:

$$x_{n+1} = x_n + v_n dt \tag{8}$$

$$v_{n+1} = v_n + a_n dt \tag{9}$$

Donde x_n y v_n corresponden a la posición y velocidad anteriores, mientras que a_n se obtiene por las ecuaciones de movimiento. Ambas ecuaciones se expresan tanto para x como para y. Los resultados obtenidos de la integración por este método se encuentran en la figura 1. Se puede observar que las órbitas van haciendose más grandes (dada la posicion inicial dada). Se puede ver un comportamiento extraño en la energía. Dado que no hay disipación, en teoría, el sistema debería conservar la energía siempre en el mismo valor, pero no es lo que se observa. Aunque no es tan grande la variación de energía, es suficiente para afectar claramente la trayectoria del planeta, dado que la velocidad parece estar aumentando más de lo que debería.

3.5. Método de Runge Kutta 4

Este método utiliza una suma de varios coeficientes para obtener la aproximación. Los coeficientes se calculan de la siguiente manera (en cada paso):

$$\vec{k_1} = dt(\vec{f}(t_n, \vec{r_n})) \tag{10}$$

$$\vec{k_2} = dt(\vec{f}(t_n + dt/2, \vec{r_n} + \vec{k_1}/2)) \tag{11}$$

$$\vec{k_3} = dt(\vec{f}(t_n + dt/2, \vec{r_n} + \vec{k_2}/2)) \tag{12}$$

$$\vec{k_4} = dt(\vec{f}(t_n + dt, \vec{r_n} + \vec{k_3})) \tag{13}$$

Para dar el paso se usa:

$$\vec{r_{n+1}} = \vec{r} + \frac{1}{6}(\vec{k_1} + 2\vec{k_2} + 2\vec{k_3} + \vec{k_4}) \tag{14}$$

Los resultados obtenido inicialmente mostraba unas órbitas que iban creciendo bastante rápido, donde cada orbita era muy diferente a la anterior. Se observaba también que eran mucho más numerosas en el mismo tiempo y que la energía varía mucho más rápido que en el caso anterior. Las trayectorias cada vez se acercanban más a hipérbolas, lo cual es

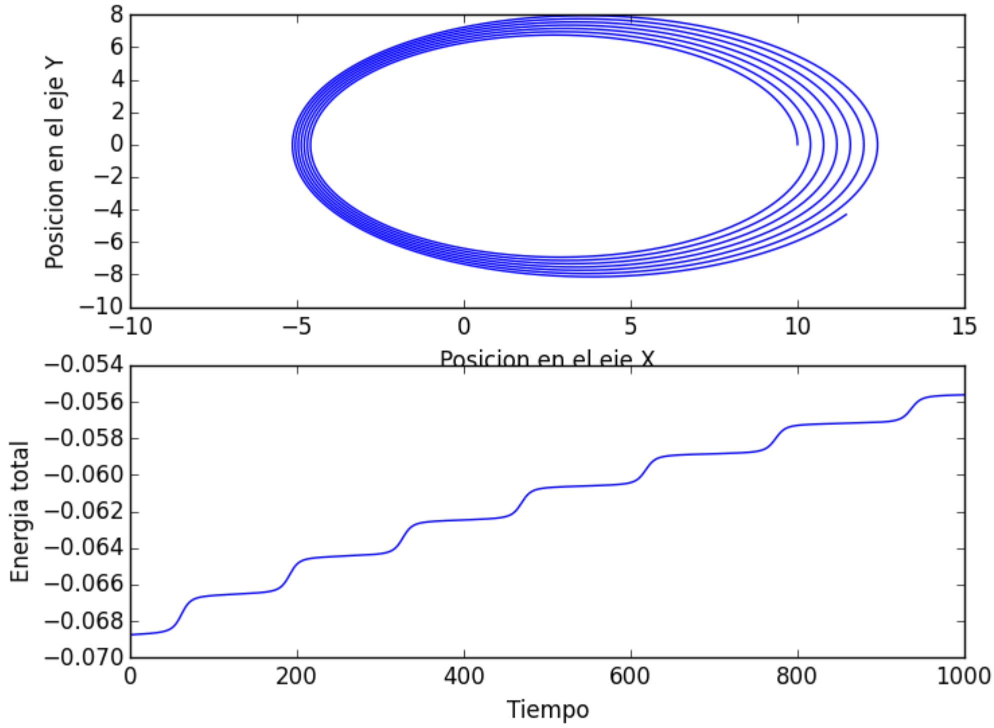

Figura 1: El gráfico de arriba muestra la trayectoria del planeta obtenida por medio del método de Euler. El gráfico de abajo muestra el comportamiento de la energía con respecto al tiempo. $\alpha = 0$.

consistente con el aumento de la energía.
Esto significa que el método no conserva energía (igual que Euler) como podía esperarse, pero comportamiento es demasiado inestable comparativamente, lo que hace pensar en un posible error de implementación del método.
Posteriormente se corrigió el error, el cual consistía en que no se había dividido por 6 en el termino que suma los valores k_i. El resultado correcto se encuentra en la figura (2).
Las órbitas en este caso son mucho más estables que en el anterior y parecen no variar, al igual que las del método de verlet, como se verá más adelante. La diferencia que se nota es el decaimiento de la energía. En sistemas analizados durante poco tiempo (como este caso), este problema no es muy relevante, pero permite visualizar que no se conserva la energía, a diferencia de lo que se espera teóricamente. En ese sentido, es importante saber las características de cada método para considerar su uso en diferentes problemas. El análisis de movimiento planetario mas riguroso sin considerar efectos de disipación requiere conservación de energía, por lo que este método tiene uso limitado.

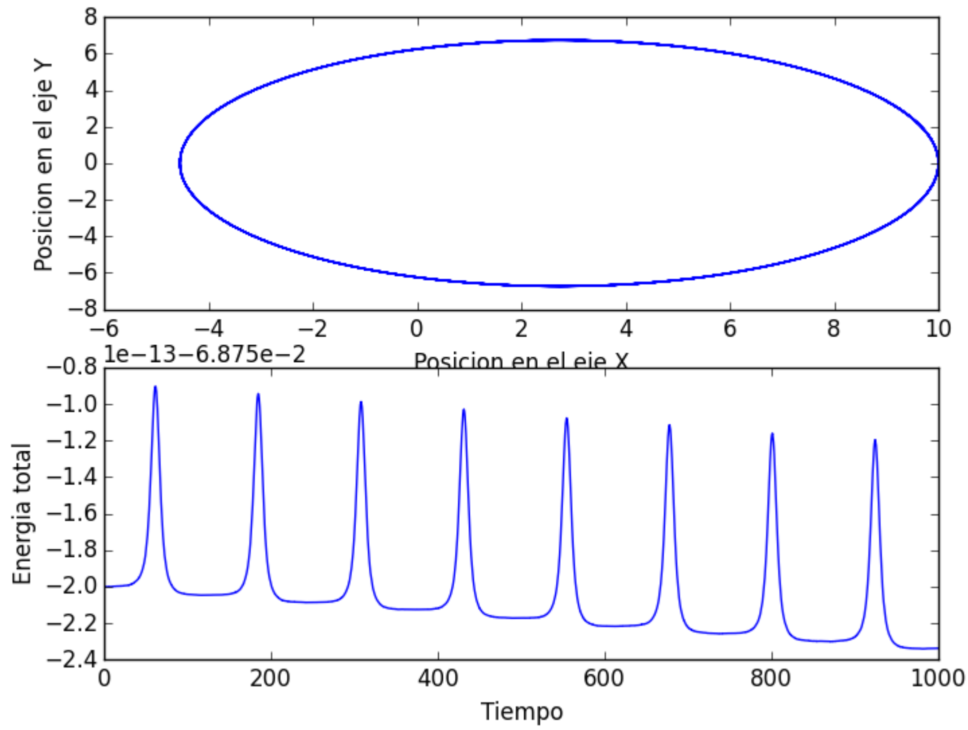

Figura 2: El gráfico de arriba muestra la trayectoria del planeta obtenida por medio del método de Runge-Kutta 4. El gráfico de abajo muestra el comportamiento de la energía con respecto al tiempo. $\alpha = 0$.

3.6. Método de Verlet

El método de verlet tiene ciertas ventajas en su construcción, ya que está hecho para que conserve la energía, lo cual permitirá obtener una solución más fidedigna de acuerdo al análisis teórico del problema.
Este método permite obtener directamente la posición integrando la aceleración con los 2 pasos anteriores, o, en sus variantes, con la posición y velocidad anterior. El segundo método es el que se implementó:

$$x_{n+1} = x_n + v_n dt + a_n dt^2 \tag{15}$$

Donde x_n y v_n son la posición y velocidad anterior y a_n se obtiene por las ecuaciones de movimiento. Se aclara que este proceso se desarrolla para x e y paralelamente.
Para obtener la velocidad nueva se usa el nuevo valor de x en la ecuación de movimiento y la aceleración obtenida a_{n+1} se usa en la ecuación:

$$v_{n+1} = v_n + (a_n + a_{n+1}) dt/2 \tag{16}$$

Los resultados obtenidos para este método se encuentran en la figura (3). Se observa que las órbitas son muy estables comparadas con los otros sistemas. Teóricamente sabemos que esto es correcto, por lo que podemos decir que Verlet es el método más apropiado en este

caso.
Observamos que la energía tiene variaciones, pero estas son muy pequeñas (están aumentada en dos órdenes de magnitud) y siempre vuelve a un valor similar. Se observa que cada peak ocurre, aproximadamente en un ciclo.

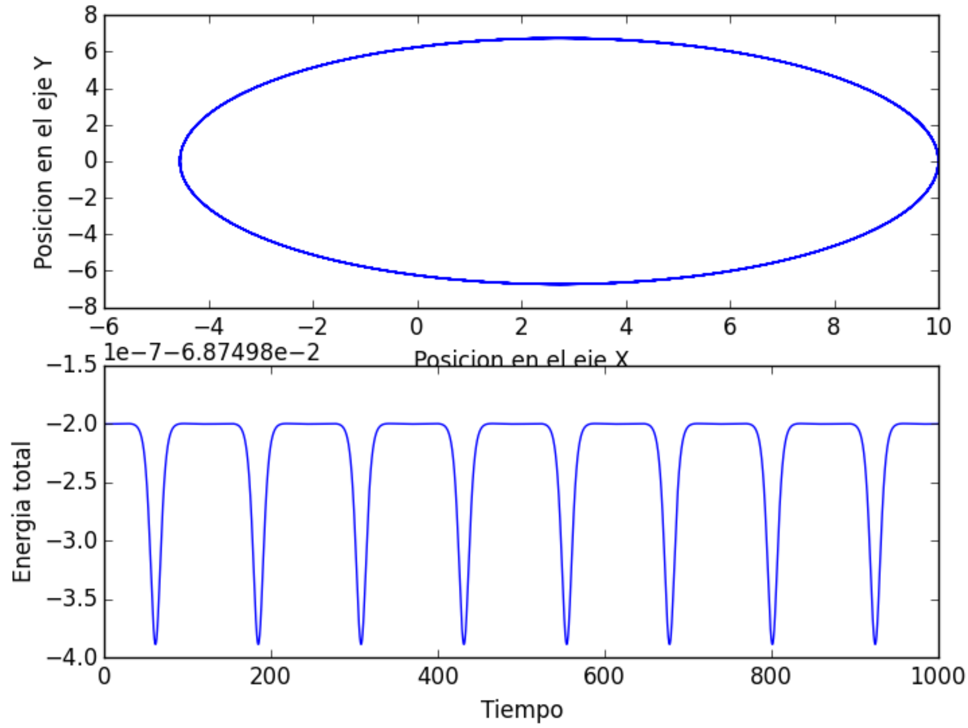

Figura 3: El gráfico de arriba muestra la trayectoria del planeta obtenida por medio del método de Verlet. El gráfico de abajo muestra el comportamiento de la energía con respecto al tiempo. $\alpha = 0$.

3.7. Usando la aproximación de Relatividad

En esta sección se hablará de la resolución del problema considerando la ecuación (1) con $\alpha = 10^{-2{,}622}$, lo cual afectará la forma de las órbitas: ya no se tendrán órbitas cerradas, si no que su mínimo y su máximo varían con el tiempo (van precesando).
Se busca analizar el comportamiento del afelio (en el caso del perihelio el método varía muy poco) mediante la velocidad angular que tendrá este en el tiempo.
Para ello se realizan la iteración igual que en los casos anteriores agregando el cálculo del radio. Se propone mejorar este procedimiendo considerando que el radio se calcula durante las ecuaciones de movimiento. Si se agrega como una característica propia de la Clase planeta (junto con su posición y su tiempo) podría optimizarse el programa con un costo en memoria. Teniendo el arreglo con las posiciones que va tomando el planeta, el tiempo y la distancia al origen se busca por cada periodo el maximo del radio. Cada periodo ocurria en,

aproximadamente 123 - 124 unidades de tiempo.
Mediante una función de numpy (np.where) se puede encontrar el índice del arreglo en donde se encuentra el máximo (aunque se puede hacer para otras condiciones) del radio. Con el índice obtenido se extrae la componente correspondiente de x_{max} e y_{max} y usando relaciones trigonométricas se obtiene el ángulo con respecto al eje x al que se encuentra el máximo:

$$\tan(\phi) = \frac{x_{max}}{y_{max}} \tag{17}$$

Luego se obtiene la velocidad angular tomando la diferencia de ángulos entre máximos sucesivos y dividiendo por la diferencia de tiempos en los que ocurre:

$$\omega = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \tag{18}$$

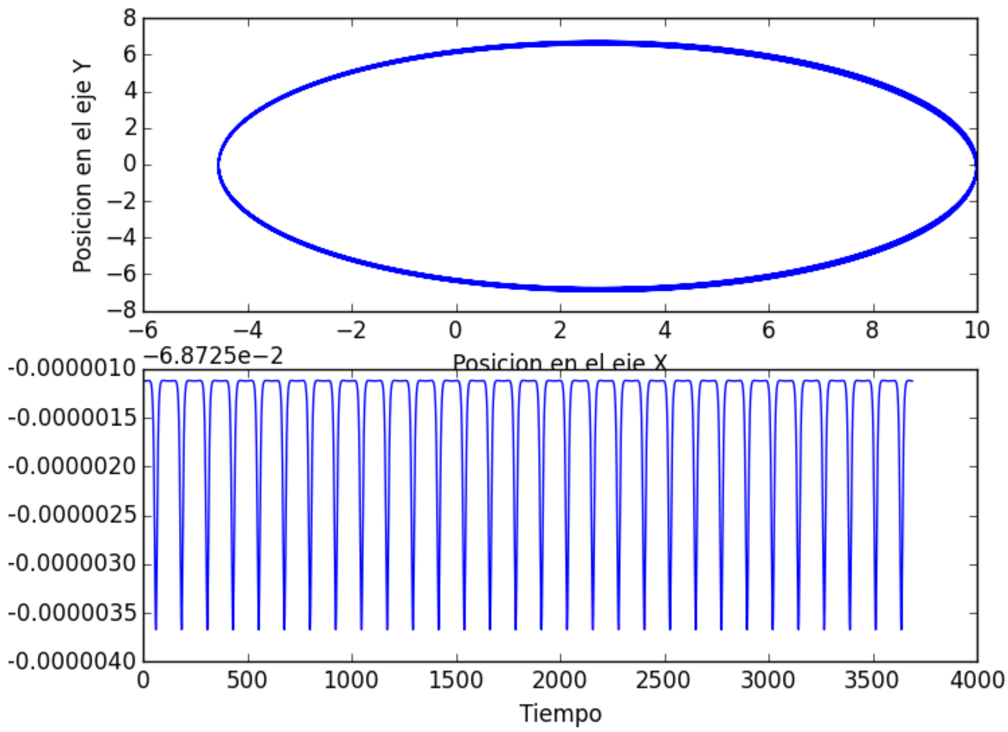

Figura 4: Este es el caso $\alpha = 10^{-2{,}662}$ resuelto mediante verlet. El gráfico de arriba es la trayectoria y el de abajo corresponde a la energía con respecto al tiempo.

El resultado obtenido es $\omega = -8{,}9 * 10^{-4}$. Este resultado tiene una interpretación directa que puede ser observada en la figura 4: Las orbitas varian muy poco. Como se dijo en un comienzo, la rectificación de la ley de gravitación hace que el afelio y el perihelio precesen, pero la precesición depende del valor de α. Se comprobó que mientras mayor sea este valor la precesión es mucho más evidete. Si bien en el gráfico no se logra apreciar muy bien el comportamiento, el resultado de la velocidad angular confirma que existe una variación en las órbitas. En la figura (5) se tiene un acercamiento que permite ver la variación de las órbitas de forma clara. Debido a que α es muy pequeño, la precesión es muy pequeña, pero sabemos que es distinta de 0 dado el gráfico y la velocidad angular calculada.

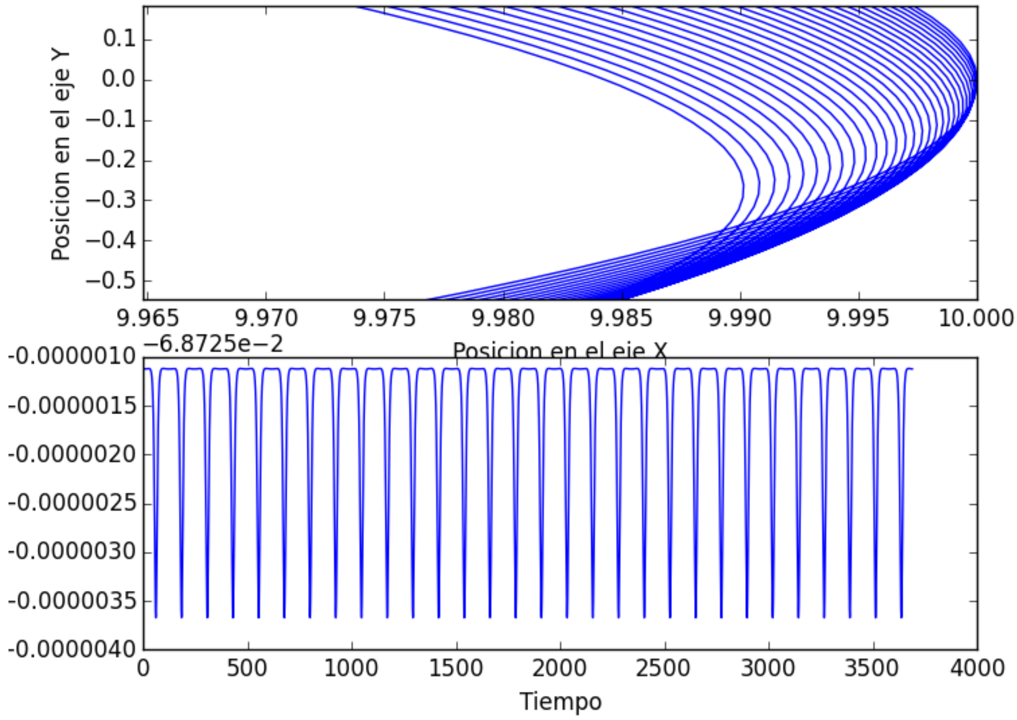

Figura 5: Este es el caso $\alpha = 10^{-2,662}$ resuelto mediante verlet. El gráfico de arriba corresponde al acercamiento de la trayectoria de la figura (4) y el de abajo corresponde a la energía con respecto al tiempo.

4. Conclusiones

Para la primera parte queda pendiente seguir interiorizando los conceptos que ahí se tratan. El proceso de aprender a programar requiere experiencia, como se menciona en el tutorial, por lo que no se puede lograr de inmediato la optimización de todos los programas, como se puede ver en los códigos desarrollados, donde se intentó poner en práctica varios mecanismos para optimizar el programa o hacer el 'refactoring', pero que, a final de cuentas, se optó por usar los métodos antiguos en pro de terminar a tiempo la tarea.

Por otro lado, esta tarea permite observar los comportamientos de 3 métodos de integración y compararlos, pudiendo rescatar las ventajas de algunos sobre otros o descartar alguno por la poca precisión. En específico, queda claro que entre todos los métodos, el de Euler es el menos efectivo. Por otro lado, y mediante un análisis más detallado de los resultados de Runge Kutta 4 y de Verlet se puede saber que el último es más estable con la energía, lo cual se comprueba con la teoría [1].

Una vez claro el comportamiento de los métodos de integración, se escoge el más apropiado para la conservación de energía (verlet) para poner en práctica la utilidad de la ecuación de gravitación rectificada por la relatividad especial. En esta parte se pudo observar el comportamiento de la rectificación y que, para α muy pequeños la variación solo es observable luego de varios periodos. En la práctica esto es importante conocerlo porque dado que la ley de gravitaciónes es válida para ciertos rangos en muchas observaciones, por lo qu α no debe tomar valores muy altos en la práctica, pero a medida que pasa el tiempo, las predicciones no serán muy acertadas, dado que los efectos se van acumulando lentamente (como apenas se ve en el comportamiento despues de 30 órbitas).

Referencias

[1] Métodos Computacionales en Física - Patricio Cordero. Versión 14 de julio 2009.